БИБЛІОТЕКА

Тверского [illegible]

[illegible]	[illegible]		[illegible]	
	Отдѣла.	По [illegible]	Руб.	Коп.
105.	С, V.	3.	1р.	20к.

Поступила: 1 октября 1909 г.

ПРИЛОЖЕНІЯ КЪ ЦИРКУЛЯРАМЪ
по Московскому Учебному Округу,
издаваемыя подъ редакціей Вл. Исаенкова.

Б. Гернъ,
преподаватель Смоленской гимназіи.

НОВОЕ ИЗЛОЖЕНІЕ ЛОГИКИ,

ОСНОВАННОЕ НА ЭЛЕМЕНТАРНЫХЪ КУРСАХЪ

МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ.

Часть I.

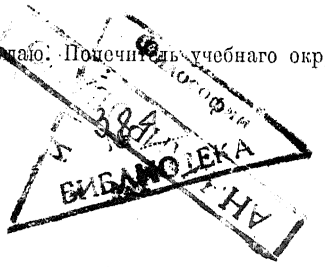
Логика дедуктивная. Логика математики.

МОСКВА.
Типографія Г. Лисснера и А. Гешеля,
прежде Э. Лисснера и Ю. Романа
Воздвиженка, Крестовоздвиж. пер., д. Лисснера
1902.

Пров 38



Печатать разрѣшаю. Попечитель учебнаго округа *П. Некрасовъ*.



ПРЕДИСЛОВІЕ.

Неудовлетворительность постановки преподаванія логики въ среднеучебныхъ заведеніяхъ настолько всѣми признана, что, при обсужденіи проектовъ реформы этихъ заведеній въ московскихъ комиссіяхъ, не только было сдѣлано, но многими поддержано предложеніе—совсѣмъ исключить логику изъ курса гимназій Мы думаемъ, что причина того слабаго впечатлѣнія, которое курсъ логики оставляетъ въ умахъ учащихся, заключается въ схоластической постановкѣ ея преподаванія, оторванности отъ другихъ наукъ гимназическаго курса. Положенія логики излагаются слишкомъ отвлеченно отъ какого бы то ни было реальнаго интереса, иллюстрируются только примѣрами, искусственно составленными и не имѣющими сами по себѣ никакого значенія, а потому учащіеся могутъ развѣ отвлеченно догадываться, что сама наука гдѣ-то, въ невѣдомой имъ сферѣ, имѣетъ какой-то смыслъ и кому-то что-то уясняетъ, но не могутъ сами это почувствовать на дѣлѣ и ясно сознать.

Съ другой стороны, повторительные курсы алгебры и геометріи въ старшемъ классѣ представляютъ почти буквальное повтореніе изученныхъ теоремъ, безъ всякаго обобщающаго элемента, и логическая система науки и методъ доказательства нисколько не уясняются Это дѣлаетъ эти курсы невыносимо скучными и потому безплодными.

Цѣль предлагаемаго курса—устранить эти недостатки: въ методахъ математики и физики дать иллюстраціи положеніямъ ло-

гики и въ этихъ послѣднихъ найти обобщенія и объясненія для первыхъ. Намъ кажется, что онъ содержитъ все наиболѣе существенное изъ гимназическаго курса логики и вмѣстѣ даетъ достаточно полную и связную картину методовъ и логической системы математики, а потому съ успѣхомъ можетъ замѣнить какъ нынѣшній курсъ логики, такъ и повторительные курсы алгебры и геометріи.

A. Логика геометріи.

Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω μοῦ τὴν στέγην.

I. Предметъ и методъ геометріи.

Геометрическія тѣла, фигуры, углы, линіи, точки представляютъ различныя формы протяженія или формы пространства. Геометрія занимается изученіемъ ихъ свойствъ.

По способу, какимъ узнаются въ геометріи свойства пространственныхъ формъ, она относится къ наукамъ дедуктивнымъ или умозрительнымъ, раціональнымъ. Отличіе наукъ дедуктивныхъ отъ другихъ, называемыхъ индуктивными или опытными, то, что въ послѣднихъ всѣ свойства вещей должны быть отдѣльно наблюдаемы, между ними неизвѣстно необходимой связи, которая давала бы возможность по присутствію однихъ свойствъ заключать о другихъ или, какъ говорятъ, выводить (deducere) одни свойства изъ другихъ; тогда какъ въ геометріи доказательства дѣлаютъ ясной для насъ связь между свойствами, мы всѣ свойства какой-нибудь формы выводимъ изъ одного или нѣсколькихъ основныхъ. Такъ, зоологія утверждаетъ, что всѣ млекопитающія имѣютъ позвоночный столбъ, теплую кровь, дышатъ легкими, имѣютъ полную и замкнутую систему кровообращенія, рождаютъ живыхъ дѣтенышей и питаютъ ихъ молокомъ матери, утверждаетъ потому, что въ дѣйствительности каждое изъ этихъ свойствъ наблюдалось у всѣхъ млекопитающихъ, но ни одного изъ этихъ свойствъ нельзя было бы утверждать только потому, что замѣчены другія, если бы оно само не было замѣчено. Ботаника утверждаетъ, что цвѣтокъ гвоздичныхъ состоитъ изъ сросшейся 5-раздѣльной чашечки, 5 несросшихся лепестковъ, 10 тычинокъ и проч. потому, что всѣ эти признаки наблюдались у всѣхъ гвоздичныхъ; но она не можетъ установить необходимую связь между этими

признаками. Если бы мы замѣтили всѣ признаки, кромѣ послѣдняго, мы не могли бы сказать навѣрно, сколько у гвоздичныхъ тычинокъ. Совсѣмъ другое дѣло въ геометріи. Мы утверждаемъ, что въ треугольникѣ: 1) сумма внутреннихъ угловъ равна $2d$, 2) внѣшній уголъ больше каждаго внутренняго, не смежнаго съ нимъ, 3) противъ большаго угла лежитъ бо́льшая сторона и т. д не потому, чтобы мы наблюдали эти свойства во всѣхъ треугольникахъ, а потому, что посредствомъ доказательствъ убѣждаемся, что они необходимо связаны съ основными свойствами треугольника: 1) это часть плоскости, 2) ограниченная со всѣхъ сторонъ, 3) тремя прямыми

Всѣ свойства перпендикуляровъ выводятся изъ того, что они образуютъ пары равныхъ смежныхъ угловъ, всѣ свойства пирамидъ — изъ нѣсколькихъ: это 1) тѣла, 2) ограниченныя со всѣхъ сторонъ, 3) многоугольникомъ и 4) прилегающими къ его сторонамъ треугольниками, 5) сходящимися вершинами въ одной точкѣ Такимъ образомъ всѣ свойства каждой геометрической формы познаются нами потому, что они необходимо связаны съ нѣкоторой ограниченной группой свойствъ, которыя включаются въ предложеніе, называемое опредѣленіемъ этой формы.

II. Опредѣленія.

Опредѣлить понятіе значитъ дать способъ отличить его отъ всѣхъ остальныхъ. Поэтому опредѣленіе должно представлять совокупность признаковъ, которая свойственна данному понятію, и только ему одному. Когда понятіе опредѣлено, то названіе его становится равносильнымъ опредѣленію и можетъ его замѣщать и можетъ быть имъ замѣщаемо Когда мы опредѣлимъ параллелограммъ, какъ четырехугольникъ, въ которомъ противоположныя стороны параллельны, мы можемъ вмѣсто того, чтобы говорить, что данная фигура четырехугольникъ и противоположныя стороны въ немъ параллельны, назвать ее параллелограммомъ; и наоборотъ, когда фигура названа параллелограммомъ, это равносильно тому, какъ если бы было сказано, что она четырехугольникъ и противоположныя стороны въ ней параллельны. Поэтому, если часть отличительныхъ признаковъ даннаго понятія составляетъ опредѣленіе другого понятія, то для сокращенія опредѣленія даннаго понятія, можно эти признаки замѣнить названіемъ этого опредѣленнаго раньше понятія.

Отличительные признаки ромба слѣдующіе: четырехугольникъ, противоположныя стороны параллельны, стороны равны Первыя два свойства составляютъ опредѣленіе параллелограмма, а потому могутъ быть замѣнены его названіемъ, и мы получимъ опредѣленіе ромба: параллелограммъ съ равными сторонами. Отличительныя свойства квадрата: 1) четырехугольникъ, 2) противоположныя стороны параллельны, 3) стороны равны, 4) углы прямые. Первыя три свойства составляютъ опредѣленіе ромба, а 1, 2, 4— прямоугольника. Поэтому квадратъ можно опредѣлить двоякимъ образомъ: прямоугольный ромбъ и прямоугольникъ съ равными сторонами.

Понятіе, которое опредѣляется частью признаковъ даннаго понятія, составляетъ родъ, котораго данное понятіе будетъ видомъ. Остальные признаки даннаго понятія служатъ для отличія этого вида отъ другихъ видовъ того же рода и называются видовыми отличіями или дифференціями. Понятіе квадратъ можетъ быть отнесено, значитъ, къ двумъ родамъ: прямоугольникъ и ромбъ. Въ первомъ случаѣ дифференціей будетъ „равносторонній“, во второмъ „прямоугольный“. Видъ представляетъ болѣе частное понятіе, обнимающее меньшее число предметовъ, родъ — болѣе общее, обнимающее всѣ предметы даннаго вида и еще всѣхъ другихъ видовъ того же рода.

Опредѣленія въ геометріи, какъ наукѣ дедуктивной, должны удовлетворять еще другому условію: они должны выражать эссенцію понятія, т.-е. такую группу свойствъ, изъ которой могутъ быть выведены всѣ остальныя его свойства или пропріи. Если опредѣленіе удовлетворяетъ этому второму условію, то само собой будетъ удовлетворять и первому. Въ самомъ дѣлѣ, двѣ различныя формы не могутъ имѣть одну и ту же эссенцію, потому что въ такомъ случаѣ и всѣ ихъ пропріи (свойства, выводимыя изъ эссенціи) были бы одинаковы, а слѣдовательно формы были бы тождественны.

Всѣ опредѣленія въ геометріи удовлетворяютъ этому условію.

III. Аксіомы.

Опредѣливъ геометрическую форму, мы должны изъ ея эссенціи вывести ея пропріи. Мы можемъ это сдѣлать, если данная форма распадается на другія простѣйшія, которыхъ свойства намъ извѣстны, потому, что всякая простѣйшая форма, входя

въ болѣе сложную, сохраняетъ въ ней всѣ свои свойства. Треугольникъ, составляющій половину параллелограмма, сохраняетъ всѣ свойства отдѣльно взятаго треугольника: сумма угловъ его равна $2d$, противъ большаго угла лежитъ бо́льшая сторона, если стороны его соотвѣтственно равны сторонамъ какого-нибудь другого, то онъ равенъ этому другому и т. д., а параллелограммъ составляющій грань, или діагональное сѣченіе призмы сохраняетъ всѣ свойства отдѣльно взятаго параллелограмма: противоположныя стороны и противоположные углы его равны діагонали взаимно дѣлятся пополамъ и т д

Поэтому, чтобы вывести свойства какой-нибудь формы, мы смотримъ, нельзя ли въ ней усмотрѣть, или нельзя ли ее разбить на болѣе простыя формы, которыхъ свойства уже знаемъ. Такъ въ параллелограммѣ мы усматриваемъ знакомыя формы: группы 3 прямыхъ, изъ которыхъ двѣ параллельны, а третья ихъ пересѣкаетъ. Проводя діагональ, мы получаемъ еще два треугольника. Примѣняя знакомыя свойства этихъ болѣе простыхъ формъ, мы открываемъ всѣ свойства параллелограмма Такимъ образомъ мы выводимъ свойства многогранниковъ изъ свойствъ фигуръ, составляющихъ его грани или сѣченія; свойства фигуръ мы выводимъ, разлагая ихъ на треугольники и группы изъ 3 прямыхъ, изъ которыхъ двѣ параллельны, а третья ихъ пересѣкаетъ.

Всякая сторона треугольника представляетъ прямую, проходящую черезъ двѣ точки, всякій уголъ — двѣ прямыя, пересѣкающіяся въ одной точкѣ. Такимъ образомъ треугольникъ распадается на 6 простѣйшихъ формъ: 3 прямыя, проходящія черезъ двѣ точки каждая, и 3 угла или 3 точки, съ проходящими черезъ каждую двумя прямыми. Прямая, соединяющая 2 точки, и уголъ представляютъ простѣйшія геометрическія фигуры, которыя распадаются уже только на основные геометрическіе элементы: прямыя и точки. Прямая и точка, послѣдніе элементы всѣхъ формъ, имѣютъ точное опредѣленіе только въ этихъ двухъ простѣйшихъ формахъ и притомъ опредѣленіе взаимное, т.-е. только одна черезъ другую: прямая опредѣляется двумя точками, какъ кратчайшее разстояніе между ними, и точка опредѣляется двумя прямыми, какъ мѣсто ихъ пересѣченія. Основныя свойства этихъ простѣйшихъ формъ — черезъ двѣ точки можно провести только одну прямую, и двѣ прямыя могутъ пересѣкаться только въ одной точкѣ — не могутъ быть

доказаны на основаніи какихъ-либо другихъ; но они составляютъ два взаимныхъ предложенія, т.-е. вытекаютъ одно изъ другого, потому что имѣютъ одно и то же противное предложеніе. Если бы черезъ двѣ точки можно было провести не одну, а двѣ прямыхъ, то эти двѣ прямыя пересѣкались бы въ двухъ точкахъ, и наоборотъ, если бы двѣ прямыя пересѣкались въ двухъ точкахъ, то черезъ эти двѣ точки проходили бы двѣ прямыя. Отсюда слѣдуетъ: если вѣрно, что черезъ двѣ точки можно провести только одну прямую, то не вѣрно предложеніе противное; а если не вѣрно предложеніе противное, то вѣрно второе, т.-е. что двѣ прямыя могутъ пересѣкаться только въ одной точкѣ. Поэтому одно изъ этихъ положеній принимается безъ доказательства и составляетъ 1-ю геометрическую аксіому. 2-ю геометрическую аксіому составляетъ свойство упоминавшейся нами формы изъ двухъ прямыхъ, пересѣченныхъ третьей. Эта форма имѣетъ много свойствъ, взаимныхъ между собой, т.-е. такихъ, изъ которыхъ каждое можетъ быть выведено изъ любого другого: 1—5) извѣстныя равенства между углами, 6) если одна изъ параллельныхъ перпендикулярна къ 3-й, перпендикулярна и другая, 7) черезъ точку внѣ прямой можно провести только одну къ ней параллельную; но, хотя она и представляетъ въ сущности комбинацію двухъ паръ пересѣкающихся прямыхъ, упомянутыя свойства ея не могутъ быть выведены изъ 1-й аксіомы. Поэтому для доказательства этихъ свойствъ, а также свойствъ всѣхъ сложныхъ формъ, въ которыя входитъ эта простая, необходимо одно изъ нихъ принять безъ доказательства, какъ 2-ю геометрическую аксіому. Въ различныхъ курсахъ геометріи дѣлается различный выборъ и изъ каждаго выбраннаго положенія выводятся всѣ остальныя.

Всѣ свойства, которыя геометрія изучаетъ въ пространственныхъ формахъ, представляютъ или количественныя отношенія, какъ равенство или неравенство отрѣзковъ линій, угловъ, поверхностей, объемовъ, ихъ пропорціональность, или такія качественныя отношенія, какъ подобіе, пересѣченіе, параллельность, которыя имѣютъ или точное количественное опредѣленіе (подобіе — равенство угловъ и пропорціональность сторонъ), или количественныя условія (неравенство или равенство между углами). Поэтому геометрическія свойства, подобно всякимъ количественнымъ отношеніямъ, подчиняются общематематическимъ законамъ:

1) Двѣ величины, порознь равныя 3-й, равны между собой.

2) Если къ равнымъ величинамъ прибавить поровну, то суммы будутъ равны.

Двѣ геометрическія аксіомы могутъ служить только для доказательства совпаденія геометрическихъ формъ, а слѣдовательно равенства всѣхъ ихъ величинъ.

IV. Доказательства теоремъ.

1. Роль опредѣленія.

Всякая теорема выражаетъ пропріи той или другой формы, которыя должны быть доказаны или выведены изъ ея эссенціи, данной въ опредѣленіи. Поэтому всякое доказательство должно исходить изъ опредѣленія формы, которое вмѣстѣ съ частными опредѣленіями или условіями, если таковыя есть, составляетъ полное условіе теоремы. Если мы въ доказательствѣ теоремы и не замѣчаемъ явной ссылки на опредѣленіе формы, то все же основаніемъ доказательства служитъ опредѣленіе, только выраженное чертежомъ. Если чертежъ выражаетъ все условіе теоремы, то мы совсѣмъ не встрѣчаемъ ссылки на условіе, а все выводится какъ будто изъ чертежа; если же чертежъ выражаетъ только часть условія, то явныя ссылки дѣлаются только на тѣ условія, которыя чертежомъ не выражены, а остальное выводится какъ бы изъ чертежа.

Такъ, теорема о суммѣ угловъ треугольника не содержитъ никакихъ частныхъ опредѣленій, она справедлива для всякаго треугольника; опредѣленіе формы выражается чертежомъ сполна, такъ какъ на чертежѣ часть плоскости ограничивается 3-мя прямыми и все выводится изъ чертежа безъ явной ссылки на опредѣленіе треугольника. Теоремы о равенствѣ треугольниковъ содержатъ добавочныя опредѣленія: это треугольники, имѣющіе по равному углу между равными сторонами и др. При доказательствѣ дѣлаются явныя ссылки только на эти частныя опредѣленія. Необходимость ссылки на опредѣленіе треугольника устраняется тѣмъ, что это опредѣленіе выражено чертежомъ. Однако при доказательствѣ необходимо соблюдать предосторожность, чтобы пользоваться только тѣми свойствами чертежа, которыя выражаютъ опредѣленіе формы или доказанныя раньше пропріи. Въ противномъ случаѣ доказательство не имѣетъ силы. Такъ, если бы мы для доказательства теоремы о внѣшнемъ

углѣ треугольника нарисовали прямоугольный треугольникъ или равносторонній и воспользовались бы для доказательства этими свойствами, то доказательство не имѣло бы силы.

Итакъ, дѣйствительнымъ исходнымъ пунктомъ всякаго доказательства служитъ опредѣленіе формы. Чертежъ нѣкоторыми своими свойствами только наглядно изображаетъ опредѣленіе, и только этими свойствами чертежа можно пользоваться при доказательствѣ или выведенными изъ нихъ раньше пропріями

Опредѣливъ данную форму, надо вывести изъ опредѣленія требуемыя пропріи. Способы или методы, какими дѣлаются выводы, раздѣляются на прямые и непрямые. Прямыми методами доказательства называются тѣ, когда мы разсматриваемъ самоё данную форму и въ ней открываемъ или ее разлагаемъ на простѣйшія формы, свойства которыхъ мы уже знаемъ. При этомъ могутъ быть и разныя добавочныя построенія, но они дѣлаются непремѣнно на данной формѣ Доказывая равенство треугольниковъ, если они имѣютъ по равному углу между равными сторонами, или по равной сторонѣ между равными углами, мы разсматриваемъ самыя данныя формы, находимъ въ нихъ пары прямыхъ пересѣкающихся и пары точекъ, соединенныхъ прямой, и прилагаемъ свойства этихъ простѣйшихъ формъ, т.-е. 1-ю аксіому. Въ теоремѣ о равенствѣ внутреннихъ накрестъ-лежащихъ угловъ мы находимъ два равныхъ прямоугольныхъ треугольника при помощи добавочнаго построенія (проведенія общаго перпендикуляра къ параллельнымъ изъ середины отрѣзка пересѣкающей), которое дѣлаемъ на самой данной формѣ. Непрямыми методами называются такіе, когда мы вмѣсто того, чтобы разсматривать данную форму или тѣ, которыя въ ней можно открыть при помощи сдѣланныхъ на ней добавочныхъ построеній, совсѣмъ ее оставляемъ, а разсматриваемъ совсѣмъ другія формы. Такъ, въ теоремѣ о равенствѣ прямыхъ угловъ мы беремъ не прямые углы, а прямые углы неравные. Два неравныхъ прямыхъ угла не то же, что два прямыхъ, и не могутъ быть получены изъ двухъ прямыхъ никакимъ добавочнымъ построеніемъ. Въ теоремѣ: двѣ прямыя параллельны, если, при пересѣченіи 3-й, образуютъ внутренніе накрестъ-лежащіе углы равные, вмѣсто двухъ прямыхъ, образующихъ при пересѣченіи 3-й, внутренніе накрестъ-лежащіе равные, мы беремъ двѣ прямыя непараллельныя, пересѣченныя 3-й Способъ доказательства отъ противнаго есть способъ не-

прямой. Точно такъ же способъ предѣловъ есть способъ непрямой. Вмѣсто круговъ мы разсматриваемъ правильные вписанные многоугольники, вмѣсто конусовъ — правильныя вписанныя пирамиды.

2. Прямые методы доказательствъ.

а) Силлогизмы.

Всякое доказательство распадается на отдѣльные выводы или заключенія, иначе силлогизмы Эти послѣдніе имѣютъ различную форму, смотря по тому, служатъ ли они для того, чтобы примѣнить къ частному случаю общее правило, или къ тому, чтобы опровергнуть какое-нибудь сдѣланное предположеніе. Эти два рода выводовъ называются 1-й и 2-й фигурами силлогизма.

1-я фигура силлогизма.

1. Треугольники, на которые разбивается діагональю всякій четырехугольникъ, представляютъ частныя понятія по отношенію къ треугольнику вообще, потому что подъ понятіе о треугольникѣ подходятъ какъ всѣ треугольники, составляющіе части четырехугольниковъ, такъ и всѣ другіе треугольники, отдѣльно взятые или входящіе въ другія фигуры. Когда мы примѣняемъ къ треугольникамъ, на которые разбиваемъ параллелограммъ, теоремы о равенствѣ треугольниковъ, мы примѣняемъ правило, доказанное для всякихъ треугольниковъ, слѣдовательно общее правило къ частнымъ случаямъ треугольниковъ, къ треугольникамъ, составляющимъ части параллелограммовъ.

Это заключеніе по 1-й фигурѣ силлогизма.

2. Сторона треугольника есть прямая, проходящая черезъ двѣ точки, т.-е. представляетъ частный случай этой простѣйшей формы, такъ какъ подъ понятіе о прямой, проходящей черезъ двѣ точки, подходятъ какъ всѣ стороны треугольниковъ, такъ и стороны всѣхъ остальныхъ фигуръ и всѣ отдѣльно взятыя прямыя, проходящія каждая черезъ двѣ точки. Поэтому примѣненіе къ сторонамъ треугольника (въ 1-й теоремѣ о равенствѣ треугольниковъ) 1-й аксіомы, выражающей общее свойство этой простѣйшей формы, представляетъ тоже заключеніе по 1-й фигурѣ силлогизма.

3. Когда мы говоримъ, что данные два равные угла совпадутъ, когда мы наложили ихъ вершины и одну сторону одного

на одну сторону другого и ихъ плоскости, мы тоже примѣняемъ къ частному понятію два данные равные угла — общее опредѣленіе равенства: равными значеніями называются тѣ, которыя при наложеніи совпадаютъ. Это тоже заключеніе по 1-й фигурѣ силлогизма.

Итакъ, заключеніе по 1-й фигурѣ силлогизма представляетъ примѣненіе общаго правила — аксіомы, доказанной раньше теоремы или опредѣленія къ частному случаю, т.-е. къ частному понятію, подходящему подъ то общее понятіе, относительно котораго высказывается общее правило. Для того, чтобы сдѣлать такой выводъ, нужны двѣ отдѣльныхъ мысли, какъ говорятъ, два особыхъ сужденія: во-1-хъ, общее положеніе и, во-2-хъ, мысль, что данный случай подходитъ подъ общее понятіе, о которомъ высказано общее положеніе. Чтобы выводъ былъ правиленъ, надо, чтобы было правильно общее положеніе, и надо, чтобы оно было правильно примѣнено. Эти сужденія, изъ которыхъ дѣлается выводъ, называются посылками. Посылка, содержащая общее правило, называется большей посылкой; посылка, высказывающая, что данный случай подходитъ подъ общее понятіе, о которомъ высказывается правило, называется меньшей посылкой. Выводъ содержитъ, значитъ, три сужденія: двѣ посылки и заключеніе.

Чтобы ясно видѣть, какъ дѣлается выводъ, мы представимъ наши три вывода въ такомъ видѣ:

I. 1) БП. Треугольники, имѣющіе по 2 стороны и углы между ними соотвѣтственно равные, равны.

2) МП Треугольники, на которые разбитъ, параллелограммъ, имѣютъ по двѣ стороны и углы между ними соотвѣтственно равные.

3) Заключеніе· слѣдовательно эти треугольники равны

II. 1) БП Черезъ 2 точки можно провести только одну прямую.

2) МП. Эти двѣ стороны двухъ треугольниковъ имѣютъ двѣ общія точки.

3) Заключеніе: слѣдовательно онѣ составляютъ одну прямую.

III. 1) БП. Равныя величины, при наложеніи, совпадаютъ.

2) МП. Данные два угла, по условію равны

3) Заключеніе: значитъ, при наложеніи, совпадаютъ.

Общее положеніе можетъ быть выражено условнымъ предложеніемъ. Тогда меньшая посылка выражаетъ мысль, что данное понятіе подходитъ подъ условіе, а въ силу этого къ нему приложимо и слѣдствіе.

Такъ, въ 1-мъ примѣрѣ бо́льшую посылку можно выражать условно: если треугольники имѣютъ по двѣ стороны и по углу между ними соотвѣтственно равными, то треугольники равны.

Меньшая посылка утверждаетъ, что треугольники, на которые разбивается діагональю параллелограммъ, удовлетворяютъ этому условію. Въ выводѣ мы примѣняемъ къ нимъ слѣдствіе.

Основаніемъ для выводовъ служитъ логическая аксіома, такъ называемая аксіома: Dictum de omni et nullo: dictum de omni valet de quibusdam et de singulis, dictum de nullo nec de quibusdam, nec de singulis valet. Все, что сказано, т.-е. признано вѣрнымъ о цѣломъ, т.-е. о всякомъ предметѣ, подходящемъ подъ извѣстное понятіе, имѣетъ силу, значитъ вѣрно и о какой-либо группѣ этихъ предметовъ и объ отдѣльныхъ предметахъ.

Когда общее положеніе выражено условнымъ предложеніемъ, измѣняется только форма вывода, но не сущность его. Такъ, чтобы въ 1-мъ примѣрѣ подвести данный случай подъ понятіе о треугольникахъ, имѣющихъ по двѣ равныхъ стороны и углу между ними соотвѣтственно равному, нужно разсмотрѣть, имѣетъ ли онъ признаки, которыми опредѣляется это понятіе: имѣемъ ли мы треугольники, есть ли у нихъ по двѣ соотвѣтственно равныхъ стороны и по равному углу между ними. Но именно эти признаки и составляютъ все условіе, когда мы превращаемъ это предложеніе въ условное.

Поэтому то же самое слѣдуетъ разсмотрѣть, чтобы убѣдиться, удовлетворяетъ ли данный случай условію общаго положенія, выраженнаго условно.

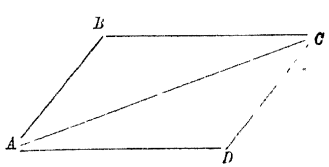
Доказательство.

При соединеніи силлогизмовъ въ доказательства, заключеніе одного силлогизма дѣлается одной изъ посылокъ слѣдующаго, или заключенія двухъ силлогизмовъ становятся посылками для третьяго, и такимъ образомъ отдѣльные силлогизмы связываются въ одно разсужденіе. Такъ, въ теоремѣ: противоположныя стороны параллелограмма равны, — мы усматриваемъ двѣ пары параллельныхъ прямыхъ, пересѣченныхъ третьей (меньшая посылка); прилагая къ нимъ доказанную раньше теорему: если двѣ пря-

мыя пересѣчены третьей, то внутреннiе накрестъ лежащiе углы равны (бо́льшая посылка), — заключаемъ о равенствѣ угловъ. Къ этимъ заключенiямъ присоединяемъ то, что̀ усматриваемъ непосредственно изъ чертежа: эти равные углы принадлежатъ двумъ треугольникамъ, имѣющимъ еще общую сторону, лежащую въ обоихъ между равными углами, — мы получаемъ меньшую посылку для слѣдующаго силлогизма. Примѣняя въ силу ея къ этимъ треугольникамъ доказанную раньше теорему: если треугольники имѣютъ по два соотвѣтственно равныхъ угла, и стороны между ними равныя, то треугольники равны (бо́льшая посылка), — дѣлаемъ выводъ, что данные треугольники равны. Это заключенiе служитъ меньшей посылкой слѣдующаго силлогизма, большей посылкой котораго является слѣдствiе изъ опредѣленiя равенства фигуръ: въ равныхъ треугольникахъ соотвѣтственные углы и стороны равны. Отсюда заключаемъ, что противоположныя стороны параллелограмма равны.

Ради краткости изложенiя, обѣ посылки и заключенiя часто не высказываются отдѣльно, и доказательство не разбивается явно на отдѣльные силлогизмы. заключенiе одного не повторяется потомъ какъ посылка другого, а связываетъ оба силлогизма, такъ какъ къ нему прямо присоединяется еще посылка; бо́льшая посылка иногда совсѣмъ опускается, потому что по сказуемому меньшей посылки и сказуемому заключенiя читающiй самъ можетъ припомнить аксiому или теорему, служащую большей посылкой.

Обычное доказательство изложенной теоремы таково:



Углы *BCA* и *CAD*, какъ *внутренiе накрестъ лежащiе при параллельныхъ BC* и *AD*, *пересѣченныхъ* 3-й *AC*, *равны*.

Здѣсь бо́льшая посылка опущена; она заключается въ подчеркнутыхъ нами словахъ, служащихъ распространеннымъ сказуемымъ меньшей посылки и сказуемымъ заключенiя. Меньшая посылка заключается въ придаточномъ предложенiи: какъ внутренiе накрестъ-лежащiе и т. д., которое по смыслу есть предложенiе причины: *какъ* замѣняетъ здѣсь *потому что они*.

„Подобнымъ образомъ заключаемъ, что углы *DCA* и *CAB* равны“. Здѣсь, по понятной причинѣ, высказано только заключенiе, которое нужно, какъ часть посылки слѣдующаго силлогизма.

„Теперь видимъ, что *треугольники ABC и CAD имѣютъ по два равныхъ угла и сторону между ними общую.* Такіе треугольники *равны*“. Бо́льшая посылка опять опущена и заключается въ подчеркнутыхъ нами словахъ. Меньшая представляетъ соединеніе заключеній двухъ предыдущихъ силлогизмовъ и усматриваемой изъ чертежа общности стороны AC для обоихъ треугольниковъ

„А тогда $BC=AD$“

Здѣсь высказано одно заключеніе. Остальное долженъ возстановить читающій: меньшую посылку составляетъ заключеніе предыдущаго силлогизма: треугольники ABC и ACD равны, и 2-го: $BAC=ACD$, а бо́льшую очень часто повторяемое, а потому легко приходящее на умъ слѣдствіе опредѣленія равенства фигуръ: въ равныхъ треугольникахъ противъ равныхъ сторонъ лежатъ равные углы.

„и $AB=CD$“ — то же самое.

b) Методъ наложенія.

Это самый естественный способъ доказать равенство или неравенство формъ, прямо вытекающій изъ самаго опредѣленія равенства или неравенства. Равными формами называются тѣ, которыя при наложеніи совпадаютъ. Основывается онъ на томъ свойствѣ плоскости, что любая плоская фигура можетъ быть перемѣщаема по плоскости и всегда будетъ совпадать съ ней всѣми своими точками, если только совмѣщена съ ней тремя точками. Если фигуру перевернуть и другой стороной приложить къ плоскости въ 3 точкахъ, то она опять совпадетъ съ плоскостью всѣми своими точками. Это вытекаетъ изъ той теоремы, которая доказывается въ началѣ стереометріи, что черезъ 3 точки можно провести только одну плоскость.

Для наложенія одной формы на другую надо накладываемую форму перенести въ другое мѣсто и тамъ придать опредѣленное положеніе, но такъ, чтобы форма отъ этого не измѣнилась. Въ положеніи всякой формы мы можемъ произвольно выбрать положеніе одной ея точки. Совмѣстивъ какую-либо точку данной формы съ любой точкой пространства (при наложеніи — съ соотвѣтственной точкой другой формы), мы можемъ вращать нашу форму около этой точки, пока не придадимъ желаемаго направленія какой-либо прямой, принадлежащей данной формѣ

и проходящей черезъ данную точку (пока не совмѣстимъ ее съ соотвѣтственной прямой другой формы.) Затѣмъ, не измѣняя положенія взятыхъ точки и прямой, можемъ вращать нашу форму около этой прямой, пока не придадимъ опредѣленнаго положенія какой-либо ея плоскости, проходящей черезъ эту прямую (пока не совмѣстимъ ее съ соотвѣтственной плоскостью другой формы). Этимъ ограничивается нашъ произволъ при наложеніи: положеніе формы опредѣлено, и положенія остальныхъ точекъ, прямыхъ и граней нельзя никакъ измѣнить, не измѣняя самой формы. При наложеніи двухъ формъ, остальныя грани, ребра и вершины совпадутъ или не совпадутъ, смотря по даннымъ свойствамъ формъ.

Поэтому, при наложеніи двухъ формъ, накладываютъ вершину одной на соотвѣтственную вершину другой, ребро, проходящее черезъ взятую вершину одной, на соотвѣтственное ребро другой, и проходящую черезъ это ребро грань одной на соотвѣтственную грань другой, и затѣмъ уже, на основаніи данныхъ равенствъ между углами и сторонами, убѣждаются, что формы должны совпасть.

c) Анализъ сложныхъ формъ.

Методъ анализа состоитъ въ томъ, что мы разсматриваемъ простѣйшія формы, изъ которыхъ составлена данная форма, или дополняемъ данную форму новыми построеніями, такъ чтобы изъ нѣкоторыхъ элементовъ данной формы и новыхъ построеній получить уже знакомыя намъ простѣйшія формы. Примѣняя свойства этихъ послѣднихъ, мы прямо находимъ свойства данной формы. Мы указывали уже на примѣненіе этого способа при выводѣ свойствъ параллелограмма (гл. III). При выводѣ свойствъ параллельнаго сѣченія пирамиды, мы усматриваемъ на ея граняхъ и въ сѣченіи, проходящемъ черезъ высоту и боковое ребро, пары подобныхъ треугольниковъ и примѣняемъ ихъ свойства. Методъ анализа — самый распространенный методъ доказательства. Составляя сущность доказательства многихъ (большинства) теоремъ, онъ входитъ, какъ часть, въ доказательства почти всѣхъ остальныхъ теоремъ. Доказывая наложеніемъ равенство треугольниковъ, имѣющихъ по равному углу между равными сторонами, мы заключаемъ о совпаденіи, на основаніи свойствъ угловъ и прямыхъ (акс. 1-я). Совпаденіе двухъ тѣлъ требуетъ совпаденія граней, реберъ и вершинъ;

поэтому доказательство наложеніемъ равенства двухъ тѣлъ требуетъ разсмотрѣнія фигуръ, угловъ линейныхъ, двугранныхъ многогранныхъ, прямыхъ линій и примѣненія ихъ свойствъ. Примѣненіе непрямыхъ методовъ доказательствъ часто требуетъ доказательства свойствъ тѣхъ формъ, которыя мы разсматриваемъ вмѣсто данныхъ, и анализа ихъ. Доказывая способомъ отъ противнаго равновеликость пирамидъ съ равновеликими основаніями и равными высотами, мы строимъ на нихъ входящія и выходящія призмы и разсматриваемъ ихъ основанія и высоты.

d) Свойства чертежа.

Въ § 1 было объяснено, что чертежъ долженъ представлять наглядно условіе теоремы, т.-е. эссенцію того понятія, той формы, относительно которой теорема доказывается. Но чертежъ никогда не выражаетъ только эссенцію, а всегда заключаетъ и случайныя свойства, или акциденціи. Такъ, мы не можемъ нарисовать равнобедренный треугольникъ вообще для доказательства теоремы о равнобедренномъ треугольникѣ: мы непременно нарисуемъ его съ опредѣленной длиной сторонъ, съ опредѣленнымъ угломъ при вершинѣ, въ извѣстномъ положеніи. Все это акциденціи, которыя не должны играть роли въ доказательствѣ. Поэтому, когда мы пользуемся чертежомъ при доказательствахъ, можетъ быть одно изъ двухъ: или мы пользуемся только тѣми свойствами чертежа, которыя выражаютъ эссенцію понятія или необходимо изъ нихъ вытекаютъ, или пользуемся также и акциденціями. Въ первомъ случаѣ заключеніе будетъ имѣть силу и при всякихъ другихъ акциденціяхъ, и слѣдовательно выводъ имѣетъ общее значеніе для всего класса, опредѣляемаго условіемъ теоремы. Во второмъ — выведенное свойство мы можемъ приписать только той части класса, которая характеризуется тѣми акциденціями, которыми мы пользовались при доказательствѣ, а не всему классу. Въ большинствѣ теоремъ имѣетъ мѣсто 1-й случай. 2-й имѣетъ мѣсто, напримѣръ, въ доказательствѣ теоремъ о треугольникахъ, имѣющихъ по 2 равныхъ стороны и не равные углы между ними. При наложеніи треугольниковъ третья вершина одного можетъ упасть внутри другого, на сторонѣ его, или внѣ его. Въ каждомъ случаѣ чертежъ измѣняется, а вмѣстѣ съ нимъ можетъ измѣниться и выводъ. Въ такихъ случаяхъ прибѣгаютъ къ раздѣленію понятія.

е) Раздѣленіе понятій.

Треугольники дѣлятся на косоугольные, прямоугольные и тупоугольные; пары окружностей дѣлятся на: 1) лежащія одна внѣ другой, 2) касающіяся извнѣ, 3) пересѣкающіяся, 4) касающіяся изнутри и 5) лежащія одна внутри другой; положеніе точки относительно какой-либо фигуры можно раздѣлить на положенія: 1) внутри, 2) на периметрѣ и 3) внѣ ея, отношеніе двухъ значеній какой-либо величины — на: 1) больше, 2) равно и 3) меньше. Въ первомъ примѣрѣ всѣ треугольники имѣютъ общее свойство, нѣкоторые размѣры угловъ, которое измѣняется въ различныхъ треугольникахъ. Сообразно измѣненіямъ его и производится дѣленіе. Это свойство — размѣръ угловъ — называется основаніемъ дѣленія. Всѣ другія дѣленія имѣютъ то или другое основаніе. Основаніемъ дѣленія паръ окружностей служитъ ихъ относительное положеніе; положеніе точки относительно фигуры само есть простое свойство, измѣняющееся въ группахъ фигуръ, изъ которыхъ одна есть точка, и служащее основаніемъ для дѣленія; въ послѣднемъ примѣрѣ основаніемъ дѣленія служитъ размѣръ отношенія. Чтобы служить средствомъ доказательства, дѣленіе должно быть исчерпывающимъ, т.-е. виды, на которые мы раздѣлили данный родъ, всѣ вмѣстѣ должны обнимать всѣ предметы даннаго рода; всѣ косоугольные, всѣ прямоугольные и всѣ тупоугольные треугольники вмѣстѣ должны представлять всѣ возможные треугольники. Какъ въ этомъ убѣдиться? Мы не можемъ перечислить, нарисовать или вообразить себѣ всѣ возможные треугольники, всѣ возможные косоугольные, тупоугольные и прямоугольные треугольники; но мы понимаемъ, что острый, прямой и тупой углы обнимаютъ всѣ возможныя измѣненія размѣра угла, и поэтому очевидно, что не можетъ быть треугольника, который не входилъ бы въ одинъ изъ составленныхъ нами видовъ, т.-е. не былъ бы ни остроугольнымъ, ни прямоугольнымъ, ни тупоугольнымъ. Слѣдовательно, дѣленіе будетъ исчерпывающимъ, если виды соотвѣтствуютъ всѣмъ возможнымъ измѣненіямъ основанія дѣленія. Не трудно видѣть, что всѣ приведенные примѣры представляютъ дѣленія исчерпывающія.

Примѣненіе исчерпывающихъ дѣленій. При доказательствѣ теоремы: если 2 стороны одного треугольника соотвѣтственно равны 2 сторонамъ другого, а углы между ними не равны, то

противъ большаго угла лежитъ бо́льшая сторона, мы не можемъ при доказательствѣ обойти случайное свойство чертежа — положеніе 3-й вершины, а тогда доказательство можетъ имѣть силу только для части всѣхъ паръ такихъ треугольниковъ — части, характеризуемой выбраннымъ нами положеніемъ 3-й вершины. Поэтому мы дѣлимъ понятіе о парѣ треугольниковъ, соотвѣтствующихъ условію теоремы, принимая за основаніе эту акциденцію — положеніе 3-й вершины — и доказываемъ теорему для каждаго случая. Если какое-либо свойство принадлежитъ всѣмъ видамъ класса, то принадлежитъ всему классу, поэтому теорема справедлива для всего класса паръ треугольниковъ, отвѣчающихъ условіемъ теоремы.

То же встрѣчается при доказательствѣ теоремъ: 1) вписанный уголъ равенъ половинѣ центральнаго, опирающагося на ту же дугу; 2) при выводѣ формулы поверхности, описываемой стороной правильнаго вписаннаго многоугольника съ четнымъ числомъ сторонъ, при вращеніи около діагонали, проходящей черезъ двѣ противоположныя стороны.

Раздѣленіе исключающее. Дѣленіе понятій называется исключающимъ, когда принадлежность предмета къ одному виду исключаетъ принадлежность его къ какому-либо другому. Всѣ приведенные примѣры дѣленія, не только исчерпывающіе, но и исключающіе: треугольникъ остроугольный не можетъ быть ни тупоугольнымъ, ни прямоугольнымъ; точка, лежащая внутри треугольника, не можетъ быть ни на его сторонѣ, ни внѣ его; отрѣзки соизмѣримые не могутъ быть въ то же время несоизмѣримыми. Такія дѣленія исчерпывающія и исключающія обладаютъ двумя свойствами:

1) Если какой-либо предметъ класса принадлежитъ къ одному изъ видовъ, то онъ не можетъ принадлежать ни къ одному изъ другихъ — иначе дѣленіе не было бы исключающимъ.

2) Если предметъ класса не принадлежитъ ни къ одному изъ видовъ, кромѣ одного, то онъ непремѣнно принадлежитъ къ этому послѣднему, иначе дѣленіе не было бы исчерпывающимъ, потому что предметъ класса не принадлежалъ бы ни къ одному изъ перечисленныхъ въ дѣленіи видовъ.

На этихъ свойствахъ дѣленія основывается непрямой способъ доказательства, такъ называемый способъ доказательства отъ противнаго.

3. Непрямые методы.

а) Предложенія общія, частныя, единичныя, противныя и противорѣчащія.

Предложенія раздѣляются по объему подлежащаго, т.-е. по числу обнимаемыхъ имъ предметовъ, на общія, частныя и единичныя. Общимъ называется предложеніе, въ которомъ сказуемое относится ко всему объему подлежащаго. Въ такомъ предложеніи или подлежащее сопровождается прилагательнымъ: весь, всякій, или одно изъ этихъ прилагательныхъ можно къ нему приставить, не измѣняя смысла предложенія. Всѣ люди смертны; всѣ равнобедренные треугольники имѣютъ по два равныхъ угла; всякій перпендикуляръ короче наклонной; внѣшній уголъ треугольника больше внутренняго, съ нимъ не смежнаго; противоположныя грани параллелепипеда равны и параллельны,— представляютъ предложенія общія.

Частными называются предложенія, въ которыхъ сказуемое относится къ части объема подлежащаго. Нѣкоторые треугольники имѣютъ по прямому углу, нѣкоторыя окружности пересѣкаются, нѣкоторые цвѣты желты — представляютъ предложенія частныя. Имъ можно придавать и иную форму; напримѣръ, треугольники бываютъ прямоугольными, окружности могутъ пересѣкаться, цвѣты бываютъ желтые, или могутъ быть желтые.

Единичными предложеніями называются такія, въ которыхъ сказуемое приписывается только одному предмету, обозначаемому подлежащимъ. Таковы предложенія: этотъ треугольникъ прямоугольный, прямая AB параллельна CD, a больше b, $7a$ равны b. Въ послѣднемъ примѣрѣ равенство b приписывается не семи предметамъ, а одному — суммѣ семи a.

Приставляя отрицаніе къ сказуемому какого-либо предложенія, получимъ предложеніе противное ему. Предложенію „всѣ люди добры“ противное будетъ „всѣ люди не добры“ или „ни одинъ человѣкъ не добръ“, предложенію „нѣкоторыя птицы плаваютъ“ противное будетъ „нѣкоторыя птицы не плаваютъ“, предложенію „a больше b“ противное будетъ „a не больше b“. Противныя предложенія не могутъ быть оба вѣрны, если они оба общія или единичныя. Ни одинъ предметъ не можетъ быть чѣмъ-нибудь и не быть имъ; это очевидное положеніе назы-

вается аксіомой противорѣчія. Поэтому *a* не можетъ быть больше *b* и не быть больше *b*, и всѣ люди не могутъ быть добры и не быть добры. Единичныя противныя предложенія не могутъ быть кромѣ того оба ложны. Если ложно, что *a* больше *b*, то вѣрно, что *a* не больше *b*; если ложно, что *a* не больше *b*, то вѣрно, что *a* больше *b*. Это слѣдуетъ изъ свойствъ исчерпывающихъ дѣленій: *a* есть количество, а дѣленіе количества на большія *b* и не большія *b* представляетъ дѣленіе исчерпывающее и исключающее. Значитъ, причисляя *a* къ одному виду, исключаемъ изъ другого, и, исключая изъ одного, причисляемъ къ другому. Но общія предложенія противныя могутъ быть оба ложны. Такъ оба предложенія: „всѣ люди добры“ и „всѣ люди не добры“ — ложны, потому что одни добры, а другіе не добры. Частныя противныя предложенія могутъ быть оба вѣрны, но не могутъ быть оба ложны. Предложенія: „нѣкоторыя птицы плаваютъ“ и „нѣкоторыя птицы не плаваютъ“ — оба вѣрны: однѣ плаваютъ, другія не плаваютъ. Но если ложно, что нѣкоторые треугольники имѣютъ параллельныя стороны, то вѣрно, что всѣ треугольники, а значитъ какая угодно часть, т-е и нѣкоторые треугольники не имѣютъ параллельныхъ сторонъ. Если ложно, что нѣкоторые люди не способны испытывать добрыя чувства, то вѣрно, что всѣ люди, а значитъ и нѣкоторые, способны ихъ испытывать.

Если общее утвердительное предложеніе сдѣлать частнымъ и отрицательнымъ, или общее отрицательное сдѣлать частнымъ утвердительнымъ, то полученное предложеніе называется по отношенію къ первому противорѣчащимъ. Предложеніе „нѣкоторые люди не способны испытывать добрыя чувства„ — противорѣчащее предложенію „всѣ люди способны испытывать добрыя чувства“; предложеніе „нѣкоторые треугольники имѣютъ параллельныя стороны“ — противорѣчащее предложенію „ни одинъ треугольникъ не имѣетъ параллельныхъ сторонъ“. Два противорѣчащихъ одно другому предложенія не могутъ быть ни оба истинны, ни оба ложны: непремѣнно одно изъ нихъ истинно, другое ложно. Если вѣрно, что всѣ люди способны испытывать добрыя чувства, то не можетъ быть вѣрно, что нѣкоторые не способны. И наоборотъ, если не вѣрно, что нѣкоторые не способны, то вѣрно, что всѣ способны. Если не вѣрно, что всѣ треугольники имѣютъ по одному прямому углу, то необходимо вѣрно, что нѣкоторые не имѣютъ ни одного прямого угла, и

наоборотъ, если послѣднее вѣрно, то первое необходимо не вѣрно. Если вѣрно, что всѣ треугольники не имѣютъ параллельныхъ сторонъ, то необходимо не вѣрно, что нѣкоторые имѣютъ таковыя, и наоборотъ, если второе не вѣрно, то первое необходимо вѣрно. Если не вѣрно, что никакіе углы не пропорціональны стягиваемымъ дугамъ, то необходимо вѣрно, что по крайней мѣрѣ нѣкоторые пропорціональны, и наоборотъ, если послѣднее вѣрно, то первое необходимо не вѣрно. Въ случаѣ единичныхъ предложеній противныя предложенія совпадаютъ съ противорѣчащими, потому что частное предложеніе по отношенію къ единичному будетъ тоже единичное. Въ геометріи и математикѣ вообще мы имѣемъ дѣло большею частью съ единичными противными предложеніями, потому что условіе теоремы мы выражаемъ чертежомъ или формулой и затѣмъ разсуждаемъ, какъ будто, объ одной данной фигурѣ, о данной прямой, данномъ углѣ, данномъ многочленѣ. Совпаденіе въ случаѣ единичныхъ предложеній противнаго и противорѣчащаго предложеній послужило поводомъ къ тому, что въ курсахъ геометріи противорѣчащія предложенія называются обыкновенно противными и самый способъ доказательства, гдѣ они примѣняются, называется доказательствомъ отъ противнаго, а не отъ противорѣчащаго, какъ бы слѣдовало.

Въ теоремѣ о равенствѣ прямыхъ угловъ, мы рисуемъ два прямыхъ угла и переходимъ уже къ единичному случаю: уголъ ABC равенъ углу $A'B'C'$. Противное будетъ тоже единичное предложеніе: уголъ ABC не равенъ углу $A'B'C'$ и совпадаетъ съ противорѣчащимъ. Въ теоремѣ: большая наклонная дальше отъ перпендикуляра — дѣлаемъ чертежъ и доказываемъ уже, что наклонная AB больше AC — опять единичное предложеніе, и противное совпадаетъ съ противорѣчащимъ. Но въ теоремѣ „три точки, не лежащія на одной прямой, опредѣляютъ положеніе плоскости“, чтобы доказать, что двѣ плоскости, совмѣщенныя тремя точками, совпадутъ всѣми точками, мы дѣлаемъ предположеніе, что какая-либо точка одной не совпадаетъ съ другой. Это уже предложеніе не противное, а противорѣчащее Противное было бы: ни одна точка одной не совпадаетъ съ другой. Опроверженіе его не доказывало бы данную теорему, потому что обѣ могутъ быть ложны.

b) Связь причины со слѣдствіемъ.

2-я фигура силлогизма.

Если два предложенія связаны между собой такъ, что, признавая справедливость одного, мы необходимо должны признать справедливость другого, то первое изъ нихъ называется основаніемъ или логической причиной второго, а второе — слѣдствіемъ перваго. Такая связь между предложеніями создается всякимъ истиннымъ общимъ предложеніемъ, будетъ ли то аксіома, теорема или опредѣленіе.

Такъ аксіома: между двумя точками можно провести только одну прямую — создаетъ причинную связь между двумя предложеніями: 1) точки A и B совпали соотвѣтственно съ C и D и 2) прямая AB совпала съ CD. Убѣдившись въ первомъ, мы необходимо должны признать второе. Теорема: двѣ параллельныя, пересѣченныя третьей прямой, образуютъ внутреннія накрестъ лежащіе углы равные, — создаетъ связь причины со слѣдствіемъ между двумя предложеніями: 1) въ параллелограммѣ двѣ противоположныхъ стороны съ діагональю образуютъ пару параллельныхъ прямыхъ, пересѣченныхъ третьей, и 2) противоположныя стороны параллелограмма образуютъ съ діагональю равные углы. Опредѣленіе: равными называются фигуры, которыя при наложеніи совпадаютъ, создаетъ связь причины со слѣдствіемъ между предложеніями: 1) фигура A и B совпали и 2) A и B равны.

Всѣ заключенія по первой фигурѣ силлогизма можно разсматривать, какъ примѣненіе этой связи причины со слѣдствіемъ: если вѣрна причина, то вѣрно и слѣдствіе Бо́льшую посылку надо тогда разсматривать, какъ выраженіе причинной связи между признаками, характеризующими подлежащее, и тѣми, которые заключены въ сказуемомъ; меньшая посылка выражаетъ причину, заключеніе — слѣдствіе.

Такъ силлогизму

> БП. Въ треугольникѣ противъ бо́льшаго угла лежитъ бо́льшая сторона. МП. Уголъ, лежащій противъ гипотенузы прямоугольнаго треугольника, больше каждаго изъ угловъ, лежащихъ противъ катетовъ. Заключеніе: значитъ гипотенуза больше каждаго изъ катетовъ.

можно придать форму

> БП. Если вѣрно, что одинъ уголъ треугольника больше другого, то необходимо вѣрно, что сторона, противъ него лежащая, больше стороны, лежащей противъ второго.
> МП. Вѣрно что уголъ, лежащій противъ гипотенузы прямоугольнаго треугольника, больше каждаго изъ угловъ, лежащихъ противъ катетовъ. Заключеніе: значитъ вѣрно, что гипотенуза больше каждаго изъ катетовъ.

Но между причиной и слѣдствіемъ есть еще другая связь: если не вѣрно слѣдствіе, то не вѣрна и причина, потому что если бы причина была вѣрна, то и слѣдствіе было бы вѣрно. Это второе свойство причинной связи служитъ основаніемъ второй фигуры силлогизма, которая служитъ, какъ мы выше замѣтили (IV, 2, а), для опроверженія сдѣланнаго предположенія. Чтобы опровергнуть какое-либо положеніе, нужно найти какое-нибудь необходимое слѣдствіе его, которое было бы очевидно невѣрно; тогда изъ невѣрности слѣдствія необходимо слѣдуетъ невѣрность основанія или причины. Такъ, чтобы опровергнуть положеніе, что прямыя AB и AC обѣ перпендикулярны къ плоскости MN, мы выводимъ изъ него необходимое слѣдствіе, что онѣ обѣ перпендикулярны къ прямой BC соединяющей ихъ основанія на плоскости MN. Это слѣдствіе, очевидно, не вѣрно, потому что противорѣчитъ доказанной раньше теоремѣ, а тогда не вѣрна и причина, т.-е. опровергаемое положеніе. Чтобы опровергнуть положеніе, что не равны предѣлы двухъ перемѣнныхъ, которыхъ всѣ соотвѣтственныя значенія равны, мы выводимъ изъ этого положенія необходимое слѣдствіе, что алгебраическая сумма нѣсколькихъ безконечномалыхъ количествъ равна нѣкоторому конечному количеству, что очевидно не вѣрно.

Но невѣрности этого слѣдствія заключаемъ о невѣрности причины. Эти выводы можно представить въ такой формѣ:

> Если вѣрно предложеніе A, то вѣрно B.
> Предложеніе B не вѣрно.
> Значитъ не вѣрно предложеніе A,

представляющей общій видъ второй фигуры силлогизма

Этой фигурѣ придаютъ обыкновенно другую форму:

Всѣ рыбы дышатъ жабрами
Китъ дышитъ легкими.
Значитъ, китъ не рыба

Здѣсь сущность вывода состоитъ какъ будто въ томъ, чтобы исключить видъ „китъ“ изъ рода рыбъ. Однако, если вдуматься во внутренній его смыслъ, въ то, чѣмъ такой выводъ можетъ быть вызванъ, то станетъ очевиднымъ, что все дѣло здѣсь въ опроверженіи предположенія, что китъ рыба, которое вызывается наружнымъ видомъ этого животнаго Какъ въ приведенныхъ выше примѣрахъ заключенія по 2-й фигурѣ силлогизма въ математикѣ, такъ и во всѣхъ другихъ случаяхъ ея примѣненія въ этой наукѣ, смыслъ вывода заключается въ опроверженіи нѣкоторыхъ предположеній.

Мы разсматривали до сихъ поръ меньшую посылку, какъ причину заключенія. Это имѣетъ значеніе въ математикѣ, гдѣ большей посылкой въ выводѣ бываетъ аксіома, доказанная раньше теорема, или опредѣленія — предложенія, относительно вѣрности или невѣрности которыхъ не можетъ быть рѣчи. Бо́льшая посылка даже, какъ мы видѣли на разсмотрѣнныхъ примѣрахъ, часто совсѣмъ опускается, и заключеніе представляется, такимъ образомъ, какъ выводъ или слѣдствіе одной меньшей посылки. Но вообще бо́льшую посылку столько же основанія считать причиной или частью причины заключенія, какъ и меньшую посылку, потому что обѣ посылки вмѣстѣ составляютъ всю причину заключенія. Указанныя нами два свойства связи причины и слѣдствія этимъ не измѣняются: 1) если вѣрна причина, т.-е. вѣрны обѣ посылки, то вѣрно и слѣдствіе, и 2) если не вѣрно слѣдствіе, то не вѣрна причина, или не вся причина вѣрна; значитъ или обѣ, или одна изъ посылокъ не вѣрна. Тамъ, гдѣ, какъ въ разсмотрѣнныхъ нами случаяхъ, не можетъ быть рѣчи о невѣрности большей посылки, меньшая посылка выдвигается на первый планъ, объ ней говорятъ, какъ о причинѣ заключенія, и по невѣрности слѣдствія мы заключаемъ о невѣрности меньшей посылки; тамъ же, гдѣ бо́льшая посылка представляетъ вопросъ, а въ вѣрности меньшей легко убѣдиться, ее какъ бы упускаютъ изъ виду и говорятъ о большей, какъ о причинѣ заключенія; по невѣрности слѣдствія заключаютъ о невѣрности большей посылки.

Въ физикѣ новыя гипотезы о законахъ или внутренней природѣ явленій установляются послѣ опроверженія старыхъ. Старыя гипотезы признаются опровергнутыми, когда открываются факты, противорѣчащіе какимъ-нибудь выводамъ, т.-е. логическимъ послѣдствіямъ гипотезъ. Если слѣдствіе гипотезы противорѣчитъ фактамъ, то оно не вѣрно, а если оно не вѣрно, то не вѣрна и причина, т.-е. гипотеза. Когда натуралистъ причисляетъ новый видъ къ извѣстному роду, историкъ относитъ откопанный предметъ или документъ, или какое-либо событіе къ извѣстной эпохѣ, они обыкновенно пользуются при этомъ 2-й фигурой силогизма, опровергая много возникающихъ у нихъ при этомъ предположеній Предположенія опровергаются тѣмъ, что какія-либо необходимыя слѣдствія, вытекающія изъ нихъ, противорѣчатъ установленнымъ фактамъ.

c) Доказательство отъ противнаго.

Доказательство отъ противнаго, которое правильнѣе было бы назвать доказательствомъ отъ противорѣчащаго предположенія, представляетъ доказательство какого-нибудь предложенія посредствомъ опроверженія — приведенія къ нелѣпости противорѣчащаго предложенія. Полное названіе его въ логикахъ: reductio ad absurdum instantiae contradictoriae. Доказательство начинается съ предположенія, что вѣрно предложеніе, противорѣчащее доказываемой теоремѣ, и изъ него выводятъ слѣдствіе, которое противорѣчило бы доказанной раньше теоремѣ, аксіомѣ или условію данной теоремы или выводу изъ условія. Тогда, если не вѣрно слѣдствіе, то по 2-й фигурѣ силлогизма заключаемъ, что невѣрно и основаніе, т.-е. допущеніе, противорѣчающее доказываемой теоремѣ; а по свойству противорѣчащихъ предложеній (если не вѣрно одно изъ нихъ, то вѣрно другое) заключаемъ, что доказываемая теорема вѣрна. Такъ, доказывая теорему: „изъ точки внѣ прямой можно опустить на нее только одинъ перпендикуляръ“, предполагаемъ, что вѣрно противорѣчащее предложеніе: изъ нѣкоторой точки на нѣкоторую прямую опущены два перпендикуляра. Отсюда выводимъ, что одинъ прямой уголъ, какъ внѣшній уголъ треугольника, больше другого прямого внутренняго не смежнаго съ нимъ угла того же треугольника. Это слѣдствіе противорѣчитъ доказанной раньше теоремѣ, слѣдовательно не вѣрно; а тогда не вѣрно и основа-

ніе, т.-е. противорѣчащее предложеніе, и слѣдовательно вѣрна доказываемая теорема. Чтобы доказать, что прямая, параллельная какой-либо прямой на плоскости и не совпадающая съ послѣдней, параллельна ей, предполагаемъ, что вѣрно противорѣчащее предложеніе, что нѣкоторая прямая AB, параллельная другой CD, лежащей въ нѣкоторой плоскости MN, и сама въ послѣдней не лежащая, пересѣкаетъ эту плоскость. Изъ этого предложенія, при помощи раздѣленія — исключающаго и исчерпывающаго — выводимъ, что точка пересѣченія AB съ плоскостью лежитъ или на CD, или внѣ CD. Въ первомъ случаѣ AB и CD пересѣкаются, это противорѣчитъ одной части условія; во второмъ — выводимъ, что плоскость, проходящая черезъ обѣ параллельныя, имѣя съ MN общія CD и точку внѣ ея, совпадаетъ съ MN. Это противорѣчитъ другой части условія. Такъ какъ раздѣленіе исчерпывающее и точка пересѣченія не можетъ быть ни на CD, ни внѣ ея, то ея совсѣмъ не можетъ быть, и противорѣчащее предложеніе не вѣрно, а вѣрна доказываемая теорема

Невѣрность противорѣчащаго предложенія очень часто доказывается посредствомъ обратно-противоположной теоремы, а въ группахъ изъ четырехъ теоремъ: прямой, противоположной, обратной и обратно-противоположной объ обратныя могутъ быть доказаны способомъ отъ противнаго посредствомъ прямой и противоположной.

d) Теорема основная, обратная, противоположная и обратно-противоположная.

1. Обращеніе теоремъ. Обращеніемъ предложенія называется въ логикѣ перестановка его терминовъ: подлежащаго на мѣсто сказуемаго и наоборотъ. Подлежащее вмѣстѣ съ относящимися къ нему второстепенными частями и придаточными предложеніями, если таковыя есть, составляетъ точное выраженіе предмета, подлежащаго сужденію, или то, что называется условіемъ теоремы; сказуемое со всѣми относящимися къ нему второстепенными частями и придаточными предложеніями выражаетъ приписываемое подлежащему свойство или то, что называется заключеніемъ теоремы. Поэтому обращеніе теоремы можно также опредѣлить, какъ перестановку условія на мѣсто заключенія, а заключенія на мѣсто условія.

Такъ теорема:

равныя наклонныя равно удалены отъ перпендикуляра,

дастъ обратную:

наклонныя, равно удаленныя отъ перпендикуляра, равны,

или, выдѣляя условія и заключеніе:

если наклонныя равны, то онѣ равно удалены отъ перпендикуляра,

дастъ по обращеніи:

если наклонныя равно удалены отъ перпендикуляра, то онѣ равны.

Понятно, что обратность составляетъ взаимное свойство двухъ теоремъ. Каждую изъ приведенныхъ выше двухъ теоремъ можно принять за прямую, тогда другая будетъ обратная ей. Вторая теорема находится совершенно въ такомъ же отношеніи къ первой, въ какомъ первая ко второй. Но не всякое предложеніе можетъ быть обращено. Можно даже сказать, что большею частью предложенія не могутъ быть обращены. Всякая пара смежныхъ угловъ равна двумъ прямымъ, но не всякая пара угловъ, дающая въ суммѣ $2d$, будетъ парой смежныхъ угловъ. Понятіе о парѣ угловъ, дающихъ въ суммѣ $2d$, есть понятіе болѣе общее, чѣмъ понятіе о парѣ смежныхъ угловъ, потому что обнимаетъ собою всѣ пары смежныхъ угловъ и еще другія пары угловъ, какъ угодно расположенныхъ, но дающихъ въ суммѣ $2d$. Число предметовъ, обнимаемыхъ понятіемъ, называется объемомъ. Объемъ сказуемаго въ нашей теоремѣ больше объема подлежащаго. Такое предложеніе нельзя обратить. Во всякомъ предложеніи мы высказываемъ что-либо обо всѣхъ предметахъ, означенныхъ подлежащимъ. Слѣдовательно, сказуемое должно обнимать всѣ предметы, означаемые подлежащимъ, и объемъ его не можетъ быть меньше объема подлежащаго: онъ равенъ ему или больше; если равенъ — предложеніе можетъ быть обращено, если больше — нѣтъ, потому что тогда получили бы предложеніе, въ которомъ объемъ сказуемаго меньше объема подлежащаго. Поэтому ясно, что для того, чтобы предложеніе можно было обратить, нужно, чтобы объемы подлежащаго и сказуемаго въ немъ были равны или чтобы ни одинъ предметъ, не входящій въ объемъ подлежащаго, не входилъ и въ объемъ сказуемаго. Это имѣетъ мѣсто въ при-

веденной теоремѣ о равныхъ наклонныхъ, потому что наклонныя неравныя не равно удалены отъ перпендикуляра.

Если объемъ сказуемаго больше объема подлежащаго, то для обращенія предложенія нужно предварительно ограничить объемъ сказуемаго: ввести въ сказуемое новыя опредѣленія, новые признаки, которые принадлежатъ всему подлежащему, но по отношенію къ сказуемому представляютъ случайные признаки, или акциденціи, принадлежащіе только части его объема. Такое обращеніе называется conversio per accidens Такъ въ теоремѣ:

пара смежныхъ угловъ равна двумъ прямымъ,

чтобы объемъ сказуемаго сталъ равенъ объему подлежащаго, надо первое дополнить новымъ условіемъ, что углы, дающіе въ суммѣ два прямыхъ, должны быть сложены вмѣстѣ или приложены другъ къ другу извѣстнымъ образомъ. Получимъ предложеніе: пара смежныхъ угловъ есть пара угловъ, сложенныхъ вмѣстѣ и равныхъ въ суммѣ двумъ прямымъ.

Это предложеніе уже можно обратить. То же встрѣтимъ и въ обратной теоремѣ о вертикальныхъ углахъ.

Этотъ признакъ, что углы приложены одинъ къ другому — случайный для понятія о парѣ угловъ, которыхъ сумма равна $2d$, потому что такіе 2 угла могутъ быть какъ угодно расположены, онъ составляетъ акциденцію этого понятія; но онъ принадлежитъ всѣмъ парамъ смежныхъ угловъ. Это conversio per accidens. При обращеніи per accidens отношеніе между обратной теоремой и прямой будетъ уже не то, что между прямой и обратной: чтобы получить опять прямую теорему, надо не ограничивать объемъ сказуемаго обратной теоремы, а расширить объемъ подлежащаго. Въ этомъ случаѣ обратной называется всегда та, которая получается изъ другой съ ограниченіемъ сказуемаго.

2. Противоположныя теоремы. Выше мы видѣли, что для того, чтобы была вѣрна обратная теорема: равныя наклонныя равно удалены отъ перпендикуляра, нужно, чтобы наклонныя, неравно удаленныя отъ перпендикуляра, были не равны. Это предложеніе составляется изъ основной теоремы: наклонныя, равно удаленныя отъ перпендикуляра, равны, черезъ отрицаніе условія и заключенія, и утверждаетъ, что объемъ сказуемаго не заключаетъ въ себѣ ничего, что не заключалось бы въ подлежащемъ. Такое предложеніе называется противополож-

нымъ. Такъ, теорема: всякое число, не дѣлящееся на данное число, не заключаетъ всѣхъ первоначальныхъ дѣлителей даннаго числа, противоположна теоремѣ: всякое число, дѣлящееся на данное число, заключаетъ всѣ первоначальные дѣлители даннаго числа. Такъ какъ отрицаніе отрицанія есть утвержденіе, то можно получить основную теорему, прибавляя отрицаніе къ условію и заключенію (подлежащему и сказуемому) противоположной теоремы: число не не дѣлящееся — значитъ дѣлящееся, не не заключаетъ — значитъ заключаетъ. Поэтому основная теорема противоположна противоположной, и слѣдовательно противоположность есть взаимное свойство двухъ теоремъ.

3. Группы изъ четырехъ теоремъ. Обратную теорему можно тоже преобразовать посредствомъ противоположенія; полученная теорема по отношенію къ основной называется обратно-противоположной. Такимъ образомъ изъ основной теоремы можно получить три другія теоремы, состоящія изъ тѣхъ же терминовъ.

Основная { число, дѣлящееся на данное число, заключаетъ всѣ первоначальные дѣлители даннаго числа.

Обратная { число, заключающее всѣ первоначальные дѣлители даннаго числа, дѣлится на данное число.

Противоположная { число, не дѣлящееся на данное число, не заключаетъ всѣхъ первоначальныхъ дѣлителей числа.

Обратно-противоположная { число, не заключающее всѣхъ первоначальныхъ дѣлителей даннаго числа, не дѣлится на данное число.

Чтобы рельефнѣе выдѣлить отношенія между этими теоремами, воспользуемся сокращеннымъ обозначеніемъ ихъ терминовъ. Обозначимъ понятіе: число, дѣлящееся на данное число, одной буквой A, а понятіе: число, заключающее всѣ первоначальные дѣлители даннаго числа, — одной буквой B, тогда всѣ четыре теоремы можно обозначить такъ:

Основная: A есть B.
Обратная: B есть A.
Противоположная: не A есть не B, или не есть B
Обратно-противоположная: не B есть не A, или не есть A.

Любыя двѣ изъ этихъ теоремъ находятся другъ къ другу въ одномъ изъ этихъ трехъ отношеній: обратны, противоположны, или обратно-противоположны. Такъ 4-я и 2-я — противоположны, 4-я и 3-я — обратны, 2-я и 3-я — обратно-противоположны.

Основная теорема утверждаетъ, что всякое A есть B, т.-е. что весь объемъ A заключенъ въ объемѣ B. Обратная теорема утверждаетъ, что весь объемъ B заключенъ въ объемѣ A Противоположная теорема утверждаетъ, что все, что не входитъ въ объемъ A, не входитъ и въ B, или что въ объемѣ B не заключается ничего, что не входило бы въ A, слѣдовательно, что весь объемъ B заключенъ въ A. Отсюда видно, что противоположная теорема въ другой формѣ утверждаетъ въ сущности то же самое, что и обратная: если вѣрна одна, то необходимо вѣрна и другая. Обратно-противоположная теорема утверждаетъ, что все, что не входитъ въ B, не входитъ и въ A, или что въ A нѣтъ ничего, что не входило бы въ B, слѣдовательно, что весь объемъ A заключается въ B Эта теорема утверждаетъ, значитъ, въ сущности то же, что основная; эти теоремы обусловливаютъ другъ друга: если вѣрна одна, то вѣрна и другая. Замѣтивъ, что обратная теорема и противоположная обратно противоположны одна другой, придемъ къ заключенію, что всякія двѣ теоремы, обратно противоположныя другъ другу, взаимно обусловливаютъ другъ друга: если вѣрна одна, то вѣрна и другая. Самый простой способъ сдѣлать очевидной эту взаимную зависимость — есть способъ доказательства отъ противнаго. Въ самомъ дѣлѣ, если A есть B, то не B есть не A, потому что, если бы не B было A, то, такъ какъ A есть B, не B было бы B. Точно такъ же, если не B есть не A, то A есть B, потому что, если бы A было не B, то, такъ какъ не B есть не A, A было бы не A. Однако, въ группахъ изъ четырехъ теоремъ въ курсѣ геометріи теоремамъ противоположнымъ соотвѣтствуютъ такія, которыя имѣютъ не совсѣмъ тотъ смыслъ, какъ объяснено выше. Такъ, въ теоремахъ о наклонныхъ противоположной теоремѣ соотвѣтствуетъ такая: наклонная, дальше отстоящая отъ перпендикуляра, больше. Эта теорема утверждаетъ больше того, что утверждала бы собственно противоположная теорема: наклонныя, не равно удаленныя отъ перпендикуляра, не равны; она указываетъ еще, какая изъ неравныхъ наклонныхъ больше. Но такъ какъ тео-

БИБЛИОТЕКА

ремы противоположныя въ собственномъ смыслѣ во всѣхъ этихъ случаяхъ не употребительны, то названіе переносится на эти заступающія ихъ мѣсто теоремы. Только слѣдуетъ замѣтить, что здѣсь названіе „противоположной“ означаетъ уже не взаимное отношеніе двухъ теоремъ: отношеніе основной теоремы къ противоположной уже не то, что противоположной къ основной. Чтобы образовать противоположную теорему, надо приставить отрицаніе къ подлежащему и сказуемому основной теоремы и затѣмъ къ полученной такимъ образомъ теоремѣ прибавить дополнительное утвержденіе, которое распредѣляетъ подлежащее и сказуемое полученнаго противоположнаго предложенія, указывая, какая часть подлежащаго входитъ въ какую часть сказуемаго: дальше отстоящая наклонная есть бо́льшая, ближе отстоящая — меньшая. Это представляетъ, слѣдовательно, противоположеніе съ распредѣленіемъ подлежащаго и сказуемаго. Для того, чтобы изъ такого противоположнаго предложенія получить основное, надо устранить это распредѣленіе, а затѣмъ прибавить отрицаніе къ подлежащему и сказуемому.

Сообразно съ этимъ измѣнится и значеніе теоремы обратно-противоположной и выведенная зависимость между обратно-противоположными теоремами. Теорема обратно-противоположная съ распредѣленіемъ уже не обусловливается основной теоремой, потому что эта послѣдняя не содержитъ распредѣляющаго предложенія, но сама ее обусловливаетъ: изъ того, что равно-удаленныя наклонныя равны, слѣдуетъ, что неравныя не равно удалены; но не слѣдуетъ, которая ближе и которая дальше; но изъ того, что бо́льшая наклонная дальше, слѣдуетъ, что равно-удаленныя равны, потому что если бы были не равны, то бо́льшая была бы дальше.

е) Доказательство отъ противнаго посредствомъ обратно-противоположной теоремы.

Если доказываемое предложеніе представить въ формѣ: всякое A есть B, — противорѣчащее ему предложеніе будетъ: нѣкоторые A не B. Невѣрность его становится очевидной, если доказана теорема обратно противоположная доказываемой: не B не есть A. По 1-й фигурѣ силлогизма заключаемъ:

БП. Всякое не B не есть A
МП. *Нѣкоторыя A не B*
Заключеніе: Нѣкоторыя A не A

Невѣрность заключенія указываетъ на невѣрность по крайней мѣрѣ одной изъ посылокъ, а если обратно-противоположное предложеніе представляетъ аксіому или доказанную теорему, то не вѣрно противорѣчащее предложеніе.

Всѣ обратныя теоремы въ группахъ четырехъ теоремъ доказываются или могутъ быть доказаны на основаніи противоположныхъ, которыя имъ обратно противоположны. Изъ теоремы: наклонная, имѣющая бо́льшую проекцію, больше (противоположная), — слѣдуетъ, что равныя наклонныя имѣютъ равныя проекціи (обратная), потому что если бы имѣли неравныя проекціи, то были бы не равны. Теорема: двѣ прямыя, перпендикулярныя къ третьей, параллельны между собой, доказывается способомъ отъ противнаго на основаніи теоремы: изъ точки внѣ прямой можно опустить на послѣднюю только одинъ перпендикуляръ. Эта послѣдняя теорема представляетъ въ сущности теорему обратно-противоположную 1-й: двѣ линіи непараллельныя, т.-е исходящія изъ одной точки, не обѣ перпендикулярны къ 3-й, т.-е. не могутъ быть обѣ перпендикулярны къ 3-й.

Теорема: кратчайшее разстояніе точки отъ прямой есть перпендикуляръ, — доказывается способомъ отъ противнаго на основаніи обратно-противоположной: наклонная, т.-е. не перпендикуляръ, больше перпендикуляра, т.-е. не есть кратчайшее разстояніе.

f) Доказательство отъ противнаго обратно-противоположной теоремы на основаніи основной и противоположной.

При простомъ обращеніи и простомъ противоположеніи, обратно-противоположная теорема выражаетъ, какъ мы видѣли, въ сущности то же, что и основная, только въ другой формѣ. Тождество смысла ихъ открывается способомъ отъ противнаго: основная доказывается на основаніи обратно-противоположной, или обратно-противоположная, на основаніи основной. Теорема: изъ точки внѣ прямой можно опустить на нее только одинъ перпендикуляръ, — обратно противоположна теоремѣ: двѣ прямыя, перпендикулярныя къ третьей, параллельны между собой, при простомъ обращеніи и простомъ противоположеніи. Вторая доказывается на основаніи первой. Но можно было доказать первую, принимая за основаніе вторую: если бы можно было опустить два перпендикуляра, то получили бы двѣ прямыя,

перпендикулярныя къ третьей и пересѣкающіяся въ одной точкѣ, что̀ противорѣчитъ второй теоремѣ. Но при противоположеніи съ распредѣленіемъ подлежащаго и сказуемаго, обратно противоположная теорема содержитъ все то, что основная, и еще сужденіе, распредѣляющее подлежащее и сказуемое. Такъ какъ она содержитъ все то, что и основная, то на основаніи ея можно доказать основную, какъ это было во всѣхъ остальныхъ примѣрахъ предыдущаго §; но нельзя доказать обратно-противоположную, на основаніи одной основной, потому что послѣдняя не содержитъ распредѣляющаго сужденія, содержащагося въ обратно-противоположной. Это сужденіе содержится тоже въ противоположной теоремѣ. Поэтому на основаніи основной и противоположной можно доказать обратно-противоположную.

Такъ, теорема: бо́льшая наклонная имѣетъ бо́льшую проекцію (обратно-противоположная), доказывается на основаніи теоремъ: наклонныя съ равными проекціями равны (основная), и наклонная съ большей проекціей больше (противоположная) На основаніи одной основной теоремы можно было бы доказать обратно-противоположную теорему безъ распредѣленія подлежащаго и сказуемаго: неравныя наклонныя имѣютъ неравныя проекціи (потому что если бы имѣли равныя, то были бы равны), но нельзя доказать распредѣляющаго сужденія: которая дальше, которая ближе. Это послѣднее заключено въ противоположной теоремѣ, поэтому эта послѣдняя также необходима для доказательства обратно-противоположной.

Теорема: въ треугольникѣ противъ большаго угла лежитъ бо́льшая сторона, — обратно противоположна теоремѣ: въ равнобедренномъ треугольникѣ углы при основаніи равны, — потому что эту послѣднюю можно выразить такъ: въ треугольникѣ противъ равныхъ сторонъ лежатъ равные углы. 1-я доказывается на основаніи второй и противоположной: въ треугольникѣ противъ большей стороны лежитъ большій уголъ.

Теорема: въ треугольникахъ съ двумя соотвѣтственно равными сторонами, если третьи стороны не равны, то противъ большей стороны лежитъ большій уголъ, — доказывается способомъ отъ противнаго на основаніи двухъ теоремъ: если двѣ стороны одного треугольника и уголъ между ними соотвѣтственно равны двумъ сторонамъ и углу между ними другого, то треугольники равны (значитъ и третьи стороны равны), и другой: въ треугольникахъ съ двумя соотвѣтственно равными сторонами, если углы

между ними не равны, то противъ большаго угла лежитъ и бо́льшая сторона. Первая теорема обратно противоположна второй, если въ ней взять часть заключенія, поставленную въ скобкахъ; третья противоположна второй. Первая доказывается на основаніи этой части второй и на основаніи третьей.

g) Способъ предѣловъ.

Способъ предѣловъ употребляется въ геометріи при вычисленіи величинъ кривыхъ формъ и при доказательствѣ пропорціональности несоизмѣримыхъ значеній величинъ, когда доказана пропорціональность любыхъ соизмѣримыхъ значеній ихъ.

1) При выводѣ формулъ площадей фигуръ мы принимаемъ за основную форму прямоугольникъ и выводимъ извѣстнымъ способомъ формулу площади прямоугольника; далѣе, на основаніи теоремы о равновеликости прямоугольниковъ и параллелограммовъ, выводимъ формулу площади параллелограмма. Разбивая параллелограммъ на два равныхъ треугольника, выводимъ формулу площади треугольника. Но мы не можемъ ни однимъ изъ этихъ прямыхъ методовъ прійти къ формулѣ площади круга. Къ ней приходятъ не прямымъ путемъ, доказывая, что она представляетъ общій предѣлъ площадей правильныхъ вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ. Этотъ выводъ, положительный по формѣ, отрицателенъ по существу. Это можно видѣть изъ доказательства основной теоремы о предѣлахъ: предѣлы равныхъ перемѣнныхъ равны. Это доказательство отъ противнаго представляетъ опроверженіе предположенія, что между предѣлами существуетъ нѣкоторая конечная разность. Этотъ отрицательный характеръ сообщается всѣмъ выводамъ метода предѣловъ. Площадь круга есть предѣлъ — значитъ, что между площадью круга и площадями правильныхъ вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ не можетъ сохраняться какая-либо конечная разность. Отсюда можно видѣть, что оба непрямые метода — методы доказательства отъ противнаго и методъ предѣловъ — представляютъ отрицательные выводы по 2-й фигурѣ силлогизма.

2) Мы можемъ доказать, что площадь круга есть общій предѣлъ площадей вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ, потому что ясно видимъ, что она больше площади всякаго вписаннаго многоугольника и меньше площади описаннаго,

потому что содержитъ въ себѣ первую, какъ часть, и сама содержится вся, какъ часть, во второй. Въ подобномъ положеніи мы находимся относительно объемовъ круглыхъ тѣлъ: объемъ каждаго изъ круглыхъ тѣлъ — цилиндра, конуса, шара — заключаетъ въ себѣ, какъ часть, объемъ вписаннаго многогранника или тѣла вращенія (для шара) и самъ заключается весь внутри объема описаннаго многогранника или тѣла вращенія. Поэтому мы можемъ доказать, что объемъ круглаго тѣла есть общій предѣлъ объемовъ соотвѣтствующихъ вписанныхъ и описанныхъ многогранниковъ или тѣлъ вращенія.

3) Но въ иномъ положеніи мы находимся относительно окружности круга и поверхностей круглыхъ тѣлъ. Мы не можемъ представить окружность или дугу, какъ часть какой-либо прямой, или прямую, какъ часть окружности или дуги, потому что никакая дуга не можетъ быть совмѣщена ни съ какимъ отрѣзкомъ прямой, и хотя изъ опредѣленія прямой, какъ кратчайшаго разстоянія между 2 точками, слѣдуетъ, что окружность длиннѣе периметра всякаго вписаннаго многоугольника, но у насъ нѣтъ такого же очевиднаго доказательства того, что она короче периметра всякаго вписаннаго многоугольника. Мы имѣемъ только неполное понятіе о длинѣ окружности, какъ о величинѣ. Если бы не имѣли никакого, то могли бы дать ему произвольное опредѣленіе, только бы оно само по себѣ имѣло смыслъ: оно не могло бы чему-либо противорѣчить, т.-е. какому-либо нашему знанію о длинѣ окружности, разъ что мы никакого не имѣли бы; но такъ какъ мы хотя неполное понятіе о длинѣ имѣемъ, опредѣленіе должно согласоваться съ нимъ. Длину окружности опредѣляютъ, какъ общій предѣлъ периметровъ правильныхъ вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ. Для того, чтобы это опредѣленіе само по себѣ имѣло смыслъ, надо доказать, что эти периметры стремятся къ общему предѣлу. Далѣе, такъ какъ периметръ правильныхъ вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ приближается къ предѣлу, все возрастая, то предѣлъ больше его. Слѣдовательно, опредѣленіе состоятельно и согласуется съ тѣмъ, что мы помимо его знаемъ о длинѣ окружности.

Относительно поверхностей цилиндра, конуса, шара мы не имѣемъ основаній ни для какихъ очевидныхъ выводовъ, больше онѣ, или меньше поверхностей правильныхъ вписанныхъ многогранниковъ или тѣлъ вращенія, а поэтому мы совсѣмъ не имѣемъ

объ нихъ понятія, какъ о величинахъ, т-е. измѣримыхъ свойствахъ тѣлъ: онѣ опредѣляются, какъ общіе предѣлы поверхностей правильныхъ вписанныхъ призмъ, пирамидъ, тѣлъ вращенія. Для этого необходимо доказать, что эти послѣднія имѣютъ общіе предѣлы.

Доказательство пропорціональности несоизмѣримыхъ значеній различныхъ величинъ — отрѣзковъ прямыхъ, угловъ и дугъ, площадей прямоугольниковъ и ихъ линейныхъ измѣреній, объемовъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ и ихъ линейныхъ измѣреній, двугранныхъ и ихъ линейныхъ угловъ, — подходитъ подъ 2-й случай примѣненія метода предѣловъ. Понятіе объ отношеніи, составленное для соизмѣримыхъ значеній, не примѣнимо къ значеніямъ несоизмѣримымъ. Отношеніемъ несоизмѣримыхъ значеній называется общій предѣлъ двухъ рядовъ отношеній соизмѣримыхъ значеній. Для того, чтобы это опредѣленіе имѣло смыслъ, надо доказать, что эти два ряда имѣютъ общій предѣлъ.

Для доказательства существованія предѣловъ для периметровъ правильныхъ вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ или рядовъ раціональныхъ отношеній (отношеній соизмѣримыхъ значеній), о которыхъ идетъ рѣчь, принимается новая аксіома о количествахъ: рядъ значеній, которыя все возрастаютъ и постоянно остаются меньше извѣстнаго даннаго значенія, стремится къ предѣлу, равному или меньшему даннаго значенія, и рядъ значеній, которыя все убываютъ и остаются больше нѣкотораго даннаго значенія, стремится къ предѣлу равному или большему даннаго значенія.

На основаніи этой аксіомы доказывается теорема, которая и примѣняется обыкновенно къ доказательству существованія предѣловъ: если два ряда значеній, удовлетворяютъ условіямъ: 1) одинъ все возрастаетъ, другой все убываетъ, 2) первый остается меньше второго и 3) разница между соотвѣтственными членами ихъ дѣлается какъ угодно малой, — то они стремятся къ общему предѣлу.

Для поверхностей круглыхъ тѣлъ доказательство существованія предѣла облегчается тѣмъ, что мы можемъ прямо составить выраженіе, служащее предѣломъ поверхностей многогранниковъ или тѣлъ вращенія, такъ какъ отдѣльные множители его уже извѣстны, какъ предѣлы. Напримѣръ, для поверхности конуса можемъ доказать прямо на основаніи опре-

дѣленія предѣла, безъ посредства указанныхъ выше теоремъ и аксіомъ, что выраженіе $\frac{1}{2}Cl$ есть общій предѣлъ для $\frac{1}{2}pa$ и $\frac{1}{2}Pl$, боковыхъ поверхностей правильныхъ вписанныхъ и описанныхъ пирамидъ, потому что разность между 1-мъ выраженіемъ и каждымъ изъ двухъ другихъ можетъ быть сдѣлана какъ угодно малой.

Для поверхности шарового слоя можемъ доказать, $2\pi Rh$ есть общій предѣлъ поверхностей вписанныхъ и описанныхъ тѣлъ вращенія, такъ какъ разность между этимъ выраженіемъ и выраженіями поверхностей $2\pi ah$ и $2\pi Rh'$ можетъ быть сдѣлана какъ угодно малой.

V. Измѣреніе геометрическихъ величинъ.

Предметы и явленія обладаютъ свойствами въ различныхъ степеняхъ, и эти послѣднія допускаютъ болѣе или менѣе точное сравненіе. Мы различаемъ степени красоты двухъ предметовъ, находимъ, что въ одномъ поступкѣ больше добра, чѣмъ въ другомъ. Но ни различеніе степеней въ какомъ-либо свойствѣ, ни возможность болѣе или менѣе точнаго сравненія этихъ степеней еще не дѣлаютъ свойство величиной. Послѣдней становится свойство только, когда находимъ способъ для его измѣренія. Величина есть измѣренное свойство. Для измѣренія свойства не достаточно умѣть сравнивать его степени, хотя бы и *точно*: надо еще умѣть найти отношеніе между ними. Отношеніе — понятіе производное изъ понятія суммы, которое, какъ частный случай, заключаетъ понятіе произведенія. Отсюда понятіе объ отношеніи цѣломъ, затѣмъ дробномъ и ирраціональномъ. Такимъ образомъ основаніемъ теоріи измѣренія являются опредѣленія равенства и суммы. Ученіе о прямыхъ или углахъ начинается съ опредѣленій равныхъ отрѣзковъ или угловъ и суммы двухъ отрѣзковъ или угловъ. Изъ нихъ уже выводится понятіе объ отношеніи. И тамъ, гдѣ эти опредѣленія формально не даются, они все же обусловливаютъ выводы: въ учебникахъ геометріи обыкновенно опускаются опредѣленія равенства и суммы площадей, но въ теоремѣ объ отношеніи площадей прямоугольниковъ съ равными основаніями мы не могли бы найти отношенія

площадей, если бы не видѣли ясно, что площади клѣтокъ, на которыя разбиваются прямоугольники, равны и что площадь каждаго прямоугольника есть сумма площадей всѣхъ клѣтокъ, т.-е. если бы не имѣли точнаго понятія о равенствѣ и суммѣ площадей, хотя бы и не выраженнаго формально въ опредѣленіи. То же относится къ объемамъ и другимъ геометрическимъ величинамъ

Итакъ, свойства могутъ быть измѣрены и потому называются величинами, когда они допускаютъ точныя опредѣленія равенства и суммы ихъ степеней.

Степени величинъ называются ихъ значеніями.

Длина. Прямолинейные отрѣзки можно совмѣщать и такимъ образомъ сравнивать ихъ длины и можно соединять такъ, что изъ нѣсколькихъ составится одинъ прямолинейный отрѣзокъ, въ длинѣ котораго сохраняются длины отдѣльныхъ отрѣзковъ, какъ ясно раздѣльныя части. Такое соединеніе значеній величины называется аддитивнымъ. Это даетъ возможность дать непосредственно точныя опредѣленія равенства и суммы длинъ, а слѣдовательно и измѣрять длины непосредственно. Для измѣренія длины прямыхъ, какое-либо значеніе длины, напримѣръ 1 сантиметръ, принимаютъ за единицу и отрѣзокъ прямой, длиной въ 1 сантиметръ, откладываютъ на любомъ другомъ отрѣзкѣ, длину котораго надо измѣрить, столько разъ, сколько уложится. Если концы эталона (отрѣзокъ, длина котораго равна сантиметру) и измѣряемаго отрѣзка совпали, сосчитываемъ, сколько разъ откладывали; полученное число называется отношеніемъ искомой длины къ сантиметру и представляетъ результатъ измѣренія. Если концы не совпали, для точнаго измѣренія искомой длины нужно найти общую мѣру между нею и сантиметромъ, если такая есть, и сосчитать, сколько разъ общая мѣра укладывается въ искомой длинѣ и въ сантиметрѣ. Раздѣливъ 1-е число на 2-е, получимъ частное, которое называется отношеніемъ искомой длины къ сантиметру и представляетъ результатъ измѣренія. Если искомая длина не соизмѣрима съ сантиметромъ, то точное измѣреніе невозможно. Тогда находятъ приближенное отношеніе, дѣля сантиметръ на произвольное число частей и откладывая эту часть на искомой длинѣ столько разъ, сколько уложится; дѣля это послѣднее число на число частей въ сантиметрѣ, получимъ приближенное отношеніе искомой длины къ сантиметру. Если будемъ дѣлить сантиметръ на большее и

большее число частей, приближенныя отношенія будутъ приближаться къ нѣкоторому предѣлу. Этотъ предѣлъ и называется истиннымъ отношеніемъ искомой длины къ сантиметру, а также несоизмѣримымъ или ирраціональнымъ числомъ.

Дугу круга нельзя совмѣстить съ отрѣзкомъ прямой, ни дугу одного круга съ дугой другого неравнаго ему круга, поэтому нельзя найти непосредственно отношеніе длины дуги круга къ длинѣ прамолинейнаго отрѣзка или длины дуги одного круга къ длинѣ дуги неравнаго ему круга. Но дуги одного и того же круга или равныхъ круговъ можно совмѣщать и соединять нѣсколько дугъ въ одну, въ длинѣ которой длины отдѣльныхъ дугъ сохраняются какъ раздѣльныя части, т.-е. соединять аддитивно; поэтому можно непосредственно найти отношенія длины двухъ дугъ равныхъ круговъ, какъ и для отрѣзковъ прямыхъ, и можно измѣрить всѣ какой-либо одной изъ нихъ.

Плоскіе углы и двугранные углы. Плоскіе и двугранные углы можно совмѣщать и соединять аддитивно и потому можно непосредственно найти отношеніе любыхъ двухъ плоскихъ угловъ или любыхъ двугранныхъ угловъ. Поэтому и тѣ и другіе допускаютъ непосредственное измѣреніе.

Площади и объемы. Площади и объемы соединяются аддитивно, но совмѣщать можно только площади, ограниченныя прямыми, и объемы, ограниченные плоскостями. Если двѣ площади ограничены прямыми, какой бы формы онѣ ни были, можно всегда одну изъ нихъ раздѣлить на такія части, чтобы всѣ онѣ уложились на другой, покрыли бы ее всю или часть ихъ покрыла бы всю другую, и такимъ образомъ убѣдиться въ равенствѣ или неравенствѣ площадей. Но вообще нельзя того же сдѣлать съ фигурами, ограниченными кривыми или кривыми и прямыми. Поэтому первыя фигуры допускаютъ непосредственное измѣреніе, вторыя — нѣтъ. То же относится и къ объемамъ, ограниченнымъ плоскостями, и къ объемамъ, ограниченнымъ, хотя бы отчасти, кривыми поверхностями.

Косвенное измѣреніе. Хотя углы плоскіе и двугранные, площади прямолинейныхъ фигуръ и объемы многогранниковъ и допускаютъ непосредственное измѣреніе, однако техническія удобства заставляютъ предпочитать для нихъ косвенное измѣреніе черезъ посредство длинъ. Измѣреніе одной величины черезъ посредство другой основывается на пропорціональности между ними. Какъ понятіе отношенія — производное изъ понятій

равенства и суммы, такъ понятіе пропорціональности — производное изъ понятія соотвѣтствія въ равенствѣ и суммѣ. Углы пропорціональны дугамъ, потому что равнымъ угламъ соотвѣтствуютъ равныя дуги, и углу, равному суммѣ нѣсколькихъ угловъ, соотвѣтствуетъ дуга, равная суммѣ дугъ, соотвѣтствующихъ каждому углу въ отдѣльности. Площади прямоугольниковъ съ равными основаніями пропорціональны высотамъ, потому что равнымъ высотамъ такихъ прямоугольниковъ соотвѣтствуютъ равныя площади, и суммѣ нѣсколькихъ высотъ соотвѣтствуетъ площадь, равная суммѣ площадей, соотвѣтствующихъ каждая отдѣльной высотѣ.

Если одного изъ этихъ условій — соотвѣтствія равенства или соотвѣтствія суммы — нѣтъ, то нѣтъ и пропорціональности. Между хордами и дугами круга есть соотвѣтствіе равенства, но нѣтъ соотвѣтствія суммы — онѣ не пропорціональны. Между углами, образуемыми радіусами векторами эллипса и соотвѣтствующими дугами, есть соотвѣтствіе суммы, но нѣтъ соотвѣтствія равенства — они не пропорціональны. Между послѣдовательными промежутками времени и соотвѣтствующими пространствами, проходимыми падающимъ тѣломъ, есть соотвѣтствіе суммы, но нѣтъ соотвѣтствія равенства — они не пропорціональны. Чтобы можно было доказать соотвѣтствіе равенства и суммы двухъ величинъ, нужно, чтобы значенія ихъ могли быть совмѣщаемы и чтобы, при аддитивномъ соединеніи значеній одной, значенія другой соединялись тоже аддитивно, а это именно тѣ условія, при которыхъ каждая величина въ отдѣльности допускаетъ непосредственное измѣреніе. Вотъ почему мы можемъ доказать пропорціональность въ тѣхъ именно случаяхъ, когда возможно и непосредственное измѣреніе.

Площадь и дуга круга. Площадь и дуга круга не могутъ быть точно измѣрены. Къ приближенному вычисленію ихъ черезъ радіусъ круга мы приходимъ при помощи метода предѣловъ. Задача вычисленія сводится къ числу π, одному и тому же для всѣхъ круговъ. Вычисливъ его съ любой точностью для одной окружности, получимъ возможность вычислять дуги и площади любыхъ круговъ.

VI. Построеніе геометрическихъ формъ.

Геометрическія построенія надо раздѣлить на главныя и вспомогательныя. Первыя — это построенія тѣхъ формъ, которыя

составляютъ предметы теоремъ, вторыя — это добавочныя построенія, которыя дѣлаются для доказательства теоремъ. Что касается до послѣднихъ, то доказательство теоремы не имѣло бы силы, если бы оно основывалось на невозможномъ построеніи. Поэтому для всѣхъ добавочныхъ построеній должна быть доказана ихъ возможность. Возможность обыкновенно доказывается тѣмъ, что они выполнимы. Исполненіе построеній въ конечномъ анализѣ приводится къ двумъ основнымъ построеніямъ, двумъ основнымъ геометрическимъ дѣйствіямъ: проведенію прямой черезъ двѣ точки и проведенію окружности изъ данной точки даннымъ радіусомъ. Возможность этихъ построеній принимается безъ доказательства наравнѣ съ аксіомами и выражается двумя постулатами:

1) Черезъ данныя двѣ точки можно провести прямую.

2) Изъ данной точки даннымъ радіусомъ можно описать окружность.

Отъ этихъ простѣйшихъ построеній переходятъ постепенно къ болѣе и болѣе сложнымъ, основываясь на свойствахъ построенныхъ формъ. Такимъ образомъ возможность опустить изъ данной точки перпендикуляръ на данную прямую основывается на доказанныхъ раньше свойствахъ треугольниковъ и смежныхъ угловъ и служитъ для доказательства многихъ послѣдующихъ теоремъ въ качествѣ добавочнаго построенія. Такимъ образомъ эти построенія вплетаются въ курсъ геометріи подъ видомъ задачъ, основываясь, подобно теоремамъ, на одинѣхъ теоремахъ и служа для доказательства другихъ.

Подобно вспомогательнымъ построеніямъ могли бы быть введены въ курсъ геометріи и главныя построенія. Тогда, доказывая свойства какой-нибудь формы, мы были бы убѣждены въ возможности самой формы и реальности ея опредѣленія. Геометрія представляла бы реальную науку о формахъ дѣйствительно существующихъ или возможныхъ въ нашемъ пространствѣ. Однако это доказательство главныхъ построеній не необходимо: сила доказательства не ослабляется тѣмъ, что мы не убѣждены въ возможности формы, соотвѣтствующей условію, только сама теорема пріобрѣтаетъ тогда условный характеръ и получаетъ тотъ смыслъ, что если бы оказалась форма, соотвѣтствующая условію теоремы, то она имѣла бы также свойства, содержащіяся въ заключеніи, и вся геометрія имѣла бы характеръ науки чисто идеальной: науки о формахъ, существую-

щихъ только въ понятіяхъ, въ опредѣленіяхъ. Однако практическое значеніе эта идеальная геометрія имѣла бы такое же, какъ и реальная, потому что теорема получаетъ практическое значеніе только тогда, когда встрѣчается на дѣлѣ форма, соотвѣтствующая условію, а тогда и заключеніе будетъ одинаково реально, какой бы геометріей мы ни пользовались.

Пріемы, при помощи которыхъ построеніе геометрическихъ формъ приводится къ другимъ болѣе простымъ или, наконецъ, къ названнымъ элементарнымъ построеніямъ, не могутъ быть всѣ подведены подъ общія правила, однако есть нѣсколько общихъ пріемовъ или методовъ построеній, изъ которыхъ каждый обнимаетъ большое число задачъ. Иногда пріемъ рѣшенія прямо вытекаетъ изъ какой-нибудь теоремы. Такъ, задача: найти кратчайшее разстояніе точки отъ прямой, приводится къ задачѣ: опустить изъ данной точки на прямую перпендикуляръ. Задача: найти 4-й пропорціональный къ 3-мъ даннымъ отрѣзкамъ, приводится къ задачѣ: провести параллельную къ данной прямой.

Методъ геометрическихъ мѣстъ.

Всѣ фигуры, которыя разсматриваетъ элементарная геометрія, состоятъ изъ прямыхъ, точекъ и круговъ. Для проведенія прямой надо имѣть двѣ точки, для проведенія круга — центръ его и, если не данъ радіусъ, одну точку окружности. Слѣдовательно, всякое построеніе приводится къ отысканію достаточнаго числа точекъ по даннымъ условіямъ. Каждая точка на плоскости опредѣляется двумя условіями, напримѣръ: разстояніями ея отъ двухъ данныхъ точекъ, отъ двухъ данныхъ прямыхъ, отъ прямой и точки и тому подобное; поэтому фигура, для построенія которой нужно n точекъ, опредѣляется $2n$ условіями. Если при построеніи фигуры на плоскости безразлично ея положеніе, то мы можемъ произвольно выбрать одну изъ точекъ и одну прямую, проходящую черезъ эту точку, и тогда для опредѣленія другой точки на этой прямой достаточно будетъ одного условія. Слѣдовательно, положеніе фигуры на плоскости опредѣляется тремя условіями, которыя не нужны, если это положеніе произвольно; всего нужно тогда $2n - 3$ условій. Построить треугольникъ, если положеніе его безразлично, можно по $2 \cdot 3 - 3 = 3$ условіямъ: по 3 сторонамъ, 2 сторонамъ и углу, сторонѣ и

2 угламъ, сторонѣ, углу и высотѣ и тому подобное. Четыреугольникъ строится по $2 . 4 - 3 = 5$ условіямъ: по 4 сторонамъ и углу, по 3 сторонамъ и 2 діагоналямъ. Нѣкоторыя условія могутъ заключаться въ извѣстныхъ свойствахъ фигуры, и тогда число необходимыхъ условій соотвѣтственно уменьшается. Свойства прямоугольнаго треугольника или равнобедреннаго заключаютъ по одному условію: прямой уголъ, равенство двухъ сторонъ, и потому для построенія ихъ необходимы 2 условія. При этомъ необходимо замѣтить, что въ расчетъ принимаются только независимыя между собой условія, а не тѣ, которыя могутъ быть выведены изъ другихъ. Такъ, въ равнобедренномъ треугольникѣ мы имѣемъ, повидимому, еще условіе — равенство угловъ при основаніи, но это — слѣдствіе равенства сторонъ и не должно приниматься въ расчетъ; въ прямоугольномъ треугольникѣ имѣемъ еще соотношеніе между сторонами: квадратъ гипотенузы равенъ суммѣ квадратовъ катетовъ, но это условіе опять слѣдствіе перваго и не должно приниматься въ расчетъ. Равносторонній треугольникъ опредѣляется двумя условіями: сторона 1-я равна 2-й и 2-я равна 3-й. Для построенія его необходимо одно условіе. Третье его свойство: 1-я сторона равна 3-й — слѣдствіе первыхъ двухъ, и въ расчетъ не принимается. Трапеція опредѣляется однимъ условіемъ: 2 стороны параллельны. Для построенія ея необходимы $2 . 4 - 3 - 1 = 4$ условія. Параллелограммъ опредѣляется двумя условіями: одна пара сторонъ параллельны и другая пара параллельны; для построенія параллелограмма необходимы $2 . 4 - 3 - 2 = 3$ условія. Свойства ромба и прямоугольника заключаютъ еще по одному независимому условію: эти фигуры строятся по 2 условіямъ; свойство квадрата — еще одно: строится по одному условію.

Итакъ, всякая точка на плоскости опредѣляется двумя условіями. Если взять одно изъ нихъ, то точка остается неопредѣленной, этому условію будутъ удовлетворять не одна, а безчисленное множество точекъ. Такая совокупность точекъ, которыя удовлетворяютъ всѣ одному условію, называется геометрическимъ мѣстомъ точекъ, удовлетворяющихъ этому условію. Методъ геометрическихъ мѣстъ состоитъ въ томъ, что беремъ отдѣльно каждое изъ условій, которыми опредѣляется какая-нибудь точка искомой фигуры, и строимъ соотвѣтствующія имъ геометрическія мѣста; общая точка или общія точки этихъ мѣстъ будутъ удовлетворять обоимъ условіямъ, слѣдовательно

опредѣлять искомую точку Такъ какъ мы можемъ строить только прямыя и круги, то методъ примѣнимъ только въ тѣхъ случаяхъ, когда геометрическими мѣстами точекъ, удовлетворяющихъ данным условіямъ, служатъ прямыя или круги, другими словами, когда данныя условія выражаются прямыми или кругами.

Пусть дано построить кругъ, который проходилъ бы черезъ данную точку A и касался бы данной прямой въ данной точкѣ B. Такъ какъ мы имѣемъ точку на окружности круга, то чтобы построить кругъ, достаточно найти его центръ Беремъ второе условіе Чтобы кругъ касался данной прямой въ точкѣ B, нужно, чтобы радіусъ, проведенный въ точку B, былъ перпендикуляренъ данной прямой. Слѣдовательно, центръ круга долженъ лежать на перпендикулярѣ, возставленномъ въ точкѣ B къ данной прямой. Этотъ перпендикуляръ выражаетъ 2-е условіе. Далѣе, если кругъ долженъ проходить также черезъ точку A, то центръ его долженъ быть на равныхъ разстояніяхъ отъ точекъ A и B. А это условіе выражается перпендикуляромъ, проведеннымъ черезъ середину отрѣзка AB. Общая точка этихъ двухъ геометрическихъ мѣстъ и будетъ искомый центръ.

VII. Анализъ въ рѣшеніи задачъ.

Методъ геометрическихъ мѣстъ представляетъ методъ аналитическій. Анализомъ задачи называется или разложеніе сложной задачи на нѣсколько другихъ болѣе простыхъ, или замѣна данной задачи другой одной задачей, рѣшеніе которой представляется намъ болѣе легкимъ, но, вмѣстѣ съ тѣмъ, привело бы насъ къ рѣшенію данной задачи. Въ методѣ геометрическихъ мѣстъ примѣняется первая форма анализа. Задачу построенія искомой фигуры мы разлагаемъ на нѣсколько болѣе простыхъ задачъ отысканія отдѣльныхъ точекъ. Затѣмъ задачу отысканія одной точки разлагаемъ на двѣ: отыскать геометрическое мѣсто, выражающее одно изъ условій, опредѣляющихъ эту точку, и — другое. Другіе методы рѣшенія представляютъ примѣненіе второй формы анализа: построеніе искомой фигуры въ данномъ мѣстѣ замѣняется или построеніемъ другой фигуры (методъ подобія, методъ обращенія), или той же фигуры, но въ другомъ мѣстѣ (методъ параллельнаго перенесенія, методъ вращенія).

Анализомъ въ рѣшеніи задачъ на вычисленіе называется послѣдовательный переходъ отъ той величины, которую требуется вычислить, къ другимъ, которыя входятъ въ общую ея формулу и вычисленіе которыхъ привело бы къ вычисленію искомой величины, отъ другихъ къ третьимъ и т д., пока не дойдемъ до такихъ, которыя уже можно выразить по даннымъ. Такъ, чтобы сдѣлать анализъ задачи: вычислить боковую поверхность прямого конуса по даннымъ сторонѣ основанія a и углу d между основаніемъ и боковыми гранями правильной вписанной въ него n-угольной пирамиды, — имѣемъ общую формулу боковой поверхности конуса $s = \pi r l$. Изъ нея видимъ, что для вычисленія боковой поверхности необходимо вычислить r и l. r можно прямо вычислить по формулѣ $\frac{a}{r} = 2 \operatorname{sn} \frac{180}{n}$, а l можетъ быть вычислено по формулѣ $l = \sqrt{h^2 + r^2}$. Отсюда видно, что для вычисленія l, нужно вычислить h h вычисляется по формулѣ $h = \varrho \operatorname{tg} a$, гдѣ ϱ апоѳема основанія пирамиды. Слѣдовательно, необходимо раньше вычислить ϱ. ϱ вычисляется уже по даннымъ $\varrho = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{180}{n}$. Дальше начинается синтезъ—переходъ отъ данныхъ черезъ всѣ промежуточныя величины къ искомой. Предварительный анализъ дѣлаетъ яснымъ каждый шагъ послѣдующаго синтеза, указывая ему вполнѣ опредѣленную цѣль.

B. Логика ариѳметики.

I. Опредѣленіе чиселъ и дѣйствій.

Основнымъ понятіемъ въ ариѳметикѣ служитъ понятіе о счетѣ. Счетъ производится посредствомъ ряда названій или знаковъ, которые запоминаются въ одномъ, разъ навсегда выбранномъ, порядкѣ, и состоитъ въ томъ, что мы откладываемъ по одному сосчитываемые предметы и каждый разъ произносимъ одно названіе или отмѣчаемъ одинъ знакъ Если при сосчитываніи двухъ группъ доходимъ до одного и того же названія, то число предметовъ въ нихъ считаемъ одинаковымъ. Если при счетѣ одной группы доходимъ до названія слѣдующаго, то число считаемъ бо́льшимъ, а другое меньшимъ. При этомъ, если мы одну и ту же группу будемъ сосчитывать другой и третій разъ, то всегда дойдемъ до одного и того же названія или знака, въ какомъ бы порядкѣ мы ни брали предметы. Это положеніе представляется очевиднымъ и составляетъ аксіому: *результатъ счета не зависитъ отъ порядка сосчитыванія*. Значитъ между названіями и числами существуетъ полное соотвѣтствіе: каждому числу соотвѣтствуетъ особое и всегда одно и то же названіе или знакъ, и наоборотъ. Это соотвѣтствіе извѣстному знаку или названію въ ряду, служащемъ для счета, и составляетъ эссенцію каждаго числа. Изъ него слѣдуетъ то свойство каждаго числа, что оно получается изъ того, которое соотвѣтствуетъ предыдущему названію, черезъ прибавленіе единицы. Такъ число пять есть число, которое исчерпывается, когда произносится при счетѣ названіе пять, но такъ какъ „пять“ произносится послѣ „четырехъ“ и при этомъ откладывается одна лишняя единица, то число пять получается изъ четырехъ чрезъ присоединеніе единицы.

Сложеніе. Если имѣть неограниченное число названій или знаковъ для счета, то можно сосчитать любое число предметовъ. Сосчитавъ какую-либо группу предметовъ, мы можемъ далѣе вести счетъ другой группы, начавъ его не съ единицы, а съ названія, слѣдующаго за тѣмъ, которымъ окончили счетъ 1-й группы, т.-е. считать такъ, какъ будто бы обѣ группы составляли одну, мы можемъ также вести параллельно счетъ предметовъ 2-й группы, начиная съ единицы. Тогда 1-й счетъ дастъ намъ число предметовъ 1-й группы и число предметовъ въ обѣихъ вмѣстѣ, а 2-й счетъ дастъ число предметовъ 2-й группы. Такимъ образомъ мы можемъ къ любому данному числу присчитать любое данное. 1-е и 3-е числа называются слагаемыми, а 2-е — ихъ суммой. Сосчитываніе суммъ называется сложеніемъ.

Умноженіе есть частный случай сложенія, когда слагаемыя равны. Такимъ образомъ всѣ прямыя дѣйствія представляютъ рядъ, въ которомъ каждое слѣдующее представляетъ частный случай предыдущаго.

Опредѣленія прямыхъ дѣйствій заключаютъ совмѣстимыя свойства, а потому эти дѣйствія всегда возможны. Можно къ любому данному числу приложить любое данное, можно складывать равныя и неравныя слагаемыя въ любомъ порядкѣ. Обратныя дѣйствія опредѣляются черезъ соотвѣтствующія прямыя, но свойства, которыя включаются въ эти опредѣленія, не всегда совмѣстимы. Такъ, свойство давать, при умноженіи на дѣлитель, дѣлимое совмѣстимо только съ нѣкоторыми значеніями дѣлимаго и дѣлителя и несовмѣстимо съ большинствомъ другихъ. Опредѣленіе дѣленія для этихъ случаевъ заключаетъ внутреннее противорѣчіе и потому невозможно Такъ называемое дѣленіе съ остаткомъ не отвѣчаетъ опредѣленію дѣленія.

То же относится и къ остальнымъ обратнымъ дѣйствіямъ.

II. Аксіомы и основные законы.

Системѣ ариѳметическихъ дѣйствій соотвѣтствуетъ система отношеній между количествами или система функцій: отношенія суммы и слагаемыхъ, произведенія и производителей. Какая зависимость существуетъ между дѣйствіями, та же существуетъ и между этими отношеніями. Умноженіе есть частный случай сложенія, и отношеніе произведенія къ производителямъ есть частный случай отношенія суммы къ слагаемымъ и числу ихъ.

Обратныя дѣйствія не даютъ новыхъ отношеній, такъ какъ отношеніе частнаго къ дѣлимому и дѣлителю есть отношеніе одного изъ производителей къ произведенію и другому сомножителю.

Основное дѣйствіе — счетъ — даетъ начало двумъ основнымъ отношеніямъ: отношенію равенства и отношенію суммы къ слагаемымъ Основныя свойства этихъ отношеній составляютъ аксіомы количествъ или общематематическія аксіомы: 1) *аксіома равенства: два количества, равныя порознь третьему, равны между собой,* и 2) *аксіома суммы: суммы равныхъ равны.* Эту аксіому надо понимать, какъ утвержденіе независимости суммы отъ порядка сосчитыванія Она заключаетъ въ себѣ аксіому счета, упомянутую нами въ главѣ объ опредѣленіяхъ, что, сосчитывая одну и ту же группу, всегда получимъ одно и то же число, въ какомъ бы порядкѣ ни брали предметы. Изъ нея слѣдуютъ два свойства суммы, которыя извѣстны подъ названіемъ *законовъ перемѣстительности* и *сочетательности: 1) сумма не зависитъ отъ порядка слагаемыхъ, 2) прибавить — сумму все равно, что прибавить послѣдовательно всѣ слагаемыя.*

III. Система счисленія.

Счетъ производится, какъ было уже сказано, посредствомъ ряда или скалы названій, которыя должны быть только всѣ различны между собой и распредѣлены въ одномъ, разъ навсегда произвольно выбранномъ, порядкѣ. Въ остальномъ эти названія совершенно произвольны. Это даетъ возможность приписать имъ нѣкоторыя другія свойства для тѣхъ или другихъ цѣлей, напр. для удобства запоминанія ихъ или для удобства дѣйствій надъ числами. Совокупность этихъ свойствъ составляетъ систему счисленія. Общее свойство всѣхъ системъ счисленія то, что числа, превышающія нѣкоторое опредѣленное число — основаніе системы — разсматриваются, какъ суммы другихъ меньшихъ чиселъ и названіями ихъ указываются отношенія ихъ къ другимъ меньшимъ числамъ. Такъ, десятичная нумерація опредѣляетъ всякое число большее десяти, какъ болѣе или менѣе сложную сумму. 2375 есть сумма $2000+300+70+5$; но 2000, 300, 70 суть тоже суммы: $2000=1000+1000$, $300=100+100+100$, $70=10+10+10$... Названіе числа и знакъ его, отвѣчая этому сложному опредѣленію, отвѣчаетъ и основному

гребованію: они отличны отъ всѣхъ другихъ и слѣдуютъ за предыдущими. Этотъ способъ опредѣленія чиселъ чрезвычайно облегчаетъ запоминаніе знаковъ и дѣйствія надъ числами: опредѣляя числа, какъ суммы, мы можемъ примѣнять къ нимъ всѣ свойства суммъ, какъ тѣ, которыя выражены въ аксіомѣ и въ двухъ основныхъ законахъ, такъ и другія, которыя изъ нихъ выводятся.

IV. Доказательства теоремъ.

1. Для доказательства теоремъ ариѳметики, выражающихъ свойства чиселъ и количественныхъ отношеній (функцій), примѣняются тѣ же методы, какъ и въ геометріи. Какъ геометрическія аксіомы выражаютъ основныя свойства простѣйшихъ геометрическихъ формъ, такъ аксіомы ариѳметики выражаютъ основныя свойства простѣйшихъ количественныхъ отношеній: отношенія равенства и отношенія суммы. Эти простѣйшія отношенія, входя въ болѣе сложныя, сохраняютъ въ нихъ свои свойства; поэтому, если мы знаемъ составъ сложнаго отношенія (сложной функціи) изъ простыхъ, мы можемъ вывести ствойства 1-го, примѣняя свойство 2-хъ. Составъ сложной функціи изъ простыхъ дается прямо опредѣленіемъ или изображающей его формулой, играющей здѣсь ту же роль, какую чертежъ играетъ въ геометріи. Доказывая перемѣстительность произвольныхъ 2 множителей, обыкновенно изображаютъ сложную функцію (произведеніе) такой формулой:

$$\begin{array}{l} 1+1+1+1+\ldots. \\ + \\ 1+1+1+1+\ldots. \\ + \\ 1+1+1+1+\ldots \\ + \\ 1+1+1+1+\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Прилагая сюда 2 порядка сосчитыванія, на основаніи 2-й аксіомы, доказываемъ теорему Для доказательства перемѣстительности произведенія нѣсколькихъ сомножителей, изображаемъ его формулой $P=a\,.\,b\,.\,c\ldots.$, которая помогаетъ увидѣть въ этой функціи то произведеніе двухъ, то нѣсколькихъ множителей

и примѣнить доказанное раньше свойство перемѣстительности двухъ сомножителей и свойство сочетательности произведенія. Это — методъ анализа сложныхъ функцій и состоитъ изъ выводовъ по 1-й фигурѣ силлогизма.

2. Доказательство отъ противнаго примѣняется въ группахъ изъ четырехъ теоремъ, одинъ примѣръ которыхъ былъ приведенъ выше. Другую такую группу представляютъ теоремы:

1) если оба слагаемыхъ дѣлятся на какое-нибудь число, то и сумма дѣлится на это число;

2) если сумма и одно изъ слагаемыхъ дѣлятся на какое-нибудь число, то и другое слагаемое дѣлится на него;

3) если одно слагаемое дѣлится, а другое не дѣлится на какое-нибудь число, то сумма не дѣлится на него;

4) если одно слагаемое дѣлится, а сумма не дѣлится на какое-нибудь число, то другое слагаемое не дѣлится на него.

Въ первой теоремѣ объемъ сказуемаго больше объема подлежащаго, потому что сумма дѣлится на какое-нибудь число не только во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда оба слагаемыхъ дѣлятся, но и въ нѣкоторыхъ случаяхъ, когда слагаемыя не дѣлятся. Поэтому при обращеніи теоремъ вводится новое ограничивающее условіе: если одно изъ слагаемыхъ дѣлится. Но это условіе составляетъ часть условія 1-й теоремы и, слѣдовательно, является общимъ условіемъ для всѣхъ 4 теоремъ. Слѣдовательно, здѣсь рѣчь идетъ вообще о суммѣ двухъ слагаемыхъ, изъ которыхъ одно дѣлится на. нѣкоторое данное число. Такія суммы обладаютъ слѣдующими свойствами:

1) если другое слагаемое дѣлится на это число, то и сумма дѣлится;

2) если сумма дѣлится, то и другое слагаемое дѣлится;

3) если другое слагаемое не дѣлится, то и сумма не дѣлится;

4) если сумма не дѣлится, то и другое слагаемое не дѣлится.

Теперь эта группа совершенно сходна съ 1-й. 1-я теорема равносильна 4-й, 2-я — 3-й. Достаточно доказать 1-ю и 2-ю или 1-ю и 3-ю, и двѣ другія могутъ быть изъ нихъ выведены доказательствомъ отъ противнаго. Обыкновенно доказываютъ 1-ю и 2-ю. Тогда 3-я слѣдуетъ изъ 2-й, потому что если бы сумма дѣлилась, то другое слагаемое дѣлилось бы; 4-я изъ 1-й, потому что если бы другое слагаемое дѣлилось, то и сумма дѣлилась бы.

3. Способъ предѣловъ примѣняется въ ариѳметикѣ при доказательствѣ теоремы, что періодическая дробь равна простой, извѣстнымъ образомъ составленной. Это доказательство соотвѣтствуетъ второму случаю этого метода въ геометріи, потому что о величинѣ періодической дроби мы не можемъ имѣть точнаго понятія, помимо опредѣленія ея, какъ предѣла. Но здѣсь подходитъ то видоизмѣненіе этого метода, которое встрѣчается въ теоремахъ о поверхностяхъ круглыхъ тѣлъ, потому что мы можемъ составить извѣстнымъ образомъ простую дробь и доказать, что разность между этой дробью и конечной десятичной, которая получается изъ періодической, если взять въ ней любое число періодовъ, можетъ быть сдѣлана, какъ угодно малой. Слѣдовательно, данная десятичная дробь, по мѣрѣ увеличенія числа періодовъ, стремится къ предѣлу. Этотъ предѣлъ и принимается за величину безконечной періодической дроби.

V. Доказательства правилъ.

1. Достаточность и необходимость правилъ.

Пусть нужно доказать правило: „для того, чтобы число A дѣлилось на число B, оно должно заключать всѣ первоначальные дѣлители послѣдняго“. Справедливость этого правила вытекаетъ, во-1-хъ, изъ того, что „если число A заключаетъ всѣ дѣлители числа B, то оно раздѣлится на B“, и во-2-хъ, изъ того, что если число A не заключаетъ всѣхъ дѣлителей числа B, то не раздѣлится на него. Изъ первой теоремы слѣдуетъ, что условія достаточно для полученія результата, но не слѣдуетъ, что оно необходимо, что помимо него результатъ не послѣдуетъ. Это слѣдуетъ изъ второй теоремы, которая утверждаетъ необходимость условія. Доказательство правила приводится такимъ образомъ къ доказательству двухъ теоремъ, изъ которыхъ одна противоположна другой. Доказательство противоположной приводится обыкновенно въ ариѳметикѣ къ доказательству обратной, изъ которой противоположная выводится способомъ отъ противнаго. Точно такъ же правило: „чтобъ найти геометрическое мѣсто точекъ, равно удаленныхъ отъ двухъ данныхъ прямыхъ, надо провести биссектрису угла между ними“, основывается на двухъ теоремахъ. Первая теорема: биссектриса угла, всѣми своими точками равно удалена отъ сторонъ его, утверждаетъ достаточ-

ность правила; вторая: всякая точка, не лежащая на биссектрисѣ угла, неравно удалена отъ сторонъ его, утверждаетъ необходимость правила. Къ такимъ двумъ теоремамъ приводится всякое достаточное и необходимое правило. Отъ правилъ достаточныхъ и необходимыхъ надо отличать правила только достаточныя, но не необходимыя. Таковы, напр., правила сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія. Каждое изъ этихъ дѣйствій можно производить какъ принятымъ способомъ, такъ и многими другими. Поэтому доказательство каждаго изъ этихъ правилъ приводится только къ одной теоремѣ.

2. Прямыя дѣйствія. Анализъ сложныхъ суммъ.

Всѣ прямыя дѣйствія, какъ мы видѣли, опредѣляются, какъ сокращенные способы полученія суммы. Но данныя числа представляютъ по правиламъ нумераціи тоже суммы. Слѣдовательно, результатъ всякаго прямого дѣйствія представляетъ всегда болѣе или менѣе сложную сумму. Но сумма есть результатъ сосчитыванія единицъ двухъ или нѣсколькихъ чиселъ; значитъ эти сокращенные способы должны давать тѣ же результаты, что и прямое сосчитываніе. Чтобы оправдать правила дѣйствій, надо доказать тождество получаемыхъ суммъ съ суммами, получаемыми прямымъ сосчитываніемъ или другими, ранѣе обоснованными, способами. А это можетъ быть доказано на основаніи общихъ законовъ тождества или неизмѣняемости суммъ, законовъ перемѣстительности и сочетательности.

Разсмотримъ доказательство правила сложенія многозначныхъ чиселъ и разложимъ его на отдѣльные выводы. Возьмемъ, для примѣра, сумму нѣсколькихъ многозначныхъ чиселъ: $4785+394+8567+52$.

1) Б. П. Всякое многозначное число есть сумма его разрядовъ (правило нумераціи). М. П. 4785, 394, 8567 и 52 — многозначныя числа. Слѣд., $4785=4000+700+80+5$, $394=300+90+4$ и т. д.

2) Суммы равныхъ равны (Б. П.). Слѣд., $4785+394+8567+52=4000+700+80+5+(300+90+4)+\ldots+2$.

Опущена меньшая посылка, указываемая заключеніемъ предыдущаго вывода, что оба выраженія представляютъ суммы равныхъ.

3) Б. П. Прибавить сумму все равно, что прибавить послѣдовательно всѣ слагаемыя (зак. сочетат.). Слѣд. $4000+$

$+700+80+5+(300+90+4)+8000+\ldots)+2)=4000+$
$+700+80+5+300+40+4+8000+\ldots+50+2.$

Меньшая посылка опять опущена, такъ какъ указывается заключеніемъ предыдущаго вывода.

4) Б. П. Отъ перестановки слагаемыхъ сумма не мѣняется (зак. перемѣстительности). Слѣд. $4000+700+80+5+..+$
$+50+2=5+4+7+2+(80+90+60+50)+700+300+$
$+500+4000+8000.$

Опущена меньшая посылка, что обѣ суммы въ заключеніи отличаются только порядкомъ слагаемыхъ.

5) Примѣняя обратно законъ сочетательности (Б. П.) ко 2-й части равенства, такъ какъ это сумма (М. П.), находимъ: $5+4+7+2+80+90+60+50\ldots+8000=5+4+7+2+$
$+(80+90+60+50)+(700+300+500)+(4000+8000).$

6) Примѣняя къ парамъ равенствъ, содержащихся въ заключеніяхъ 4-мъ, 3-мъ, 2-мъ (М. П.). аксіому (Б. П.): два количества, равныя порознь 3-му, равны, заключаемъ, что $4785+394+$
$+8567+52=5+4+7+2+(80+90+60+50)+(700+$
$+300+500)+(4000+8000)$; это равенство и выражаетъ правило.

Всѣ выводы здѣсь представляютъ примѣненіе общихъ законовъ или правилъ нумераціи къ отдѣльнымъ суммамъ, изъ которыхъ составлена сложная сумма. Методъ представляетъ анализъ сложной функціи, а отдѣльные выводы — заключенія по 1-й фигурѣ силлогизма. Этимъ разсужденіемъ доказывается, что если производить сложеніе согласно правилу, то получимъ вѣрный результатъ, т.-е доказывается достаточность правила. Это правило достаточное, но не необходимое.

3. Обратныя дѣйствія. Гипотетическій методъ.

Разсмотримъ доказательство правила дѣленія многозначныхъ чиселъ. Пусть дано раздѣлить 4758 на 793.

1. Примѣняя къ данному условію (М. П.) опредѣленіе дѣленія (Б. П.), заключаемъ, что надо найти число, которое, будучи перемножено съ 793, дало бы произведеніе 4758.

2. Примѣняя къ данной зависимости между числами (М. П.) свойство произведенія (произведеніе возрастаетъ съ возрастаніемъ одного изъ сомножителей), заключаемъ, что частное больше 1 и меньше 10.

3. Примѣняя къ этому выводу (М. П.), правила нумераціи (Б. П.), заключаемъ, что частное однозначное число.

4. Примѣняя къ даннымъ условіямъ (М. П.) правила умноженія многозначнаго числа на однозначное (Б. П.), заключаемъ, что: 1) 4758 содержитъ сумму произведеній на частное 700, 90 и 3; 2) произведеніе 700 на частное содержится въ 4700, а 7 на частное — въ 47, и 3) въ 47 содержится также результатъ исключенія высшихъ разрядовъ изъ произведенія 93 на частное 5. Далѣе слѣдуетъ уже угадываніе или гипотеза о цыфрѣ частнаго, повѣряемая таблицей умноженія и сдѣланными выводами: произведеніе искомой цыфры на 7 не должно быть болѣе 47 и сумма произведеній ея на всѣ цыфры дѣлителя должна быть равна 4758. Если предположенная цыфра не удовлетворяетъ одному изъ этихъ условій, то предположеніе не вѣрно. Этотъ выводъ дѣлается по 2-й фигурѣ силлогизма. Пусть предположенная цыфра 7. Если цыфра 7 вѣрна, то произведеніе ея на число сотенъ дѣлителя (7) должно быть равно. или меньше 47.

Произведеніе 7 на 7 больше 47.

Слѣд., предположенная цыфра не вѣрна.

Это угадываніе составляетъ существенный признакъ вывода правила, потому что всѣ предшествующіе выводы, простые въ однихъ случаяхъ и очень сложные въ другихъ, служатъ только для установленія возможно болѣе тѣсныхъ границъ для угадыванія, чтобы какъ можно болѣе ограничить число возможныхъ гипотезъ и тѣмъ сократить все разсужденіе. Достовѣрность результата получается здѣсь путемъ устраненія всѣхъ остальныхъ возможныхъ предположеній. Такъ какъ дѣленіе понятія о цыфрѣ частнаго на 0 или 1, или 2.... или 9 — дѣленіе исчерпывающее, то, исключая всѣ цыфры кромѣ одной, мы получаемъ достовѣрный выводъ, что вѣрна эта одна.

VI. Значеніе примѣровъ при доказательствахъ.

Примѣры, на которыхъ обыкновенно выводятся правила дѣйствій, играютъ ту же роль въ доказательствахъ, какъ чертежи въ геометріи. Примѣры выражаютъ условіе или часть условія теоремы, если все условіе не можетъ быть изображено ариѳметическими знаками. Но, подобно чертежамъ геометріи, примѣры

всегда выражаютъ еще и случайныя свойства, не заключающіяся въ условіяхъ. Когда мы беремъ для примѣра многозначныя числа, мы не можемъ взять многозначное число вообще: всякое взятое число будетъ содержать опредѣленное число цыфръ и опредѣленныя цыфры каждаго разряда. Когда беремъ произведеніе нѣсколькихъ множителей, взятое произведеніе непремѣнно будетъ содержать опредѣленное число сомножителей и опредѣленные сомножители на опредѣленныхъ мѣстахъ. Въ произведеніи мы не можемъ сдѣлать перестановку вообще, но непремѣнно опредѣленную перестановку. Выводъ можетъ имѣть общее значеніе, когда очевидно, что онъ вытекаетъ только изъ условія, а не изъ акциденцій даннаго примѣра. Иногда въ качествѣ перваго примѣра берется случай, который имѣетъ какую-нибудь особенность, облегчающую или сокращающую разсужденіе; тогда разсужденіе должно быть повторено на другомъ примѣрѣ, гдѣ было бы очевидно, что никакое случайное упрощеніе не имѣло мѣста. Только тогда выводъ имѣетъ общее значеніе.

Иногда общему выводу предшествуетъ цѣлый рядъ такихъ упрощенныхъ случаевъ, для которыхъ выводятся отдѣльныя правила. Тогда этотъ рядъ имѣетъ видъ логическаго раздѣленія. Напримѣръ, умноженіе многозначныхъ чиселъ дѣлится на умноженіе многозначнаго числа на: 1) однозначное, 2) на 1 съ нулями, 3) на значащую цыфру съ нулями и 4) на многозначное число. Здѣсь нѣтъ раздѣленія въ строго логическомъ смыслѣ, потому что нѣтъ основанія для дѣленія. Если же признать за основанія два признака: число цыфръ и самыя цыфры, то дѣленіе не будетъ исчерпывающимъ. Но такъ какъ здѣсь для каждаго случая выводится особое правило, а не одно правило обобщается для всѣхъ, то и нѣтъ надобности, чтобы дѣленіе было исчерпывающимъ.

VII. Рѣшеніе задачъ.

Рѣшимъ задачу: Извозчикъ нанялся перевезти 20 зеркалъ съ условіемъ, что за каждое зеркало, доставленное въ цѣлости, онъ получитъ 6 рублей, а за каждое разбитое зеркало съ него вычтутъ 30 рублей. При расчетѣ онъ получилъ 12 рублей. Сколько зеркалъ онъ разбилъ?

1. *Анализъ задачи.* О числѣ разбитыхъ зеркалъ мы можемъ судить по тому, сколько рублей извозчикъ не дополучилъ сравнительно съ тѣмъ, какъ если бы всѣ зеркала доставилъ въ цѣ-

лости. Поэтому мы могли бы узнать, сколько онъ зеркалъ разбилъ, если бы знали, сколько онъ не дополучилъ всего и сколько терялъ на каждомъ разбитомъ зеркалѣ. Второй вопросъ можно рѣшить по имѣющимся въ условіи даннымъ: онъ терялъ на каждомъ зеркалѣ 6 рублей платы за перевозъ и 30 рублей, которые съ него вычитали. Чтобы рѣшить 1-й вопросъ, надо знать, сколько онъ всего получилъ бы, если бы доставилъ всѣ зеркала въ цѣлости, и сколько въ дѣйствительности получилъ. Послѣднее указано въ условіи, а первый вопросъ можетъ быть рѣшенъ по имѣющимся даннымъ: нужно было доставить 20 зеркалъ и получить за каждое 6 рублей.

2. Синтезъ. Итакъ, задача составляется изъ слѣдующихъ простыхъ:

1) Сколько рублей терялъ извозчикъ на каждомъ зеркалѣ? Нужно узнать сколько рублей составляютъ 6 руб. и 30 руб. вмѣстѣ; для этого надо сложить 6 руб.+30 руб., потому что сложить два числа и значитъ узнать, сколько единицъ заключается въ двухъ данныхъ числахъ вмѣстѣ. 6+30=36.

2) Сколько рублей получилъ бы извозчикъ, если бы доставилъ всѣ 20 зеркалъ въ цѣлости? За каждое зеркало онъ получалъ бы по 6 руб., а за 20 зеркалъ получилъ бы 20 разъ по 6 руб., слѣдовательно надо 6 руб.×20, потому что умножить одно число на другое и значитъ первое повторить слагаемымъ столько разъ, сколько единицъ во второмъ: 6×20=120.

3) Сколько рублей извозчикъ всего не дополучилъ? Сумма, которую извозчикъ не дополучилъ, вмѣстѣ съ 12 рублями, которые онъ получилъ, должна бы составить 120 руб., которые онъ долженъ былъ получить. Слѣдовательно, для рѣшенія этого вопроса надо вычесть: 120—12, потому что вычесть и значитъ по суммѣ и одному изъ слагаемыхъ найти другое слагаемое: 120—12=108.

4) Сколько зеркалъ было разбито? На каждомъ разбитомъ зеркалѣ извозчикъ терялъ 36 рублей, а на всѣхъ — 108 руб., поэтому разбитыхъ зеркалъ было столько, сколько разъ надо повторить слагаемымъ 36, чтобы получить 108, или на сколько надо помножить 36, чтобы получить 108. Слѣдовательно, надо 108 : 36, потому что раздѣлить и значитъ по произведенію и одному изъ сомножителей найти другой: 108 : 36=3.

Отсюда можно видѣть, что для рѣшенія сложной задачи надо прежде всего разбить ее на простыя задачи, которыя рѣшались бы

каждая однимъ дѣйствіемъ. Для этого, исходя изъ вопроса задачи, надо подыскать такія простыя задачи или одну простую задачу, рѣшеніе которыхъ привело бы къ рѣшенію этого вопроса однимъ дѣйствіемъ. Если эти новыя задачи не могутъ быть рѣшены каждая однимъ дѣйствіемъ, онѣ приводятся къ еще новымъ, пока не дойдемъ до такихъ, которыя уже могутъ быть рѣшены каждая однимъ дѣйствіемъ по имѣющимся въ условіи даннымъ. Это разложеніе задачи называется анализомъ. Затѣмъ дѣлаемъ синтезъ, т.-е. составляемъ простыя задачи въ порядкѣ, указанномъ анализомъ, и рѣшаемъ, пока не придемъ къ рѣшенію вопроса задачи.

3. Примѣняя то или другое дѣйствіе къ рѣшенію каждой простой задачи, мы доказываемъ, что зависимость между данными и искомымъ въ этой задачѣ подходитъ, какъ частный случай, подъ опредѣленіе примѣняемаго дѣйствія. Роль опредѣленія при примѣненіи дѣйствій, слѣдовательно, не та, что при доказательствахъ правилъ или теоремъ: тамъ общими положеніями, бо́льшими посылками служатъ аксіомы, или доказанныя раньше теоремы, или правила, а опредѣленія, указывая составъ сложныхъ функцій изъ простыхъ, подводятъ ихъ подъ условія теоремъ и аксіомъ, слѣдовательно служатъ меньшими посылками, тогда какъ здѣсь опредѣленія сами играютъ роль общихъ положеній, или бо́льшихъ посылокъ, подъ которыя подводятся вопросы простыхъ задачъ.

C. Логика алгебры.

I. Предметъ алгебры.

Приложеніе счисленія къ явленіямъ природы обнаруживаетъ въ нихъ нѣкоторыя постоянныя отношенія между измѣняющимися величинами, характеризующими явленія. Такъ при сжиманіи и расширеніи газа при постоянной температурѣ произведеніе объема его на давленіе остается постояннымъ. При расширеніи тѣлъ отъ нагрѣванія отношеніе объема тѣла къ бинному расширенія остается постояннымъ. При преломленіи свѣта какой-нибудь средой отношеніе синусовъ угловъ паденія и преломленія остается постояннымъ. Для математическаго выраженія закона не пригодны ариѳметическія формулы, такъ какъ въ нихъ входятъ опредѣленныя значенія величинъ, а не самыя величины въ ихъ измѣняющихся значеніяхъ. Для этого нужны общія алгебраическія формулы; только при помощи ихъ математика стала могущественнымъ орудіемъ изслѣдованія природы.

Всѣ алгебраическія дѣйствія представляютъ преобразованія однѣхъ формулъ въ другія, тождественныя съ первыми, т-е. такія, которыя при всякихъ значеніяхъ буквъ давали бы одинаковые съ первыми результаты. А такъ какъ всѣ формулы выражаютъ тѣ же дѣйствія. что и въ ариѳметикѣ, то онѣ представляютъ или болѣе мелкія, или сложныя суммы, или обратныя имъ функціи, которыхъ свойства выводятся изъ соотвѣтствующихъ прямыхъ.

Поэтому всѣ правила алгебраическихъ дѣйствій вытекаютъ изъ основныхъ аксіомъ и законовъ тождества суммъ и выводятся изъ нихъ методами, подобными тѣмъ. какіе употребляются въ ариѳметикѣ.

II. Опредѣленія чиселъ и дѣйствій.

Въ главѣ объ обратныхъ дѣйствіяхъ въ ариѳметикѣ мы видѣли, что опредѣленія ихъ состоятельны только при нѣкоторыхъ значеніяхъ данныхъ и несостоятельны при другихъ. Если такъ, то и формулы, въ которыя входятъ обратныя функціи, могутъ выражать зависимость только между нѣкоторыми значеніями величинъ, но не между всякими и, слѣдовательно, не могутъ служить для выраженія общихъ законовъ природы. Это несоотвѣтствіе устраняется обобщеніями понятія о числѣ.

Первое обобщеніе вводится еще въ ариѳметикѣ посредствомъ понятія о дробномъ числѣ, какъ совокупности частей единицы Посредствомъ этого обобщенія дѣлается всегда возможнымъ дѣленіе и расширяется примѣненіе счисленія къ измѣренію величинъ: дается возможность измѣрять всѣ значенія величинъ, соизмѣримыя съ единицей мѣры.

Дальнѣйшее обобщеніе вызывается другимъ обратнымъ дѣйствіемъ — извлеченіемъ корня. Оно достигается введеніемъ понятія объ ирраціональномъ числѣ, какъ предѣлѣ.

При извлеченіи квадратнаго корня, напр. $\sqrt{2}$, мы всегда можемъ извѣстнымъ процессомъ получить два ряда раціональныхъ чиселъ: 1; 1, 4; 1, 41... и 2; 1, 5; 1, 42, изъ которыхъ одинъ дастъ квадраты меньшіе 2, другой — большіе 2. Эти два ряда удовлетворяютъ условію существованія предѣла, потому что 1-й все возрастаетъ, 2-й все убываетъ; всѣ числа 1-го ряда остаются меньше всѣхъ чиселъ 2-го, и разница между соотвѣтствующими числами обоихъ рядовъ можетъ быть сдѣлана какъ угодно малой. $\sqrt{2}$ и опредѣляется, какъ общій предѣлъ этихъ двухъ рядовъ. Это новое обобщеніе дѣлаетъ всегда возможнымъ извлеченіе корня и тѣмъ придаетъ общій смыслъ формуламъ, въ которыя входитъ это выраженіе. Но, кромѣ того, оно даетъ возможность численно выражать несоизмѣримыя значенія величинъ, потому что отношенія ихъ къ единицѣ по опредѣленію несоизмѣримыхъ отношеній (A. IV. 3, g) есть общій предѣлъ двухъ рядовъ соизмѣримыхъ отношеній, а эти послѣднія выражаются двумя рядами раціональныхъ чиселъ; слѣдовательно, несоизмѣримое значеніе выражается ирраціональнымъ числомъ. Опредѣленіе ирраціональнаго числа совпадаетъ съ опредѣле-

ніемъ отношенія несоизмѣримаго значенія къ единицѣ, поэтому ирраціональныя числа называются часто несоизмѣримыми.

Логариѳмированіе представляетъ другое дѣйствіе, обратное возведенію въ степень n, подобно извлеченію корней, даетъ раціональные результаты только при нѣкоторыхъ значеніяхъ данныхъ. Только введеніе ирраціональныхъ чиселъ дѣлаетъ логариѳмъ пригоднымъ для выраженія общихъ законовъ природы, имѣющихъ значеніе для всевозможныхъ значеній величинъ. При всякомъ основаніи и при всякомъ числѣ мы можемъ всегда составить два ряда раціональныхъ логариѳмовъ (посредствомъ прогрессій, вставляя средніе геометрическіе и средніе ариѳметическіе, или посредствомъ непрерывныхъ дробей), которые соотвѣтствуютъ одинъ числамъ бо́льшимъ даннаго, другой — меньшимъ и удовлетворяютъ условію существованія предѣла. Логариѳмъ даннаго числа и опредѣляется какъ этотъ общій предѣлъ. Онъ представляетъ ирраціональное число, будучи предѣломъ двухъ рядовъ раціональныхъ чиселъ.

Такимъ образомъ число вообще представляетъ уже не совокупность единицъ или частей единицы, а общій предѣлъ двухъ рядовъ такихъ совокупностей Такой предѣлъ только въ частныхъ случаяхъ можетъ представлять самъ тоже совокупность цѣлыхъ единицъ или частей единицъ, какъ въ случаѣ безконечной періодической дроби. Но тогда и дѣйствіямъ должны быть даны другія опредѣленія, включающія прежнія, какъ частные случаи. Суммой, разностью, произведеніемъ, частнымъ двухъ ирраціональныхъ чиселъ называются предѣлы, къ которымъ стремятся сумма, разность, произведеніе и частное соотвѣтственныхъ значеній тѣхъ рядовъ раціональныхъ чиселъ, которыхъ предѣлами служатъ данныя ирраціональныя числа. Степенью, корнемъ, логариѳмомъ ирраціональнаго числа называются предѣлы, къ которымъ стремятся соотвѣтственныя функціи рядовъ раціональныхъ чиселъ, дающихъ въ предѣлѣ данныя ирраціональныя числа. Чтобы эти опредѣленія были состоятельны, необходимо доказать, что такіе предѣлы существуютъ, т.-е. что суммы, разности, произведенія, частныя, степени, корни, логариѳмы соотвѣтствующихъ членовъ, рядовъ чиселъ, стремящихся къ предѣламъ, также стремятся къ предѣламъ. Въ другомъ направленіи достигается обобщеніе понятія о числѣ введеніемъ чиселъ отрицательныхъ. Оно вызывается тоже обратнымъ дѣйствіемъ — вычитаніемъ: вычитаніе невозможно, и формулы, въ которыя входитъ вычитаніе, не имѣютъ

смысла, если вычитаемое больше уменьшаемаго. Но такихъ случаевъ и не можетъ представиться въ природѣ, пока мы имѣемъ дѣло съ величинами абсолютными, т.-е. такими, которыя имѣютъ абсолютный нуль. Здѣсь соотвѣтствіе между формулами и природой вопросовъ сохраняется. Но другое дѣло, когда мы переходимъ къ величинамъ относительнымъ, имѣющимъ произвольный, относительный нуль. Въ случаѣ, напр., разстояній, опредѣляющихъ положенія точекъ на безконечной прямой, сложенію соотвѣтствуетъ откладываніе новаго отрѣзка отъ конца прежняго въ томъ же направленіи; вычитанію соотвѣтствуютъ два процесса: 1) откладываніе отъ конца перваго отрѣзка второго отрѣзка въ обратномъ направленіи и отыскиваніе разстоянія его конца отъ начала разстояній (уменьшеніе даннаго отрѣзка) и 2) откладываніе на 1-мъ отрѣзкѣ 2-го и отысканіе разстоянія ихъ концовъ (найти разность). Оба процесса возможны и тогда, когда 2-й отрѣзокъ больше 1-го, только конецъ его перейдетъ въ первомъ случаѣ за начало разстояній, во второмъ — за конецъ 1-го отрѣзка. Такимъ образомъ, здѣсь формула уже не обнимаетъ всѣхъ возможныхъ въ природѣ случаевъ, и соотвѣтствіе между формулой и природой нарушается. Оно возстановляется введеніемъ отрицательныхъ чиселъ. Отрицательное число опредѣляется, какъ результатъ измѣренія какой-либо величины единицей противоположной величины. Это измѣреніе основывается на возможности разсматривать двѣ противоположныя величины, какъ одну величину, какъ различныя значенія одной и той же относительной величины. Изъ взаимной зависимости двухъ противоположныхъ величинъ выводятся основныя свойства отрицательныхъ чиселъ и правила дѣйствій надъ ними.

III. Доказательства.

Всѣ алгебраическія дѣйствія представляютъ, какъ было сказано выше, тождественныя преобразованія формулъ, а такъ какъ формулы представляютъ или болѣе или менѣе сложныя суммы или обратныя функціи, которыхъ свойства выводятся изъ свойствъ суммъ, то алгебраическія правила выводятся изъ тѣхъ же основныхъ законовъ тождества суммъ, какъ правила ариѳметики.

1. Анализъ сложныхъ функцій.

Простыя функціи, входя въ болѣе сложныя, сохраняютъ въ нихъ всѣ свои свойства. Составъ сложной функціи изъ

простыхъ дается опредѣленіемъ Поэтому, разлагая посредствомъ опредѣленія сложную функцію на простыя и примѣняя ихъ свойства, мы получаемъ свойства сложной функціи.

Прим. Произведеніе $(a+b+c)d$, при d цѣломъ, на основаніи опредѣленія умноженія на цѣлое число, представляется намъ, какъ сложная сумма:

$$a+b-c+(a+b-c)+(a+b-c)+\ldots.$$

Примѣняя правило сложенія, получаемъ простую сумму:

$$a+b-c+a+b-c+a+b-c+\ldots.$$

Примѣняя законъ перемѣстительности, получаемъ

$$a+a+a+\ldots+b+b+b+\ldots c+c-c\ldots.$$

Примѣняя законъ сочетательности, находимъ

$$ad+bd-cd.$$

Примѣняя послѣдовательно первую аксіому, находимъ

$$(a+b-c)d=ad+bd-cd.$$

При d дробномъ, напр., $d=\frac{m}{n}$, гдѣ m и n — цѣлыя, примѣняя опредѣленіе умноженія на дробь, найдемъ

$$(a+b-c)\frac{m}{n}=\left(\frac{a+b-c}{n}\right)m.$$

Здѣсь сложное дѣйствіе умноженія на дробь разлагается на два простыхъ: дѣленіе на знаменатель и умноженіе результата на числитель Примѣняя правила этихъ болѣе простыхъ дѣйствій, получаемъ правило умноженія на дробь.

2. Гипотетическій методъ. Обратныя дѣйствія.

Выводъ правилъ обратныхъ дѣйствій дѣлается, какъ и въ ариѳметикѣ, методомъ гипотетическимъ, который видоизмѣняется двоякимъ образомъ: во-1-хъ, предполагая правило справедливымъ, получаемъ согласно правилу результатъ и затѣмъ повѣряемъ его по правиламъ прямого дѣйствія. Такъ выводится правило вычитанія многочленовъ (Алг. Дав.), правило дѣленія многочлена на одночленъ, правило дѣленія дробей, когда гово-

рятъ: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ равно, по правилу, $\frac{ad}{bc}$; въ самомъ дѣлѣ, умножая $\frac{ad}{bc}$ на $\frac{c}{d}$, получимъ $\frac{a}{b}$. Получаемыя такимъ путемъ правила достаточны, но не необходимы. Во-2-хъ, на основаніи правилъ прямого дѣйствія, установляемъ возможно тѣсныя границы для угадыванія результата обратнаго дѣйствія. Это второе измѣненіе гипотетическаго метода примѣняется при выводѣ правила дѣленія многочленовъ (какъ и въ армѳметикѣ при выводѣ правила дѣленія многозначныхъ чиселъ) при выводѣ правилъ извлеченія корней изъ чиселъ и многочленовъ.

3. Значеніе примѣровъ.

Примѣры, на которыхъ выводятся правила, въ алгебрѣ, какъ и въ ариѳметикѣ, служатъ для нагляднаго изображенія состава сложной функціи, даваемаго условіемъ или опредѣленіемъ и помогаютъ примѣнить къ ней свойства составляющихъ ее простыхъ функцій. Но, подобно примѣрамъ ариѳметики и чертежамъ геометріи, они заключаютъ не только тѣ свойства, какія заключаются въ условіи или опредѣленіи, но также постороннія условію, случайныя свойства или акциденціи. Эти акциденціи не уменьшаютъ силы доказательства, если очевидно, что онѣ не играютъ никакой роли въ выводѣ. Въ противномъ случаѣ онѣ должны быть исключены, выводъ долженъ быть отъ нихъ освобожденъ. Заслуживаетъ вниманія одинъ употребительный въ алгебрѣ методъ исключенія случайностей, когда эту случайность представляетъ число членовъ многочлена, число въ показателѣ бинома, число въ порядкѣ непрерывной дроби и др. Это такъ называемый методъ заключенія отъ n къ $n+1$. Замѣтивъ, что правило, положимъ, бинома справедливо для 2-й, 3-й степеней бинома, мы доказываемъ условное предложеніе, что если это правило справедливо для n-ой степени бинома, то будетъ справедливо и для слѣдующей. Необходимо замѣтить, что условное предложеніе не утверждаетъ справедливости ни условія, ни заключенія, а только необходимую связь между ними: если справедливо условіе, то необходимо справедливо и заключеніе. Поэтому условное предложеніе нисколько не связано съ тѣмъ, что правило справедливо для 2-й или 3-й степеней; оно осталось бы вѣрнымъ и въ томъ случаѣ, если бы правило бинома

не было бы вѣрно ни для какой степени. Поэтому допущеніе, съ котораго начинается доказательство условнаго предложенія, что правило справедливо для n-ой степени, есть простое предположеніе, а вовсе не выводъ изъ того, что правило справедливо для 2-й и 3-й степеней. Недоразумѣніе по этому поводу почти всегда остается у учащихся, поэтому необходимо доказательство условнаго предложенія ставить раньше повѣрки правила на отдѣльныхъ случаяхъ.

IV. Равенства и неравенства.

1. Тождества и уравненія.

Всякое равенство содержитъ двѣ функціи, которыя въ зависимости отъ значеній, которыя будемъ придавать буквамъ, принимаютъ различныя значенія. Если значенія этихъ функцій всегда равны, при всякихъ значеніяхъ буквъ, то функціи тождественны, и равенство называется тождествомъ. Если функціи получаютъ равныя значенія только при нѣкоторыхъ значеніяхъ буквъ, то равенство называется уравненіемъ. Слѣдовательно, въ уравненіи значенія буквъ не произвольны: оно представляетъ условіе, которому эти значенія должны удовлетворять, ту зависимость или законъ, который ограничиваетъ произволъ въ выборѣ ихъ значеній. Уравненіями выражаются количественные законы

2. Тождества въ доказательствахъ.

Тождественныя преобразованія алгебраическихъ выраженій выражаются тождествами.

$$(a+b-c)m=am+bm-cm;\ (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

представляютъ тождественныя преобразованія формулъ, выраженныя тождествами.

Въ случаѣ сложнаго преобразованія отдѣльныя простыя преобразованія выражаются рядомъ тождествъ. Примѣняя къ этому ряду 1-ю аксіому, мы получаемъ тождество между первоначальной формулой и послѣднимъ результатомъ, которое и выражаетъ правило сложнаго преобразованія. Такъ въ доказательствѣ (С. III, а, 1) опредѣленіе умноженія выражается тождествомъ:

1) $(a+b-c)d=a+b-c+(a+b-c)+(a+b-c)+\cdots$

Послѣдовательныя преобразованія выражаются тождествами:

2) $a+b-c+(a+b-c)+(a+b-c)+\ldots=a+b-c+a+b-c+\ldots$

3) $a+d-c+a+b-c+a+b-c+\ldots=a+a+a+\ldots+b+b+$
$+b+\ldots-c-c-c\ldots$

4) $a+a+a+\ldots+b+b+b+\ldots-c-c-c\ldots=a+a+a\ldots+$
$+(b+b+b\ldots)-(c+c+c)\ldots$

5) $a+a+a+\ldots(b+b+b+\ldots)-(c+c+c+\ldots)=ad+bd-cd.$

Примѣняя 1-ю аксіому получается тождество.

$$(a+b-c)d=ad+bd-cd,$$

выражающее правило умноженія на цѣлое число.

Тождествами называются также равенства между частными значеніями функцій, когда вмѣсто буквъ подставлены числа, или вмѣсто буквъ, обозначающихъ какія-либо числа въ общемъ смыслѣ, подставлены буквы же, но съ оговоркой, что ими обозначаются какія-либо частныя значенія величинъ. Такъ, равенства, которыя получаются изъ уравненій, когда въ этихъ послѣднихъ неизвѣстныя замѣнены ихъ корнями, называются тоже тождествами.

3. Преобразованія равенствъ.

Преобразованія равенствъ дѣлаются на основаніи аксіомъ. 1-я аксіома дастъ возможность изъ двухъ равенствъ: $a=b$ и $a=c$, получить 3-е: $b=c$, какъ это уже видѣли выше, 2-я — изъ равенствъ: $a=b$ и $c=d$, даетъ намъ равенство: $a+c=b+d$. Сложеніе равенствъ приводитъ къ умноженію ихъ и возвышенію въ степень, а также, при помощи гипотетическаго метода, къ дѣленію и извлеченію корня.

Когда мы изъ равенства $a=b$ получаемъ равенство $a+c=b+c$, то второе равенство называется слѣдствіемъ перваго, а первое его основаніемъ или логической причиной. Но такъ какъ изъ равенства $a+c=b+c$ мы можемъ, вычитая по c, получить равенство $a=c$, то каждое изъ этихъ двухъ равенствъ можетъ быть и слѣдствіемъ и основаніемъ другого. Такія оба равенства называются взаимными, а преобразованія, при помощи которыхъ они получаются одно изъ другого,—взаимными преобразованіями. Прибавленіе къ обѣимъ частямъ равенства одного и того же

числа и отниманіе отъ обѣихъ частей одного и того же числа представляютъ взаимныя преобразованія равенствъ. Но когда мы изъ равенствъ $a=b$ и $c=d$ получаемъ равенство $a+c=b+d$, это послѣднее, будучи слѣдствіемъ первыхъ двухъ, не можетъ быть ихъ достаточной причиной, потому что изъ равенства $a+c=b+d$ не слѣдуютъ ни оба равенства $a=b$ и $c=d$, ни какое-либо одно изъ нихъ. Только если къ равенству $a+c=b+d$ присоединить одно изъ данныхъ, напр. $a=b$, то изъ полученныхъ двухъ равенствъ можно вывести, что $c=d$, значитъ, равенство $a+c=b+d$ вмѣстѣ съ однимъ изъ данныхъ составляетъ систему взаимную съ системой двухъ данныхъ равенствъ. Изъ системы $\begin{matrix} a=b \\ c=d \end{matrix}$ можно получить систему $\begin{matrix} a+c=b+d \\ a=b \end{matrix}$ и изъ послѣдней, путемъ вычитанія, можно получить первую.

Изъ равенства $a=b$ можно получить $ac=bc$; но обратно можно получить равенство $a=b$ изъ $ac=bc$ только съ оговоркой: если c не равно нулю. Поэтому умноженіе, а слѣдовательно и дѣленіе обѣихъ частей равенства на одно и то же число представляетъ взаимное преобразованіе, только если это число не нуль.

Изъ равенства $a=b$ можно получить равенство $a^2=b^2$; но, если дано равенство $a^2=b^2$, нельзя навѣрно сказать, имѣетъ ли мѣсто равенство $a=b$, или $a=-b$, потому что въ обоихъ случаяхъ имѣли бы $a^2=b^2$. Поэтому равенство $a^2=b^2$ можетъ быть только логическимъ послѣдствіемъ равенства $a=b$ или $a=-b$; а послѣдствіемъ равенства $a^2=b^2$ можетъ быть только раздѣлительное сужденіе: или $a=b$, или $a=-b$.

4. Преобразованія неравенствъ.

Изъ правилъ преобразованія равенствъ выводятся правила преобразованія неравенствъ. Изъ неравенства $a \gtrless b$ выводится, какъ слѣдствіе, $a \pm c \gtrless b \pm c$ и изъ послѣдняго можетъ быть выведено первое. Это преобразованіе взаимное. Изъ неравенства $a \gtrless b$ выводится $ac \gtrless bc$, если c положительное число и неравное нулю. При этомъ условіи возможенъ и обратный вы-

водъ, и слѣдовательно имѣемъ взаимное преобразованіе. Если c отрицательное и неравное нулю число, то изъ $a \gtrless b$ слѣдуетъ $ac \lessgtr bc$ и наоборотъ. Опять преобразованіе взаимное. Если же $c=0$, то изъ $a \gtrless b$ слѣдуетъ $ac=bc$, но изъ послѣдняго равенства не вытекаетъ данное неравенство, поэтому это преобразованіе не взаимное.

Изъ двухъ неравенствъ $a \gtrless b$ и $c \gtrless d$ выводится неравенство $a+c \gtrless b+d$; но изъ послѣдняго, ни изъ одного, ни вмѣстѣ съ однимъ изъ данныхъ, нельзя вывести другого даннаго неравенства

V. Доказательства посредствомъ преобразованія равенствъ или неравенствъ.

Въ алгебрѣ какъ доказываемыя положенія, такъ и условія теоремъ могутъ обыкновенно быть выражены равенствами или неравенствами. Задача доказательства сводится тогда къ тому, чтобы изъ равенствъ или неравенствъ, выражающихъ условія и доказанныя раньше теоремы, путемъ послѣдовательныхъ преобразованій, получить равенства или неравенства, выражающія доказываемое положеніе. Въ этихъ преобразованіяхъ можно итти двоякимъ путемъ: или исходя изъ равенствъ, или неравенствъ, выражающихъ условія и доказанныя раньше теоремы, дойти путемъ преобразованій до доказываемаго положенія — синтетическое доказательство, — или исходя изъ равенствъ, или неравенствъ, выражающихъ доказываемое положеніе, дойти до такихъ, которыя выражаютъ условія или доказанныя раньше теоремы — доказательство аналитическое; только въ послѣднемъ случаѣ всѣ преобразованія должны быть взаимными.

1. Синтетическое доказательство.

Обычный выводъ правила умноженія алгебраическихъ дробей представляетъ синтетическое доказательство посредствомъ преобразованій равенствъ. Пусть дано умножить дробь $\frac{a}{b}$ на $\frac{c}{d}$. Обозначимъ 1-ю дробь буквой p, вторую — q. На основаніи

извѣстной зависимости дѣлимаго, дѣлителя и частнаго пишемъ равенства $a=bp$, $c=dq$. Умножая эти равенства, получимъ одно равенство $ac=bpdq$, которое представляетъ слѣдствіе первыхъ двухъ, но не можетъ быть одно ихъ основаніемъ. Но такъ какъ намъ нуженъ только выводъ слѣдствія, то взаимность преобразованія не можетъ имѣть для насъ значенія. Преобразовывая это равенство дальше, получаемъ равенство $pq=\frac{ac}{bd}$, которое выражаетъ доказываемую теорему,

2. Аналитическое доказательство.

Обычное доказательство теоремы, что при непрерывномъ измѣненіи логарифма число измѣняется непрерывно, представляетъ аналитическое доказательство посредствомъ преобразованія неравенствъ. Обозначая d какое угодно малое число, можемъ доказываемое положеніе выразить неравенствомъ $a^{\frac{\alpha+\delta}{\alpha}}<a^{\alpha}<d$....1. Дѣлаемъ преобразованія: $a^{\alpha}(a^{\delta}-1)<d$; $a^{\delta}-1<\frac{d}{a^{\alpha}}$; $a^{\delta}<\frac{d}{a^{\alpha}}+1$....2

Всегда можно взять такое цѣлое μ, чтобы $\frac{1}{\mu}>\delta>\frac{1}{\mu+1}$, затѣмъ доказательство возможности послѣдняго неравенства (2) замѣняемъ доказательствомъ возможности неравенства $\frac{1}{a^{\mu}}<\frac{d}{a^{\alpha}}+1$....3, котораго 2-е было бы слѣдствіемъ. Преобразовываемъ неравенство (3), получимъ $a<\left(\frac{d}{a^{\alpha}}+1\right)^{\mu}$ (4).

Преобразованія неравенства 1-го во 2-е были взаимны, потому что a^{α} число положительное и неравное 0; поэтому неравенство 2-е можетъ быть не только слѣдствіемъ, но и основаніемъ 1-го. Преобразованіе 3-го неравенства въ 4-е тоже взаимное, потому что a^{μ} положительное число и μ — цѣлое. Слѣдовательно, неравенство 4-е можетъ быть и слѣдствіемъ и основаніемъ 3-го. 2-е неравенство есть слѣдствіе 3-го. Слѣдовательно, 1-е неравенство есть слѣдствіе 4-го. Но 4-е всегда возможно, слѣдовательно, всегда возможно и 1-е.

Синтетическое и аналитическое доказательство посредствомъ преобразованій неравенствъ встрѣчаются въ обычномъ доказательствѣ теоремы, что въ безконечно возрастающей геометри-

ческой прогрессіи всегда можно дойти до члена, который больше какого угодно даннаго числа. Въ безконечно возрастающей геометрической прогрессіи съ положительными членами $S_n > an$. Отсюда, путемъ ряда преобразованій, выводимъ: $\frac{uq-a}{q-1} > an$; $uq-a > an(q-1)$; $uq > an(q-1)+a$; $u > \frac{an(q-1)+a}{q}$. До сихъ поръ это доказательство синтетическое, потому что представляетъ послѣдовательный рядъ слѣдствій изъ условія, что прогрессія геометрическая возрастающая съ положительными членами, и послѣднее неравенство есть слѣдствіе условія. Но теперь для того, чтобы доказать, что u можетъ быть больше какого угодно числа, если достаточно продолжить прогрессію, достаточно доказать, что можно взять такое большое n, при которомъ $\frac{an(q-1)+a}{q}$ будетъ больше какого угодно даннаго числа. Обозначая это число A, выражаемъ неравенствомъ положеніе, которое надо доказать: $\frac{an(q-1)+a}{q} > A$. Преобразованія этого неравенства представляютъ уже аналитическое доказательство, потому что мы начинаемъ съ неравенства, которое надо доказать, и продолжаемъ преобразованія, пока не получимъ такого, которое было бы очевидно вѣрно или которому очевидно можно было бы удовлетворить: $an(q-1)+a > Aq$; $an(q-1) > Aq-a$; $n > \frac{Aq-a}{a(q-1)}$. Всѣ эти преобразованія взаимныя, потому что a, q и $q-1$ положительныя и неравныя нулю числа. Поэтому каждое слѣдующее можетъ быть и слѣдствіемъ и основаніемъ предыдущаго. Смыслъ вывода здѣсь тотъ, чтобы найти основаніе, и его находимъ въ послѣднемъ неравенствѣ. Такъ какъ ему, очевидно, можно удовлетворить, то можно удовлетворить и данному, которое является его слѣдствіемъ.

VI. Рѣшеніе задачъ посредствомъ уравненій.

Рѣшеніе задачъ посредствомъ уравненій слагается изъ трехъ частей: 1) изъ составленія уравненій, 2) рѣшенія уравненій и 3) изслѣдованія уравненій.

Выражая уравненіями условія задачи, мы рѣшеніе задачи приводимъ къ рѣшенію системы уравненій. Это процессъ аналитическій, потому что мы, исходя изъ вопроса задачи, замѣняемъ его другимъ, который просто рѣшается по извѣстнымъ правиламъ и рѣшеніе котораго приводитъ къ рѣшенію вопроса задачи.

Рѣшеніе уравненій представляетъ также процессъ аналитическій, потому что мы, при каждомъ тождественномъ преобразованіи, одну систему уравненій замѣняемъ другой, ей тождественной, т.-е. такой, рѣшенія которой были бы вмѣстѣ и рѣшеніями данной системы, пока не дойдемъ до системы вида $x=A$, $y=B$.. ., гдѣ A, B.... выраженія, не содержащія неизвѣстныхъ. Итакъ, все рѣшеніе задачи посредствомъ уравненій представляетъ процессъ аналитическій. А такъ какъ рѣшеніе уравненій составляетъ главнѣйшую задачу алгебры, то алгебру часто называютъ анализомъ.

Для того, чтобы полученная система рѣшеній представляла вѣрное и полное рѣшеніе вопроса задачи, необходимо, чтобы во-1-хъ, уравненія выражали всѣ условія задачи, и во-2-хъ, чтобы всѣ преобразованія уравненій были вполнѣ тождественны Но такъ какъ и то и другое условіе не всегда выполняются, то полученныя рѣшенія необходимо изслѣдовать. Различаютъ изслѣдованіе частныхъ рѣшеній, когда извѣстныя выражены цыфрами, и изслѣдованіе общихъ рѣшеній, когда извѣстныя выражены буквами.

Изслѣдованіе частныхъ рѣшеній должно выяснить, всѣ ли полученныя рѣшенія удовлетворяютъ условію задачи и представляютъ ли полученныя рѣшенія всѣ возможныя рѣшенія задачи. Для этого нужно разсмотрѣть, не заключаетъ ли условіе задачи какихъ-нибудь условій или опредѣленій, которыя не могли быть выражены уравненіями и которыя дѣлаютъ систему уравненій не тождественной условію задачи или, какъ говорятъ, не адекватнымъ выраженіемъ условія задачи. Такія условія бываютъ трехъ родовъ: 1) что рѣшенія должны быть положительныя, 2) что они должны быть цѣлыя, 3) что они должны заключаться въ извѣстныхъ предѣлахъ. При существованіи этихъ условій, всѣхъ или нѣкоторыхъ, нѣкоторыя рѣшенія уравненій могутъ не удовлетворять этимъ условіямъ и тогда не будутъ представлять рѣшенія задачи и должны быть отброшены.

Такъ какъ нѣкоторыя преобразованія, которыя приходится дѣлать при рѣшеніи уравненій, не вполнѣ тождественны: при однихъ могутъ быть введены постороннія рѣшенія (умноженіе на выраженіе, содержащее неизвѣстныя, возвышеніе въ квадратъ), при другихъ могутъ быть утрачены нѣкоторыя рѣшенія (дѣленіе на выраженіе, содержащее неизвѣстныя, извлеченіе кв. корня), то необходимо разсмотрѣть, не было ли при рѣшеніи уравненій этихъ случаевъ, и если были, то исключить постороннія рѣшенія и пополнить утраченныя.

При изслѣдованіи общихъ рѣшеній слѣдуетъ, кромѣ того, разсмотрѣть, при какихъ значеніяхъ извѣстныхъ или при какихъ соотношеніяхъ между ними получаются тѣ или другіе виды рѣшеній.

СОДЕРЖАНІЕ.

Стран.

Предисловіе 3

A. Логика геометріи.

I. Предметъ и методъ геометріи. Геометрія изучаетъ свойства формъ пространства. Методъ геометріи дедуктивный 5

II. Опредѣленія. Опредѣленія служатъ для различенія понятій и могутъ ихъ замѣщать. Опредѣленія въ наукахъ дедуктивныхъ выражаютъ эссенцію понятія 6

III. Аксіомы. Аксіомы выражаютъ эссенцію простѣйшихъ геометрическихъ формъ: 1) точки и двухъ прямыхъ, проходящихъ черезъ нее, 2) двухъ точекъ и соединяющей ихъ прямой и 3) двухъ параллельныхъ прямыхъ, пересѣченныхъ третьей 7

IV. Доказательства. 1) Роль опредѣленія въ доказательствѣ 10

2) Прямые методы доказательства. a) Силлогизмъ. 1-я фигура силлогизма. Соединеніе силлогизмовъ въ доказательство 12

b) Методъ наложенія 16

c) Анализъ сложныхъ формъ. 17

d) Свойства чертежа 18

e) Раздѣленіе понятій. Примѣненіе исчерпывающихъ дѣленій. Раздѣленія исключающія 19

3) Непрямые методы. a) Предложенія общія, частныя, единичныя, противныя и противорѣчащія 21

b) Связь причины и слѣдствія. 2-я фигура силлогизма 24

c) Доказательство отъ противнаго. Простое примѣненіе доказательства отъ противнаго. 27

d) Теорема основная, обратная, противоположная и обратно-противоположная. 1) Обращеніе предложеній. 2) Противоположеніе. 3) Группы изъ 4 теоремъ 28

e) Доказательство отъ противнаго посредствомъ обратно-противоположной теоремы 33

f) Доказательство отъ противнаго обратно-противоположной теоремы посредствомъ основной и противоположной 34

g) Способъ предѣловъ. 1) Заключеніе по способу предѣловъ подходитъ подъ 2-ю фигуру силлогизма, 2) Примѣненіе къ величинамъ, относительно которыхъ доказывается, что онѣ предѣлы. 36

3) Примѣненіе къ величинамъ, опредѣляемымъ какъ предѣлы 37

Стран.

V. Измѣреніе геометрическихъ величинъ 39
VI. Построеніе геометрическихъ формъ. Методъ геометрическихъ мѣстъ . . 42
VII. Анализъ и синтезъ въ рѣшеніи задачъ 44

B. Логика ариѳметики.

I. Опредѣленія числъ и дѣйствій 48
II. Аксіомы и основные законы. 49
III. Система счисленія 50
IV. Доказательства теоремъ 51
1. Анализъ сложныхъ суммъ . . . . . —
2. Доказательство отъ противнаго 52
3. Методъ предѣловъ 53
V. Доказательства правилъ: . . . . . —
1. Правила достаточныя и необходимыя и правила только достаточныя. —
2. Доказательства правилъ прямыхъ дѣйствій. Анализъ сложныхъ суммъ 54
3. Доказательства правилъ обратныхъ дѣйствій. Гипотетическій методъ. 55
VI. Значеніе примѣровъ въ доказательствахъ 56
VII. Рѣшеніе задачъ 57
1. Анализъ задачи . . . . . —
2. Синтезъ задачи 58
3. Примѣненіе дѣйствій 59

C. Логика алгебры.

I. Предметъ алгебры 60
II. Опредѣленія числъ и дѣйствій 61
III. Доказательства 63
1. Анализъ сложныхъ функцій . . . . . —
2. Правила обратныхъ дѣйствій Гипотетическій методъ — методъ повѣрки. Два видоизмѣненія. 64
3. Значеніе примѣровъ. Исключеніе случайностей 65
IV. Равенства и неравенства: 66
1. Тождества и уравненія . . . . . —
2. Тождества въ доказательствахъ . . . . . —
3. Преобразованія равенствъ 67
4. Преобразованія неравенствъ 68
V. Доказательства посредствомъ преобразованій равенствъ и неравенствъ . . 69
1. Синтетическое доказательство . . . . . —
2. Аналитическое доказательство 70
VI. Рѣшеніе задачъ посредствомъ уравненій 71