БІОГРАФІИ

ЗНАМЕНИТЫХЪ МАТЕМАТИКОВЪ

XIX СТОЛѢТІЯ.

БІОГРАФІИ

ЗНАМЕНИТЫХЪ МАТЕМАТИКОВЪ

XIX СТОЛѢТІЯ.

СОБРАЛЪ

В. В. Бобынинъ

Приватъ-Доцентъ Императорскаго Московскаго Университета.

Изданіе Редакціи журнала „Физико-Математическія Науки въ ихъ настоящемъ и прошедшемъ“.

БІОГРАФІИ
ЗНАМЕНИТЫХЪ МАТЕМАТИКОВЪ XIX СТОЛѢТІЯ.
ВЫПУСКЪ III.

ГОЁНЕ ВРОНСКІЙ

и

ЕГО УЧЕНІЕ О ФИЛОСОФІИ МАТЕМАТИКИ.

СОСТАВЛЕНО
В. В. Бобынинымъ
Приватъ-Доцентомъ Императорскаго Московскаго Университета.

МОСКВА. 1894
ТОВАРИЩЕСТВО ТИПОГРАФІИ А. И. МАМОНТОВА
ЛЕОНТЬЕВСКІЙ ПЕР., Д. МАМОНТОВА.

Библиотека ООН
Академии Наук СССР
083
40

Дозволено цензурой. Москва, 27 апрѣля 1894 г.

ГОЕНЁ ВРОНСКІЙ И ЕГО ТРУДЫ ПО ФИЛОСОФІИ МАТЕМАТИКИ.

Гоёне Вронскій, польскій математикъ-философъ, принадлежитъ къ разряду тѣхъ ученыхъ, взгляды и ученія которыхъ оцѣниваются по достоинству только потомствомъ. Это случается чаще всего съ выдающимися мыслителями, значительно опередившими свое время и вслѣдствіе этого непонятными для большинства современниковъ. Не слѣдуетъ однако думать, что указанное явленіе всегда бываетъ слѣдствіемъ исключительно только этой одной причины. Есть еще и другія. Какъ на главнѣйшую изъ нихъ можно указать на несогласіе проповѣдываемыхъ ученій или предлагаемыхъ взглядовъ съ господствующими въ данный моментъ направленіями и ученіями. Нетерпимость, къ которой въ этомъ случаѣ склонны люди, слишкомъ хорошо извѣстна, чтобы стоило на ней останавливаться. Достаточно сказать, что одного подозрѣнія въ этомъ несогласіи иногда бываетъ довольно, чтобы навсегда лишиться симпатій своихъ современниковъ. Въ настоящей статьѣ мы не имѣемъ въ виду заниматься рѣшеніемъ вопроса: каковы были причины указанныхъ отношеній современниковъ къ Вронскому, хотя нѣкоторые матерьялы для этого въ ней и будутъ. Наша ближайшая цѣль состоитъ въ ознакомленіи читателей съ трудами и ученіемъ самаго выдающагося, даже можно сказать, пока еще единственнаго, представителя Философіи математики—науки, только еще создающейся, но имѣющей въ будущемъ подчинить себѣ все дальнѣйшее развитіе наукъ математическихъ.

Гоёне Вронскій родился въ 1778 году въ Познани. Шестнадцати лѣтъ отъ роду онъ былъ уже артиллерійскимъ офицеромъ въ рядахъ польскихъ войскъ. Во время знаменитой осады города Варшавы онъ командовалъ одною изъ баттарей, наиболѣе выдвинутыхъ къ прусскимъ линіямъ въ предмѣстьѣ Воля. Ему удалось

взорвать здѣсь пороховые магазины, слѣдствіемъ чего было совершенное уничтоженіе предмѣстья, въ которомъ непріятель очень сильно укрѣпился. Этимъ онъ много содѣйствовалъ отступленію послѣдняго. За этотъ подвигъ онъ получилъ публичный почетный отзывъ и національную награду за отличіе. Въ знаменитой битвѣ при Мацеовицахъ 10 октября 1794 года Вронскій командовалъ баттареей праваго крыла. Здѣсь онъ, находясь подлѣ генерала Косціушко, былъ взятъ въ плѣнъ вмѣстѣ съ нимъ. За послѣдовавшимъ затѣмъ окончательнымъ паденіемъ Польши Вронскій поступилъ на службу въ русскую армію, въ артиллерію, съ чиномъ полковника. Здѣсь именно, когда ему было двадцать лѣтъ отъ роду, во время его службы въ Главномъ Штабѣ у Суворова въ немъ созрѣла мысль предаться исключительно научнымъ занятіямъ. Утвердившись окончательно въ этомъ намѣреніи, онъ вышелъ въ 1797 году въ отставку, при чемъ, не смотря на его иностранное происхожденіе, ему было предоставлено Императоромъ Павломъ I не въ примѣръ прочимъ право носить русскую военную форму. Кромѣ того ему была назначена также и пенсія.

Съ деньгами, вырученными отъ продажи имѣнія, оставшагося ему отъ отца, Вронскій отправился въ Германію. Тамъ, въ этой классической странѣ философіи, онъ ревностно принялся за изученіе математическихъ и физическихъ наукъ, бывшихъ ему отчасти знакомыми и прежде, а также и за изученіе наукъ нравственныхъ и въ особенности Высшей Философіи. Своимъ учителемъ въ этой послѣдней онъ выбралъ знаменитаго Канта. Убѣжденный послѣдователь созданнаго послѣднимъ направленія философіи, онъ оставался вѣренъ ему въ теченіе всей своей ученой дѣятельности. «Не смотря на важность настоящаго момента для человѣчества», говорилъ Вронскій въ декабрѣ 1818 года въ № 1 своего Сфинкса, «въ этомъ отношеніи царствуетъ во всемъ нашемъ родѣ пагубный индифферентизмъ или скорѣе произвольное и глубокое ослѣпленіе. Истина, эта высочайшая цѣль человѣчества, кажется ему химерой; и однакоже, чтобы хотя установить эту роковую невозможность достиженія абсолютной истины, необходимо, чтобы эта невозможность сама сдѣлалась абсолютной истиной. Какое противорѣчіе! Человѣческій умъ не хочетъ признавать своего могущества, пользуясь въ дѣйствительности этимъ могуществомъ или, лучше, при посредствѣ этого самаго могущества. Это самоуничиженіе постыдно, такъ какъ оно обнаруживаетъ тайное заблужденіе ума, родъ сознанія извращенія нашего назначенія, самопроизвольное уничтоженіе ума и нашего

рода». Этихъ словъ совершенно достаточно, чтобы видѣть какое философское знамя держалъ авторъ въ то время, когда около него, во Франціи, созидалась Контомъ такъ называемая положительная философія. Созданному Контомъ направленію философіи Вронскій обязанъ также и направленіемъ своихъ математическихъ работъ и изслѣдованій.

Въ 1800 году въ немъ снова пробудилось стремленіе употребить свои способности на пользу родной страны, то есть Польши. Съ этой цѣлью онъ отправился въ Парижъ, а затѣмъ въ Марсель. Лестное вниманіе, которое ему было при этомъ оказано генераломъ Косціюшко и командующимъ польскими легіонами генераломъ Домбровскимъ, выразилось какъ въ полученныхъ имъ отъ нихъ письмахъ, такъ и въ особенности въ довѣріи, съ которымъ они поручали ему въ тѣхъ же письмахъ редакцію сочиненія, имѣющаго предметомъ возстановленіе Польши. Но ясно опредѣлившееся призваніе влекло его въ другую сторону. Въ своихъ размышленіяхъ онъ сталъ замѣчать, какъ ему казалось, зародыши великихъ открытій. Отсюда оставался одинъ шагъ до убѣжденія, что вмѣсто того, чтобы служить только одной своей родинѣ, онъ долженъ посвятить себя дѣятельности во имя блага всего человѣчества. И этотъ шагъ былъ сдѣланъ. Отказавшись такимъ образомъ, хотя и съ большимъ сожалѣніемъ, отъ служенія родной странѣ, онъ долженъ былъ вмѣстѣ съ тѣмъ разорвать многія дружественныя связи и въ числѣ ихъ даже связь со своимъ семействомъ. Положеніе его въ матерьяльномъ отношеніи сдѣлалось вслѣдствіе этого довольно затруднительнымъ. Для доставленія себѣ необходимыхъ средствъ къ жизни онъ долженъ былъ обратиться къ публичнымъ лекціямъ и частнымъ урокамъ по разнымъ отдѣламъ человѣческаго знанія. Не смотря на всѣ эти затрудненія, энергія въ достиженіи поставленной цѣли не покидала его ни на минуту. Въ теченіе слѣдующихъ 10 лѣтъ въ абсолютномъ уединеніи онъ неустанно предавался обработкѣ и развитію своихъ философскихъ и научныхъ открытій и изслѣдованій.

Окончивши въ 1810 году свои работы и озабочиваясь ихъ изданіемъ въ свѣтъ, Вронскій отправился въ Парижъ. Первымъ дѣломъ его тамъ было представленіе Французскому Институту краткаго обзора полученныхъ имъ математическихъ результатовъ. Мнѣніе, высказанное этимъ ученымъ учрежденіемъ по поводу послѣднихъ, было весьма благосклонное. Вотъ, что читаемъ мы въ заключеніи доклада, представленнаго по поводу упомянутаго труда Вронскаго въ Инсти-

тутъ и напечатаннаго въ Монитерѣ отъ 15 ноября 1810 года: «При современномъ состояніи науки, когда нужда въ новыхъ средствахъ даетъ себя чувствовать въ такомъ большомъ числѣ пунктовъ и когда многіе иностранные геометры занимаются изысканіями этого рода, мы думаемъ, что Отдѣленіе должно побудить г. Вронскаго къ развитію своихъ *новыхъ и чрезвычайно общихъ* идей съ цѣлью приспособленія ихъ къ болѣе спеціальнымъ приложеніямъ».

Отвѣтомъ со стороны Вронскаго на этотъ вызовъ Французскаго Института было изданіе въ свѣтъ въ 1811 году его Introduction a la Philosophie des Mathématiques, et Technie de l'Algorithmie (Введеніе въ Философію математики и Техніи Алгориѳміи). Въ Предисловіи авторъ даетъ относительно предмета и ближайшихъ мотивовъ появленія въ свѣтъ своего труда слѣдующія указанія. «Главный предметъ этого сочиненія состоитъ въ установленіи новой отрасли математики. — Его побочный предметъ есть **обосновка математики** вообще. Техніи Алгориѳміи, составляющая существенную часть этой новой отрасли, была представлена Французскому Институту. Назначенная этимъ учрежденіемъ Коммиссія опредѣленно заявила, *что всѣ извѣстные методы, основанные на разложеніяхъ функцій, вытекаютъ изъ перваго закона этой Техніи и что въ отношеніи къ нему они суть только очень частные случаи.* Этимъ она признала абсолютную общность или, по крайней мѣрѣ, вѣроятную абсолютную общность этого верховнаго алгориѳмическаго закона. Но, такъ какъ авторъ далъ тогда только одни результаты, то Коммиссія не могла вникнуть въ самую природу Техніи математики; она просила необходимыхъ разъясненій. Эти разъясненія принадлежатъ Философіи математики. Авторъ представляетъ ихъ въ первой части этого сочиненія, имѣющей предметомъ Введеніе въ эту Философію и являющейся извлеченіемъ изъ полной Философіи математическихъ наукъ. Во второй части авторъ дастъ Технію Алгориѳміи въ такомъ видѣ, въ какомъ онъ имѣлъ честь представить ее Французскому Институту». Упоминаемая въ приведенныхъ сейчасъ заглавіи и предисловіи вторая часть разсматриваемаго сочиненія Вронскаго появилась въ свѣтъ значительно позже, именно первое ея отдѣленіе въ 1815 году, а второе въ 1816 и 1817 годахъ. Общее заглавіе обоихъ отдѣленій—Philosophie de la Technie algorithmique (Философія алгориѳмической Техніи), а частныя: перваго—Première Section, contenant la loi suprême et universelle des Mathématiques (первое отдѣленіе, содержащее верховный и всеобщій законъ математики) и втораго — Seconde Section, contenant les Lois

des Séries, comme préparation à la Réforme des Mathématiques (Второе отдѣленіе, содержащее законы рядовъ, какъ приготовленіе къ реформѣ Математики).

Introduction à la Philosophie des Mathématiques было посвящено авторомъ Императору Александру I. Не смотря на это, страннымъ и совершенно неожиданнымъ результатомъ появленія ея въ свѣтъ было уменьшеніе пенсіи, получаемой авторомъ отъ Россіи. Принималъ-ли въ этомъ дѣлѣ какое-нибудь участіе русскій посланникъ въ Парижѣ или нѣтъ, мы не знаемъ. Вторымъ результатомъ появленіе книги было начало продолжавшейся затѣмъ весьма долгое время борьбы Вронскаго съ Французскимъ Институтомъ.

Ученo-литературная дѣятельность Вронскаго, начавшаяся, какъ мы видѣли выше, съ появленія въ свѣтъ его Introduction, была довольно обширна. Приведемъ сперва въ хронологическомъ порядкѣ списокъ тѣхъ изъ его сочиненій, о которыхъ намъ удалось собрать болѣе подробныя свѣдѣнія.

Resolution Générale des équations de tous les degrés (Общее рѣшеніе уравненій всѣхъ степеней). Paris. 1812. Въ 4 д. л., 16 стр. Посвящена Польшѣ, старому отечеству автора. Въ 1847 году вышла вторымъ изданіемъ.

Refutation de la Théorie des Fonctions analytiques de Lagrange (Опроверженіе теоріи аналитическихъ функцій Лагранжа). Paris. 1812. Въ 4 д. л., 135 стр. Посвящена Императорскому Французскому Институту.

Philosophie de l'Infini, contenant des contre-réflexions et des réflexions sur la Métaphysique du Calcul infinitésimale (Философія безконечнаго, содержащая возраженія и размышленія по поводу Метафизики Исчисленія безконечно-малыхъ). Paris. 1814. Въ 4 д. л., 195 стр. Книга состоитъ изъ четырехъ мемуаровъ, двухъ замѣтокъ и постъ-скриптума. 1-er Mémoire-Contre-Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimale. 2-e Mémoire—Philosophie du Calcul Infinitésimal. 3-e Mémoire—Réponse à la seconde édition de la Théorie des Fonctions analytiques de Lagrange. 4-e Mémoire—Sur l'Éloge de M. le comte Lagrange. 1-ère Note—Sur la Méthode générale d'approximation, ou la Méthode algorithmique d'exhaustion (Общій методъ приближенія или алгориѳмическій методъ исчерпыванія). 2-e Note—Sur la Génération primitive des Différentielles (О первоначальномъ происхожденіи дифференціаловъ).

Описанная уже выше *Philosophie de la Technie algorithmique* въ двухъ отдѣленіяхъ. Paris. 1815 et 1816—1817. Въ 4 д. л.

Introduction au Sphinx (Введеніе къ Сфинксу). Paris. 1818.

Le Sphinx, ou la Nomothétique séhélienne. № 1. Paris. Decembre 1818. Въ 4 д. л., 74 стр. Посвященъ Императору Александру I. № 2. Février. Paris. 1819.

Critique de la théorie des fonctions génératrices de Laplace, contenant, pour le cas fondamental, l'intégration générale des équations aux differences et aux différentielles, totales et partielles, de tous les ordres (Критика теоріи производящихъ функцій Лапласа, содержащая по отношенію къ основному случаю общее интегрированіе уравненій съ разностями и съ полными и частными дифференціалами для всѣхъ порядковъ). Paris. 1819. Въ 4 д. л.

Address to the British Board of Longitude upon the actual state of the mathematics, their reform, and upon the new celestial mechanics etc. (Обращеніе къ Британской Коммиссіи Долготы по поводу современнаго состоянія математики, ея реформы, также по поводу Небесной Механики и пр.). London. 1820. Въ 8 д. л.

Введеніе въ Курсъ математики, представляющее обозрѣніе настоящей реформы математики (на англійскомъ языкѣ). Лондонъ. 1821.

Canons de logarithmes avec un suppl. résol. des équ. du 5-e degré (Правила логариѳмовъ съ дополненіемъ о рѣшеніи уравненій 5-ой степени). Paris. 1827. Въ 8 д. л. «Каноны логариѳмовъ» представляютъ едва-ли не единственное изъ сочиненій Вронскаго, которое было переведено на русскій языкъ хотя и въ нѣсколько измѣненномъ видѣ. Этотъ переводъ или точнѣе передѣлка принадлежала нѣкоему Андрею Анненскому и вышла въ свѣтъ въ 1845 г. подъ заглавіемъ «Таблицы логариѳмовъ, Вронскаго» (С.-Петербургъ. Въ 8 д. л., II+56 стр. и таблица). Эти таблицы замѣчательны своею краткостью, такъ какъ состоятъ всего изъ 6 небольшихъ табличекъ, помѣщающихся на одной сторонѣ печатнаго листа небольшаго формата. При этомъ необходимо замѣтить, что для отысканія логариѳма всякаго числа собственно достаточно только какой-нибудь одной изъ этихъ табличекъ. Разница между логариѳмами одного и того-же числа, отысканными по каждой изъ нихъ, состоитъ только въ числѣ знаковъ: такъ одна изъ этихъ табличекъ даетъ логариѳмы съ 4 десятичными знаками, три другія—съ 5 десятичными знаками, пятая—съ 6-ю и шестая—съ 7-ю. Войти въ употребленіе какъ у насъ въ Россіи, такъ и въ Западной Европѣ, логариѳмамъ Вронскаго, повидимому, не удалось.

Machines à vapeur: aperçu de leur état actuel, sous les points de

vue de la mécanique et de l'industrie, pour conduire à la solution accomplie du problème, qui présentent ces machines, avec un supplément donnant la théorie mathématique rigoureuse des machines à vapeur fondée sur la nouvelle théorie générale des fluides (Паровыя машины: обозрѣніе ихъ современнаго состоянія съ точки зрѣнія механики и промышленности, имѣющее цѣлью приведеніе къ совершенному рѣшенію задачи, представляемой этими машинами, съ дополненіемъ, дающимъ строгую математическую теорію паровыхъ машинъ, основанную на новой общей теоріи жидкостей). Paris. 1829. Въ 4 д. л.. 7 листовъ.

Complement de la nouvelle théorie mathématique des machines à vapeur (Дополненіе къ новой математической теоріи паровыхъ машинъ). Paris. 1830. Въ 4 д. л.

Accomplissement des théories des probabilités pour maitriser les operations de rentes à la Bourse, les jeux et généralement tous les phénomènes dépendant du hasard (Усовершенствованіе теорій вѣроятностей съ цѣлью овладѣнія операціями рентъ на Биржѣ, играми и вообще всѣми явленіями, зависящими отъ случая). Paris. 1833. Au Bureau du messianisme. Въ 4 д. л.

Nouveaux systèmes de machines à vapeur fondés sur la découverte des vraies lois des forces mécaniques (Новыя системы паровыхъ машинъ, основанныя на открытіи истинныхъ законовъ механическихъ силъ). Paris. 1834—1835. Въ 4 д. л.

Messianisme, ou réforme absolue du savoir humain, nommément. réforme des mathématiques, comme prototype de l'accomplissement final des sciences, et réforme de la philosophie comme base de l'accomplissement final de la réligion (Мессіанизмъ или абсолютная реформа человѣческаго знанія, именно реформа математики, какъ прототипъ конечнаго усовершенствованія наукъ, и реформа философіи, какъ основаніе конечнаго усовершенствованія религіи). 3 тома въ 4 частяхъ. Въ 4 д. л. Томъ II 55 листовъ. Томъ III $49^1/_2$ листовъ. Paris. 1831—1847. Bureau du Messianisme.

Epître à Sa Majesté l'Empereur pour compléter les 100 pages décisives et pour accomplir la réforme de la mécanique céleste (Посланіе Его Величеству Императору въ видахъ дополненія 100 рѣшительныхъ страницъ и выполненія реформы Небесной Механики) Въ 4 д. л. Metz. 1851.

Philosophie absolue de l'histoire ou Genèse de l'humanité (Абсолютная Философія Исторіи или Книга Бытія человѣчества). Historiosophie ou science de l'histoire. 1-ère et 2-ème parties. Paris. Septembre 1852.

Посвящена Императорамъ Николаю I и Наполеону III. Въ «Общемъ предувѣдомленіи» къ этому сочиненію говорится: «Читатель узнаетъ двѣ вещи. 1) что истина еще не была до сего дня открыта и 2) что теперь наконецъ ее открываютъ въ этомъ сочиненіи».

Véritable science nautique des marées, spécialement sur les côtes maritimes, et réforme des mathématiques par leurs réduction à trois lois fondamentales (Истинная мореходная наука приливовъ и отливовъ, особенно у морскихъ береговъ, и реформа математики посредствомъ ея приведенія къ тремъ основнымъ законамъ). Въ 4 д. л. Paris. 1853.

Extrait du mémoire de M. Hoëné Wronski sur la théorie de la terre (Извлеченіе изъ мемуара г. Гоёне Вронскаго о теоріи земли). London.

Приводя въ 1-ой части «Абсолютной Философіи Исторіи», (стр. 80—84) списокъ своихъ сочиненій, Вронскій дѣлаетъ слѣдующее замѣчаніе по поводу перечисленныхъ сейчасъ его сочиненій по Математикѣ: «за исключеніемъ пяти послѣднихъ (начинающихся въ нашемъ спискѣ сочиненіемъ Nouveaux systèmes de machines à vapeur), всѣ эти труды, составляющіе научную гарантію нашей абсолютной философіи или доктрины Мессіанизма, болѣе не существуютъ. — *Они были истреблены во Франціи*» (стр. 84). Этимъ заявленіемъ вполнѣ объясняется чрезвычайная рѣдкость упоминаемыхъ сочиненій Вронскаго и отсутствіе ихъ полныхъ коллекцій даже въ богатѣйшихъ библіотекахъ Европы вообще и, чего было-бы всего труднѣе ожидать, Франціи въ особенности. По приводимому нами ниже свидѣтельству члена Парижской Академіи Наукъ, Ивона Вилларсо, сочиненія Вронскаго не существуютъ въ полномъ собраніи ни въ одной изъ французскихъ библіотекъ; даже библіотека Парижской Академіи Наукъ владѣетъ изъ нихъ только двумя томами.

Пріемъ, который нашла *Introduction à la Philosophie des Mathématiques* въ средѣ геометровъ, даже и не принадлежащихъ къ Институту, былъ не только холодный, но несочувственный, а въ иныхъ случаяхъ даже и прямо враждебный. Надежды и ожиданія, возбужденныя въ авторѣ приведеннымъ выше отзывомъ Института объ его мемуарѣ, такимъ образомъ болѣе, чѣмъ не оправдались. Въ печати были сдѣланы открытыя нападенія на его трудъ. Изъ нихъ онъ особенное значеніе придалъ сдѣланному 22 ноября 1812 года въ Монитёрѣ, такъ какъ, по его словамъ, «оно имѣло характеръ оффиціальнаго нападенія, заправляемаго цѣлымъ классомъ геометровъ». Главнѣйшія изъ обвиненій, формулированныхъ здѣсь противъ Философіи математики Вронскаго, сводятся къ тремъ главнымъ пунктамъ.

Ее считали, во-первыхъ, содержащею ошибки. Во-вторыхъ, видѣли въ ней произведеніе, назначенное исключительно для неспеціалистовъ по математикѣ. Наконецъ, въ-третьихъ, жаловались, что «авторъ этой Философіи окружилъ себя такой ужасающей темнотой, что очень трудно сказать, правъ-ли онъ или нѣтъ, такъ какъ его почти невозможно понять». На всѣ эти обвиненія авторъ отвѣчалъ въ постъ-скриптумѣ къ Philosophie de l'Infini. По поводу перваго онъ говоритъ: «Мы очень желаемъ и даже должны думать, что этотъ упрекъ сдѣланъ чистосердечно; но тогда намъ остается только увѣрить геометровъ, что они плохо читали или, по крайней мѣрѣ, плохо поняли смыслъ нашихъ формулъ, которыя по бо̀льшей части чисто схематическія. Въ самомъ дѣлѣ, если-бы даже и было справедливо, что вслѣдствіе поспѣшности, съ которою выполнялся этотъ первый трудъ (авторъ писалъ ночью то, что печаталось днемъ), въ него вкралось много типографскихъ ошибокъ и даже, можетъ быть, нѣсколько промаховъ въ выраженіяхъ, то во всякомъ случаѣ вполнѣ удостовѣрено что въ немъ нѣтъ ни одной капитальной математической ошибки, которая бы могла измѣнить смыслъ нашихъ формулъ. Намъ это извѣстно, какъ отъ насъ самихъ, такъ и отъ тѣхъ, которые при изученіи нашего труда прилагали его формулы къ примѣрамъ». На второе онъ отвѣчаетъ слѣдующими соображеніями «Но, ради Бога, чѣмъ было-бы наше изслѣдованіе для этой публики (чуждой математикѣ); что мы подѣлали-бы съ ней въ этомъ дѣлѣ, когда ученые, и даже величайшіе, сознаются, что не могутъ еще овладѣть нашими произведеніями?—Итакъ, пусть геометры успокоятся въ этомъ отношеніи вполнѣ; сверхъ того мы можемъ имъ сообщить, что, благодаря Небо, совсѣмъ не нуждаемся въ публикѣ. Мы не конкуррируемъ съ геометрами изъ за *мѣста*, какъ этимъ господамъ то безъ сомнѣнія извѣстно; и еще менѣе конкуррируемъ изъ за открытій, такъ какъ наши произведенія совершенно различнаго порядка. Къ тому-же мы даемъ въ этой статейкѣ неопровержимое доказательство того, что вовсе не имѣемъ желанія *дискредитировать* геометровъ, какъ на это жалуются. Пусть узнаютъ, въ самомъ дѣлѣ, что мы могли бы назвать съ полнымъ внутреннимъ убѣжденіемъ нѣсколькихъ великихъ геометровъ изъ числа живущихъ; мы этого не сдѣлали и, что имѣетъ рѣшающее значеніе, мы даже не захотѣли назвать весьма знаменитое имя автора, противъ котораго боремся въ первомъ мемуарѣ»*).

*) Карно, авторъ извѣстныхъ Reflexions sur la Métaphysique du Calcul infinitésimal, противъ которыхъ и направлены возраженія Вронскаго въ упоминаемомъ имъ мемуарѣ.

Наконецъ, третье обвиненіе вызываетъ со стороны автора слѣдующія соображенія. «Этотъ упрекъ вовсе насъ не касается; онъ представляетъ только ясное обнаруженіе состоянія знаній въ средѣ ученыхъ, которые его выразили, особенно если принять во вниманіе, что, по увѣренію редактора разсматриваемой направленной противъ насъ статьи, упомянутый упрекъ былъ сдѣланъ намъ однимъ изъ самыхъ великихъ ученыхъ изъ группы тѣхъ, отъ имени которыхъ является статья, и это даже «*послѣ зрѣлыхъ занятій разсмотрѣніемъ нашихъ работъ*». Желая, однако, всегда и всюду движенія науки впередъ, мы не можемъ пренебречь случаемъ оказать нѣкоторое содѣйствіе прогрессу знаній въ средѣ этихъ господъ. Итакъ, мы должны ихъ увѣрить, что наша Философія математики есть одна изъ самыхъ ясныхъ и самыхъ понятныхъ работъ, какія только существуютъ; но, конечно, для тѣхъ, которые уже знаютъ *Трансцендентальную Философію*. Мы должны ихъ увѣрить также, что сама Трансцендентальная Философія есть положительная наука (и даже самая положительная изъ всѣхъ), которая обработывается и преподается публично почти на всемъ сѣверѣ Европы.—Не трудно видѣть отсюда, что вовсе не наша вина, если какая-нибудь группа ученыхъ, отставшая отъ прогресса знаній въ Европѣ, оказывается не въ силахъ понять наше произведеніе. Даже болѣе, будучи вполнѣ преданны благу науки и не имѣя возможности оставить высшія изысканія для того, чтобы употребить наше время на воспроизведеніе на французскомъ языкѣ и распространеніе путемъ печати свѣдѣній объ этомъ новомъ движеніи человѣческаго ума, мы обѣщали пожертвовать наши досуги дѣлу распространенія высшихъ знаній, о которыхъ говоримъ, съ помощью устнаго курса. Это обѣщаніе было сдѣлано съ одной стороны величайшему ученому изъ числа тѣхъ, которые жалуются на невозможность понять нашу Философію математики, а съ другой — самому Наполеону, тогда уже бывшему повелителемъ Франціи».

Выразившіяся въ приведенной полемикѣ отношенія между Вронскимъ и современными ему геометрами продолжались, не смотря на всѣ его усилія, почти до самой его смерти, послѣдовавшей 9 августа 1853 года въ Нёльи. Въ продолженіе всей его жизни оффиціальная наука съ настойчивостью, достойной лучшей участи, постоянно отказывала ему въ признаніи научнаго значенія его трудовъ по Философіи математики, хотя, строго говоря, въ послѣдователяхъ его ученія и не было недостатка. Справедливость этого послѣдняго утвержденія можно видѣть, наприм., изъ подробнаго и написаннаго

при томъ съ полнымъ сочувствіемъ изложенія философско-математическихъ ученій Вронскаго на страницахъ вышедшаго въ 1845 году вторымъ изданіемъ Математическаго Словаря Монферрье (Dictionnaire, des sciences mathématiques pures et appliquées par A.-S. de Montferrier).

Первое время послѣ своей смерти Вронскій былъ почти совсѣмъ забытъ наукой. Интересъ къ его философско-математическимъ ученіямъ и признаніе ихъ научнаго значенія вмѣстѣ съ пропагандой ихъ въ математической литературѣ начались только съ семидесятыхъ годовъ и притомъ главнымъ образомъ въ той средѣ, которая въ прежнее время такъ много потрудилась для того, чтобы уронить ихъ въ глазахъ ученаго міра, то-есть въ средѣ французскихъ математиковъ, группирующихся около Парижской Академіи Наукъ. *Ивонъ Вилларсо* въ своихъ статьяхъ о Теоріи синусовъ высшихъ порядковъ, напечатанныхъ въ 1878 году въ Comptes rendus (Tome LXXXVI, №№ 19, 20, и 21), придя путемъ изученія общаго показательнаго выраженія a^{m_x} къ обнаруженію новой группы функцій указываетъ, что эта послѣдняя была уже открыта 50 лѣтъ назадъ Вронскимъ. При этомъ онъ излагаетъ также и путь, которымъ послѣдній пришелъ къ своему открытію (см. стр. 1163—1164). Тотъ-же ученый, спустя почти два года, снова возвратился къ тому-же предмету въ статьяхъ подъ заглавіемъ «Приложеніе теоріи синусовъ высшихъ порядковъ къ интегрированію линейныхъ дифференціальныхъ уравненій» (Comptes rendus; tome XC, №№ 13 и 14). Въ началѣ первой изъ этихъ статей авторъ даетъ слѣдующее изложеніе ихъ цѣлей. «Такъ какъ всегда слѣдуетъ указывать пути, которыми достигается научный прогрессъ, то я и прошу Академію позволить мнѣ познакомить ее съ тѣмъ, какъ вопросъ Механики, который могъ-бы казаться исчерпаннымъ, привелъ меня какъ къ познанію *большой пользы новыхъ функцій для интегрированія весьма распространеннаго класса линейныхъ дифференціальныхъ уравненій*, такъ и къ познанію *совершенно спеціальнаго мѣста, которое эти функціи занимаютъ въ упомянутомъ интегрированіи*» (см. стр. 722). Авторъ разсматриваетъ интегрированіе слѣдующихъ уравненій.

$$\frac{d^m\eta}{dx^m} \mp r^m\eta = 0$$

$$\frac{d^m\eta}{dx^m} \mp r^m\eta = V, \text{ гдѣ } V\text{—функція } x,$$

$$\frac{d^k y}{dx^k} \mp \frac{d^h y}{dx^h} + q = V$$

Въ заключеніе второй статьи авторъ выражаетъ сожалѣніе, что не можетъ отослать интересующихся къ сочиненіямъ самого Вронскаго, потому что они почти непонятны для тѣхъ, которые не имѣютъ въ своихъ рукахъ всей совокупности изданій того-же автора, предшествующихъ сочиненію, содержащему предметъ, которымъ хотятъ заняться; изданія-же эти не существуютъ въ полномъ собраніи ни въ одной изъ нашихъ библіотекъ; даже библіотека Академіи Наукъ едва владѣетъ двумя томами, что составляетъ только очень незначительную часть весьма многочисленной коллекціи» (см. стр. 768—769).

Въ послѣдней четверти 1880 года въ тѣхъ-же Comptes rendus (Tome XCI, №№ 15, 16, 18 и 19) были помѣщены статьи *Эмиля Вест'а* (West) подъ общимъ заглавіемъ «Объ алгебраическихъ уравненіяхъ», въ которыхъ авторъ задается цѣлью «показать результатъ изученія, относящагося къ теоріи алгебраическихъ уравненій, къ которому онъ былъ вдохновленъ принципами, указанными Г. Вронскимъ», и которое состояло «въ сравнительномъ разсмотрѣніи методовъ Лагранжа, Вронскаго и нѣкоторыхъ теоремъ Абеля» (см. стр. 598). Первыя двѣ статьи заняты изысканіемъ формы корней алгебраическихъ уравненій, третья—изслѣдованіемъ метода Лагранжа и четвертая — изслѣдованіемъ предложеній Абеля. Что-же касается до метода Вронскаго, то авторъ посвятилъ его изслѣдованію двѣ слѣдующія статьи, которыя и были имъ доставлены подобно предыдущимъ въ Академію Наукъ, но почему-то не удостоились напечатанія въ Comptes rendus. Вслѣдствіе этой-ли неудачи или чего другаго, но только слѣдующія статьи того-же автора, посвященныя изученію работъ Вронскаго, появились уже не на страницахъ Comptes rendus, но въ Journal de Mathématiques pures et appliquées Ліувилля, издававшемся въ это время Резалемъ. Статьи эти были посвящены главнымъ образомъ изложенію общихъ методовъ Математики на основаніи ученій Вронскаго. Первая изъ нихъ появилась въ январскомъ № (Tome VII, Janvier 1881) журнала подъ заглавіемъ Exposé des méthodes générales en Mathématiques; résolution et intégration des équations, applications diverses, d'aprés Hoené Wronski.

Авторъ начинаетъ Введеніе къ своей статьѣ слѣдующимъ изображеніемъ ея предмета. «Въ послѣдніе годы математическія работы Гоене Вронскаго цитировались неоднократно, но при томъ такъ, что никто не останавливался на общихъ методахъ, предложенныхъ этимъ геометромъ. Эти методы однако-же казались намъ чрезвычайно практичными и весьма простыми по ихъ принципамъ каждый разъ, какъ мы имѣли случай ихъ изслѣдовать или давать имъ ка-

кія-нибудь приложенія. Работы Вронскаго очень рѣдки, а чтеніе ихъ въ началѣ трудно. Мы надѣемся, что для насъ будетъ довольно представить методы, о которыхъ мы говоримъ, съ обыкновенно употребляемыми замѣчаніями и въ сопровожденіи примѣровъ, достаточныхъ для того, чтобы сдѣлать ихъ легко понятными» (стр. 5—6). Дополненіемъ къ этой первой статьѣ Веста служитъ помѣщенная въ мартовскомъ и апрѣльскомъ №№ того-же тома журнала Digression sur les séries. Что-же касается до продолженія главной статьи, то мы находимъ его въ слѣдующихъ томахъ журнала въ видѣ статей, имѣющихъ то-же общее заглавіе и раздѣленныхъ на группы, составляющія deuxième note (Tome VIII, 1882 года), troisième note (Tome VIII, 1882), quatrième note (Tome IX 1883). Редакція журнала Ліувилля придавала такое значеніе статьямъ Веста, а слѣдовательно и работамъ Вронскаго, что нѣкоторые №№ (за октябрь и ноябрь 1883 года) оказываются занятыми ими исключительно. Въ заключеніе послѣдней изъ разсматриваемыхъ статей авторъ говоритъ: «Не смотря на несовершенства, которыя можно встрѣтить въ нашей работѣ, мы все-таки надѣемся, что она достаточно понятна для того, чтобы было отнынѣ возможно прилагать этотъ методъ (методъ интегрированія уравненій съ разностями или съ частными производными, данный Вронскимъ) къ труднымъ вопросамъ Механики и Астрономіи, наукъ, которыя теперь остановились въ своемъ развитіи по невозможности, гдѣ это есть, рѣшать или интегрировать съ достаточною точностью уравненія, къ установленію которыхъ пришли. Въ дополненіи мы дадимъ доказательства и теоретическія развитія, которыя до сихъ поръ намъ приходилось опускать. Теперь мы можемъ привесть слѣдующія слова Вронскаго; послѣ всего изложеннаго они, безъ сомнѣнія, болѣе не покажутся преувеличенными. «Мы получаемъ такимъ образомъ абсолютно общимъ способомъ, именно приложеніемъ нашего элементарнаго вторичнаго метода, полное рѣшеніе сочетанныхъ уравненій, каковы бы ни были ихъ число и родъ, будутъ-ли они первоначальныя, имманентныя или трансцендентныя, будутъ-ли производныя, съ разностями или съ полными или частными дифференціалами. И геометры, безъ сомнѣнія, замѣтятъ, что здѣсь именно и лежитъ рѣшеніе величайшей и труднѣйшей задачи ихъ науки, той огромной задачи, на которую въ ея безконечной общности они едва смѣли смотрѣть» *). Намъ остается поблагодарить г. Резаля,

*) *Réforme*, t. I, page cxvij.

принявшаго эту работу въ свой журналъ; мы тѣмъ болѣе благодарны ему за это, что, до послѣдняго времени, геометры по большей части были мало расположены въ пользу всего, что относится къ произведеніямъ Вронскаго. Мы благодаримъ также и г. Ивонъ Вилларсо, ученаго астронома, поощрявшаго насъ и дававшаго намъ во время составленія этого мемуара свои совѣты» *).

Не смотря на отрицательныя отношенія, установившіяся къ трудамъ Вронскаго въ оффиціальной наукѣ, эти послѣдніе не только были замѣчены въ отечествѣ автора, но и вызвали къ себѣ тамъ такое сочувствіе, на которое едва-ли бы могли разсчитывать въ своемъ отечествѣ при подобныхъ обстоятельствахъ ученые многихъ другихъ странъ. Вскорѣ послѣ появленія въ свѣтъ первыхъ трудовъ Вронскаго, князь Чарторыйскій предлагалъ ему издавать свои сочиненія на очень выгодныхъ условіяхъ въ Варшавѣ. Онъ отклонилъ это предложеніе вслѣдствіе еще болѣе выгодныхъ обѣщаній, полученныхъ имъ въ тоже время отъ богатаго купца Арсона, бывшаго его ученикомъ и другомъ и не желавшаго, чтобы Франція, а также и онъ самъ, потеряли такого учителя, какъ Вронскій. Статьи о Вронскомъ и его ученой дѣятельности весьма нерѣдко появлялись въ польской литературѣ, какъ при его жизни, такъ и послѣ смерти. Приведемъ списокъ тѣхъ изъ нихъ, которыя намъ извѣстны.

Статья о Вронскомъ въ № 1 краковскаго изданія Zbieracz literacki. 1838. Стр. 5—8.

Hoene Wroński i jego udział w rozwinięciu ostatecznem wiedzy ludzkiéj. Wydawca *L. Niedzwiecki*. Paryz. 1844. In—8°, str. 93. po krótkiéj wzmiance o życiu i pismach Wrońskiego, rozbiéra jego pisma filozoficzne.

Hoene Wroński. Przedruk z Przeglądu Poznańskiego. w Poznaniu w komisie księgarni J. K. Żupańskiego 1852. In—8°. 90 стр.

Wizerunek (портретъ) Wrońskiego z natury w akwareli wykonany przez Norwida w Rzymie 1856 г.

Нашъ очеркъ философско-научной дѣятельности Вронскаго страдалъ-бы едва-ли извинительнымъ пробѣломъ, если-бы мы ограничились исключительно его математическими работами, не давъ хотя нѣкото-

*) Перечисленныя сейчасъ, помѣщенныя въ Journal des Mathématiques Ліувилля, статьи Веста появились въ настоящее время отдѣльной книгой подъ заглавіемъ *Emile West*. Exposé des méthodes générales en Mathématiques, résolution et intégration des équations, applications diverses d'après Hoëné Wronski. Paris. Gauthier-Villars. 1886. (In — 4°, pp. X + 314). Въ этой же книгѣ находится и обѣщанное авторомъ дополненіе.

раго понятія о принадлежащей ему общей философской доктринѣ и объ ея отношеніяхъ къ его Философіи математики. Чтобы отвратить отъ себя возможность подозрѣнія въ невѣрностяхъ передачи, мы воспользуемся собственнымъ изложеніемъ автора въ его наиболѣе общедоступной формѣ. Поступить такъ тѣмъ болѣе необходимо, что въ общественномъ мнѣніи ученіе Вронскаго съ давнихъ временъ смѣшивалось со сходнымъ съ нимъ по названію мистическимъ ученіемъ поэта Мицкевича. Упомянутое болѣе общедоступное изложеніе философской доктрины Вронскаго мы находимъ въ его уже названной выше «Абсолютной философіи исторіи» (т. I, стр. 4—7). «Поражаясь, какъ и всѣ», говоритъ въ этомъ сочиненіи авторъ, «всеобщимъ смѣшеніемъ идей и въ то-же время понимая, что современныя человѣческія знанія оказываются недостаточными не только для того, чтобы дойти прогрессивно до открытія истины, но даже и для того, чтобы установить въ современномъ умственномъ хаосѣ какой-нибудь порядокъ, мы должны были признать необходимость высшихъ знаній и тѣмъ самымъ необходимость дальнѣйшаго развитія нашихъ умственныхъ способностей, чтобы быть при ихъ посредствѣ въ состояніи пріобрѣсть эти высшія знанія. Къ счастію Священное Писаніе, указывая на этотъ новый умственный порядокъ, формально обѣщаетъ вмѣстѣ съ тѣмъ его осуществленіе черезъ пришествіе Святаго Духа, то-есть того Духа Истины, который долженъ научить насъ всему (omnem veritatem). И мы легко поймемъ тогда, что этотъ Духъ Истины не можетъ быть ничѣмъ другимъ какъ *абсолютнымъ человѣческимъ разумомъ* въ тотъ моментъ, когда онъ достигнетъ своимъ прогрессивнымъ развитіемъ до освобожденія себя отъ вышеупомянутыхъ физическихъ путъ, чувства и воспріятія; вслѣдствіе этого обѣщанное пришествіе Святаго Духа не можетъ быть въ свою очередь ничѣмъ другимъ какъ только этимъ развитіемъ человѣческаго разума, совершившимся черезъ непрерывный умственный прогрессъ человѣчества».

«Затѣмъ думая, что для разрѣшенія нашей критической современной эпохи это пришествіе Святаго Духа, это завершившееся развитіе разума, долженствующее сформировать *абсолютный разумъ*, необходимо, а слѣдовательно и вѣроятно, теперь же, мы стали стараться открыть тѣ условія, которыя характеризуютъ, а тѣмъ самымъ и осуществляютъ въ человѣкѣ его абсолютный разумъ, эту его верховную способность. Мы дошли, къ счастью, до познанія, что эти высшія условія состоятъ въ двухъ первоначальныхъ божескихъ законахъ, именно въ *законѣ творенія*, господствующемъ надъ дѣй-

ствіемъ и развитіемъ *свободы*, и въ *законѣ назначенія*, который, составляя истинный законъ прогресса, господствуетъ надъ дѣйствіемъ или развитіемъ *необходимости*. Мы дошли даже до открытія внутренняго строенія этихъ двухъ основныхъ законовъ міра».

«Вооруженные этими всемогущими и непремѣнными органами абсолютнаго разума, мы могли возвыситься до перваго принципа вселенной, до внутренней сущности божества. А отправляясь отъ этого верховнаго принципа, мы могли вывести изъ него все твореніе, то-есть, всѣ существующія реальности, физическія и нравственныя, до самаго ихъ славнаго предѣла, до разумнаго существа, до человѣка, этого новаго творца, и до его непостижимаго безсмертія».

«Изъ всего этого проистекло новое ученіе, которое въ своей умозрительной части, открывая безусловный принципъ міра, то-есть, неизъяснимое начало реальности, составляетъ въ концѣ концовъ *абсолютную философію*. То-же ученіе, въ своей практической части, открывая величественныя цѣли творенія, то-есть верховную цѣль разумнаго существа, его собственное твореніе, дѣйствующее на его безсмертіе сообразно съ обѣщаніями Мессіи, составляетъ *Мессіанизмъ*».

Нѣсколькими строками ниже находимъ слѣдующее изображеніе отношеній новаго ученія къ наукѣ. «Чтобы гарантировать свою непогрѣшимость, оно само поставило себѣ задачу установить окончательно законодательство наукъ черезъ приложеніе своихъ абсолютныхъ принциповъ, то-есть установить для наукъ ихъ первые принципы и вытекающіе изъ нихъ для разрѣшенія задачъ науки истинные методы. Даже болѣе, эта новая доктрина, мессіанизмъ, сама выполнила эту трудную задачу, произведя помощью примѣненія своихъ абсолютныхъ принциповъ реформу величайшей изъ наукъ, реформу наукъ математическихъ, и давши имъ при посредствѣ употребленія указанныхъ ею для нихъ методовъ разрѣшеніе ихъ величайшихъ задачъ и въ особенности законченное рѣшеніе трехъ великихъ задачъ физическаго міра, именно построеніе матеріи черезъ ея творческія силы, построеніе небесныхъ тѣлъ черезъ матерію и построеніе вселенной черезъ небесныя тѣла».

«Безъ сомнѣнія, если эти научные результаты дойдутъ до потомства, въ чемъ теперь даже еще нельзя быть увѣреннымъ, такъ какъ большая часть научныхъ работъ этого рода уже истреблена во Франціи, потомство будетъ въ состояніи лучше чѣмъ наши современники оцѣнить значеніе опыта, о которомъ идетъ рѣчь»…..

Въ той-же «Абсолютной философіи исторіи», мы находимъ также и

свѣдѣнія объ упомянутомъ въ приведенныхъ словахъ автора открытіи имъ внутренняго строенія законовъ творенія и назначенія. Свѣдѣнія эти даны въ довольно подробной табличной формѣ (см. часть I-я, стр. 190—193 и 196—200), но, какъ выражается авторъ, безъ «дидактической дедукціи, а слѣдовательно и безъ абсолютнаго объясненія всѣхъ составныхъ частей». За этой дедукціей авторъ отсылаетъ читателя къ тѣмъ изъ своихъ сочиненій, которыя названы въ его Les Cent Pages décisives. Для нашей ближайшей цѣли будетъ, впрочемъ, вполнѣ достаточно остановиться на выводахъ, которые дѣлаетъ авторъ изъ своего разсмотрѣнія внутренняго строенія закона творенія, такъ какъ эти выводы, какъ мы затѣмъ покажемъ, имѣютъ прямое отношеніе къ произведенной авторомъ реформѣ Математики. Выражены они въ слѣдующихъ словахъ автора (см. стр. 193-195): «Изъ закона творенія, господствующаго надъ твореніемъ всякой системы реальностей, непосредственно слѣдуютъ три *основные закона* каждой такой системы, именно 1) ея *верховный законъ* (*Loi suprême*) 2) ея *конечное совмѣстничество* (*Concours final*, опредѣляемый авторомъ въ упомянутой таблицѣ, какъ «*взаимное* вліяніе или *гармонія* двухъ первоначальныхъ элементовъ», которыми онъ считаетъ *элементъ-знаніе* и *элементъ-бытіе*), какъ принципъ конечности, и 3) ея *всеобщая задача* (*Problème Universel*, опредѣляемая въ таблицѣ, какъ задача, имѣющая предметомъ *общую цѣль* всѣхъ задачъ въ системѣ реальностей). Эти законы составляютъ такимъ образомъ въ каждой системѣ реальностей *генетическую триномію*. — Вотъ значеніе этихъ трехъ основныхъ законовъ, какъ мы его установили уже въ нашихъ Prolégomènes du Messianisme, гдѣ въ то-же время нами показанъ точнымъ образомъ законъ творенія въ его двоякомъ примѣненіи, нравственномъ и физическомъ».

«1)—*Верховный законъ*, согласно со своимъ именемъ, долженъ быть первымъ основаніемъ всякой системы сотворенныхъ реальностей, а слѣдовательно и основнымъ базисомъ всякаго научнаго или философскаго зданія, имѣющаго предметомъ такую систему реальностей.—Говоря точнымъ образомъ, во всякой вѣтви человѣческаго знанія, верховный законъ есть всеобщій принципъ истины, начало расположенія созданныхъ реальностей независимо отъ вліянія человѣка; а слѣдовательно во всякой системѣ существующихъ реальностей онъ сообщаетъ свѣдѣнія о твореніи, чуждомъ для человѣка, составляющемъ его *гетерономію*».

«2)—*Всеобщая задача* во всякой системѣ реальностей проистек

каетъ необходимымъ образомъ изъ ея верховнаго закона, изъ этого перваго принципа реальности въ частной системѣ; но, отличающаяся въ качествѣ другаго и новаго основанія, она служитъ для установленія во всякой системѣ совокупности реальностей, незаконченныхъ въ этомъ особомъ порядкѣ творенія.—Какъ таковая, эта всеобщая задача образуетъ во всякой вѣтви человѣческаго знанія выполненіе творенія человѣкомъ; выполненіе, которое, вводя во вселенную новыя или несуществующія реальности, обнаруживаетъ творческую способность человѣка и тѣмъ самымъ его высокое призваніе на землѣ, способность, составляющую его *автономію*».

«3)—*Конечное совмѣстничество*, начало котораго является скрытымъ, образуетъ во всякой системѣ сотворенныхъ реальностей невидимое и нѣкоторымъ образомъ зависящее отъ Провидѣнія основаніе, служащее для установленія гармоніи въ этой системѣ реальностей, давая мѣсто произведенію единства согласія между такими разнородными элементами, какъ всегда во всякой системѣ реальностей два первоначальные элемента Такимъ образомъ, это конечное или телеологическое *) совмѣстничество, образуетъ во всякой вѣтви человѣческаго знанія вѣнецъ творенія, величественное произведеніе разума Творца, произведеніе, котораго одного достаточно для того, чтобы, за отсутствіемъ всякаго обнаруженія его абсолютной самопроизвольности, открыть и засвидѣтельствовать его святое существованіе, то-есть *рациональность* творенія».

Выраженія этихъ трехъ основныхъ законовъ въ области наукъ математическихъ послужили автору для составленія общей эмблемы его ученія или «эмблемы Мессіанизма» въ слѣдующей формѣ.

Реформа Математики, какъ прототипъ реформы человѣческаго знанія.

Lex suprema

$$Fx = A_0 \,.\, \Omega_0 + A_1 \,.\, \Omega_1 + A_2 \,.\, \Omega_2 + A_3\, \Omega_3 + etc.$$

τελειότατε

$$x^m \equiv a;\ (\text{Модуль} = M)$$

*) Современная философія обозначаетъ словомъ *телеологическій* всякое расположеніе, сообразное съ конечностью міра, то-есть сообразное съ тѣмъ, что въ немъ требуетъ конечныхъ причинъ.

Problema universale.

$$0 = fx + x_1 . f_1 x + x_1 . f_2 x + x_3 . f_3 x + etc., etc.$$

Философія математики Вронскаго, а также и вся предложенная имъ реформа математическихъ наукъ, представляетъ результатъ послѣдовательнаго приложенія всѣхъ трехъ законовъ къ объектамъ этихъ наукъ или, по выраженію автора, къ «системѣ реальностей», составляющихъ математику. Это выражается не только въ содержаніи его философско математическихъ сочиненій, но, также отчасти и въ нѣкоторыхъ изъ ихъ заглавій и съ особенной полнотой въ слѣдующей ниже программѣ предполагаемыхъ имъ, но, къ сожалѣнію, не осуществившихся, по случаю его смерти, «Европейскихъ Бесѣдъ». Эти бесѣды должны были, по предположенію автора, имѣть цѣлью изложеніе реформы Философіи и только въ ихъ вступительной части предполагалось помѣстить въ качествѣ Введенія подъ названіемъ научныхъ бесѣдъ изложеніе реформы математики. «Чтобы напередъ представить», говоритъ авторъ въ объясненіе цѣли этого Введенія, «дѣйствительную гарантію реформы философіи и разрѣшенія ея высокихъ задачъ, составляющихъ великія задачи человѣчества въ томъ видѣ, какъ онѣ установлены въ слѣдующей программѣ Философскихъ Бесѣдъ, мы предпосылаемъ этимъ послѣднимъ Научныя Бесѣды, такимъ образомъ заранѣе отвѣчая въ нихъ на 3-ю философскую задачу, имѣющую предметомъ реформу и окончательное установленіе наукъ. Чтобы вести дѣло съ увѣренностью, мы ограничимся изложеніемъ реформы величайшей изъ наукъ, какъ прототипа общей ихъ реформы, именно изложеніемъ реформы наукъ математическихъ какъ въ ихъ чистой части, такъ и въ ихъ приложеніи къ тремъ великимъ задачамъ физическаго міра». За этими вступительными словами слѣдуетъ и самая программа Научныхъ Бесѣдъ, которую въ виду представляемаго ею для насъ особаго интереса мы приводимъ здѣсь вполнѣ.

«*Глава I-я.*—*Чистая часть Математики;* приведеніе всей Алгоріеміи къ *тремъ основнымъ законамъ* наукъ.=Реформа Математики.

§ I.—Верховный законъ Математики.=Различіе, которое изъ него вытекаетъ въ *Теоріи* и въ *Техніи* наукъ.

Отдѣленіе I.— Технія Математики, образующая *современную Математику*

A) *Элементарные* техническіе алгоріемы.=Ряды и непрерывныя дроби.

B) *Систематическіе* техническіе алгоріемы.=Интерполяція.

Отдѣленіе II.—Теорія Математики.

A) *Конечные* теоретическіе алгоріемы, образующіе *Древнюю Математику.*

B) *Неопредѣленные* теоретическіе алгоріемы, образующіе *Будущее науки.*

1°) Первоначальный методъ; переходъ къ этому Будущему науки.

2°) Верховный методъ; конечное завершеніе науки.

§ II.—Всеобщая задача Математики и ея также всеобщее рѣшеніе.

Отдѣленіе I.—Ея приложеніе къ общему рѣшенію уравненій, *имманентныхъ* всѣхъ степеней и *трансцендентныхъ* всѣхъ порядковъ.

Отдѣленіе II.—Ея приложеніе къ общему интегрированію уравненій съ *разностями* и съ *дифференціалами*, полными и частными.

§ III.—Телеологическій законъ—для того, чтобы основать истинную *Теорію Чиселъ*, до сихъ поръ остающуюся непризнаваемой.

Отдѣленіе I.—Рѣшеніе *сравненій* всѣхъ степеней и всѣхъ порядковъ.

Отдѣленіе II.—Рѣшеніе *неопредѣленныхъ уравненій* всѣхъ степеней и всѣхъ порядковъ.

Глава II —Прикладная часть Математики.=Рѣшеніе трехъ великихъ задачъ физическаго міра.

§ I.—Построеніе *Міра* черезъ *Небесныя Тѣла.*=Реформа Небесной Механики.

Отдѣленіе I.—Въ нашей *Солнечной Системѣ.*

A) Новый основный законъ, установленный вполнѣ à priori, чтобы освободить эту великую науку отъ ея *характера эмпиризма*, происшедшаго отъ экспериментальныхъ законовъ Кеплера и Ньютона.

B) Телеологическій законъ, чтобы построить изъ нея *науку порядка* на мѣсто *науки безпорядка*, которую она представляетъ теперь вслѣдствіе исчисленія *мнимыхъ пертурбацій.*

C) Всеобщая задача для окончательнаго рѣшенія знаменитой *задачи трехъ тѣлъ*.

Отдѣленіе II. — Въ *Общей Системѣ* міра (Кометы, Млечный Путь, Звѣздныя системы и Туманныя пятна).

§ II.—Построеніе *небесныхъ тѣлъ*, въ частности Земли, черезъ *Матерію*.=Реформа Земной Механики.

Отдѣленіе I.—*Нынѣшнія ошибки* (Эллипсоиды Ньютона, Гюйгенса и Клеро).

Отдѣленіе II.—*Новыя истины.*

A) *Внѣшнее строеніе* нашего шара.

a) *Твердая форма.*

b) *Жидкая форма.*=Истинная теорія приливовъ и отливовъ.

B) *Внутреннее строеніе* нашего шара.=Центральная плотность и законъ плотности на всякой глубинѣ.

§ III. — Построеніе *Матеріи* черезъ ея *Творческія силы.*=Реформа Физики.

Отдѣленіе I — *Физическія условія* этого построенія.

A) *Первобытный составъ* Матеріи изъ двухъ ея элементовъ, *гилеическаго* и *планетнаго.*=Калорическое состояніе Матеріи.

B) *Дальнѣйшее бытіе* Матеріи.=Ея прогрессивныя качества (химическія, органическія, жизненныя и пр.).

Отдѣленіе II.—*Механическія условія* этого построенія.

A) *Внутреннее строеніе* (Газообразное состояніе, жидкое и твердое).

B) *Внѣшнее отношеніе.*=Движеніе.

a) Новые законы *Гидростатики* и *Гидродинамики.*

b) Новые законы *произвольнаго движенія.*=Реформа перемѣщенія.

Глава III.—*Философія наукъ.*=Генезисъ ихъ составныхъ частей черезъ законъ творенія. (См. Philosophie absolue de l'histoire. 1-ère partie, pp. 20—24).

Приведенныхъ данныхъ о Мессіанизмѣ вполнѣ достаточно, чтобы придти къ заключенію, что ученіе Мессіанизма есть умозрительная философская система, основанная на Философіи Канта и проведенная во всѣхъ своихъ частяхъ послѣдовательно и строго. Мистическій элементъ, если въ ней и заключается, то во всякомъ случаѣ не въ такой степени, чтобы вся система могла считаться исклю-

чительно мистическою, какъ это нерѣдко дѣлали и дѣлаютъ, смѣшивая ее съ вполнѣ мистическимъ Мессіанизмомъ поэта Мицкевича. Самъ авторъ протестуетъ противъ этого смѣшенія чрезвычайно энергичнымъ образомъ и въ весьма рѣзкихъ выраженіяхъ. «Чтобы предупредить прискорбное смѣшеніе словъ», говоритъ онъ, мы должны сдѣлать извѣстнымъ, что въ видахъ дискредитированія или скорѣе профанированія слова *Мессіанизмъ*, связаннаго съ излагаемой доктриной, учредили вслѣдъ за его публичнымъ произнесеніемъ, каѳедру славянской литературы въ College de France въ пользу человѣка, который, намекая на нашу славянскую обосновку этого слова мессіанизмъ, преподавалъ подъ этимъ священнымъ именемъ доктрину, не только лишенную всякой науки, но, даже больше, на столько перелигіозную и революціонную, что Палата Пэровъ была вынуждена запретить это преподаваніе. Это недостойное смѣшеніе священнаго слова *Мессіанизмъ*, какъ его произнесъ такимъ образомъ жалкій поэтъ, этотъ неизвѣстный въ областяхъ наукъ и философіи литературный воръ, на столько смутило мозгъ нѣсколькихъ бѣдныхъ умовъ, неспособныхъ отличить бѣлое отъ чернаго, что они не могутъ понять разницу между спасеніемъ человѣчества, приносимымъ истиннымъ мессіанизмомъ автора, создавшаго это слово, и гибелью человѣчества, которою бы хотѣлъ адекъ замѣнить спасеніе ложный мессіанизмъ этого безстыднаго литературнаго вора, невѣжественнаго въ еще бо́льшей степени, чѣмъ онъ сдѣлался безчестнымъ, благодаря своему знаменитому литературному воровству» (стр. 6).

Чтобы дать понятіе о размѣрахъ дѣятельности Вронскаго въ отношеніи распространенія своей философской доктрины, приведемъ списокъ тѣхъ его литературныхъ трудовъ, изъ которыхъ онъ образуетъ подъ именемъ философскихъ первый классъ своихъ сочиненій. Этотъ списокъ въ соединеніи съ приведеннымъ выше спискомъ философско-математическихъ работъ Вронскаго, изъ которыхъ онъ подъ именемъ научныхъ образуетъ второй классъ своихъ сочиненій, составитъ такимъ образомъ полный списокъ его напечатанныхъ произведеній, основанный на собственныхъ показаніяхъ автора и доведенный до ноября 1852 года, то-есть менѣе чѣмъ за годъ до его смерти. Классъ своихъ философскихъ сочиненій, «содержащихъ реформу философіи» (см. Philosophie absolue de l'histoire. I-ère partie pp. 80—82), Вронскій подраздѣляетъ на двѣ группы: на сочиненія мессіаническія въ собственномъ смыслѣ и на сочиненія приготовительныя. Къ первымъ онъ причисляетъ слѣдующія:

Prodrome du Messianisme; révélation des destinées de l'humanité (Введеніе въ Мессіанизмъ; возвѣщеніе судебъ человѣчества) (septembre 1831).

Métapolitique messianique, ou Philosophie absolue de la Politique (Мессіаническая Метаполитика или абсолютная Философія политики), (mai 1839 à juin 1840).

Prospectus du Messianisme (mai 1831).

Bulletins messianiques (mai 1832).

Tableau de la Philosophie de l'Histoire (Картина Философіи исторіи) (juillet 1840).

Tableau de la Philosophie de la Politique (Картина Философіи политики) (juillet 1840).

Secret politique de Napoléon, comme base de l'avenir moral du monde (Политическая тайна Наполеона, какъ основаніе нравственнаго будущаго для міра) (juin 1840).

Le Faux Napoléonisme, comme interprétation funeste des Idées napoléoniennes (Ложный Наполеонизмъ, какъ гибельное истолкованіе наполеоновскихъ идей) (août 1840).

Le Destin de la France, de l'Allemagne et de la Russie, comme Prolégomènes du Messianisme (Судьба Франціи, Германіи и Россіи, какъ предувѣдомленія Мессіанизма) (août, de 1842 à 1843).

Réforme de la Philosophie, formant le tome II de la Réforme du Savoir humain (Реформа Философіи, составляющая II томъ Реформы человѣческаго знанія) (avril 1848)

Adresse aux Nations slaves, sur les destinées du monde (Обращеніе къ славянскимъ націямъ о судьбахъ міра) (août 1847).

Adresse aux Nations civilisées, sur leur sinistre désordre révolutionnaire (Обращеніе къ цивилизованнымъ націямъ, объ ихъ зловѣщемъ революціонномъ безпорядкѣ) (septembre 1848).

Épître à S. A. le prince Czartoryski, sur les destinées de la Pologne et généralement sur les destinées des Nations slaves (Посланіе къ Е. С. князю Чарторыйскому о судьбахъ Польши и вообще о судьбахъ славянскихъ націй) (novembre 1848).

Supplément à cette Épître, pour servir d'Avis aux deux classes scientifiques de l'Institut de France (Дополненіе къ этому посланію, назначенное служить предостереженіемъ для обоихъ научныхъ классовъ Французскаго Института) (decembre 1848).

Dernier Appel aux hommes supérieurs de tous les pays, et Appel spécial au gouvernement français (Послѣднее обращеніе къ высшимъ

людямъ всѣхъ странъ и частное обращеніе къ французскому правительству) (mars 1849).

Les Cent Pages décisives, pour S. M. l'Empereur de Russie, avec leur Supplément séparé pour la dynastie de Napoléon (Сто рѣшительныхъ страницъ для Е. В. Императора Россіи, съ отдѣльнымъ дополненіемъ къ нимъ для династіи Наполеона) (août 1850).

Épître à S. M. l'Empereur de Russie, offrant l'explication définitive de l'Univers, physique et moral (Посланіе къ Е. В. Императору Россіи, представляющее окончательное объясненіе Вселенной, физическое и нравственное) (février 1851).

Épître secrète à S. A. le Prince Louis—Napoléon, Président de la République française (Тайное посланіе къ Е. С. принцу Луи—Наполеону, Президенту Французской Республики) (mai 1851).

Document historique (secret) sur la révélation des destinées du monde (Историческій (секретный) документъ объ откровеніи судебъ міра) (juin 1851).

Къ группѣ приготовительныхъ сочиненій, кромѣ указанныхъ уже выше Сфинкса и Введенія къ нему, авторъ причисляетъ еще слѣдующія:

Philosophie critique, fondée sur le premier principe du savoir humain (Критическая Философія, основанная на *первомъ принципѣ* человѣческаго знанія) (Marseille en l'an XI, 1803).

Problème fondamental de la politique moderne (Основная задача современной политики) (mars 1829).

Изъ приведенныхъ данныхъ о времени выхода каждаго изъ сочиненій Вронскаго слѣдуетъ, что его учено-литературная дѣятельность началась съ 1803 года.

Во всякомъ познаніи необходимо различать *содержаніе* или *матерію* познаваемаго предмета отъ его *формы* или *опредѣленія*. Матерія вполнѣ принадлежитъ предмету и составляетъ то, что въ немъ есть опредѣлимаго, то-есть его сущность. Что касается до формы, то она принадлежитъ познавательной способности и есть то, что единственно дѣлаетъ возможнымъ опредѣленіе предмета или его познаніе. Наряду съ отдѣльными предметами, совокупность всѣхъ явленій, физическій міръ, природа, также должна представлять намъ въ пріобрѣтенномъ о ней познаніи два различные предмета—матерію и форму. Сущность физическаго міра, матерія, составляетъ общій предметъ физики. Образъ-же бытія этого міра, форма, есть общій предметъ математики.

Формою всѣхъ физическихъ явленій, а слѣдовательно и общею формою природы, вытекающею изъ приложенія трансцендентальныхъ законовъ чувствованія къ получаемымъ нами отъ предметовъ впечатлѣніямъ, является для всѣхъ физическихъ предметовъ вообще *время*, для внѣшнихъ физическихъ предметовъ — *пространство*. Истинный предметъ математики составляютъ поэтому законы времени и пространства, если только разсматривать эти послѣдніе не субъективно, то-есть какъ трансцендентальные законы нашего познанія, данные a priori, но объективно, то-есть какъ принадлежащіе физическому міру, данному a posteriori.

Но это опредѣленіе предмета математики есть только первоначальное, такъ сказать предварительное. Оно дается той вѣтвью философіи, которая была названа Кантомъ архитектоникою и цѣль которой состоитъ въ расположеніи нашихъ знаній въ системахъ. Окончательное опредѣленіе предмета математики можетъ быть дано только ея философіей.

«Философія математики», читаемъ мы въ Introduction à la philosophie des mathématiques Вронскаго (стр. 2), «имѣетъ цѣлью приложеніе чистыхъ законовъ познанія, трансцендентальныхъ и логическихъ, къ общему предмету наукъ, съ которыми она имѣетъ дѣло, къ тому именно предмету, который мы уже опредѣлили. Согласно съ этой идеей она должна вывести субъективнымъ путемъ *первые законы* математики или ея *философскіе принципы*. — Математика сама отправляется отъ этихъ принциповъ и выводитъ изъ нихъ чисто объективнымъ путемъ, не восходя къ интеллектуальнымъ законамъ, предложенія, составляющія въ совокупности ея предметъ».

«Чтобы глубже заглянуть въ природу философіи математики, нужно знать, что для интеллектуальныхъ функцій человѣка существуютъ опредѣленные законы. Эти трансцендентальные и логическіе законы характеризуютъ человѣческій разумъ или скорѣе составляютъ самую природу познанія человѣка. Но, прилагая эти законы, взятые въ ихъ субъективной чистотѣ, къ общему предмету математики, къ формѣ физическаго міра, изъ нихъ выводится въ области нашего знанія система частныхъ законовъ, управляющихъ спеціальными интеллектуальными функціями, простирающимися на предметъ этого приложенія, на время и пространство.—Это и суть тѣ частные законы, которые составляютъ философскіе принципы математики, принципы, которые мы уже назвали.—Нужно еще замѣтить, что, согласно съ этимъ изложеніемъ философіи математики, она даетъ въ тоже время и объясненіе представляемыхъ математическими на-

уками интеллектуальныхъ явленій. въ самомъ дѣлѣ совокупность этихъ наукъ образуетъ извѣстный порядокъ интеллектуальныхъ функцій, а эти функціи суть истинныя явленія, такъ что законы этихъ функцій, которые въ то-же время и законы упомянутыхъ явленій, содержатъ условія возможности этихъ послѣднихъ и тѣмъ даютъ ихъ философское объясненіе».

Философія математики, по ученію Вронскаго, состоитъ изъ трехъ различныхъ частей. Первую онъ называетъ *Архитектоникой математики* и полагаетъ ея предметъ въ выводѣ самыхъ законовъ знанія, различныхъ частныхъ и необходимыхъ объектовъ математическихъ наукъ или, говоря другими словами, въ *содержаніи* въ *матеріи* нашихъ математическихъ познаній; вторую — *Методологіей математики* и опредѣляетъ ее какъ имѣющую предметомъ опредѣленіе различныхъ *методовъ*, которымъ должно слѣдовать и необходимо слѣдуютъ въ разныхъ вѣтвяхъ математическихъ наукъ, или какъ представляющую различные способы разсмотрѣнія объектовъ математики, различные интеллектуальные виды ихъ познанія, слѣдовательно сводящуюся въ сущности къ познавательной *формѣ*; наконецъ, третью — *Метафизикой математики* и видитъ ея предметъ въ объективныхъ законахъ математическихъ объектовъ или законахъ, сообщаемыхъ этимъ объектамъ человѣческимъ познаніемъ. Такимъ образомъ Архитектоника и Методологія имѣютъ дѣло съ субъективной точкой зрѣнія философіи математики, а Метафизика — съ объективной. Кромѣ того слѣдуетъ замѣтить, что Методологія математики, какъ имѣющая цѣлью опредѣленіе различныхъ методовъ, которымъ должно слѣдовать въ разныхъ вѣтвяхъ этой науки, вполнѣ основывается на чисто логическихъ принципахъ. Что-же касается до Метафизики математики, то она составляетъ главную часть Философіи послѣдней, такъ какъ имѣетъ предметомъ законы самаго объекта математики, то-есть законы, которые именно и являются въ ней первыми или философскими принципами. Метафизика, при содѣйствіи архитектоники, создаетъ всѣ конечныя опредѣленія предмета математики и выводитъ ея основные законы.

Составляющіе, по вышесказанному, истинный предметъ математики законы пространства и времени могутъ быть разсматриваемы или въ самихъ себя, или въ физическихъ явленіяхъ, къ которымъ они прилагаются, то-есть *конкретно* или *абстрактно*. Въ первомъ случаѣ они составляютъ предметъ Прикладной математики, во второмъ — Чистой. Конкретное разсмотрѣніе, какъ не трудно видѣть, необходимымъ образомъ зависитъ отъ абстрактнаго.

Выше было сказано, что окончательное опредѣленіе общаго предмета математики можетъ быть дано только ея философіей. Посмотримъ теперь, какъ отыскивается это опредѣленіе въ системѣ Вронскаго. Согласно съ философскимъ ученіемъ Канта, для полученія такого опредѣленія нужно приложить къ общему объекту математики трансцендентальные законы познанія, чтобы этимъ путемъ добыть схемы, единственно способныя лечь въ основаніе частныхъ идей, которыя мы можемъ себѣ составить объ этомъ предметѣ. Прилагая ко времени, разсматриваемому объективно, первый изъ законовъ разумѣнія, *количество*, взятое во всей своей общности, найдемъ понятіе о *слѣдованіи мгновенномъ* или, при бо̀льшемъ отвлеченіи, схему *числа*. Тотъ-же самый законъ, приложенный къ пространству, также разсматриваемому объективно, даетъ понятіе сочетанія точекъ или, при бо̀льшемъ отвлеченіи, схему *протяженія*. Такимъ образомъ числа и протяженіе представляютъ два частныхъ опредѣленія общаго предмета математики. Имъ обязаны своимъ происхожденіемъ двѣ главныя вѣтви послѣдней: *Алгоріомія* или *наука чиселъ* и *Геометрія* или *наука протяженія*. Такъ какъ время есть форма всѣхъ предметовъ вообще, пространство-же есть форма только однихъ внѣшнихъ предметовъ, то всѣ общія изслѣдованія науки чиселъ могутъ прилагаться къ наукѣ протяженія, что значительно облегчаетъ предпринимаемыя въ этой послѣдней изысканія.

Числа, какъ и всѣ вообще умственные объекты, могутъ быть разсматриваемы *вообще* и въ *частности*; говоря другими словами, *законы чиселъ* и *факты чиселъ* могутъ быть разсматриваемы отдѣльно. Согласно указанію самого Вронскаго *фактъ чиселъ* есть, напр, 3+4=7, а *законъ чиселъ* — напр., предложеніе: сумма полусуммы и полуразности двухъ чиселъ равняется большему изъ нихъ. Законы чиселъ составляютъ предметъ той вѣтви Алгоріоміи, которая извѣстна подъ именемъ *Алгебры*, а факты чиселъ—предметъ другой вѣтви—*Ариѳметики*. То-же самое можетъ быть сказано и о протяженіи. Законы-послѣдняго составляютъ предметъ *Общей Геометріи*, а его факты—предметъ *Частной Геометріи*.

Соотвѣтственно двумъ способамъ субъективнаго разсмотрѣнія математическаго количества, Алгоріомія состоитъ изъ двухъ различныхъ вѣтвей: изъ *Теоріи* и *Техніи*. Предметомъ первой служитъ *природа* количествъ, то-есть то, что есть въ ихъ существѣ. Основывается она на умозрѣніи, которое есть функція познанія съ преобладающимъ значеніемъ дѣятельности воспріятія. Предметомъ второй служитъ *измѣреніе* количествъ, то-есть то, что нужно сдѣлать

для достиженія понятія о величинѣ ихъ. Она содержитъ въ себѣ идею *конца* или *цѣли* и въ концѣ концовъ оказывается основанною на *волѣ*, способности *дѣйствія*. По своему трансцендентальному происхожденію обѣ эти вѣтви раздѣльны и *необходимы*. Чтобы пояснить значеніе предмета каждой изъ нихъ на примѣрѣ, авторъ приводитъ выраженіе

$$log\ (x\ .\ y\ .\ z\ .\ \text{etc.}) \qquad log\ x + log\ y + log\ z + \text{etc.},$$

какъ имѣющее дѣло съ предметомъ первой, и выраженіе

$$log\ x \qquad (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \text{etc.},$$

какъ имѣющее дѣло съ предметомъ второй.

Каждая изъ этихъ двухъ вѣтвей алгориѳміи, въ свою очередь, подраздѣляется также на двѣ различныя части. «Различныя интеллектуальныя функціи», читаемъ мы въ цитированномъ выше сочиненіи Вронскаго (стр. 5), «зависятъ отъ соотвѣтствующаго различія, заключающагося въ интеллектуальныхъ способностяхъ, но, какова-бы разница не была, сосуществованіе этихъ функцій возможно только при тожествѣ или необходимомъ единствѣ различныхъ способностей, отъ которыхъ онѣ зависятъ. Это необходимое единство имѣетъ свой трансцендентальный источникъ въ самомъ принципѣ познанія, въ сознаніи, служащемъ для возможности интеллектуальныхъ способностей основаніемъ и соединяющемъ ихъ при посредствѣ закона тожества, если разсматривать ихъ субъективно, и при посредствѣ закона единства, если разсматривать объективно. — Такъ, въ случаѣ приложенія интеллектуальныхъ способностей къ общему предмету математики, выходятъ прежде всего математическія интеллектуальныя функціи, различающіяся между собою и зависящія отъ различныхъ интеллектуальныхъ способностей, а затѣмъ математическія интеллектуальныя функціи, представляющія соединеніе первыхъ и зависящія отъ трансцендентальнаго единства, существующаго между этими интеллектуальными способностями.—Первый порядокъ этихъ интеллектуальныхъ математическихъ функцій составляетъ очевидно *элементы* всѣхъ возможныхъ математическихъ операцій, второй-же ихъ порядокъ—*систематическое соединеніе* этихъ элементовъ».

На основаніи приведенныхъ философскихъ разсужденій обѣ вѣтви алгориѳміи, теорія и техніа, оказываются состоящими каждая изъ двухъ различныхъ частей, изъ которыхъ одна имѣетъ предметомъ *необходимые элементы* принадлежащихъ соотвѣтственно къ этимъ

вѣтвямъ математическихъ операцій, другая же—систематическое соединеніе тѣхъ-же элементарныхъ операцій. Разсмотрѣніе ихъ начнемъ съ первой между ними, то-есть съ первой части *Теоріи Алгоріѳміи* или съ *Элементарной алгоріѳмической Теоріи*.

Цѣль этой части науки чиселъ, какъ не трудно видѣть, состоитъ въ опредѣленіи природы всѣхъ возможныхъ элементарныхъ алгоріѳмовъ, разсматривая ихъ каждый отдѣльно или независимо отъ другихъ. Въ ней представляются два элементарныхъ, первоначальныхъ и существенно противоположныхъ алгоріѳма, именно *суммація* и *градуація*, соотвѣтственныя формы которыхъ суть

$$A+B=C,\ A=C.$$

Каждый изъ этихъ алгоріѳмовъ имѣетъ двѣ частныя вѣтви, одну—прогрессивную, и другую — регрессивную, именно: *сложеніе* и *вычитаніе* — первый, *степени* и *корни* — второй

«Эти два первоначальные алгоріѳма», говоритъ Вронскій въ своемъ цитированномъ ранѣе сочиненіи (стр. 6), «составляютъ, такъ сказать, два интеллектуальные полюса человѣческаго знанія, въ его приложеніи къ алгоріѳмическимъ количествамъ. Въ суммаціи части количества прерывны и экстензивны; онѣ имѣютъ собственно характеръ аггрегаціи (per juxta positionem). Въ градуаціи части количества, напротивъ того, непрерывны или, по крайней мѣрѣ, разсматриваются, какъ таковыя, и въ нѣкоторомъ родѣ интензивны; онѣ производятъ такимъ образомъ впечатлѣніе характера роста (возрастанія) (per intus susceptionem). Эти двѣ алгоріѳмическія функціи нашего знанія, имѣющія каждая свои частные законы, вполнѣ разнородны, и ихъ нельзя выводить одну изъ другой. Вотъ ихъ метафизическая дедукція или, по крайней мѣрѣ, ихъ трансцендентальный принципъ. Первая, интеллектуальная функція суммаціи, основана на *построяющихъ законахъ воспринимания въ тѣсномъ смыслѣ*, вторая, интеллектуальная функція градуаціи, основана на *регулирующихъ* (объединяющихъ, связующихъ) *законахъ разума*».

Кромѣ этихъ двухъ алгоріѳмовъ, существуетъ еще и третій, посредствующій. О его происхожденіи и существенныхъ свойствахъ авторъ говоритъ слѣдующее: «Нейтрализація этихъ двухъ интеллектуальныхъ функцій, а слѣдовательно и двухъ соотвѣтствующихъ имъ элементарныхъ алгоріѳмовъ (суммаціи и градуаціи) производитъ промежуточную функцію, которой соотвѣтствуетъ и промежуточный алгоріѳмъ, зависящій какъ отъ суммаціи, такъ и отъ градуаціи: мы будемъ называть его *воспроизведеніемъ*. Двѣ вѣтви его,

прогрессивная и регрессивная, суть *умножение* и *дѣленіе*. — Этотъ третій элементарный алгоріемъ, относящійся по существу, если смотрѣть на него съ метафизической точки зрѣнія, къ способности *сужденія*, долженъ быть разсматриваемъ еще въ силу своего происхожденія, какъ *первоначальный* алгоріемъ. Итакъ алгоріемическая теорія представляетъ *три элементарныхъ и первоначальныхъ алгоріема*. Ихъ начало относится къ тремъ первоначальнымъ способностямъ нашего интеллекта, воспріиманію (въ строгомъ смыслѣ), сужденію и разуму. Законы этихъ трехъ алгоріемовъ, основанные на соотвѣтствующихъ законахъ трехъ первоначальныхъ способностей нашего интеллекта, столь же различны между собою по существу, какъ и сама природа алгоріемовъ; они не могутъ быть во всей своей общности выводимы другъ изъ друга. — Итакъ, для человѣка не существуетъ и не можетъ существовать никакихъ другихъ алгоріемическихъ функцій, кромѣ тѣхъ, которыя или непосредственно основаны на этихъ трехъ первоначальныхъ алгоріемахъ, или же являются отъ нихъ производными.

Производныя алгоріемическія функціи бываютъ двухъ родовъ. Однѣ, выведеніе которыхъ изъ первоначальныхъ алгоріемовъ *необходимо*, то-есть дано въ силу самой природы послѣднихъ, какъ ихъ слѣдствіе, и другія, выведеніе которыхъ чисто *случайно*. Вслѣдствіе своей необходимости, первыя составляютъ часть *самыхъ принциповъ* Алгоріеміи, а потому дедукція ихъ принадлежитъ Философіи математики, и именно ея Архитектоникѣ. Что касается до вторыхъ, то онѣ *подчинены* принципамъ, Алгоріеміи, и ихъ дедукція принадлежитъ самой Математикѣ; число ихъ неопредѣленно.

Три первоначальныя алгоріемическія функціи могутъ быть, очевидно, соединяемы другъ съ другомъ четырьмя различными способами — по два и всѣ три вмѣстѣ. Соотвѣтственно этому, говоря вообще, возможны четыре способа выведенія необходимыхъ производныхъ алгоріемическихъ функцій. Но въ дѣйствительности ихъ менѣе, такъ какъ соединеніе алгоріемовъ суммаціи и градуаціи, какъ было уже показано выше, участвуетъ въ происхожденіи алгоріема воспроизведенія. Такимъ образомъ, дѣйствительно различными комбинаціями остаются только комбинаціи алгоріема воспроизведенія съ взаимными алгоріемами суммаціи и градуаціи.

Соединеніе первоначальныхъ алгоріемовъ воспроизведенія и суммаціи даетъ необходимый производный алгоріемъ, образующій *нумерацію* или счисленіе. Соединеніе первоначальныхъ алгоріемовъ воспроизведенія и градуаціи даетъ необходимый производный алго-

ріемъ, образующій *факультаты* (facultes). Схемы этихъ обоихъ алгориемовъ таковы: для перваго

$$A_0 \cdot \varphi_0 x + A_1 \cdot \varphi_1 x + A_2 \cdot \varphi_2 x + \text{etc.};$$

для втораго

$$\varphi_0 x \cdot \varphi_1 x \cdot \varphi_2 x \quad \varphi_3 x \ldots . \text{etc.},$$

причемъ A_0, A_1, A_2, и пр. обозначаютъ какія-нибудь количества, независимыя отъ x, а $\varphi_0 x$, $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x$, и пр. нѣкоторыя, соединенныя между собою извѣстнымъ закономъ функціи отъ x.

Предметъ теоріи нумераціи состоитъ въ образованіи алгориемическаго количества черезъ соединеніе суммаціи и воспроизведенія При этомъ образованіи можно, слѣдовательно, заключить оба слагающіеся алгориема между данными предѣлами и все-таки получать полное образованіе предположеннаго количества. Эта особенность составляетъ отличительное характеристическое свойство теоріи нумераціи. Его важность съ особенною ясностью обнаруживается въ образованіи *фактовъ* чиселъ или того, что называютъ *натуральными числами*. Въ самомъ дѣлѣ, черезъ посредство каждаго изъ трехъ первоначальныхъ алгориемовъ и въ особенности черезъ алгориемъ суммаціи, прилагающійся по существу къ разсматриваемому образованію, можно непосредственно получить ясное понятіе только о нѣкоторыхъ первыхъ числахъ изъ ряда натуральныхъ. Если же заключить алгориемы воспроизведенія и суммаціи въ предѣлахъ тѣхъ изъ натуральныхъ чиселъ, о которыхъ мы имѣемъ или считаемъ себя имѣющими ясное понятіе, то является полная возможность произвести съ помощью теоріи нумераціи образованіе всѣхъ другихъ фактовъ чиселъ или всѣхъ другихъ натуральныхъ чиселъ. Эта теорія имѣетъ свои частные законы, зависящіе съ одной стороны отъ природы функцій $\varphi_0 x$, $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x$, и пр. (такъ какъ нѣтъ необходимости, чтобы эти функціи непремѣнно образовали рядъ степеней), а съ другой — отъ природы предѣловъ, между которыми заключены алгориемы суммаціи и градуаціи, служащіе для нея составными частями.

Предметъ теоріи факультатовъ состоитъ въ образованіи алгориемическаго количества черезъ соединеніе градуаціи и воспроизведенія. Какъ и въ предыдущемъ случаѣ, при этомъ образованіи, можно также заключать оба слагающіеся алгориема между данными предѣлами и все-таки получить полное образованіе предположеннаго количества. «Теорія факультатовъ», говоритъ авторъ, «еще слишкомъ нова, чтобы была извѣстна вся ея важность». «Мы можемъ увѣ-

рить», продолжаетъ онъ далѣе, «и въ Общей Философіи Математики дадимъ этому доказательство, что образованіе теоретическихъ *законовъ* чиселъ или опредѣленіе всѣхъ алгебраическихъ выраженій, принадлежащихъ алгориѳмической теоріи (синусы, логариѳмы, корни имманентныхъ уравненій, интегралы, и проч.) по самому существу своему принадлежатъ къ области теоріи факультатовъ». Эта теорія имѣетъ, слѣдовательно, для образованія *законовъ* чиселъ или для алгебры такую же важность, какъ теорія нумераціи для образованія *фактовъ* чиселъ или для ариѳметики. Также не трудно видѣть, что и теорія факультатовъ должна имѣть свои частные законы, зависящіе съ одной стороны отъ природы функцій $\varphi_0 x$, $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x$, и пр., а съ другой — отъ природы предѣловъ, между которыми заключены алгориѳмы градуаціи и воспроизведенія, служащіе для нея составными частями.

Сказаннымъ окончилась бы дедукція разсматриваемыхъ производныхъ алгориѳмовъ, если бы въ самой природѣ нумераціи и факультатовъ не заключалось начало дальнѣйшаго и равно необходимаго слѣдствія. Это начало состоитъ въ томъ, что общее для обоихъ производныхъ алгориѳмовъ воспроизведеніе устанавливаетъ между ними связь, родъ единства. Отсюда вытекаетъ, какъ необходимое заключеніе, предложеніе, по меньшей мѣрѣ проблематическое, о переходѣ теоріи нумераціи въ теорію факультатовъ и обратно теоріи факультатовъ въ теорію нумераціи. Схемы этихъ двухъ необходимыхъ вопросовъ, долженствующихъ въ концѣ концовъ завершить систему всѣхъ возможныхъ для человѣка элементарныхъ алгориѳмовъ, таковы: 1) для перехода отъ нумераціи къ факультатамъ

$$\varphi x_1 + \varphi x_2 + \varphi x_3 + \text{etc.} = \varphi(x_1 \,.\, x_2 \,.\, x_3 \,.\, \text{etc.});$$

2) для перехода отъ факультатовъ къ нумераціи

$$\varphi x_1 \,.\, \varphi x_2 \,.\, \varphi x_3 \,.\, \text{etc.} = \varphi(x_1 + x_2 + x_3 + \text{etc.}),$$

если обозначить черезъ x_1, x_2, x_3, и пр. какія-нибудь перемѣнныя количества.

Все приводится такимъ образомъ къ опредѣленію, если онѣ существуютъ, взаимныхъ функцій φ, отвѣчающихъ этимъ двумъ предлагаемымъ самой природою нашего знанія алгориѳмическимъ вопросамъ.

Но по отношенію къ первому изъ этихъ двухъ вопросовъ съ приведенной выше его схемой не трудно видѣть, что эта функція φ

есть показатель даннаго количества, составляющаго вмѣстѣ съ нимъ значеніе перемѣннаго количества, именно

$$a^{\varphi x} = x,$$

гдѣ a есть какое-нибудь постоянное количество. Въ самомъ дѣлѣ пусть имѣемъ

$$x_1 \,.\, x_2 \,.\, x_3 \,.\, \text{etc.} = a^{\varphi x_1} \,.\, a^{\varphi x_2} \,.\, a^{\varphi x_3} \,.\, \text{etc.} = a^{\varphi x_1 + \varphi x_2 + \varphi x_3 + \text{etc.}},$$

и слѣдовательно

$$\varphi x_1 + \varphi x_2 + \varphi x_3 + \text{etc.} = \varphi(x_1 \,.\, x_2 \,.\, x_3 \,.\, \text{etc.}).$$

Итакъ остается только раскрыть природу функціи φ и узнать, есть ли она *элементарная* производная функція, или же только комбинація другихъ элементарныхъ функцій. Съ этой цѣлью обозначимъ дѣйствительные корни въ частности знакомъ радикала $\sqrt{\ }$, вообще же какіе-нибудь корни, дѣйствительные или мнимые, алгориѳмическихъ количествъ дробными показателями. Извлечемъ корень степени m изъ обѣихъ частей равенства

$$a^{\varphi x} = x.$$

Если принять во вниманіе природу этого выраженія, то получится

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^{\varphi x} = x^{\frac{1}{m}},$$

такъ какъ для опредѣленности вопроса основаніе должно оставаться постояннымъ и дѣйствительнымъ. Функція φx и есть та, которая должна соотвѣтствовать различнымъ корнямъ $x^{\frac{1}{m}}$. Но

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^{\varphi x} = \left[1 + \left(\sqrt[m]{a} - 1\right)\right]^{\varphi x} =$$
$$1 + \frac{\varphi x}{1}\left(\sqrt[m]{a} - 1\right) + \frac{\varphi x}{1} \cdot \frac{\varphi x - 1}{2} \cdot \left(\sqrt[m]{a} - 1\right)^2 + \text{etc.},$$

слѣдовательно

$$x^{\frac{1}{m}} - 1 = \frac{\varphi x}{1}\left(\sqrt[m]{a} - 1\right) + \frac{\varphi x}{1} \cdot \frac{\varphi x - 1}{2} \cdot \left(\sqrt[m]{a} - 1\right)^2 + \text{etc.}$$

Если же принять во вниманіе, что при произвольномъ количествѣ m, безконечно большомъ, вторая часть послѣдняго равенства приведется къ своему первому члену, то окончательно получится

$$\varphi x = \frac{x^{\frac{1}{\infty}} - 1}{\sqrt[\infty]{a} - 1}.$$

Итакъ вотъ какова *природа* изслѣдуемой функціи. Найденное выраженіе есть, очевидно, выраженіе первоначальнаго теоретическаго образованія этой функціи, это есть *идея* или *первое понятіе*, предлагаемое разумомъ восприиманію для того, чтобы быть реализованнымъ въ области опыта. Въ этомъ, слѣдовательно, и заключается первоначальная функція, образующая то, что называется *логарифмомъ*.

Кромѣ того, прилагая биномъ Ньютона къ степени $M^{\frac{1}{\infty}}$, будутъ имѣть

$$M^{\frac{1}{\infty}} = [1+(M^{\mu}-1)]^{\frac{1}{\mu\infty}}$$

$$1+\frac{1}{\mu\infty}(M^{\mu}-1)-\frac{1}{2\mu\infty}\cdot(M^{\mu}-1)^2+\frac{1}{3\mu\infty}(M^{\mu}-1)^3 \quad \text{etc.},$$

гдѣ μ есть произвольное количество, а слѣдовательно также и

$$\varphi x=\frac{q}{p}\cdot\frac{(x^p-1)-\frac{1}{2}(x^p-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\text{etc.}}{(a^q-1)-\frac{1}{2}(a^q-1)^2+\frac{1}{3}(a^q-1)^3-\text{etc.}}$$

гдѣ p и q также представляютъ два произвольныя количества. Такимъ образомъ, замѣчая, что это разложеніе можетъ быть всегда сдѣлано съ помощью двухъ произвольныхъ количествъ p и q сходящимся, не трудно видѣть, что изслѣдуемая функція φx способна принимать дѣйствительныя значенія.

Опредѣленная сейчасъ и обладающая между прочимъ дѣйствительными значеніями φx очевидно есть производная *элементарная* функція, такъ какъ она содержитъ въ своемъ выраженіи *безконечные* показатели, исключающіе соотвѣтствующія имъ степени изъ класса обыкновенныхъ степеней, способныхъ къ непосредственному обозначенію. Въ самомъ дѣлѣ, если дойти до трансцендентальнаго источника, то окажется, что обыкновенныя степени, соотвѣтствующія конечнымъ показателямъ, представляютъ *имманентныя* интеллектуальныя функціи или простыя функціи восприиманія и что степени, соотвѣтствующія безконечнымъ показателямъ, дѣлаются возможными только черезъ приложеніе *разума* къ названнымъ нами функціямъ восприиманія и вслѣдствіе этого являются высшими интеллектуальными функціями, именно функціями *трансцендентными* или понятіями разума, идеями, предлагаемыми этой верховною интеллектуальною способностью.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, во-первыхъ, что функціи, называемыя *логариѳмами*, въ числѣ возможныхъ для человѣка алгориѳмическихъ функцій, являются элементарными алгориѳмическими функціями и, во-вторыхъ, что *Теорія логариѳмовъ* составляетъ необходимую часть Алгориѳми.

Чтобы пролить еще болѣе свѣта на природу этихъ функцій, авторъ переходитъ къ ознакомленію съ самой метафизикой ихъ теоріи. «Прежде всего», говоритъ онъ, «не нужно терять изъ виду, что опредѣленное нами выраженіе, именно

$$\varphi x = \frac{x^{\frac{1}{\infty}} - 1}{\sqrt[\infty]{a} - 1},$$

необходимо содержитъ, въ своемъ качествѣ первоначальнаго теоретическаго выраженія, начало всей теоріи логариѳмовъ, а слѣдовательно составляетъ основной законъ этой теоріи. Поэтому-то именно изъ него первоначально и происходятъ всѣ свойства и всѣ возможныя разложенія разсматриваемыхъ функцій. Всякая другая дедукція ихъ свойствъ и всякое другое разложеніе ихъ величины необходимо искусственны и непрямы».

При слѣдованіи однако же этому первоначальному принципу оказывается прежде всего, что если x_1, x_2, и пр. перемѣнныя количества, а n_1, n_2, и пр. какія-нибудь, то существуетъ соотношеніе

$$\varphi(x_1^{n_1} \,.\, x_2^{n_2} \,.\, \text{etc.}) = n_1 \,.\, \varphi x_1 + n_2 \,.\, \varphi x_2 + \text{etc.},$$

представляющее подчиненный принципъ теоріи логариѳмовъ. Въ самомъ дѣлѣ тогда

$$\varphi(x_1^{n_1} \,.\, x_2^{n_2} \,.\, \text{etc.}) = \frac{(x_1^{n_1} \,.\, x_2^{n_2} \,.\, \text{etc.})^{\frac{1}{\infty}} - 1}{\sqrt[\infty]{a} - 1}.$$

Такъ какъ $(x^{\frac{1}{\infty}} - 1)$ есть вообще количество безконечно малое, то сверхъ того будетъ

$$x^{\frac{n}{\infty}} = \left(1 + (x^{\frac{1}{\infty}} - 1)\right)^n = 1 + n \,.\, (x^{\frac{1}{\infty}} - 1),$$

а слѣдовательно

$$x_1^{\frac{n_1}{\infty}} \,.\, x_2^{\frac{n_2}{\infty}} \,.\, \text{etc.} = 1 + n_1 \,.\, (x_1^{\frac{1}{\infty}} - 1) + n_2 (x_2^{\frac{1}{\infty}} - 1) + \text{etc.}$$

Такимъ образомъ послѣ подстановки получится

$$\varphi(x_1^{n_1} . x_2^{n_2} . \text{etc.}) = \frac{(n_1 . x_1^{\frac{1}{\infty}} - 1)}{\sqrt[\infty]{a} - 1} + \frac{n_2 . (x_2^{\frac{1}{\infty}} - 1)}{\sqrt[\infty]{a} - 1} + \text{etc.} =$$

$$= n_1 . \varphi x_1 + n_2 . \varphi x_2 + \text{etc.}$$

Далѣе, на основаніи первоначальнаго выраженія разсматриваемой функціи не трудно видѣть, что она доставляетъ столько различныхъ системъ, сколько есть различныхъ значеній основанія a. Но при этомъ представляется вотъ какая замѣчательная особенность. Умножая числитель и знаменатель этой функціи на входящее въ ея выраженіе безконечно-большое количество ∞, получимъ

$$\varphi x = \frac{\infty (x^{\frac{1}{\infty}} - 1)}{\infty (\sqrt[\infty]{a} - 1)},$$

гдѣ уже числитель и знаменатель являются количествами конечными. Но простѣйшимъ случаемъ разсматриваемыхъ функцій будетъ очевидно тотъ, когда знаменатель, въ которомъ перемѣнное не содержится, равенъ единицѣ, когда, слѣдовательно, функція является, такъ сказать, независящей отъ основанія. На сцену выдвигается такимъ образомъ по самой природѣ этихъ функцій рациональный или философскій вопросъ, имѣющій слѣдующую схему:

$$\infty (\sqrt[\infty]{e} - 1) = 1,$$

гдѣ e обозначаетъ число, соотвѣтствующее вопросу. Выраженіемъ этого философскаго числа, заключающимся въ самомъ происхожденіи разсматриваемыхъ функцій, будетъ, слѣдовательно,

$$e = \left(1 + \frac{1}{\infty}\right)$$

Разложенное по формулѣ бинома, это выраженіе дастъ

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 . 2} + \frac{1}{1 . 2 . 3} + \text{etc.}$$

или

$$e = 2{,}71828 \text{ etc.}$$

Въ этомъ именно и состоитъ то первоначальное теоретическое выраженіе, та идея или первое понятіе числа, которое называется

основаніемъ натуральныхъ логариѳмовъ. Если черезъ L обозначить логариѳмы этой системы, то для этого основанія въ частности получится

$$Lx = \infty (x^{\frac{1}{\infty}} - 1),$$

а слѣдовательно вообще для какого бы то ни было основанія a

$$\varphi x = \infty (x^{\frac{1}{\infty}} - 1) \frac{1}{La}.$$

Перейдемъ теперь ко второму изъ двухъ разсматриваемыхъ вопросовъ, то-есть къ вопросу о переходѣ факультатовъ въ нумерацію, представляемому указанной выше схемой. Дѣло пока еще идетъ, слѣдовательно, объ опредѣленіи, если она существуетъ, функціи φ въ этой схемѣ, то-есть функціи, отвѣчающей разсматриваемому второму алгориѳмическому вопросу, предлагаемому самой природой нашего знанія. Вполнѣ ясно, однако же, что показательныя функціи, всецѣло принадлежащія первоначальному алгориѳму градуаціи, дѣйствительно и при томъ совершенно полно соотвѣтствуютъ разсматриваемому раціональному вопросу. Въ самомъ дѣлѣ, если a и m суть два постоянныя количества, то общая показательная функція представится въ видѣ

$$\varphi x = a^{mx},$$

дающемъ, что

$$\varphi x_1 \,.\, \varphi x_2 \,.\, \varphi x_3 \,.\, \text{etc.} = a^{mx_1} . a^{mx_2} . a^{mx_3} . \text{etc.} = a^{m(x_1+x_2+x_3+\text{etc.})},$$

и слѣдовательно приводящемъ къ схемѣ вопроса.

Итакъ, если разсматривать показательныя функціи во всей ихъ общности, то изучаемый второй вопросъ не приведетъ ни къ какому новому алгориѳму. Послѣдній можетъ появиться, слѣдовательно, только въ томъ частномъ случаѣ, когда показатель m получитъ значеніе, исключающее показательную функцію изъ класса обыкновенныхъ степеней, способныхъ къ непосредственному обозначенію. Этотъ случай оказывается дѣйствительно существующимъ, когда показатель m есть количество мнимое, именно когда $m = \sqrt{-1}$.

Въ самомъ дѣлѣ, пока показатель m есть количество дѣйствительное и конечное, функція $(a^m)^x$ остается въ классѣ обыкновеннаго алгориѳма градуаціи, каково бы ни было значеніе a, дѣйствительное или мнимое. Она является тогда простой имманентной

функціей. Но какъ только въ показатель m войдетъ безконечность или онъ сдѣлается мнимымъ, разсматриваемая функція тотчасъ же выйдетъ изъ класса обыкновеннаго алгоритма градуаціи, такъ какъ тогда она становится возможною только благодаря дѣятельности создающаго разума, дѣлающаго ее въ этомъ случаѣ трансцендентною функціею. Но случай, когда въ показатель m входитъ безконечность, есть случай уже разсмотрѣнныхъ нами функцій, логариѳмовъ. Такимъ образомъ въ настоящемъ вопросѣ дѣйствительно новыя функціи являются только въ случаѣ, когда показатель m есть количество мнимое. Разсматривая этотъ случай занимающаго насъ вопроса во всей его общности, мы найдемъ прежде всего, что

$$\varphi x = (a^{\sqrt[\infty]{-1}})^x.$$

Чтобы опредѣлить природу функціи φx, замѣтимъ сначала, что при всякомъ числѣ n будемъ имѣть

$$n = \left(n^{\frac{1}{\infty}}\right)^{\infty} = \left\{1 + \left(n^{\frac{1}{\infty}} - 1\right)\right\}^{(\infty)},$$

или, разлагая по формулѣ бинома,

$$n = 1 + \frac{\infty}{1}\left(n^{\frac{1}{\infty}} - 1\right) + \frac{\infty^2}{1.2}\left(n^{\frac{1}{\infty}} - 1\right)^2 + \frac{\infty^3}{1.2.3}\left(n^{\frac{1}{\infty}} - 1\right)^3 + \text{etc.}$$

Но если e есть основаніе натуральныхъ логариѳмовъ, то

$$\infty\left(\sqrt[\infty]{e} - 1\right) = 1$$

и слѣдовательно

$$\infty^{\mu}\left(\sqrt[\infty]{e} - 1\right)^{\mu} = 1,$$

предполагая μ числомъ цѣлымъ. Такимъ образомъ, подставляя эти значенія единицы въ послѣднее выраженіе n, получимъ

$$n = 1 + \frac{1}{1} \cdot \frac{n^{\frac{1}{\infty}} - 1}{\sqrt[\infty]{e} - 1} + \frac{1}{1.2} \cdot \frac{\left(n^{\frac{1}{\infty}} - 1\right)^2}{\left(\sqrt[\infty]{e} - 1\right)^2} + \text{etc.};$$

а если сверхъ того замѣтимъ, что

$$\frac{n^{\frac{1}{\infty}} - 1}{\sqrt[\infty]{e} - 1} = Ln,$$

то найдемъ окончательно, что

$$n = 1 + \frac{1}{1} Ln + \frac{1}{1.2} (Ln)^2 + \frac{1}{1.2.3} (Ln)^3 + \text{etc.}$$

Также теоретически можно было бы получить предыдущее разложеніе, выводя его непосредственно изъ выраженія логариѳма, именно изъ

$$Ln = \infty \left(\frac{1}{n^{\infty}} - 1 \right).$$

Въ самомъ дѣлѣ, изъ этого выраженія слѣдуетъ, что

$$n = \left(1 + Ln \cdot \frac{1}{\infty} \right)^n,$$

откуда, разлагая по формулѣ бинома, и находимъ предыдущее разложеніе.

«Мы должны воспользоваться этимъ случаемъ», говоритъ авторъ, «чтобы замѣтить, что выраженіе

$$n = \left(1 + Ln \cdot \frac{1}{\infty} \right)^{\infty}$$

есть истинная философская схема первоначальнаго алгориѳма градуаціи. Въ самомъ дѣлѣ, именно такъ разумъ и заставляетъ смотрѣть на происхожденіе чиселъ, вліяя регулирующимъ образомъ на алгориѳмическія операціи восприиманія».

Если приложить найденное сейчасъ разложеніе для n къ разсматриваемой функціи φx, то получится

$$n = \left(a^{\sqrt{\pm 1}} \right)^x, \quad Ln = x \sqrt{\pm 1} \cdot La,$$

и слѣдовательно

$$a^{x\sqrt{\pm 1}} = 1 + \frac{La}{1} \cdot x\sqrt{\pm 1} \pm \frac{L^2 a}{1.2} \cdot x^2 \pm \frac{L^3 a}{1.2.3} \cdot x^3 \sqrt{\pm 1} + \text{etc.}$$

Это выраженіе является составленнымъ изъ двухъ рядовъ, одного дѣйствительнаго и другаго мнимаго. Обозначая черезъ Fx первый изъ нихъ и черезъ fx коэффиціентъ $\sqrt{-1}$ во второмъ, получимъ

$$Fx = 1 \pm \frac{(La)^2 \cdot x^2}{2} + \frac{(La)^4 \cdot x^4}{2.3.4} \pm \frac{(La)^6 \cdot x^6}{2.3.4.5.6} + \text{etc.}$$

$$fx = La \cdot x \pm \frac{(La)^3 \cdot x^3}{2.3} + \frac{(La)^5 \cdot x^5}{2.3.4.5} \pm \frac{(La)^7 \cdot x^7}{2.3.4.5.6.7} + \text{etc.}$$

Ясно, что обѣ функціи Fx и fx могутъ принимать дѣйствительныя значенія.

Итакъ, природа изслѣдуемой функціи φx представляется выраженіемъ

$$\varphi x = Fx + fx\sqrt{\pm 1},$$

въ которомъ оба количества Fx и fx суть двѣ функціи отъ x, способныя принимать дѣйствительныя значенія. Вслѣдствіе двойнаго знака радикала, входящаго вообще въ функцію φx, существуютъ два уравненія

$$Fx + fx \cdot \sqrt{\pm 1} = a^{+x\sqrt{\pm 1}},$$

$$Fx - fx \cdot \sqrt{\pm 1} = a^{-x\sqrt{\pm 1}},$$

которыя даютъ

$$Fx = \frac{1}{2}\left\{a^{+x\sqrt{\pm 1}} + a^{-x\sqrt{\pm 1}}\right\},$$

$$fx = \frac{1}{2\sqrt{\pm 1}}\left\{a^{+x\sqrt{\pm 1}} - a^{-x\sqrt{\pm 1}}\right\}.$$

Итакъ вотъ каковы новыя функціи, заключающіяся въ разсматриваемой функціи φx, то-есть вытекающія изъ втораго разбираемаго нами раціональнаго вопроса, вопроса о переходѣ факультатовъ въ нумерацію. Послѣдняя изъ этихъ функцій есть то, что обыкновенно называется *синусомъ*, а первая есть то, что называется *косинусомъ*. Верхній изъ знаковъ, находящихся подъ радикаломъ, соотвѣтствуетъ *гиперболическимъ* синусамъ и косинусамъ, нижній—*круговымъ*.

Согласно сказанному выше, эти двѣ функціи представляютъ *элементарные* производные алгориѳмы, по крайней мѣрѣ въ случаѣ мнимаго показателя, такъ какъ послѣдній дѣйствительно исключаетъ соотвѣтствующія ему степени изъ класса обыкновенныхъ, способныхъ къ непосредственному обозначенію, степеней. Если дойти до трансцендентальнаго источника, то окажется, какъ и по отношенію къ степенямъ, содержащимъ въ показателѣ безконечность, что степени съ мнимыми показателями дѣлаются возможными въ качествѣ интеллектуальныхъ операцій только черезъ приложеніе разума къ *имманентному* алгориѳму градуаціи. Изъ этого приложенія вытекаютъ новыя интеллектуальныя функціи, именно *трансцендентныя* функціи разума или идеи, предлагаемыя этой верховной способностью.

Такимъ образомъ функціи, вообще называемыя *синусами*, являются въ средѣ возможныхъ для человѣка алгориѳмическихъ функцій

функціями алгориѳмическими *элементарными*, а ихъ теорія или *теорія синусовъ* одною изъ необходимыхъ вѣтвей Алгориѳміи.

«Здѣсь», говоритъ авторъ, «кончается то, что въ общемъ вопросѣ синусовъ принадлежитъ Архитектоникѣ математики. — Пользуясь затѣмъ самой Философіей теоріи синусовъ, прибавимъ нѣсколько выводовъ въ видахъ приведенія въ бо̀льшую ясность теоріи этихъ функцій, какъ это было уже сдѣлано нами по отношенію къ логариѳмамъ».

Прежде всего слѣдуетъ замѣтить, что разсматриваемыя функціи есть по существу функціи *алгориѳмическія*, а не *геометрическія*, какъ обыкновенно думали до сего времени. Онѣ имѣютъ и необходимо должны имѣть свое начало въ Алгориѳміи, элементарную и существенную часть которой онѣ составляютъ, какъ степени, логариѳмы, и пр. Ихъ могли найти въ Геометріи только вслѣдствіе приложенія къ послѣдней Алгебры, то-есть вслѣдствіе совершенно случайнаго обстоятельства. Если бы синусы и косинусы не были найдены въ Геометріи, то они тѣмъ не менѣе продолжали бы существовать совершенно независимымъ образомъ въ Алгориѳміи.— Слѣдуетъ замѣтить еще, что въ эти функціи входитъ произвольное количество a, представляющее *основаніе* столькихъ различныхъ системъ синусовъ и косинусовъ, сколько оно можетъ имѣть различныхъ значеній; это основаніе для разсматриваемыхъ функцій есть то же, что для логариѳмическихъ основанія ихъ различныхъ системъ. Если величина его равняется величинѣ основанія натуральныхъ логариѳмовъ, то система синусовъ и косинусовъ будетъ представлять именно ту, которая была извѣстна до сего времени.

Авторъ заканчиваетъ элементарную часть алгориѳмической Теоріи слѣдующимъ обозрѣніемъ полученныхъ результатовъ. «Намъ извѣстно теперь, что различные выведенные нами алгориѳмы суть дѣйствительно элементарные и, слѣдовательно, представляютъ абсолютныя составныя части всякаго вычисленія, которое только можетъ быть. Намъ извѣстно, что форма, подъ которой мы ихъ вывели, есть ихъ первоначальное выраженіе и содержитъ принципы ихъ взаимныхъ теорій. Намъ извѣстно, наконецъ, что для человѣка не оказываются существующими никакіе другіе элементарные алгориѳмы и, слѣдовательно, никакія другія первоначальныя алгориѳмическія функціи».

Принципы, изъ которыхъ были выведены всѣ элементарные алгориѳмы, позволяютъ безъ затрудненія видѣть, что возможность этихъ послѣднихъ обусловливается интеллектуальной двойственностью, пред-

ставляемою теоріями суммаціи и градуаціи, тою двойственностью, при отсутствіи которой человѣкъ имѣлъ-бы только одинъ алгоріемъ, именно алгоріомъ суммаціи. Идя далѣе, можно сказать, что эта возможность обусловливается противоположностью построяющихъ законовъ воспринимания (въ тѣсномъ смыслѣ), отъ которыхъ происходитъ первоначальный алгоріомъ суммаціи, и регулирующихъ законовъ разума, отъ которыхъ происходитъ алгоріемъ градуаціи. Этотъ, заключающійся въ приложеніи человѣческаго знанія къ опредѣленію законовъ алгоріомическихъ количествъ, родъ интеллектуальной полярности, какъ его называетъ авторъ, долженъ встрѣчаться, очевидно, во всѣхъ этихъ количествахъ, такъ какъ принципъ упомянутаго приложенія одинаковъ для всѣхъ алгоріомическихъ количествъ вообще. Слѣдствіемъ этого является въ упомянутыхъ количествахъ, разсматриваемыхъ объективно, не простая нейтрализація или комбинація, но настоящее *систематическое соединеніе* двухъ интеллектуальныхъ функцій, имѣющихъ предметомъ два первоначальные и противоположные алгоріома, суммацію и градуацію. Это систематическое соединеніе вводитъ въ алгоріомическія количества новыя опредѣленія ихъ природы, новые теоретическіе законы. Эти-то законы и составляютъ предметъ систематической части алгоріомической теоріи.

Занимающее насъ теперь систематическое соединеніе можетъ быть разсматриваемо съ двухъ различныхъ точекъ зрѣнія. Съ одной, являющейся *трансцендентальной*, обнаруживается вліяніе этого соединенія на самое происхожденіе (строеніе) алгоріомическихъ количествъ; съ другой, представляющей чисто *логическую* точку зрѣнія, обнаруживается вліяніе этого соединенія на *взаимное соотношеніе* (сравненіе) тѣхъ же количествъ. По первой разсматриваемое систематическое соединеніе устанавливаетъ въ происхожденіи алгоріомическихъ количествъ трансцендентальное единство между двумя первоначальными алгоріомами, суммаціей и градуаціей, единство, законы котораго составляютъ предметъ нѣсколькихъ отдѣльныхъ вѣтвей, которыя всѣ вообще могутъ быть названы *Теоріей алгоріомическаго строенія*. По второй это соединеніе производитъ въ соотношеніи алгоріомическихъ количествъ логическое единство между двумя первоначальными алгоріомами, суммаціей и градуаціей, единство, законы котораго также составляютъ предметъ нѣсколькихъ отдѣльныхъ вѣтвей, которымъ можно дать общее названіе *Теоріи алгоріомическаго сравненія*. —Переходя затѣмъ къ отдѣльному изслѣдованію этихъ двухъ общихъ теорій, Вронскій начинаетъ его съ первой.

Систематическое соединеніе двухъ алгориѳмовъ можетъ быть вообще разсматриваемо или какъ систематическая *различность* или какъ систематическая *тождественность*. Въ первомъ случаѣ оба алгориѳма разсматриваются въ происхожденіи алгориѳмическаго количества какъ раздѣльные одинъ отъ другаго; во второмъ — какъ въ томъ-же происхожденіи нераздѣльные другъ отъ друга. Если разсматривать въ отношеніи происхожденія количествъ оба первоначальные алгориѳмы, суммацію и градуацію, то они окажутся по своей природѣ вполнѣ противоположными, и слѣдовательно не имѣющими способности содѣйствовать нераздѣльно происхожденію количества; вслѣдствіе этого они могутъ давать въ своемъ соединеніи мѣсто только систематической различности. Не то—непосредственные производные алгориѳмы, нумерація и факультаты. Какъ касающіеся нейтрализаціи двухъ первоначальныхъ противоположныхъ алгориѳмовъ, даже какъ соединенные этой нейтрализаціей, то-есть алгориѳмомъ воспроизведенія, они могутъ, по крайней мѣрѣ единствомъ своей связи, нераздѣльно содѣйствовать происхожденію количества. Такимъ образомъ, оба эти производные алгориѳмы должны представлять въ своемъ соединеніи истинную систематическую тождественность.

Что касается систематической различности, вытекающей по природѣ алгориѳмическихъ количествъ изъ соединенія двухъ первоначальныхъ и противоположныхъ алгориѳмовъ, суммаціи и градуаціи, то a priori ясно, что она можетъ существовать только тремя способами: 1) систематическимъ вліяніемъ суммаціи на происхожденіе количествъ, гдѣ господствуетъ градуація; 2) систематическимъ вліяніемъ градуаціи на происхожденіе количествъ, гдѣ господствуетъ суммація, и 3) систематическимъ и взаимнымъ вліяніемъ суммаціи и градуаціи на происхожденіе количествъ, гдѣ господствуютъ и тотъ и другой изъ этихъ алгориѳмовъ. Эта троякая систематическая различность дѣйствительно существуетъ и даетъ мѣсто въ первомъ случаѣ *Теоріи Разностей*, во второмъ—повому исчисленію, которое Вронскій называетъ *Теоріей Ступеней*, и въ третьемъ—тому, что называется *Теоріей Чиселъ*. Дальнѣйшая дедукція этихъ трехъ вѣтвей такова.

Смотря на функціи одного или нѣсколькихъ перемѣнныхъ какъ на выражающія происхожденіе алгориѳмическихъ количествъ помощью *градуаціи*, можно тѣмъ не менѣе въ отношеніи *суммаціи* говорить объ измѣненіи этихъ количествъ. Это-то разсматриваемое такимъ образомъ измѣненіе и есть то, что вообще называется *разностями*; законы же этого измѣненія есть то, что составляетъ предметъ *Об-*

щей теоріи разностей прямой и обратной. Когда части или элементы суммаціи, систематическое вліяніе которой составляетъ предметъ Теоріи разностей, разсматриваются *конечными*, тогда получается *Исчисленіе Разностей;* когда же онѣ разсматриваются какъ *безконечно-малыя*, то получается *Исчисленіе Дифференціаловъ.* Сверхъ того, когда эти части разсматриваются какъ *опредѣленныя*, то является *Исчисленіе опредѣленныхъ разностей*; напротивъ, когда онѣ—*неопредѣленныя*, является *Исчисленіе неопредѣленныхъ разностей* или *Исчисленіе измѣненія разностей* (методъ варіацій).

Считая эту дедукцію общей теоріи разностей и ея частныхъ вѣтвей очевидной, Вронскій находитъ нужнымъ дополнить нѣсколькими словами только метафизическую дедукцію дифференціальнаго исчисленія.

Возможность дифференціальнаго исчисленія выводится, какъ сейчасъ было показано, a priori; существованіе же его или лучше его *дѣйствительность* подтверждается a posteriori. Но процессы этого исчисленія содержатъ въ себѣ антиномію, вслѣдствіе которой они являются попеременно то обладающими, то лишенными строгой точности. Эта антиномія, или лучше ея результатъ, сдѣлалась причиной скептическаго отношенія какъ къ природѣ дифференціальнаго исчисленія, такъ и къ его метафизикѣ. Сверхъ того, увлекаемые матерьяльнымъ направленіемъ, проскользнувшимъ вообще въ метафизику, геометры нашего времени стали разсматривать дифференціальное исчисленіе какъ искусственный и непрямой процессъ и занялись изысканіемъ его замѣны естественнымъ и прямымъ процессомъ, который имѣлъ бы, по ихъ мнѣнію, истинное основаніе. Это и есть та тенденція, которой мы обязаны *Исчисленіемъ Функцій* Лагранжа и всѣми другими *Теоріями деривацiи.* Обѣщая доказать математически съ неопровержимой очевидностью въ одной изъ замѣтокъ (четвертой), заканчивающихъ разсматриваемое нами теперь сочиненіе, что точка зрѣнія Исчисленія Функцій Лагранжа и всѣхъ Теорій деривацiи вообще «абсолютно ложна», Вронскій выражаетъ надежду, что послѣ этого ученые откажутся отъ всѣхъ этихъ теорій, какъ возможныхъ только благодаря природѣ исчисленія, которое онѣ стремятся объяснить, не говоря уже объ ихъ сложности и натянутости или искусственности.

Процессы Дифференціальнаго Исчисленія суть только *субъективныя* правила, правила нашего *умозрѣнія* относительно происхожденія количествъ помощью суммаціи безконечно-малыхъ частей, и ни въ какомъ случаѣ не являются *объективными* правилами, законами самой *реаль-*

ности этого происхожденія. Первыя изъ названныхъ сейчасъ правилъ основаны, подобно первоначальному алгоріему градуаціи, на *регулирующихъ* законахъ разума; послѣднія же, подобно первоначальному алгоріему суммаціи, основаны на *построяющихъ* законахъ воспринимания (въ тѣсномъ смыслѣ). И только изъ смѣшенія этихъ двухъ столь различныхъ точекъ зрѣнія можетъ выйдти антиномія, которую находятъ въ процессахъ Дифференціальнаго Исчисленія. Въ самомъ дѣлѣ, будучи разсматриваемы въ качествѣ простыхъ правилъ нашего умозрѣнія, эти процессы являются вполнѣ строгими; будучи же разсматриваемы какъ истинные законы самой реальности алгоріемическаго происхожденія эти процессы оказываются недостаточными. Вотъ въ чемъ, слѣдовательно, тайна или истинная метафизика Дифференціальнаго Исчисленія. Достаточно выводить процессы этого Исчисленія согласно съ первой изъ двухъ указанныхъ сейчасъ точекъ зрѣнія, чтобы получить вполнѣ строгое доказательство этихъ процессовъ.

Чтобы охарактеризировать природу общей Теоріи разностей Вронскій находитъ нужнымъ сказать нѣсколько словъ объ ея метафизикѣ. Свое изложеніе послѣдней онъ начинаетъ съ опредѣленія общаго понятія *прямыхъ и обратныхъ функцій разностей*. Пусть φx будетъ какой нибудь функціей x, зависящей по существу отъ алгоріома градуаціи. Перемѣнное x можетъ быть разсматриваемо, какъ получающее приращеніе по алгоріому суммаціи, прогрессивное (сложеніе) или регрессивное (вычитаніе). Функція φx необходимымъ образомъ также получитъ тогда по своему роду соотвѣтствующее приращеніе, которое и будетъ тѣмъ, что мы называемъ разностью этой функціи. Кромѣ того это приращеніе функціи φx, какъ зависящее отъ перемѣннаго x, будетъ его новой функціей, и потому, какъ и первая, получитъ согласно съ своимъ родомъ приращеніе, соотвѣтствующее приращенію перемѣннаго и слѣдовательно всегда подчиняющееся алгоріему суммаціи. Слѣдуя этимъ путемъ, можно вывести на основаніи тѣхъ же разсужденій рядъ функцій отъ x, производныхъ одна отъ другой и могущихъ быть разсматриваемыми въ прямомъ или обратномъ порядкѣ своего образованія. Въ этомъ, по взглядамъ Вронскаго, и состоитъ общее понятіе прямыхъ и обратныхъ функцій разностей, будетъ ли приращеніе перемѣннаго конечнымъ или безконечно-малымъ. Затѣмъ онъ переходитъ къ разсмотрѣнію алгоріемическаго строенія этого понятія.

Пусть, согласно принятому обозначенію, Δ представляетъ разсматриваемыя приращенія вышеупомянутыхъ разностей. Тогда мы бу-

демъ имѣть для послѣдовательныхъ разностей, прямыхъ и обратныхъ, выраженія:

1) при слѣдованіи прогрессивнымъ путемъ

$$\Delta^{\mu}\varphi x=(-1)^{\mu}\cdot\left(\varphi x-\frac{\mu}{1}\cdot\varphi(x+\Delta x)+\frac{\mu}{1}\cdot\frac{\mu-1}{2}\cdot\varphi(x+2\Delta x)-\text{и пр.}\right).$$

2) при слѣдованіи регрессивнымъ путемъ:

$$\Delta^{\mu}\varphi(x)=(+1)^{\mu}\cdot\left(\varphi x-\frac{\mu}{1}\cdot\varphi(x-\Delta x)+\frac{\mu}{1}\cdot\frac{\mu-1}{2}\varphi(x-2\Delta x)-\text{и пр.}\right),$$

гдѣ μ есть знакъ или показатель этихъ разностей въ прямомъ или обратномъ порядкѣ ихъ образованія.

Таковы алгоритмическія выраженія предмета теоріи разностей. Чтобы обобщить изложенную дедукцію, а вмѣстѣ съ тѣмъ обобщить и самую теорію, замѣтимъ, что оба выраженія различаются только коэффиціентами $(-1)^{\mu}$, $(+1)^{\mu}$ и знакомъ приращенія Δx перемѣннаго. Мы можемъ, поэтому, разсматривать только одно изъ нихъ и, пользуясь легкостью ихъ соединенія, полученные результаты отнести къ другому. Предпочтеніе при выборѣ изъ нихъ обоихъ слѣдуетъ отдать второму, какъ болѣе простому вслѣдствіе того, что коэффиціентъ $(+1)^{\mu}$ всегда равенъ 1. Такимъ образомъ предметомъ Теоріи разностей мы будемъ имѣть общее выраженіе

$$a)\qquad \begin{aligned}\Delta^{\mu}\varphi x=\varphi x&-\frac{\mu}{1}\cdot\varphi(x-\xi)+\frac{\mu}{1}\cdot\frac{\mu-1}{2}\cdot\varphi(x-2\xi)\\&-\frac{\mu}{1}\cdot\frac{\mu-1}{2}\cdot\frac{\mu-2}{3}\cdot\varphi(x-3\xi)+\text{и пр.},\end{aligned}$$

гдѣ ξ обозначаетъ приращеніе Δx перемѣннаго.

Это выраженіе справедливо прежде всего для всѣхъ порядковъ μ, соотвѣтствующихъ цѣлымъ положительнымъ числамъ. Въ этомъ случаѣ оно относится непосредственно къ функціямъ *прямыхъ разностей* или *разностей въ собственномъ смыслѣ слова*. Въ самомъ дѣлѣ, взявъ разность двухъ членовъ этого выраженія, будемъ имѣть

$$\begin{aligned}\Delta\left(\Delta^{\mu}\varphi x\right)&=\left\{\varphi x-\frac{\mu}{1}\cdot\varphi(x-\xi)+\frac{\mu}{1}\cdot\frac{\mu-1}{2}\cdot\varphi(x-2\xi)-\text{etc.}\right\}\\&\quad-\left\{\varphi(x-\xi)-\frac{\mu}{1}\cdot\varphi(x-2\xi)+\frac{\mu}{1}\cdot\frac{\mu-1}{2}\varphi(x-3\xi)-\text{etc.}\right\}\\&=\varphi x-\frac{\mu+1}{1}\cdot\varphi(x-\xi)+\frac{\mu+1}{1}\cdot\frac{\mu}{2}\cdot\varphi(x-2\xi)-\\&\quad-\frac{\mu+1}{1}\cdot\frac{\mu}{2}\cdot\frac{\mu-1}{3}\cdot\varphi(x-3\xi)+\text{etc},\end{aligned}$$

и также въ силу выраженія (a)

$$\Delta(\Delta^{\mu}\varphi x)=\Delta^{\mu+1}\varphi x=\varphi x-\frac{\mu+1}{1}\cdot\varphi(x-\xi)+\frac{\mu-1}{1}\cdot\frac{\mu}{2}\cdot\varphi(x-2\xi)-\text{etc.}$$

Кромѣ того общее выраженіе (a) справедливо также и для всѣхъ порядковъ μ, соотвѣтствующихъ цѣлымъ отрицательнымъ числамъ. Въ этомъ случаѣ оно относится къ функціямъ *обратныхъ разностей*, къ *интеграламъ* или *суммамъ*, которыя, согласно обычаю, могутъ быть обозначены Σ. Дѣйствительно, сдѣлавъ μ отрицательнымъ въ выраженіи (a), получимъ послѣднее въ видѣ:

$$(b)\qquad \Sigma^{\mu}\varphi x=\varphi x+\frac{\mu}{1}\cdot\varphi(x-\xi)+\frac{\mu}{1}\cdot\frac{\mu+1}{2}\cdot\varphi(x-2\xi)+\text{etc.}$$

Взявъ-же разность обоихъ членовъ этого новаго выраженія, найдемъ

$$\begin{aligned}\Delta(\Sigma^{\mu}\varphi x)=&\left\{\varphi x+\frac{\mu}{1}\cdot\varphi(x-\xi)+\frac{\mu}{1}\cdot\frac{\mu+1}{2}\cdot\varphi(x-2\xi)+\text{etc.}\right\}\\&-\left\{\varphi(x-\xi)+\frac{\mu}{1}\cdot\varphi(x-2\xi)+\frac{\mu}{1}\cdot\frac{\mu+1}{2}\cdot\varphi(x-3\xi)+\text{etc.}\right\}\\&=\varphi x+\frac{\mu-1}{1}\cdot\varphi(x-\xi)+\frac{\mu-1}{1}\cdot\frac{\mu}{2}\cdot\varphi(x-2\xi)+\text{etc.}\end{aligned}$$

Также будемъ имѣть въ силу выраженія (b)

$$\Delta(\Sigma^{\mu}\varphi x)=\Sigma^{\mu-1}\varphi x=\varphi x+\frac{\mu-1}{1}\cdot\varphi(x-\xi)+\frac{\mu-1}{1}\cdot\frac{\mu}{2}\cdot\varphi(x-2\xi)-\text{etc.}$$

Наконецъ, общее выраженіе (a) и его обратное (b) справедливы для всѣхъ порядковъ μ, сотвѣтствующихъ дробнымъ, ирраціональнымъ и даже мнимымъ числамъ. Но въ этихъ случаяхъ функціи $\Delta^{\mu}\varphi x$ и $\Sigma^{\mu}\varphi x$ не будутъ имѣть никакого значенія. Величины выраженій (a) и (b) становятся тогда чисто случайными, и возможность ихъ обусловливается техническимъ алгоритмомъ интерполяціи. При этомъ не безполезно замѣтить, что хотя алгоритмическія функціи и обладаютъ способностью получать при посредствѣ интерполяціи опредѣленныя значенія для всѣхъ величинъ перемѣннаго количества, отъ котораго зависятъ, однако они бываютъ доступными для нея не во всѣхъ случаяхъ или по крайней мѣрѣ для нихъ не существуетъ необходимости непремѣнно имѣть значеніе для каждаго случая.

Затѣмъ Вронскій обращается къ основному закону общей Теоріи разностей. Такъ какъ эта теорія, по сказанному при разсмотрѣніи ея дедукціи, имѣетъ предметомъ законы систематическаго вліянія

суммаціи на происхожденіе количествъ, въ которыхъ господствуетъ градуація, то и является надобность разсмотрѣть функціи, подчиненныя Исчисленію разностей и Дифференціальному Исчисленію. Но въ виду такого двоякаго начала, — вліянія суммаціи и преобладанія градуаціи,—становится въ силу трансцендентальнаго единства, соединяющаго здѣсь оба эти алгоріѳма, понятнымъ a priori, что въ теоріи разностей долженъ существовать общій законъ для разсматриваемаго соединенія двухъ первоначальныхъ и разнородныхъ алгоріѳмовъ, содѣйствующихъ въ качествѣ элементовъ образованію прямыхъ и обратныхъ функцій разностей. Вотъ этотъ законъ:

$$
\begin{aligned}
\Delta^{\mu}(Fx.fx) = {} & Fx.\Delta^{\mu}fx + \frac{\mu}{1}.\Delta Fx(\Delta^{\mu-1}fx - \Delta^{\mu}fx) \\
& + \frac{\mu}{1}.\frac{\mu-1}{2}.\Delta^{2}Fx(\Delta^{\mu-2}fx - 2\Delta^{\mu-1}fx + \Delta^{\mu}fx) \\
(c) \qquad & + \frac{\mu}{1}.\frac{\mu-1}{2}.\frac{\mu-2}{3}.\Delta^{3}Fx(\Delta^{\mu-3}fx - 3\Delta^{\mu-2}fx + 3\Delta^{\mu-1}fx \\
& - \Delta^{\mu}fx) + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Законъ обратный этому представится въ слѣдующемъ видѣ, если сдѣлать μ отрицательнымъ,

$$
\begin{aligned}
\Sigma^{\mu}(Fx\,fx) = {} & Fx.\Sigma^{\mu}fx - \frac{\mu}{1}.\Delta Fx(\Sigma^{\mu+1}fx - \Sigma^{\mu}fx) \\
& + \frac{\mu}{1}.\frac{\mu+1}{2}.\Delta^{2}Fx(\Sigma^{\mu+2}fx - 2\Sigma^{\mu+1}fx + \Sigma^{\mu}fx) \\
(d) \qquad & - \frac{\mu}{1}.\frac{\mu+1}{2}.\frac{\mu+2}{3}.\Delta^{3}Fx(\Sigma^{\mu+3}fx - 3\Sigma^{\mu+2}fx + 3\Sigma^{\mu+1}fx \\
& - \Sigma^{\mu}fx) + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Въ обоихъ выраженіяхъ Fx и fx суть двѣ какія-нибудь функціи x.

Разложеніе, представляемое этимъ закономъ, есть разложеніе *произведенія* двухъ функцій при посредствѣ *разностей* его множителей. Но, какъ принадлежащее къ алгоріѳму воспроизведенія, это произведеніе зависитъ въ сущности отъ алгоріѳма градуаціи и черезъ это становится причиной преобладанія принципа этого послѣдняго алгоріѳма въ разложенной функціи $(Fx.fx)$; въ то же время разности множителей вызываютъ непосредственно алгоріѳмъ суммаціи. Такимъ образомъ, составляющія искомый законъ предыдущія разложенія *(c)* и *(d)* выражаютъ систематическое вліяніе первоначальнаго алгоріѳма

суммаціи на образованіе количества, въ которомъ господствуетъ принципъ первоначальнаго алгоріема градуаціи.

Этотъ законъ (а не теорема Тайлора) и есть основной законъ всей Теоріи разностей прямой и обратной, составляющій принципъ всѣхъ предложеній этой теоріи. Для общей Теоріи разностей, Исчисленія разностей и Дифференціальнаго Исчисленія, онъ есть то-же, что биномъ Ньютона для алгоріема градуаціи. Вслѣдствіе двухъ множителей, которые разлагаются этимъ закономъ, его можно назвать по аналогіи *биномомъ разностей*. Необходимо замѣтить кромѣ того, что этотъ законъ, какъ и биномъ Ньютона, теоретиченъ по существу, хотя и имѣетъ подобію тому же бипому, форму техническихъ разложеній.

Далѣе Вронскій даетъ подробныя доказательства сперва общности этого закона, а затѣмъ невозможности существованія для общей Теоріи разностей въ качествѣ основнаго какого нибудь другаго еще, кромѣ него. Представивъ потомъ алгоріемическую дедукцію своего закона, онъ дѣлаетъ изъ него нѣкоторые выводы, изъ которыхъ какъ на замѣчательнѣйшій можно указать на выраженіе, представляющее основной принципъ всѣхъ суммъ или интеграловъ перваго порядка. Такъ какъ Дифференціальное Исчисленіе есть только вѣтвь общей Теоріи разностей, то все относящееся или выведенное для послѣдней распространяется и на первую, хотя, конечно, и нельзя не замѣтить, что при этомъ распространеніи многія формулы становятся болѣе простыми вслѣдствіе того, что дифференціалы высшихъ порядковъ исчезаютъ передъ дифференціалами низшихъ. Такъ, приведенныя выше выраженія (*c*) и (*d*) основнаго закона въ примѣненіи къ Дифференціальному Исчисленію принимаютъ видъ

$$d^{\mu}(Fx.fx)=Fx.d^{\mu}fx+\frac{\mu}{1}\cdot dFx.d^{\mu-1}fx+\frac{\mu}{1}\cdot\frac{\mu-1}{2}\times d^{2}Fx.d^{\mu+2}fx+\text{etc.} \qquad (e)$$

$$\int^{\mu}(Fx.fx)=Fx.\int^{\mu}fx-\frac{\mu}{1}\cdot dFx.\int^{\mu+1}fx+\frac{\mu}{1}\cdot\frac{\mu+1}{2}\times d^{2}Fx.\int^{\mu+2}fx-\text{etc.}, \qquad (f)$$

при чемъ обѣ части втораго выраженія должны быть умножены на $(dx)^{\mu}$. Что касается Варіаціоннаго Исчисленія, то оно не имѣетъ никакихъ особенныхъ законовъ и вполнѣ подчиняется общимъ законамъ Теоріи разностей. Его характеристическую особенность Врон-

скій видитъ въ томъ, что разности разсматриваются въ немъ, какъ *неопредѣленныя*, такъ что варіаціи есть только неопредѣленныя разности или дифференціалы. Причина, исключающая возможность существованія особыхъ законовъ для Варіаціоннаго Исчисленія, состоитъ, по мнѣнію Вронскаго, въ томъ, что это Исчисленіе зависитъ не отъ *трансцендентальнаго* обстоятельства, а только отъ *логическаго* (опредѣленности или неопредѣленности разностей).

Свое разсужденіе о Теоріи разностей Вронскій заканчиваетъ указаніемъ, что основной законъ этой теоріи, названный имъ биномомъ разностей, можетъ, какъ и биномъ Ньютона, самъ собою легко преобразовываться въ выраженіе трехчленной и вообще какой-нибудь многочленной функціи. Процессъ этого преобразованія онъ разсматриваетъ на выраженіи основнаго закона или бинома дифференціаловъ, которое представляетъ въ видѣ

$$d^{\mu}(Fx.fx)=A\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)..(\mu-(\nu-1))}{1.2.3..\nu}.d^{\nu}Fx.d^{\mu-\nu}fx,$$

гдѣ A обозначаетъ совокупность членовъ, соотвѣтствующихъ всѣмъ цѣлымъ и положительнымъ значеніямъ ν, включая сюда и значеніе $\nu=0$. Предварительно, впрочемъ, онъ обобщаетъ это выраженіе, распространяя его на случай μ отрицательнаго, также какъ и на случай обратныхъ дифференціаловъ или интеграловъ.

Изложеніе второй изъ названныхъ выше теорій, порождаемыхъ систематическою различностью, или *Теоріи ступеней*, какъ представляющей совершенно новое исчисленіе, Вронскій начинаетъ съ основныхъ понятій и установленія необходимыхъ терминовъ. «Разсматривая функціи одного или нѣсколькихъ перемѣнныхъ», говоритъ онъ, «какъ выражающія происхожденіе алгоріемическихъ количествъ помощью *суммаціи*, можно съ точки зрѣнія, противоположной той, которою пользуются относительно разностей, разсматривать измѣненіе этихъ количествъ въ отношеніи *градуаціи*. Изъ этого выходитъ особенный систематическій алгоріомъ, существенно различающійся отъ изслѣдованнаго нами, то-есть отъ Теоріи разностей. Этотъ второй способъ разсматривать измѣненія алгоріомическихъ количествъ вытекаетъ очевидно, по данной нами выше архитектонической дедукціи, изъ того же источника, изъ котораго вытекаетъ и первый, то-есть служащій основаніемъ Теоріи разностей. И такъ доказано a priori, что должно или по крайней мѣрѣ можетъ существовать еще другое Исчисленіе, аналогичное Исчисленію разностей, но противоположное послѣднему по самой природѣ алгоріема, систематическое

вліяніе котораго имѣетъ здѣсь мѣсто. Именно, въ Исчисленіи разностей на происхожденіе количествъ, въ которыхъ господствуетъ градуація, вліяетъ суммація; въ разсматриваемомъ же теперь Исчисленіи градуація вліяетъ на измѣненіе количествъ, въ которыхъ господствуетъ суммація».

Пусть y есть функція перемѣннаго x, представляемая Вронскимъ въ видѣ

$$y = \varphi x.$$

Если принять, что показатель у x получилъ приращеніе, и обозначить послѣднее черезъ γx, то равнымъ образомъ долженъ очевидно получить приращеніе и показатель у y; такъ что при обозначеніи этого послѣдняго приращенія черезъ γy получится

$$y^{1+\gamma y} = \varphi\left(x^{1+\gamma x}\right).$$

По раздѣленіи этихъ производныхъ количествъ на первоначальное количество $y = \varphi x$, оказывается, что

$$\alpha) \ldots\ldots y^{\gamma y} = \frac{\varphi\left(x^{1+\gamma x}\right)}{\varphi x}$$

Это и есть *приращеніе* функціи φx *черезъ градуацію*, соотвѣтствующее подобному-же приращенію перемѣннаго x.

Указанное измѣненіе черезъ градуацію необходимо слѣдуетъ особеннымъ законамъ, совокупность которыхъ составляетъ разсматриваемое счисленіе, названное Вронскимъ, по вышесказанному, *Теоріей ступеней*, при чемъ *ступенями* онъ называетъ вообще количества, обозначенныя имъ черезъ γx, γy.

Теорія ступеней составляетъ такимъ образомъ необходимую и существенную вѣтвь Алгоріеміи. Она, кромѣ того, должна имѣть подобно общей Теоріи разностей двѣ особенныхъ вѣтви, какъ это видно изъ того, что количества γx, γy могутъ быть разсматриваемы или какъ *конечныя*, или какъ *безконечно-малыя*. Въ первомъ случаѣ Вронскій называетъ эти количества *ступенями* (grades) въ тѣсномъ смыслѣ слова, во второмъ—*ступенъками* (gradules). Что-же касается соотвѣтствующихъ имъ и упомянутыхъ сейчасъ вѣтвей, то онъ называетъ ихъ по аналогіи съ двумя вѣтвями Теоріи разностей, *Исчисленіемъ ступеней* и *Исчисленіемъ ступенекъ*. Приращенія, составляющія предметъ общей Теоріи ступеней, могутъ быть кромѣ того разсматриваемы еще какъ *опредѣленныя* или какъ *неопредѣленныя*. Вслѣдствіе этого у Теоріи ступеней, какъ и у Теоріи разностей,

являются еще двѣ особыя вѣтви, именно *Исчисленіе опредѣленныхъ ступеней* и *Исчисленіе ступеней неопредѣленныхъ* или-же *Исчисленіе измѣненія ступеней.*

Послѣ этихъ предварительныхъ замѣчаній, относящихся по ученію Вронскаго къ Архитектоникѣ математики, онъ переходитъ къ краткому очерку философіи Теоріи ступеней. Необходимость имѣть прежде всего общее выраженіе ступени и ступеньки какой-нибудь функціи черезъ другіе извѣстные алгоріемы заставляетъ Вронскаго сдѣлать отысканіе этого выраженія началомъ очерка. Желая именно выразить ступени черезъ разности, онъ для соединенія первыхъ со вторыми полагаетъ въ выраженіи (α)

$$x^{1+yx}=x+\xi,$$

вслѣдствіе чего находитъ

$$\beta) \quad \ldots \quad y^{yy}-1=\frac{\varphi(x+\xi)-\varphi x}{\varphi x}=\frac{\Delta\varphi(x+\xi)}{\varphi x}.$$

ξ является такимъ образомъ приращеніемъ, отъ котораго зависитъ разность Δ. Но изъ доказаннаго ранѣе авторомъ выраженія

$$\Delta\varphi x=\varphi(x-\xi)\,.\,(e^{\Delta L\varphi x}-1)$$

слѣдуетъ, что

$$\Delta\varphi(x+\xi=\varphi x)\,.\,(e^{\Delta L\varphi(x+\xi)}-1).$$

Подстановка этого выраженія въ $\beta)$ даетъ

$$\gamma) \quad \ldots \quad y^{yy}=e^{\Delta L\varphi(x+\xi)}$$

и слѣдовательно

$$\gamma\varphi x=\frac{\Delta L\varphi(x+\xi)}{L\varphi x}.$$

Итакъ вотъ каково выраженіе ступени функціи φx. Если дѣло идетъ о ступенькѣ, то количество ξ должно быть разсматриваемо какъ безконечно-малое; разность-же, входящая въ это выраженіе, дѣлается дифференціаломъ, такъ что предыдущее выраженіе обращается въ

$$y\varphi x=\frac{dL\varphi x}{L\varphi x},$$

если по аналогіи съ обозначеніемъ дифференціаловъ выражать ступеньки латинской буквой g.

Найденныя сейчасъ формулы представляютъ выраженія ступени и ступеньки *перваго порядка.* Но и тѣ и другія, подобно разностямъ

и дифференціаламъ, могутъ быть всякихъ порядковъ, положительныхъ и отрицательныхъ. Въ самомъ дѣлѣ, если опять обратиться къ выраженію (γ)

$$y^{\gamma y} = e^{\Delta L\varphi(x+\xi)}$$

то получится очевидно

$$y^{\gamma y + \gamma_2 y} = e^{\Delta L\{\varphi(x+\xi)\}^{(1+\gamma\varphi(x+\xi))}}$$

гдѣ $\gamma_2 y$ или $\gamma_2 \varphi x$ обозначаетъ ступень *втораго порядка* функціи φx, а $\gamma\varphi(x+\xi)$ будетъ, какъ и выше, ступенью перваго порядка функціи $\varphi(x+\xi)$. Но по раздѣленіи обѣихъ частей послѣдняго равенства на соотвѣтствующіе члены произведшаго его выраженія (γ) найдется и значеніе

$$y^{\gamma_2 y} = e^{\Delta L\{\varphi(x+\xi)\}^{\gamma\varphi(x+\xi)}},$$

которое, въ силу того-же выраженія (γ), представится въ видѣ

$$y^{\gamma_2 y} = e^{\Delta L e^{\Delta L\varphi(x+2\xi)}} = e^{\Delta \,.\, \Delta L\varphi(x+2\xi)}$$

Итакъ ступень $\gamma_2 y$ или $\gamma_2 \varphi x$ втораго порядка функціи φx будетъ

$$\gamma_2 \varphi x = \frac{\Delta^2 L\varphi(x+2\xi)}{L\varphi x},$$

и того-же порядка ступенька

$$g_2 \varphi x = \frac{d^2 L\varphi x}{L\varphi x}.$$

Поступая такимъ-же образомъ далѣе, не трудно увидѣть, что ступени и ступеньки, подобно разностямъ и дифференціаламъ, могутъ быть всевозможныхъ порядковъ, положительныхъ и отрицательныхъ. Легко найти, дѣйствительно, какъ мы это сейчасъ докажемъ, для какого-нибудь порядка μ общія выраженія

$$\gamma_\mu \varphi x = \frac{\Delta^\mu L\varphi(x+\mu\xi)}{L\varphi x}, \qquad g_\mu \varphi x = \frac{d^\mu L\varphi x}{L\varphi x}.$$

Первое изъ этихъ общихъ выраженій, обнимающее второе, даетъ

$$\varphi x^{\gamma_\mu \varphi x} = e^{\Delta^\mu L\varphi(x+\mu\xi)}$$

въ случаѣ же ступени слѣдующаго порядка

$$\varphi x^{\gamma_\mu \varphi x + \gamma_{\mu+1} \varphi x} = e^{\Delta^\mu L\{\varphi(x+\mu\xi)\}^{(1+\gamma\varphi(x+\mu\xi))}}$$

Послѣ почленнаго дѣленія одно на другое двухъ послѣднихъ равенствъ получится

$$\varphi x^{\gamma_{\mu+1}\varphi x} = e^{\Delta^\mu L\{\varphi(x+\mu\xi)\}^{\gamma\varphi(x+\mu\xi)}}$$

а въ силу выраженія (γ)

$$\varphi x^{\gamma_{\mu+1}\varphi x} = e^{\Delta^\mu L e^{\Delta L\varphi(x+(\mu+1)\xi)}} \cdot e^{\Delta^\mu \Delta L\varphi(x+(\mu+1)\xi)}.$$

Итакъ

$$\gamma_{\mu+1}\varphi x = e^{\Delta^{\mu+1} L\varphi(x+(\mu+1)\xi)}.$$

А это и есть то, что непосредственно даетъ, служившее точкой отправленія предположенное общее выраженіе. Такимъ образомъ, если это выраженіе справедливо въ одномъ случаѣ,—а оно очевидно справедливо въ случаѣ $\mu=0$,—то оно будетъ также справедливымъ и во всѣхъ другихъ, каково бы ни было значеніе μ,—положительное или отрицательное. Итакъ, для ступеней и ступенекъ какого нибудь порядка μ, мы дѣйствительно будемъ имѣть общія выраженія

$$(\delta) \ldots . \gamma_\mu \varphi x = e^{\frac{\Delta^\mu L\varphi(x+\mu\xi)}{L\varphi x}}, \quad \gamma_\mu \varphi x = e^{\frac{\Delta^\mu L\varphi x}{L\varphi x}}.$$

Если μ есть число цѣлое отрицательное, то ступени и ступеньки въ этихъ формулахъ будутъ *обратными*, соотвѣтствующими въ Теоріи разностей обратнымъ разностямъ и дифференціаламъ, суммамъ и интеграламъ. Здѣсь-же является и характеристическое обстоятельство, нарушающее аналогію между теоріями ступеней и разностей и состоящее въ томъ, что ступень нулеваго порядка, служащая переходомъ отъ положительныхъ порядковъ къ отрицательнымъ равна единицѣ, а не той самой функціи, ступени которой разсматриваются, какъ въ Теоріи разностей. Это происходитъ оттого, что разные порядки ступеней относятся къ послѣдовательнымъ произведеннымъ градуаціей приращеніямъ разсматриваемой функціи, а не къ приращеніямъ самихъ этихъ ступеней, какъ представляющимъ чисто случайныя измѣненія, не имѣющія въ Алгоріѳміи никакого необходимаго значенія. Въ самомъ дѣлѣ, истинное произведенное градуаціей приращеніе функціи y или φx есть выраженіе (λ)

$$y^{\gamma y} = e^{\Delta L\varphi(x+\xi)}$$

или первоначально выраженіе (α)

$$y^{\gamma y} = \frac{\varphi\,(x^{1+\gamma x})}{\varphi x}$$

Подобное же второе измѣненіе функціи y или φx необходимо выразится ступенью втораго порядка. Дѣйствительно, обращаясь къ этому второму приращенію, находимъ

$$\left(y^{\gamma y}\right)^{(1+\Gamma y)} = e^{\Delta L\left\{\varphi(x+\xi)\right\}^{(1+\gamma\varphi(x+\xi))}},$$

гдѣ Γy обозначаетъ ступень, производимую приращеніемъ приращенія перваго порядка $y^{\gamma y}$. Тогда частное отъ дѣленія количества

$$\left(y^{\gamma y}\right)^{(1+\Gamma y)} \quad y^{\gamma y + \gamma y.\Gamma y}$$

на приращеніе перваго порядка $y^{\gamma y}$, то-есть

$$\frac{\left(y^{\gamma y}\right)^{(1+\Gamma y)}}{y^{\gamma y}} = y^{\gamma y\,\Gamma y},$$

дастъ очевидно $y^{\gamma y.\Gamma y}$, какъ приращеніе втораго порядка, и $\gamma y.\Gamma y$ какъ указателя, опредѣляющаго второе измѣненіе функціи y или φx. Указатель $\gamma y.\Gamma y$, только обозначенный черезъ $\gamma_2 y$, и есть въ самомъ дѣлѣ то, что мы разсматривали какъ ступень втораго порядка. То-же самое слѣдуетъ сказать и о ступеняхъ другихъ порядковъ. Можно, дѣйствительно, взять произведенное градуаціей приращеніе самой ступени перваго порядка, именно

$$\gamma y^{(1+\gamma\gamma y)} = \frac{\Delta L\left\{\varphi(\xi+x)\right\}^{(1+\gamma\varphi(x+\xi))}}{L\left\{\varphi x\right\}^{(1+\gamma\varphi x)}}.$$

и такимъ образомъ найти $\gamma\gamma y$ или $\gamma^2 y$ какъ ступень, опредѣляющую это приращеніе. Но, какъ уже было сказано ранѣе, такой способъ разсмотрѣнія чисто случаенъ и не имѣетъ въ Алгоріѳми никакого необходимаго значенія. Онъ не обнимаетъ безусловно приращеніе функціи $y^{\gamma y}$, которая есть приращеніе перваго порядка; онъ обнимаетъ его только относительно, какъ это видно на выраженіи

$$\left(y^{\gamma y}\right)^{(1+\Gamma y)} = y\,(1+\gamma y)\;\gamma y^{(1+\gamma\gamma y)}.$$

И это потому, что онъ имѣетъ дѣло только съ измѣненіемъ ступеней, а не съ измѣненіемъ самой функціи. Обозначеніе истинныхъ ступеней различныхъ порядковъ помощью цифръ, помѣщенныхъ снизу характеристическихъ буквъ γ и g, имѣетъ, по замѣчанію автора, цѣлью отличить приращеніе ступеней, которое только возможно, отъ приращенія самой функціи, которое необходимо.

Изъ общихъ выраженій (δ) не безполезно вывести слѣдующія выраженія ступенекъ хотя бы перваго порядка отъ элементарныхъ алгоріемическихъ функцій

$$gx^m = gx, \quad gLx = \frac{1}{LL} \cdot gx, \quad ga^x = Lx \cdot gx,$$

$$g \sin x = + \frac{x \cdot Lx \cdot \cot x}{L \sin x} \cdot gx, \quad g \cos x = - \frac{xLx \cdot \operatorname{tang} x}{L \cos x} \cdot gx$$

подставляя въ нихъ вмѣсто dx величину, получаемую изъ тѣхъ-же общихъ выраженій (δ), именно

$$gx = \frac{dLx}{Lx} - \frac{dx}{xLx}.$$

Далѣе Вронскій обращается къ основному закону Теоріи ступеней. Какъ и въ Теоріи разностей, этотъ законъ долженъ обнимать всѣ возможныя алгоріемическія функціи, и именно три первоначальныя: суммацію, воспроизведеніе и градуацію, какъ образующія всѣ другія. Онъ долженъ обнимать, другими словами, три случая

$$\gamma_\mu (Fx + fx), \quad \gamma_\mu (Fx \times fx), \quad \gamma_\mu (Fx^{fx}).$$

Прилагая же общія выраженія (δ) ко второму изъ этихъ случаевъ, прямо находятъ

$$\gamma_\mu (Fx + fx) = \frac{\Delta^\mu L (F(x + \mu\xi) \cdot f(x + \mu\xi))}{L(Fx \cdot fx)} =$$

$$= \frac{\Delta^\mu LF(x + \mu\xi) + \Delta^\mu Lf(x + \mu\xi)}{L(Fx \cdot fx)},$$

а слѣдовательно въ силу тѣхъ-же выраженій (δ)

$$\gamma_\mu (Fx \times fx) = \frac{LFx \cdot \gamma_\mu Fx + Lfx \cdot \gamma_\mu fx}{L(Fx \cdot fx)}$$

или въ случаѣ ступенекъ

$$g_\mu (Fx \times fx) = \frac{LFx \cdot g_\mu Fx + Lfx \, g_\mu fx}{L(Fx \cdot fx)}.$$

Такимъ образомъ ступени функцій воспроизведенія даются непосредственно помощью ступеней того-же самаго порядка, взятыхъ по множителямъ этихъ функцій. Затѣмъ остается разсмотрѣть только первый и третій случаи, то-есть случай теоретическаго разложенія ступеней, взятыхъ по функціямъ суммаціи, и случай теоретическаго разложенія ступеней, взятыхъ по функціямъ градуаціи.

Но, по сказанному о природѣ алгориѳма ступеней, какъ являющагося опредѣленіемъ систематическаго вліянія градуаціи на происхожденіе количествъ, въ которыхъ господствуетъ суммація, представляется необходимымъ, чтобы первый изъ двухъ случаевъ, оставшихся для разсмотрѣнія, обнималъ послѣдній, или чтобы послѣдній содержался въ законѣ, прилагающемся къ первому. Такъ и есть въ дѣйствительности. Въ самомъ дѣлѣ, если-бы предложенной функціей градуаціи была $\Phi x, ^{\varphi x}$ то можно было бы сдѣлать

$$\Phi x^{\varphi x} = Fx.\ fx,$$

и разсматривая функцію fx, какъ данную, получить

$$LFx = \varphi x.\ L\Phi x - Lfx,$$

а слѣдовательно

$$\gamma_\mu LFx = \gamma_\mu \{\varphi x\ L\Phi x - Lfx\},$$

то есть выраженіе, относящееся къ случаямъ функцій суммаціи. Но, что особенно важно, имѣлось бы выраженіе

$$\gamma_\mu \Phi x^{\varphi x} = \gamma_\mu (Fx\ \ fx) = \frac{LFx \cdot \gamma_\mu Fx + Lfx \gamma_\mu fx}{L(Fx.\ fx)};$$

при чемъ кстати на основаніи формулы

$$\Delta LF(x+\mu\xi) = LF(x+(\mu-1)\xi).\ (e^{\Delta LLF(x+\mu\xi)} - 1)$$

и въ силу выраженій (δ) нашлось бы сверхъ того

$$\gamma_\mu Fx = \frac{\Delta^\mu LF(x+\mu\xi)}{LFx} = \frac{\Delta^{\mu-1}\{LF(x+(\mu-1)\xi) \times (e^{\Delta LLF(x+\mu\xi)} - 1)\}}{LFx},$$

а слѣдовательно въ силу бинома разностей (c)

$$\gamma_\mu Fx = \frac{1}{LFx}\{LF(x+(\mu-1)\xi).\ \Delta^{\mu-1}(e^{\Delta LLF(x+\mu\xi)}-1)+\frac{\mu-1}{1}\times$$
$$\times\Delta LF(x+(\mu-1)\xi).\ (\Delta^{\mu-2}(e^{\Delta LLF(x+\mu\xi)}-1)-$$
$$-\Delta^{\mu-1}(e^{\Delta LLF(x+\mu\xi)}-1))+\text{etc., etc.}\},$$

то есть выраженіе, въ которомъ вообще имѣли бы

$$\Delta^{\tilde{\omega}}(e^{\Delta LLF(x+\mu\xi)}-1)=\Delta^{\tilde{\omega}}\Big(\Delta LLF(x+\mu\xi)+$$
$$\tfrac{1}{2}\Delta^{\tilde{\omega}}(\Delta LLF(x+\mu\xi).\ \Delta LLF(x+\mu\xi))+\text{etc.},$$

а слѣдовательно могли бы съ помощью общихъ выраженій (δ) подставить ступени $LF(x+\mu\xi)$ вмѣсто разностей $LLF(x+\mu\xi)$.

Итакъ утвержденіе, что прилагающійся къ функціямъ суммаціи законъ теоретическаго разложенія ступеней обнимаетъ разложенія ступеней, взятыхъ по функціямъ градуаціи, справедливо. Но сверхъ того справедливо также и то, что законъ теоретическаго разложенія ступеней, прилагающійся непосредственно къ функціямъ градуаціи, не можетъ обнять разложенія ступеней, взятыхъ по функціямъ суммаціи. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $(\Phi x+\varphi x)$ есть предложенная функція суммаціи. Для приведенія ее къ функціямъ градуаціи имѣютъ $(\Phi x+\varphi x)=Fx\times fx$ или лучше, если только это возможно, $(\Phi x+\varphi x)=Fx.^{fx}$ Но и въ томъ и другомъ случаѣ для опредѣленія одной изъ двухъ функцій Fx или fx будутъ всегда имѣть выраженія, содержащія предложенную функцію $(\Phi x+\varphi x)$.

Такимъ образомъ законъ теоретическаго разложенія ступеней, прилагающійся къ функціямъ суммаціи, дѣйствительно есть основной законъ всей Теоріи ступеней, прямой и обратной, какъ это и должно быть въ силу самой природы этого алгоріема, какъ состоящаго, по приведенной выше его метафизической дедукціи, въ систематическомъ вліяніи градуаціи на происхожденіе количествъ, въ которыхъ господствуетъ суммація.

Перейдемъ теперь къ опредѣленію этого основнаго закона. На основаніи общихъ выраженій (δ) получится

$$\gamma_\mu(Fx+fx)=\frac{\Delta^\mu L\{F(x+\mu\xi)+f(x+\mu\xi)\}}{L(Fx+fx)}=\frac{\Delta^\mu L(F_\mu+f_\mu)}{L(F_0+f_0)}$$

если обозначать вообще функціи $F(x+\tilde{\omega}\xi)$ и $f(x+\tilde{\omega}\xi)$ черезъ $F_{\tilde{\omega}}$ и $f_{\tilde{\omega}}$. Сверхъ того

$$\Delta^{\mu} L(F_{\mu}+f_{\mu})=\Delta^{\mu}\int\frac{dF_{\mu}+df_{\mu}}{F_{\mu}+f_{\mu}}=\Delta^{\mu}d^{-1}\Omega_{\mu}(dF_{\mu}+df_{\mu}),$$

если положить $\Omega_{\mu}=(F_{\mu}+f_{\mu})^{-1}$. Но при обозначеніи символами Δ^{μ}_{ξ}, Δ^{ν}_{ζ} разностей порядка μ и ν, взятыхъ соотвѣтственно по отношенію къ приращеніямъ ξ и ζ, всегда найдется для какой нибудь функціи φx тождество

$$\Delta^{\nu}_{\zeta}(\Delta^{\mu}_{\xi}\varphi x)=\Delta^{\mu}_{\xi}(\Delta^{\nu}_{\zeta}\varphi x)$$

независимо отъ того будутъ ли указатели μ и ν положительными или отрицательными, а приращенія ξ и ζ конечцыми или безконечномалыми. Въ самомъ дѣлѣ, по выраженію (a) образованія разностей, получится

$$\Delta^{\mu}_{\xi}\varphi x=A_{\tilde{\omega}}(-1)^{\tilde{\omega}}\frac{\mu^{\tilde{\omega}\,|\,-1}}{1^{\tilde{\omega}\,|\,1}}\cdot\varphi(x-\tilde{\omega}\xi)$$

$$\Delta^{\nu}_{\zeta}\varphi x=A_{\pi}(-1)^{\pi}\frac{\nu^{\pi\,|\,-1}}{1^{\pi\,|\,1}}\cdot\varphi(x-\pi\zeta).$$

если черезъ $A_{\tilde{\omega}}$, A_{π} обозначить совокупности членовъ, соотвѣтствующихъ взаимно всѣмъ цѣлымъ значеніямъ $\tilde{\omega}$ и π. Взявъ же разности Δ^{ν}_{ζ} перваго изъ этихъ двухъ послѣднихъ выраженій и разность Δ^{μ}_{ξ} втораго, найдемъ

$$\Delta^{\nu}_{\zeta}(\Delta^{\mu}_{\xi})=\varphi x A_{\tilde{\omega}}(-1)^{\tilde{\omega}}\frac{\mu^{\tilde{\omega}\,|\,-1}}{1^{\tilde{\omega}\,|\,1}}\cdot A_{\pi}(-1)^{\pi}\frac{\nu^{\pi\,|\,-1}}{1^{\pi\,|\,1}}\cdot\varphi(x-\tilde{\omega}\xi-\pi\zeta),$$

$$\Delta^{\mu}_{\xi}(\Delta^{\nu}_{\zeta}\varphi x)=A_{\pi}(-1)^{\pi}\frac{\nu^{\pi\,|\,-1}}{1^{\pi\,|\,1}}\cdot A_{\tilde{\omega}}(-1)^{\tilde{\omega}}\frac{\mu^{\tilde{\omega}\,|\,-1}}{1^{\tilde{\omega}\,|\,1}}\cdot\varphi(x-\pi\zeta-\tilde{\omega}\xi),$$

и слѣдовательно

$$\Delta^{\nu}_{\zeta}(\Delta^{\mu}_{\xi}\varphi)=\Delta^{\mu}_{\xi}(\Delta^{\nu}_{\zeta}\varphi x).$$

Итакъ оказывается, что

$$\Delta^{\mu} L(F_{\mu}f+_{\mu})=\Delta^{\mu}d^{-1}\Omega_{\mu}(dF_{\mu}+df_{\mu})=d^{-1}\Delta^{\mu}\Omega_{\mu}(dF_{\mu}+df_{\mu}),$$

при чемъ разность Δ^{μ} отъ произведенія $\Omega_{\mu}.(dF_{\mu}+df_{\mu})$ можетъ

быть разложена по биному разностей (*c*) или по основному закону разностей. Но, чтобы сдѣлать это выраженіе болѣе простымъ, слѣдуетъ прежде упростить выраженіе самого бинома. Для этого достаточно принять во вниманіе, что, дѣлая

$$(\Delta^\mu fx)_\nu = (-1)^\nu \{\Delta^\mu fx - \frac{\nu}{1}\cdot\Delta^{\mu-1}fx + \frac{\nu}{1}\cdot\frac{\nu-1}{2}\cdot\Delta^{\mu-2}fx - \text{etc.}\},$$

гдѣ ν представляетъ какое-нибудь цѣлое число или нуль, можно получить, какъ это было выведено раніе Вронскимъ, общее выраженіе

$$(\Delta^{\mu+1}fx)_{\nu+1} = (\Delta^\mu f(x-\xi))_\nu,$$

въ силу котораго

$$(\Delta^\mu fx)_\nu = (\Delta^{\mu-1}f(x-\xi))_{\nu-1} = (\Delta^{\mu-2}f(x-2\xi))_{\nu-2}$$
$$= (\Delta^{\mu-3}f(x-3\xi))_{\nu-3} = \cdots = (\Delta^{\mu-\nu}f(x-\nu\xi))_0 = \Delta^{\mu-\nu}f(x-\nu\xi).$$

Такимъ образомъ получаются выраженія, подстановка которыхъ въ общую формулу (*c*) бинома разностей приводитъ ее къ слѣдующему болѣе простому виду

$$\Delta^\mu(Fx\,.\,fx) = Fx\,.\,\Delta^\mu fx + \frac{\mu}{1}\cdot\Delta Fx\,.\,\Delta^{\mu-1}f(x-\xi) + \frac{\mu}{1}\cdot\frac{\mu-1}{2}\times \qquad (c')$$
$$\times\Delta^2 Fx\,.\,\Delta^{\mu-2}f(x-2\xi) + \frac{\mu}{1}\cdot\frac{\mu-1}{2}\cdot\frac{\mu-2}{3}\cdot\Delta^3 Fx\,.\,\Delta^{\mu-3}f(x-3\xi) + \text{etc.}$$

Прилагая затѣмъ этотъ болѣе простой видъ бинома разностей къ занимающему насъ произведенію $\Omega_\mu\,.\,(dF_\mu + df_\mu)$, найдемъ

$$\Delta^\mu L(F_\mu + f_\mu) = d^{-1}\{\Omega_\mu\,.\,(d\Delta^\mu F_\mu + d\Delta^\mu f_\mu) + \frac{\mu}{1}\times$$
$$\times\Delta\Omega_\mu\,.\,(d\Delta^{\mu-1}F_{\mu-1} + d\Delta^{\mu-1}f_{\mu-1}) + \frac{\mu}{1}\cdot\frac{\mu-1}{2}\times$$
$$\times\Delta^2\Omega_\mu\,.\,(d\Delta^{\mu-1}F_{\mu-2} + d\Delta^{\mu-2}f_{\mu-2}) + \text{etc.}$$

Кромѣ того въ силу общихъ выраженій (δ) будемъ имѣть еще слѣдующія имъ взаимныя

$$\Delta^\mu\psi x = \psi(x-\mu\xi)\,.\,\gamma_\mu e^{\psi(x-\mu\xi)}\,,\quad d^\mu\psi x = \psi x\,.\,g_\mu e^{\psi x}\,.\,.\,.\,. \qquad (\varepsilon)$$

гдѣ ψ означаетъ какую-нибудь функцію. Пользуясь послѣдними, можно въ предыдущемъ выраженіи $\Delta^\mu L(F_\mu + f_\mu)$ замѣнить разности функцій F и f ихъ ступенями, результатомъ чего будетъ слѣдующій окончательный видъ этого выраженія

$$\gamma_\mu(Fx+fx)=\frac{1}{L(Fx+fx)}\cdot d^{-1}\{d(Fx\,.\,\gamma_\mu e^{Fx}+fx\,.\,\gamma_\mu e^{fx})\times$$
$$\times d^0(F(x+\mu\xi)+f(x+\mu\xi)^{-1}$$
$$+\frac{\mu}{1}\cdot d(Fx.\,\gamma_{\mu-1}e^{Fx}+fx\,.\,\gamma_{\mu-1}e^{fx})\times$$
$$\times\, d^1(F(x+\mu\xi)+f(x+\mu\xi))^{-1}$$
$$+\frac{\mu}{1}\cdot\frac{\mu-1}{2}\cdot d(Fx\,.\,\gamma_{\mu-2}e^{Fx}+fx\,.\,\gamma_{\mu-2}e^{fx})\times$$
$$\times\, d^2(Fx(+\mu\xi)+f(x+\mu\xi)^{-1}$$
$$+\text{etc., etc.}\}.$$

Въ этомъ и заключается основной законъ всей Теоріи ступеней, какъ прямой, такъ и обратной

Въ случаѣ ступенекъ выведенный основной законъ получаетъ значительно болѣе простое выраженіе главнымъ образомъ вслѣдствіе того, что входящія въ него разности и дифференціалы совершенно устраняются, и законъ оказывается выраженнымъ только въ ступенькахъ двухъ функцій Fx и fx. Вотъ, въ самомъ дѣлѣ, это выраженіе, если принять $\Omega=(Fx+fx)^{-1}$,

$$g_\mu(Fx+fx)=\frac{d^\mu L(Fx+fx)}{L(Fx+fx)}=\frac{d^{\mu-1}\Omega\,.\,(dFx+dfx)}{L(Fx+fx)}.$$

Если-же разложить произведеніе $\Omega\,.\,(dFx+dfx)$ по биному дифференціаловъ ((e) и (f)) и вставить на основаніи выраженій (ε) вмѣсто дифференціаловъ ступеньки, то получится

$$g_\mu(Fx+fx)=\frac{\Omega}{L(Fx+fx)}\cdot\{g_0e^{\Omega}.(Fx\,.\,g_\mu e^{Fx}+fx\,.\,g_\mu e^{fx})$$
$$+\frac{\mu-1}{1}\cdot g_1e^{\Omega}.(Fx\,.\,g_{\mu-1}e^{Fx}+fx\,.\,g_{\mu-1}e^{fx})$$
$$+\frac{\mu-1}{1}\cdot\frac{\mu-2}{2}\cdot g_2e^{\Omega}.(Fx\,.\,g_{\mu-2}e^{Fx}+fx\,.\,g_{\mu-2}e^{fx})+\cdots\}$$

Эта формула и представляетъ основной законъ всей Теоріи ступенекъ прямой и обратной.

Какъ извѣстно изъ природы алгоритма ступеней и было доказано выше, законъ теоретическаго разложенія функцій суммаціи по ступенямъ, составляющій основной законъ всей Теоріи ступеней, долженъ необходимымъ образомъ обнимать и подобныя-же разложенія функцій градуаціи. Здѣсь необходимо замѣтить, что эти послѣднія разложенія подчиняются, кромѣ того, и еще очень простому часть

ному закону, непосредственно вытекающему изъ общихъ формулъ (δ) образованія ступеней посредствомъ разностей. Пусть $(Fx)^{fx}$ есть общая функція градуаціи. Тогда по первой изъ формулъ (δ)

$$\gamma_\mu Fx^{fx} = \frac{\Delta^\mu LF(x+\mu\xi)^{f(x+\mu\xi)}}{LFx^{fx}} = \frac{\Delta^\mu f(x+\mu\xi)}{fx} \cdot \frac{LF(x+\mu\xi)}{LFx}$$

или, если разность Δ^μ разложить по биному разностей (ε) и замѣнить на основаніи первой изъ общихъ формулъ (ε) разности ступенями,

$$\gamma_\mu Fx^{fx} = \frac{1}{fx} \cdot \{f(x+\mu-0\,.\,\xi) \,.\, \gamma_0 e^{f(x+\mu-0\,.\,\xi)} \,.\, \gamma_\mu Fx$$

$$(\delta) \ldots + \frac{\mu}{1} \cdot f(x+\mu-1\,.\,\xi) \,.\, \gamma_1 e^{f(x+\mu-1\,.\,\xi)} \,.\, \gamma_{\mu-1} Fx$$

$$+ \frac{\mu}{1} \cdot \frac{\mu-1}{2} \cdot f(x+\mu-2\,.\,\xi) \,.\, \gamma_2 e^{f(x+\mu-2\,.\,\xi)} \,.\, \gamma_{\mu-2} Fx + \ldots \}$$

Въ случаѣ ступенекъ это выраженіе дѣлается еще болѣе простымъ, принимая видъ . . . . (ϑ)

$$g_\mu Fx^{fx} = g_0 e^{fx} \,.\, g\ Fx + \frac{\mu}{1} \cdot g_1 e^{fx} \,.\, g_{\mu-1} Fx +$$

$$+ \frac{\mu}{1} \,.\, \frac{\mu-1}{2} \cdot g_2 e^{fx}\, g_{\mu-2} Fx + \ldots .$$

Кромѣ простоты этихъ обоихъ выраженій слѣдуетъ отмѣтить еще представляемую ими, и особенно вторымъ, полную аналогію съ биномомъ Ньютона. Обращаясь къ биному разностей и въ частности дифференціаловъ, можно открыть здѣсь весьма замѣчательное явленіе, состоящее въ томъ, что биномы, образованные соотвѣтственно тремя первоначальными алгориѳмическими функціями, суммаціей, воспроизведеніемъ и градуаціей, могутъ быть помощью алгориѳмовъ степеней, разностей и ступеней разложены по одной и той-же формѣ. Вотъ эти замѣчательныя разложенія.

$$(Fx+fx)^\mu = fx^0 \,.\, Fx^\mu + \frac{\mu}{1} \cdot fx^1 \,.\, Fx^{\mu-1} + \frac{\mu}{1} \cdot \frac{\mu-1}{2} \cdot fx^2 \,.\, Fx^{\mu-2} + \ldots$$

$$d^\mu (Fx \,.\, fx) = d^0 fx \ d^\mu Fx + \frac{\mu}{1} \cdot d^1 fx \,.\, d^{\mu-1} Fx + \frac{\mu}{1} \cdot \frac{\mu-1}{2} \cdot d^2 fx \,.\, d^{\mu-2} Fx + \ldots$$

$$g_\mu (Fx)^{fx} = g_0 e^{fx} \,.\, g_\mu Fx + \frac{\mu}{1} \cdot g_1 e^{fx} \,.\, g_{\mu-1} Fx + \frac{\mu}{1} \cdot \frac{\mu-1}{2} \cdot g_2 e^{fx}\, g_{\mu-2} Fx + \ldots$$

Въ заключеніе своего изложенія Теоріи ступеней Вронскій сравниваетъ общія выраженія (δ) и (ε). Всѣ они, говоритъ онъ, «оче-

видно образуютъ связь между алгориѳмомъ ступеней и алгориѳмомъ разностей. Два первыя служатъ для перехода Исчисленія ступеней и ступенекъ въ Исчисленіе разностей и дифференціаловъ; соотвѣтственно два послѣдніе служатъ для перехода Исчисленія разностей и дифференціаловъ въ Исчисленіе ступеней и ступенекъ. Но изъ этого никакъ не слѣдуетъ, что одно изъ этихъ исчисленій зависитъ или происходитъ отъ другаго Будучи основаны на независимыхъ и имѣющихъ одинаково высокое начало (происхожденіе) интеллектуальныхъ законахъ, они существуютъ, то и другое, абсолютно. Также они имѣютъ каждое и свои особые законы. Что же касается пользы или приложеній общаго алгориома ступеней, то говорить здѣсь о нихъ не мѣсто, такъ какъ это не касается составляющей главный предметъ настоящаго изложенія философской Архитектоники, которая должна заниматься только вопросомъ о существованіи этого алгориома, какъ *составной и существенной* части Алгориоміи. Наконецъ, чтобы составить себѣ понятіе о присущей этимъ философскимъ дедукціямъ степени достовѣрности, достаточно замѣтить, что Исчисленіе ступеней и ступенекъ есть результатъ этихъ дедукцій, полученный вполнѣ a priori, а не a posteriori, какъ открытіе Исчисленія разностей и дифференціаловъ, къ которому привела настоятельная нужда въ пользованіи этимъ исчисленіемъ».

Разсмотрѣніе третьей изъ названныхъ выше теорій, создаваемыхъ систематическою различностью, или *Теоріи Чиселъ*, Вронскій начинаетъ ея дедукціей, которую считаетъ не уступающею въ легкости подобнымъ-же дедукціямъ въ предыдущемъ. «Надлежитъ замѣтить», говоритъ онъ, «что съ одной стороны алгориѳмъ суммаціи даетъ мѣсто въ природѣ чиселъ *агрегаціи единицъ*, составляющей первую отличительную характеристическую черту Теоріи Чиселъ; съ другой-же стороны алгориѳмы градуаціи и воспроизведенія приводятъ въ природѣ чиселъ къ существованію *множителей*, представляющему вторую отличительную характеристическую черту той-же Теоріи. Но очевидно, что предметъ послѣдней во всемъ ея объемѣ именно и состоитъ въ систематическомъ и взаимномъ вліяніи двухъ указанныхъ сейчасъ отличительныхъ характеристическихъ чертъ природы чиселъ».

«Здѣсь нужно замѣтить», продолжаетъ онъ далѣе, «что такъ какъ въ Теоріи Чиселъ дѣло идетъ о систематическомъ и взаимномъ вліянія двухъ первоначальныхъ алгориѳмовъ, а не о частномъ ихъ взаимодѣйствіи, то это вліяніе можетъ обнаруживаться только въ числахъ уже образовавшихся по роду своего происхожденія, а не въ самомъ

этомъ происхожденіи. Отсюда слѣдуетъ, что въ этой теоріи составныя *конечныя* или *безконечно-малыя* части не могутъ быть въ происхожденіи чиселъ предметомъ особеннаго разсмотрѣнія, а потому и Теорія Чиселъ не представляетъ тѣхъ двухъ относящихся къ конечнымъ и безконечно-малымъ частямъ вѣтвей, подобныя которымъ существуютъ въ теоріяхъ разностей и ступеней. Но за то, какъ и эти послѣднія, она допускаетъ отдѣльное разсмотрѣніе *опредѣленныхъ чиселъ* и *чиселъ неопредѣленныхъ*. Въ самомъ дѣлѣ, числа или алгоріемическія количества можно разсматривать какъ данныя сами собою или непосредственно и какъ данныя другими числами или посредственно. Въ первомъ случаѣ эти количества суть необходимо опредѣленныя, во второмъ же — они неопредѣленныя по столько, по скольку зависятъ отъ значеній количествъ, которыми даются. Разсмотрѣніе въ первомъ случаѣ составляетъ предметъ *Теоріи опредѣленныхъ чиселъ*, во второмъ — предметъ *Теоріи неопредѣленныхъ чиселъ*».

Къ этой принадлежащей къ области Архитектоники математическихъ наукъ дедукціи Теоріи Чиселъ Вронскій «прибавляетъ нѣсколько философскихъ замѣчаній относительно самой этой теоріи». На первомъ мѣстѣ, какъ и въ двухъ предыдущихъ теоріяхъ, онъ ставитъ опредѣленіе концепціи или алгоріемическаго выраженія предмета разсматриваемой теоріи. Пусть μ будетъ данное число. Тогда если только это возможно, его троякое происхожденіе по тремъ первоначальнымъ алгоріемамъ: суммаціи, воспроизведенію и градуаціи выразится такъ

$$(A) \qquad \mu = P + Q,\ \mu = M \times N,\ \mu = R^S.$$

Но вообще видно съ самаго начала, что для того чтобы выразить систематическое и взаимное вліяніе суммаціи и градуаціи на происхожденіе числа μ, находящееся согласно съ предположеніями (A) подъ господствомъ того и другаго изъ этихъ алгоріемовъ, необходимо опредѣлить законы, связывающіе количества P, Q, M, N, R, S, входящія въ выраженія происхожденія этого числа. Нужно установить именно существующія между этими количествами отношенія, разсматривая ихъ соотвѣтственно въ отношеніи къ двумъ первоначальнымъ и противоположнымъ алгоріемамъ, суммаціи и градуаціи. Такимъ образомъ получатся слѣдующія три общія соотношенія

$$(B) \qquad P + Q = M \times N,\ M \times N = R^S,\ P + Q = R^S,$$

по поводу которыхъ слѣдуетъ замѣтить, что алгоріемъ воспроизведенія $M \times N$, участвующій въ каждомъ изъ двухъ первоначальныхъ

и противоположныхъ алгориѳмовъ, выражаетъ въ первомъ изъ этихъ соотношеній алгориѳмъ градуаціи, а во второмъ—алгориѳмъ суммаціи. Но въ частности если обратить вниманіе на природу двухъ первоначальныхъ и противоположныхъ алгориѳмовъ, суммаціи и градуаціи, и именно на представляемую ими и ихъ различающую абсолютную разнородность, то легко будетъ понять по сказанному выше, что не можетъ существовать законовъ для третьяго изъ этихъ соотношеній, какъ чисто случайнаго даже и тогда, когда оно имѣетъ мѣсто. Законы могутъ имѣть изъ этихъ трехъ общихъ соотношеній только два первыя, да и то при посредствѣ алгориѳма воспроизведенія, какъ находящагося по своему участію въ двухъ другихъ первоначальныхъ и взаимно противоположныхъ алгориѳмахъ съ ними въ связи, и потому дѣлающаго возможными общіе законы съ одной стороны между происхожденіями черезъ суммацію и черезъ воспроизведеніе, а съ другой—между происхожденіями черезъ воспроизведеніе и черезъ градуацію. Такимъ образомъ единственными возможными соотношеніями являются слѣдующія

$$(C) \qquad P+Q=M\times N,\ M\times N=R^s.$$

Таковы общія выраженія предмета занимающей насъ теоріи, то-есть общія выраженія систематическаго и взаимнаго вліянія суммаціи и градуаціи на происхожденіе чиселъ, въ которомъ господствуютъ тотъ и другой изъ этихъ алгориѳмовъ.

Затѣмъ Вронскій переходитъ къ разсмотрѣнію взаимныхъ основныхъ законовъ, которые управляютъ въ вышеприведенныхъ выраженіяхъ занимающимъ его систематическимъ и взаимнымъ вліяніемъ.

Пусть n_1, n_2, n_3,... будутъ какія-нибудь положительныя или отрицательныя, цѣлыя, дробныя или ирраціональныя числа. Происхожденіе черезъ суммацію, выраженное на этихъ числахъ, будетъ

$$n_1+n_2+n_3+\ldots\ldots+n_\omega.$$

Чтобы ввести сюда происхожденіе черезъ градуацію и слѣдовательно установить взаимное вліяніе этихъ двухъ алгориѳмовъ, нужно взять разложеніе m-ой степени предыдущаго многочлена, то-есть

$$[\,n_1+n_2+n_3+\ldots\ldots+n_\omega\,]^m.$$

Коэффиціенты $\frac{m}{1}$, $\frac{m(m-1)}{1.2}$ и проч. Вронскій замѣняетъ въ этомъ разложеніи единицей; происшедшій же такимъ образомъ родъ градуаціи обозначаетъ еврейской буквой алефъ

$$\aleph\,[\,n_1+n_2+n_3+\ldots\ldots+n_\omega\,]^m.$$

Тѣмъ-же путемъ получатся, наприм., такія выраженія

$$\aleph\,[n_1+n_2]^2=n_1{}^2+n_2{}^2+n_1n_2,\ \aleph\,[n_1+n_2]^3=n_1{}^3+n_2{}^3+n_1n_2+n_1n_3+n_2n_3,$$
$$\aleph\,[n_1+n_2+n_3]^3=n_1{}^3+n_2{}^3+n_3{}^3+n_1{}^2n_2+n_1{}^2n_3+n_2{}^2n_1+n_2{}^2n_3+n_3{}^2n_1+$$
$$n_3{}^2n_2+n_1n_2n_3,\ \text{и проч.}$$

«Эти функціи», говоритъ Вронскій, «заслуживаютъ особеннаго вниманія; онѣ составляютъ, какъ мы увидимъ далѣе, существенный элементъ принципа Теоріи чиселъ. Мы посвящаемъ имъ еврейскую букву $\aleph$ и, чтобы не вводить новыхъ именъ, назовемъ ихъ по имени этой буквы *aleph*».

Но если при какомъ-бы то ни было числѣ количествъ n_1, n_2, n_3 и т. д. сдѣлать

$$n_1+n_2+n_3+\ldots\ldots+n_\omega=N_\omega,$$

то черезъ посредство единства связи, образованной алгоритмомъ воспроизведенія, устанавливается слѣдующее общее и основное соотношеніе

$$\aleph\left[N_\omega-n_p\right]^m-\aleph\left[N_\omega-n_q\right]^m=(n_q-n_p)\times\aleph\left[N_\omega\right]^{m-1},$$

въ которомъ n_p, n_q суть какія-нибудь два изъ количествъ n_1, n_2, n_3 и т. д., а m есть цѣлое произвольное число. Чтобы имѣть алгоритмическую дедукцію этого соотношенія, слѣдуетъ прежде всего замѣтить, что въ силу закона непрерывности образованія функцій алефъ существуютъ равенства

$$\aleph\,[a_1+a_2+a_3+\ldots]^0=1,\ \aleph\,[a_1+a_2+a_3+\ldots]^{-m}=0.$$

Очевидно слѣдовательно будетъ

$$\aleph\left[N_\omega\right]^\mu=\aleph\left[N_\omega-n_\nu\right]^\mu+n_\nu\,.\,\aleph\left[N_\omega-n_\nu\right]^{\mu-1}$$
$$+n^2{}_\nu\,.\,\aleph\left[N_\omega-n_\nu\right]^{\mu-2}+\ldots,$$

гдѣ n_ν есть какое-нибудь изъ чиселъ n_1, n_2, n_3,...n_ω, а μ — цѣлое произвольное число. Такимъ образомъ будутъ имѣть

$$\aleph\left[N_\omega-n_p\right]^m=\aleph\left[N_\omega-n_p-n_r\right]^m+n_r\cdot\aleph\left[N_\omega-n_p-n_r\right]^{m-1}+n^2{}_r\times$$
$$\times\aleph\left[N_\omega-n_p-n_r\right]^{m-2}+\cdots$$
$$\aleph\left[N_\omega-n_q\right]^m=\aleph\left[N_\omega-n_q-n_r\right]^m+n_r\cdot\aleph\left[N_\omega-n_q-n_r\right]^{m-1}+n^2{}_r\times$$
$$\times\aleph\left[N_\omega-n_q-n_r\right]^{m-2}+\cdots,$$

гдѣ n_r есть какое нибудь изъ остаточныхъ чиселъ $N_\omega - n_p - n_q$, и слѣдовательно

$$\aleph\left[N_\omega - n_p\right]^m - \aleph\left[N_\omega - n_q\right]^m = n^0_r \cdot \left\{\aleph\left[N_\omega - n_p - n_r\right]^m - \aleph\left[N_\omega - n_q - n_r\right]^m\right\}$$
$$+ n \cdot \left\{\aleph\left[N_\omega - n_p - n_r\right]^{m-1} - \aleph\left[N_\omega - n_q - n_r\right]^{m-1}\right\}$$
$$+ n_r^2 \cdot \left\{\aleph\left[N_\omega - n_p - n_r\right]^{m-2} - \aleph\left[N_\omega - n_q - n_r\right]^{m-2}\right\} + \ldots$$

Но если-бы разсматриваемое общее соотношеніе было истиннымъ, то для всякаго цѣлаго числа μ имѣлось-бы

$$\aleph\left[N_\omega - n_p - n_r\right]^\mu - \aleph\left[N_\omega - n_q - n_r\right]^\mu = \left(n_q - n_p\right) \cdot \aleph\left[N_\omega - n_r\right]^{\mu-1},$$

а тогда предыдущее выраженіе представляется въ видѣ

$$\aleph\left[N_\omega - n_p\right]^m - \aleph\left[N_\omega - n_q\right]^m = \left(n_q - n_p\right) \cdot \left\{n^0_r \cdot \aleph\left[N_\omega - n_r\right]^{m-1} + n \times\right.$$
$$\left.\times \aleph\left[N_\omega - n_r\right]^{m-2} + n^2_r \cdot \aleph\left[N_\omega - n_r\right]^{m-3} + \cdots\right\} = \left(n_q - n_p\right) \cdot \aleph\left[N_\omega\right]^{m-2}.$$

Итакъ остается только доказать, что

$$\aleph\left[N_\omega - n_p - n_r\right]^\mu - \aleph\left[N_\omega - n_q - n_r\right]^\mu = \left(n_q - n_p\right) \cdot \aleph\left[N_\omega - n_r\right]^{\mu-1}.$$

Но если приступить къ этому доказательству съ помощью того же способа, то окажется необходимымъ предположить принципъ

$$\aleph\left[N_\omega - n_p - n_r - n_s\right]^\mu - \aleph\left[N_\omega - n_q - n_r - n_s\right]^\mu = \left(n_q - n_p\right) \times$$
$$\times \aleph\left[N_\omega - n_r - n_s\right]^{\mu-1},$$

гдѣ n_s есть какое-нибудь изъ остаточныхъ чиселъ $N_\omega - n_p - n_q - n_r$.

Восходя такимъ же образомъ и далѣе отъ принципа къ принципу, приходятъ наконецъ къ обнаруженію необходимости предположить слѣдующій

$$\aleph\left[N - \left(N_\omega - n_q\right)\right]^\mu - \aleph\left[N_\omega - \left(N_\omega - n_p\right)\right]^\mu = \left(n_q - n_p\right) \times$$
$$\times \aleph\left[N_\omega - \left(N_\omega - n_p - n_q\right)\right]^{\mu-1},$$

или даже

$$\aleph\left[n_q\right]^\mu - \aleph\left[n_p\right]^\mu = \left(n_q - n_p\right) \cdot \aleph\left[n_p + n_q\right]^{\mu-1},$$

что представляетъ

$$n_q^\mu - n_p^\mu = \left(n_q - n_p\right) \cdot \left\{n_p^{\mu-1} + n_p^{\mu-2} \cdot n_q + n_p^{\mu-3} \cdot n_q^2 \cdot \ldots + n_p^0 \cdot n_q^{\mu-1}\right\},$$

то-есть очевидный и извѣстный принципъ. Если же теперь возвратиться къ разсматриваемому общему предложенію, то можно будетъ заключить, что для всякаго числа количествъ n_1, n_2, n_3, . . . n_ω между ними всегда существуетъ общее соотношеніе

$$(D) \qquad \aleph\left[N_\omega - n_p\right]^m - \aleph\left[N_\omega - n_q\right]^m = (n_q - n_p) \times \aleph\left[N_\omega\right]^{m-1}$$

при какомъ бы то ни было цѣломъ числѣ m. А это очевидно и есть выраженіе помощью какихъ-нибудь численныхъ количествъ n_1, n_2, n_3, и проч. соотношенія, существующаго между происхожденіемъ черезъ суммацію и происхожденіемъ черезъ градуацію. Итакъ, вотъ какимъ оказывается для перваго изъ двухъ общихъ выраженій (C) основной законъ всей Теоріи чиселъ опредѣленныхъ или неопредѣленныхъ.

Если принять $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_\omega = N_\omega$ и взять между какими-нибудь двумя изъ этихъ чиселъ n_p и n_q разность $(n_q - n_p)$ равную 2, 3, 4, и т. д., то въ силу указаннаго основнаго закона для первоначальной формы происхожденія всѣхъ чиселъ, составленныхъ соотвѣтственно изъ множителей 2, 3, 4 и т. д., получится выраженіе

$$(E) \qquad \aleph\left[N_\omega - n_p\right]^m - \aleph\left[N_\omega - n_q\right]^m,$$

въ которомъ m есть какое-нибудь цѣлое число. Таково абсолютное начало существованія *множителей* въ цѣлыхъ числахъ.

Числа, называемыя *первыми*, суть тѣ изъ цѣлыхъ чиселъ, которыя не заключаются въ формѣ (E), при устраненіи, конечно, случая, когда разность $(n_q - n_p)$ равна единицѣ, и которыя однако же, какъ и другія, находятся въ натуральномъ рядѣ чиселъ, то-есть въ рядѣ, произведенномъ послѣдовательнымъ происхожденіемъ черезъ суммацію, то-есть послѣдовательнымъ сложеніемъ единицы. Теперь ясно какова природа этихъ чиселъ и каковъ ихъ отличительный характеръ. Видно, что характеръ этотъ есть чисто *отрицательный* и что онъ состоитъ въ исключеніи разсматриваемыхъ чиселъ изъ предѣловъ первопачальной формы (E), найденной для возможнаго происхожденія чиселъ, составленныхъ изъ множителей, за исключеніемъ не имѣющаго значенія случая, когда разность $(n_q - n_p)$ равна единицѣ. Невозможность выразить общимъ образомъ числа, называемыя *первыми*, или другими словами невозможность подчинить ихъ закону, именно и происходитъ отъ этого отрицательнаго характера или ха-

рактера исключенія. Кто можетъ быть подчиненъ законамъ и слѣдовательно получить общее выраженіе, такъ это въ качествѣ составленныхъ изъ множителей противоположныя имъ числа, отличительный характеръ которыхъ *положителенъ*. Что же касается упомянутаго сейчасъ общаго выраженія, то оно уже выведено выше изъ основнаго закона Теоріи чиселъ.

Замѣтивъ, что «здѣсь не мѣсто заниматься различными предложеніями, вытекающими изъ этого основнаго закона, какъ составляющими задачу самой Алгоріеміи», Вронскій находитъ достаточнымъ удовлетвориться выводомъ принципа, хотя и подчиненнаго, но «который въ наши дни былъ съ блестящимъ успѣхомъ введенъ въ Теорію чиселъ».

Если изслѣдовать основной законъ (*D*)

$$\aleph\left[N_\omega - n_p\right]^m - \aleph\left[N_\omega - n_q\right]^m = \left(n_q - n_p\right) \times \aleph\left[N_\omega\right]_?^{m-1}$$

гдѣ $N_\omega = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots n_\omega$, а $\aleph$ обозначаетъ разложеніе степени, въ которомъ коэффиціенты замѣнены единицей, то можно будетъ легко замѣтить *тождество образованія* двухъ количествъ $\aleph\left[N_\omega - n_p\right]^m$ и $\aleph\left[N_\omega - n_q\right]^m$, содѣйствующихъ происхожденію чиселъ, составленныхъ изъ множителя $\left(n_q - n_p\right)$. Оказывается именно, что между этими двумя количествами не существуетъ никакой разницы въ образованіи или происхожденіи. Если въ чемъ есть разница между ними, такъ это только въ частномъ опредѣленіи чиселъ n_p и n_q, которыя входятъ въ нихъ особеннымъ образомъ и даютъ разность $\left(n_q - n_p\right)$, въ точности образующую множитель, произведенный упомянутымъ содѣйствіемъ двухъ количествъ $\aleph\left[N_\omega - n_p\right]^m$ и $\aleph\left[N_\omega - n_q\right]^m$. Это тождество образованія является тѣмъ болѣе замѣчательнымъ, что въ немъ именно и заключенъ первый принципъ происхожденія чиселъ, составленныхъ изъ множителей, а слѣдовательно и принципъ всѣхъ предложеній Теоріи чиселъ, относящихся къ первому изъ двухъ общихъ выраженій (*C*) этой теоріи. Итакъ если выразить это тождество образованія двухъ числовыхъ количествъ $\aleph\left[N_\omega - n_p\right]^m$ и $\aleph\left[N_\omega - n_q\right]^m$ особеннымъ именемъ *сравненіе* (congruence) и обозначить его знакомъ $\equiv$, то получится общее сравненіе

(*F*) $$\aleph\left[N_\omega - n_p\right]^m \equiv \aleph\left[N_\omega - n_q\right]^m$$

которое и будетъ теоретическимъ принципомъ всѣхъ чиселъ, составленныхъ изъ общаго множителя $(n_q - n_p)$, а потому и принципомъ всѣхъ относящихся сюда предложеній. Относительно же двухъ чиселъ n_p и n_q, входящихъ соотвѣтственно въ оба члена сравненія, слѣдуетъ замѣтить, что отъ ихъ разности $(n_q - n_p)$ именно и зависитъ разность числоваго значенія этихъ двухъ членовъ, также какъ и то, что именно въ этой разности и состоитъ специфическій характеръ частнаго сравненія. Вронскій называетъ эту разность *модулемъ сравненія*, замѣчая при этомъ, что именно она и образуетъ тотъ множитель, изъ котораго составлено число, къ которому относится сравненіе. «Вотъ философская дедукція», продолжаетъ далѣе Вронскій, «того введеннаго Гауссомъ въ Теорію чиселъ принципа, при посредствѣ котораго онъ произвелъ въ этой теоріи столь неожиданную революцію. Можно сказать, и основаніе этого теперь понятно, что изслѣдованія, произведенныя въ разсматриваемой части Алгоріеміи ранѣе названнаго сейчасъ глубокаго геометра, какъ бы они не представлялись остроумными, были только *рапсодическими* *). Первымъ, кто далъ этому роду алгоріомическихъ изслѣдованій *систематическую* форму, является Гауссъ. Сверхъ того можно сказать, что установленіе и приложеніе принципа сравненія составляютъ лучшее изъ открытій, сдѣланныхъ за послѣднія пятьдесятъ лѣтъ въ области Чистой Математики. Въ Исторіи этой науки то и другое составляютъ эпоху, находящуюся внѣ всякаго сравненія со всѣмъ, что было сдѣлано въ указанный промежутокъ времени».

Во всемъ изложенномъ до сихъ поръ по поводу Теоріи чиселъ данъ только одинъ изъ ея основныхъ законовъ, именно соотвѣтствующій первому изъ двухъ общихъ выраженій (C) предмета этой теоріи. Остается слѣдовательно дать и тотъ, который соотвѣтствуетъ второму изъ этихъ выраженій. Но такъ какъ это послѣднее, то-есть $M \times N = R^S$, не различается отъ тождества, потому что въ немъ собственно дѣло идетъ только о множителяхъ въ одномъ и другомъ изъ двухъ членовъ этого выраженія, то не трудно понять, что оно не въ состояніи сдѣлаться предметомъ теоретическаго вопроса, а слѣдовательно и не имѣетъ никакой важности въ Теоріи чиселъ. Тѣмъ не менѣе теоретическій законъ, на которомъ оно основывается, состоитъ въ

*) Вронскій употребляетъ здѣсь эпитетъ *рапсодическій* въ его первоначальномъ дидактическомъ значеніи то-есть какъ противоположный эпитету *систематическій*.

слѣдующемъ. Но прежде чѣмъ приступить къ его изложенію Вронскій замѣчаетъ, что онъ не намѣренъ входить по его поводу ни въ какія подробности, главнымъ образомъ въ виду аналогіи, существующей между этимъ закономъ и только что разсмотрѣннымъ сейчасъ.

Пусть n_1, n_2, n_3 и пр. представляютъ какія нибудь числа положительныя или отрицательныя, цѣлыя, дробныя или ирраціональныя, и кромѣ того

$$n_1 . n_2 . n_3 . . . . . n_\omega = N_\omega .$$

Пусть также n_p и n_q два какія-нибудь изъ чиселъ n_1, n_2, n_3, и пр., при чемъ произведено дѣйствіе

$$\left(\frac{N_\omega}{n_p}\right)^m : \left(\frac{N_\omega}{n_q}\right)^m ,$$

и m есть какое-нибудь произвольное число. Тогда получится

$$(G) \qquad \left(\frac{N_\omega}{n_p}\right)^m : \left(\frac{N_\omega}{n_q}\right)^m = \left(\frac{n_q}{n_p}\right)^m ,$$

что и представляетъ основной законъ, на которомъ зиждется второе изъ двухъ общихъ выраженій (C). Здѣсь можно было-бы замѣтить тождество образованія количествъ $\left(\frac{N_\omega}{n_p}\right)^m$ и $\left(\frac{N_\omega}{n_q}\right)^m$ и затѣмъ разсматривать это тождество какъ другой родъ сравненія, такъ что если-бы захотѣли обозначить этотъ послѣдній знакомъ $|||$, то имѣли-бы

$$(H) \qquad \left(\frac{N_\omega}{n_p}\right)^m ||| \left(\frac{N_\omega}{n_q}\right)^m$$

какъ принципъ, соотвѣтствующій второму изъ общихъ выраженій (C). Модуль сравненія представляется въ этомъ случаѣ очевидно отношеніемъ $\left(\frac{n_q}{n_p}\right)$. Но это не болѣе какъ тождественныя выраженія. А потому, какъ уже было замѣчено по поводу равенства $M \times N = R^S$, къ которому они относятся, эти выраженія не въ состояніи имѣть какую-нибудь важность въ Теоріи чиселъ. «Мы изложили ихъ», прибавляетъ въ заключеніе Вронскій, «только для того, чтобы дополнить различныя возможныя въ умозрѣніи точки зрѣнія».

Этими разсужденіями заканчивается то, что Вронскій имѣлъ въ виду «сказать по поводу систематической различности, вытекающей въ природѣ алгоріемическихъ количествъ изъ соединенія двухъ первоначальныхъ и противоположныхъ алгоріемовъ, суммаціи и градуаціи, и образующей три только что разсмотрѣнныя вѣтви Алгоріеміи: Теорію разностей, Теорію ступеней и Теорію чиселъ». Затѣмъ Вронскій переходитъ ко второй части того, что онъ назвалъ *Теоріей алгоріемическаго строенія*, то-есть къ имѣющей, по вышесказанному, общимъ предметомъ *систематическую тождественность*, которая вытекаетъ въ природѣ алгоріемическихъ количествъ изъ соединенія двухъ первоначальныхъ и противоположныхъ алгоріемовъ, суммаціи и градуаціи.

Какъ уже было разсмотрѣно выше, два непосредственные производные алгоріема, нумерація и факультаты, должны представлять вслѣдствіе своего соединенія черезъ алгоріемъ воспроизведенія истинную систематическую тождественность. Но, благодаря философскимъ схемамъ, даннымъ для этихъ двухъ непосредственныхъ производныхъ алгоріемовъ, нумераціи и факультатовъ, становится очевиднымъ, что общимъ выраженіемъ разсматриваемой систематической тождественности будетъ

$$(aa) \qquad \begin{aligned} &f(a_1+x) \,.\, f(a_2+x) \,.\, f(a_3+x) \,.\,.\,.\,.\,. = \\ &A_0 \,.\, F_0x + A_1 \,.\, F_1x + A_2 \,.\, F_2x \,.\,.\,.\,.\,. \end{aligned}$$

гдѣ x обозначаетъ какое-нибудь перемѣнное количество, a_1, a_2, a_3 и пр.—постоянныя приращенія, $f(a_1+x)$, $f(a_2+x)$ и пр.—рядъ функцій, образованныхъ алгоріемомъ факультатовъ, и наконецъ F_0x, F_1x, F_2x и пр.—рядъ функцій, образованныхъ вмѣстѣ съ постоянными количествами A_0, A_1, A_2 и пр. алгоріемомъ нумераціи.

Не трудно видѣть, однако, что для того, чтобы подняться до принципа этой тождественности, нужно взять функціи, образованныя алгоріемомъ факультатовъ и обозначенныя буквою f, въ ихъ наиболѣе простомъ видѣ, то-есть въ состояніи простыхъ количествъ

$$(a_1+x),\ (a_2+x),\ (a_3+x),\ \text{и пр.};$$

потому что всякая сложная функція f сама представляетъ предметъ разсматриваемой систематической тождественности. Итакъ для этой послѣдней, разсматриваемой въ своемъ принципѣ, получится въ качествѣ общаго выраженіе

$$(bb) \qquad \begin{aligned} &(a_1+x)\,(a_2+x)\,(a_3+x)\,.\,.\,.\,. = \\ &A_0 \,.\, F_0x + A_1 \,.\, F_1x + A_2 \,.\, F_2x \,.\,.\,.\,.\,. \end{aligned}$$

Составляющая предметъ этого выраженія тождественность, какъ не трудно видѣть, дѣйствительно возможна, въ чемъ для данной сейчасъ философской дедукціи и состоитъ алгориѳмическое подтвержденіе возможности самой этой тождественности. Итакъ справедливо, что между двумя непосредственными производными алгориѳмами, нумераціей и факультатами, существуетъ систематическая тождественность, а слѣдовательно справедливо также и то, что законы этой тождественности, какъ независимые отъ другихъ алгориѳмическихъ отношеній, составляютъ существенную отличающуюся отъ другихъ часть Алгориѳміи вообще. Вронскій называетъ эту часть *Теоріей эквиваленцій* (Théorie des Équivalences).

Чтобы получить окончательное алгориѳмическое выраженіе предмета этой теоріи достаточно, какъ не трудно видѣть, опредѣлить въ выраженіи (bb) функціи F_0x, F_1x, F_2x и пр. Результатами этого опредѣленія будутъ

$$F_0x=x^0,\ F_1x=x,\ F_2x=x^2,\ \text{и пр.},$$

а слѣдовательно, для самаго предмета изслѣдованія общее выраженіе

(cc)
$$(a_1+x)(a_2+x)(a_3+x)\ldots\ldots(a_\omega+x)=$$
$$A_0\,.\,x^0+A_1\,.\,x+A_2\,.\,x^2\ldots\ldots\ldots+A_\omega\,.\,x^\omega.$$

Дѣйствительно, если многочленъ

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}\ldots\ldots+Mx+Nx^0$$

помножить на $(a+x)$, то получится многочленъ

$$x^{m+1}+Px^m+Qx^{m-1}+Rx^{m-2}\ldots\ldots+Zx^0,$$

въ которомъ

$$P=A+a,\ Q=B+aA,\ R=C+aB,\ \text{и пр.}$$

Затѣмъ достаточно, чтобы первый многочленъ подтверждался хотя въ одномъ случаѣ, какъ это и дѣйствительно имѣетъ мѣсто при $m=1$. Сверхъ того не только для всѣхъ количествъ a_1, a_2, a_3 и пр., входящихъ въ составляющее первый членъ общей эквиваленціи (cc) разложеніе черезъ градуацію

$$(a_1+x)(a_2+x)(a_3+x)\ldots\ldots(a_\omega+x),$$

существуетъ образующее второй членъ этой эквиваленціи разложеніе черезъ суммацію

$$A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots\ldots+A_\omega x^\omega,$$

но и взаимно то-же разложеніе черезъ градуацію существуетъ для всѣхъ количествъ A_0, A_1, A_2 и пр. разложенія черезъ суммацію. Въ самомъ дѣлѣ, если многочленъ

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots\ldots + Mx + Nx^0$$

раздѣлить на $(a+x)$ и сдѣлать

$$P = A - a,\ Q = B - aP,\ R = C - aQ,\ \text{и пр.},$$

то въ частномъ получится многочленъ

$$x^{m-1} + Px^{m-2} + Qx^{m-3} + Rx^{m-4} \ldots\ldots + Zx^0,$$

а въ остаткѣ выраженіе

$$(-1)^m . (a^m - Aa^{m-1} + Ba^{m-2} - Ca^{m-3} \ldots\ldots (-1)^m Na$$

Но не трудно доказать, что всегда существуетъ для a такое значеніе, при которомъ

$$a^m - Aa^{m-1} + Ba^{m-2} \ldots\ldots (-1)^m Na^0 = 0.$$

Достаточно, слѣдовательно, по тому же способу разложить частное, полученное отъ этого перваго дѣленія, а затѣмъ также и частныя, доставленныя слѣдующими дѣленіями, чтобы увѣриться, что всегда существуетъ разложеніе черезъ градуацію, эквивалентное разложенію черезъ суммацію, каково-бы ни было это послѣднее.

Итакъ предметомъ теоріи эквиваленцій дѣйствительно оказывается общее выраженіе *(cc)*

$$(a_1 + x)(a_2 + x)(a_3 + x) \ldots\ldots (a_\omega + x) =$$
$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 \ldots\ldots\ldots + A_\omega x^\omega,$$

имѣющее мѣсто съ одной стороны для всѣхъ количествъ a_1, a_2, a_3 и пр. разложенія черезъ градуацію и взаимно съ другой стороны для всѣхъ количествъ A_0, A_1, A_2 и пр. разложенія черезъ суммацію.

Разсмотрѣвъ различныя отрасли, составляющія Теорію алгоріѳмическаго строенія и имѣющія предметомъ, по данной выше дедукціи, въ систематическомъ соединеніи элементарныхъ алгоріѳмовъ *трансцендентальное* единство двухъ первоначальныхъ алгоріѳмовъ суммаціи и градуаціи, Вронскій переходитъ къ Теоріи алгоріѳмическаго сравненія, которая, согласно той же дедукціи, имѣетъ въ томъ-же систематическомъ соединеніи предметомъ *логическое* единство двухъ

первоначальныхъ алгориѳмовъ, суммаціи и градуаціи. «Мы видѣли вообще», говоритъ онъ, «что систематическое соединеніе двухъ интеллектуальныхъ функцій, имѣющихъ предметомъ два первоначальные и противоположные алгориѳма, вводитъ въ алгориѳмическія количества новыя опредѣленія ихъ природы, новые теоретическіе законы, и въ частности, что съ трансцендентальной точки зрѣнія, которая и принадлежитъ теоріи алгориѳмическаго строенія, то-же соединеніе оказываетъ вліяніе на *самое происхожденіе* количествъ. Мы видѣли также, что и съ логической точки зрѣнія, составляющей точку зрѣнія теоріи алгориѳмическаго сравненія, это соединеніе дѣйствуетъ на *взаимное отношеніе* тѣхъ-же количествъ. Разсматриваемое въ самомъ себѣ это послѣднее состоитъ очевидно въ *равенствѣ* или *неравенствѣ* алгориѳмическихъ количествъ. Но при такой простотѣ едва-ли бы съумѣли получить различные законы самихъ аксіомъ Алгориѳміи. Присоединяя-же сюда, какъ есть и на самомъ дѣлѣ, обстоятельство систематическаго соединенія двухъ первоначальныхъ и противоположныхъ алгориѳмовъ, убѣждаются, что логическое единство этого отношенія подчинено частнымъ зависимымъ отъ этихъ алгориѳмовъ законамъ. Эти законы и составляютъ предметъ *Теоріи алгориѳмическаго сравненія*, и потому сама эта Теорія составляетъ существенную, отличающуюся отъ другихъ, часть Алгориѳміи».

«Въ силу этой дедукціи, равенство и неравенство алгориѳмическихъ количествъ получаютъ отъ разсматриваемаго систематическаго соединенія частный характеръ, дѣлающій ихъ соотвѣтственно *уравненіемъ* и *неуравненіемъ*. Въ этомъ собственно и состоятъ законы, которымъ подчинены уравненія и неуравненія, если только эти составляющія предметъ теоріи алгориѳмическаго сравненія отношенія разсматривать по приведенному способу ихъ опредѣленія. Сверхъ того, разсматриваемая вообще, эта теорія обнимаетъ двѣ вѣтви: *Теорію уравненій* и *Теорію неуравненій*. Но замѣтивъ, въ частности, что неуравненія возможны только черезъ уравненія или лучше, что они имѣютъ опредѣленное значеніе только при посредствѣ отношеній уравненія, станетъ понятно, что вся теорія алгориѳмическаго сравненія сводится къ *Теоріи уравненій*».

«Нужно еще замѣтить, что законы, составляющіе теорію алгориѳмическаго сравненія, суть только законы *производные*, а не *первоначальные*, такъ какъ принадлежатъ логической, а не трансцендентальной, точкѣ зрѣнія систематическаго соединенія элементарныхъ алгориѳмовъ, являющагося въ нихъ съ частнымъ характеромъ. Разсматриваемое съ трансцендентальной точки зрѣнія это систематиче-

ское соединеніе вводитъ въ алгоріомическія количества новыя *опредѣленія* ихъ природы; разсматриваемое же съ логической точки зрѣнія, оно можетъ установить только *отношеніе* между этими опредѣленіями природы алгоріомическихъ количествъ. Но законы этого отношенія необходимо производятся изъ законовъ, которымъ слѣдуютъ опредѣленія, между которыми установилось отношеніе. Такимъ образомъ законы, составляющіе предметъ теоріи алгоріомическаго сравненія, суть только производные законы; произведены же они именно отъ законовъ, составляющихъ предметъ разсмотрѣнной нами теоріи алгоріомическаго строенія».

«Изъ этого непосредственно слѣдуетъ, что различныя вѣтви теоріи алгоріомическаго сравненія или общей теоріи уравненій тѣ же, что и вѣтви теоріи алгоріомическаго строенія. Кромѣ того, это утвержденіе ясно и само по себѣ. Въ самомъ дѣлѣ, соединеніе элементарныхъ алгоріомовъ, разсматриваемое съ какой угодно точки зрѣнія, можетъ быть отнесено только къ систематической тождественности или къ систематической различности этихъ алгоріомовъ, и слѣдовательно въ состояніи дать мѣсто только вѣтвямъ, соотвѣтствующимъ или этой тождественности или этой различности. Итакъ, частныя вѣтви общей теоріи уравненій суть: 1°. *теорія уравненій эквиваленціи*, соотвѣтствующая систематической тождественности между двумя непосредственными производными алгоріомами—нумераціей и факультатами; 2°. *теорія уравненій разностей*, соотвѣтствующая первому случаю систематической различности между двумя первоначальными противоположными алгоріомами то есть вліянію суммаціи на происхожденіе количествъ, гдѣ господствуетъ градуація; 3°. *теорія уравненій ступеней*, соотвѣтствующая второму случаю систематической различности между двумя первоначальными противоположными алгоріомами, то есть вліянію градуаціи на происхожденіе количествъ, въ которыхъ господствуетъ суммація; наконецъ 4°. *теорія уравненій сравненія* (congruence), соотвѣтствующая третьему и послѣднему случаю систематической различности между двумя первоначальными противоположными алгоріомами, то-есть взаимному вліянію суммаціи и градуаціи на происхожденіе количествъ, гдѣ господствуютъ тотъ и другой изъ этихъ алгоріомовъ».

Въ заключеніе нашего очерка системы Философіи математики Вронскаго, очерка, составленнаго по его Introduction à la philosophie des mathématiques, намъ остается разсмотрѣть дедукцію различныхъ частей Техніи алгоріоміи. Но прежде остановимся на точномъ опредѣленіи ея предмета.

Въ *Теоріи* происхожденіе или построеніе количествъ дается непосредственно простыми или сложными алгоріемами, которые позволяютъ узнать только *природу* этихъ количествъ, а не ихъ численное опредѣленіе или сравнительное съ единицей *значеніе*. Такое значеніе можетъ быть дано Теоріей только случайно и притомъ единственно въ случаѣ, когда дѣйствія, соединеніе которыхъ составляетъ *природу* количества и производитъ послѣднее, могутъ исполняться приложеніемъ первоначальныхъ процессовъ или шести элементарныхъ правилъ науки (сложенія, умноженія, возвышенія въ степень и обратныхъ имъ процессовъ). Пусть взято, наприм., количество m, происхожденіе котораго указывается выраженіемъ $m=\sqrt{5}$. Происхожденіе это очевидно позволяетъ намъ непосредственно познать только *природу* или первоначальное построеніе количества m. Опредѣлить же его *численное значеніе* $m=2{,}23606\ldots$ мы можемъ, прилагая къ нему процессъ *извлеченія корня*. Но во всѣхъ случаяхъ, гдѣ такое приложеніе первоначальныхъ процессовъ или правилъ не можетъ быть выполнено непосредственнымъ образомъ, также не можетъ быть открыто случайно и *значеніе* количествъ, хотя опредѣленіе послѣдняго является настоятельно необходимымъ для самой возможности науки. Впрочемъ когда какой-нибудь частный родъ происхожденія или какая-нибудь частная функція даны, тогда становится возможнымъ путемъ приложенія общихъ законовъ систематическаго происхожденія количествъ получить частные законы элементарнаго происхожденія функціи, которые въ свою очередь могутъ служить для опредѣленія *первоначальной природы* функціи, а слѣдовательно и для опредѣленія ея *значенія*. Но имѣть общій законъ такое теоретическое опредѣленіе не можетъ, почему и всякая частная функція необходимо требуетъ и частнаго опредѣленія, откуда слѣдуетъ, что при неопредѣленности числа функцій или различныхъ родовъ, въ которыхъ происхожденіе количествъ можетъ быть достигнуто комбинаціей простыхъ или сложныхъ алгоріемовъ, это опредѣленіе само становится неопредѣленнымъ и слѣдовательно во всемъ объемѣ систематическаго происхожденія количествъ *невозможнымъ*. Такимъ образомъ является необходимая задача *вторичнаго* происхожденія, отличающагося отъ *первоначальнаго* происхожденія, къ которому приводятъ простые или сложные алгоріомы элементарной теоріи. Но вторичное происхожденіе, какъ долженствующее обнимать численное опредѣленіе количествъ во всѣхъ случаяхъ, должно быть *универсальнымъ*, то есть способнымъ прилагаться безразлично ко всѣмъ количествамъ. Общимъ предметомъ Техніи алгоріеміи яв-

ляется поэтому *универсальныя происхожденіе* и *сравненіе* количествъ.

Прежде чѣмъ перейти къ разысканію алгоріѳмовъ, способныхъ приводить къ универсальному происхожденію, слѣдуетъ указать на характеристическое различіе, съ самаго начала отличающее ихъ отъ теоретическихъ алгоріомовъ. Послѣдніе, какъ образующіе процессы построенія, являются такъ сказать тождественными съ самими производимыми ими количествами, между тѣмъ какъ первые, имѣя задачей образованіе процессовъ опредѣленія величины или, что то же самое, вычисленія, не зависятъ отъ вычисляемыхъ ими количествъ. Словомъ теоретическіе алгоріѳмы составляютъ часть самой природы количествъ, техническіе же независимы отъ этой природы и относятся очевидно къ достиженію *конца*, *цѣли*, чуждыхъ природѣ количествъ. Этотъ конецъ или эта являющаяся въ процессахъ *Техніи* цѣль, вполнѣ отдѣляя ее отъ *Теоріи*, не позволяетъ смѣшивать другъ съ другомъ, какъ это обыкновенно дѣлается, обѣ эти столь различныя вѣтви науки. Теорія есть собственно умозрительная часть алгоріоміи, тогда какъ Технія составляетъ практическую часть послѣдней или лучше сказать является въ ней съ характеромъ дѣйствія, представляетъ *искусство* (τέχνη).

Составляющее главный предметъ Техніи алгоріоміи вторичное происхожденіе, какъ долженствующее представлять численное опредѣленіе количествъ, можетъ очевидно имѣть мѣсто только черезъ произвольное употребленіе первоначальныхъ элементарныхъ алгоріѳмовъ, потому что въ концѣ концовъ численное опредѣленіе количества приводится къ осуществленію данныхъ этими алгоріомами первоначальныхъ операцій. Но два непосредственные производные алгоріема, *нумерація* и *факультаты*, даютъ намъ возможность найти происхожденіе какого-нибудь количества при посредствѣ тѣхъ произвольныхъ предѣловъ, къ которымъ они способны. Такъ, чтобы найти требуемое вторичное происхожденіе, нужно быть въ состояніи съ помощью произвольной функціи преобразовать посредствомъ первоначальныхъ алгоріѳмовъ всякую данную посредственно или непосредственно теоретическую функцію въ функціи нумераціи или факультатовъ. Упомянутая произвольная функція, разсматриваемая во всей своей общности, будетъ количествомъ, называемымъ въ приложеніяхъ ариѳметики, *мѣрой* или *единицей численнаго опредѣленія* количествъ.

Но преобразованіе всякой теоретической функціи въ функціи нумераціи или факультатовъ, какъ достигаемое употребленіемъ про-

извольной мѣры, по которой эта функція должна быть вычислена, требуетъ очевидно опредѣленія отношенія, существующаго между этой функціей и функціей произвольной, служащей мѣрою, то есть требуетъ опредѣленія геометрическаго отношенія этихъ функцій, потому что на этомъ отношеніи именно и основывается вообще ариѳметическое дѣйствіе, называемое *измѣреніемъ*. Сверхъ того такъ какъ составляющее предметъ разсматриваемаго преобразованія вторичное происхожденіе всегда достигается употребленіемъ первоначальныхъ алгоритмовъ, то это преобразованіе должно быть подчинено *формѣ* употребляемаго алгоритма. Если-же при этомъ условіи обозначить какую-нибудь функцію перемѣннаго x черезъ Fx, а произвольную функцію, служащую мѣрой, или въ которую функція Fx должна быть преобразована, черезъ φx, то дѣйствіе преобразованія въ функціи нумераціи или факультатовъ представится соотвѣтственно въ *формулѣ*

$$Fx \quad A+\Phi x \quad \text{и} \quad Fx=A\times\Phi x,$$

гдѣ A есть количество, зависящее или независящее отъ x, а Φx— количество, зависящее отъ мѣры φx.

Займемся сперва функціей нумераціи. Для того чтобы вообще можно было разложить Fx на два такихъ количества A и Φx, чтобы Φx была во всѣхъ случаяхъ сравнима съ мѣрою φx, нужно необходимо, чтобы Φx дѣлалось нулемъ, когда въ нуль обращается φx, иначе отношеніе этихъ двухъ функцій не можетъ сдѣлаться предметомъ общаго опредѣленія. Такимъ образомъ количество A должно быть таково, чтобы $Fx=A$, когда перемѣнное x получаетъ значеніе, дѣлающее $\varphi x=0$, а слѣдовательно также и $\Phi x=0$, изъ чего слѣдуетъ, что это количество не зависитъ отъ x.

Отношеніе количествъ Φx и φx будетъ

$$\frac{\Phi x}{\varphi x} \quad \text{или} \quad \frac{\varphi x}{\Phi x}.$$

Если же начать разсмотрѣніе съ прямаго отношенія $\frac{\Phi x}{\varphi x}$, то при обозначеніи послѣдняго черезъ F_1x получится

$$\frac{\Phi x}{\varphi x}=F_1x.$$

Долженствующая имѣть во всѣхъ случаяхъ опредѣленную величину эта функція F_1x можетъ быть подвергнута дальнѣйшему преобразованію

$$F_1x=B+\Phi_1x,$$

въ которомъ $\Phi_1 x$ есть количество всегда сравнимое съ φx, то есть обращающееся въ нуль, когда $\varphi x = 0$, а B есть количество, выражаемое въ томъ же случаѣ равенствомъ

$$F_1 x = B.$$

Если же снова выразить черезъ $F_2 x$ прямое отношеніе количествъ $\Phi_1 x$ и φx, то станетъ возможнымъ преобразовать $F_2 x$ въ

$$F_2 x = C + \Phi_2 x.$$

Послѣдовательное продолженіе такихъ разложеній приведетъ при соединеніи всѣхъ полученныхъ результатовъ къ равенствамъ

$$\begin{aligned}
F x &= A + \Phi x \\
\Phi x &= (B + \Phi_1 x) \cdot \varphi x \\
\Phi_1 x &= (C + \Phi_2 x) \cdot \varphi x \\
\Phi_2 x &= (D + \Phi_3 x) \cdot \varphi x \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots,
\end{aligned}$$

а при подстановкѣ ихъ одинъ въ другой къ равенству

$$Fx = A + B\varphi x + C(\varphi x)^2 + D(\varphi x)^3 + \cdots,$$

которое представляетъ общую форму того, что называютъ *рядами*, по крайней мѣрѣ въ томъ простомъ случаѣ, когда преобразованія совершаются при употребленіи одной и той же мѣры φx.

Но если производить тѣ же преобразованія, пользуясь обратнымъ отношеніемъ $\frac{\varphi x}{\Phi x}$, то будутъ получаться послѣдовательно равенства

$$\begin{aligned}
Fx &= A + \Phi x\,; \quad \frac{\varphi x}{\Phi x} = {}_1Fx \\
{}_1Fx &= B' + \Phi_1 x\,; \quad \frac{\varphi x}{{}_1\Phi x} = {}_2Fx \\
{}_2Fx &= C' + \Phi_2 x\,; \quad \frac{\varphi x}{{}_2\Phi x} = {}_3Fx \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots,
\end{aligned}$$

откуда при подстановкѣ другъ въ друга

$$Fx = A + \cfrac{\varphi x}{B' + \cfrac{\varphi x}{C' + \cfrac{\varphi x}{D' + \cdots}}},$$

что составляетъ общую форму того, что называется *непрерывными дробями* въ случаѣ одной и той же мѣры φx.

Такимъ образомъ, ряды и непрерывныя дроби являются двумя частными вѣтвями общаго класса техническихъ процессовъ, зависящихъ отъ алгоритма нумераціи.

Вторая изъ двухъ указанныхъ выше формъ преобразованія

$$Fx \quad A \times \Phi x$$

соотвѣтствуетъ употребленію алгоритма факультатовъ. Въ ней количество A можетъ быть дѣйствительно зависимымъ или незавасимымъ отъ перемѣннаго x, и потому преобразованія въ этомъ второмъ случаѣ существенно различаются отъ преобразованій въ первомъ, гдѣ это количество A необходимо является независимымъ отъ x, то есть количествомъ постояннымъ. Разсматриваемое въ качествѣ зависимаго отъ x количество A должно при извѣстномъ частномъ значеніи x обращаться въ нуль. То же значеніе x дѣлаетъ равною нулю также и Fx, но при условіи, что функція Φx имѣетъ конечную величину. Будучи такимъ образомъ вообще сравнимымъ съ Fx, количество A само представляетъ *мѣру* этой функціи Вслѣдствіе этого если произвольную функцію A обозначить черезъ $f_0 x$, то первое преобразованіе будетъ

$$Fx \quad f_0 x \times \Phi x,$$

слѣдующія-же за нимъ другія преобразованія представятся въ видѣ

$$\begin{aligned} \Phi x &= f_1 x \times \Phi_1 x \\ \Phi_1 x &= f_2 x \times \Phi_2 x \\ \Phi_2 x &= f_3 x \times \Phi_3 x \\ &\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

при чемъ произвольныя функціи $f_1 x$, $f_2 x$, $f_3 x$, . . . принимаются соотвѣтственно за *мѣру* функцій $\Phi_1 x$, $\Phi_2 x$, $\Phi_3 x$, ... Если затѣмъ каждое изъ этихъ преобразованій подставить въ предшествующее ему, то получится техническое происхожденіе

$$Fx = f_0 x \,.\, f_1 x \,.\, f_2 x \,\text{-}\, f_3 x \ldots .$$

съ *неопредѣленнымъ* числомъ множителей, представляющее общую форму *непрерывныхъ произведеній.*

Въ случаѣ противномъ разсмотрѣнному сейчасъ то-есть при независимости количества A отъ x преобразованіе

$$Fx = Ax \times \Phi x$$

становится, какъ не трудно видѣть, возможнымъ только черезъ употребленіе алгориѳма факультатовъ при множителяхъ независящихъ отъ перемѣннаго. Тогда получается общая форма

$$Fx = (\varphi z)_{\varphi x}^{\varphi x \mid \xi}$$

въ которой z и ξ суть два данныя количества, φz обозначаетъ опредѣленную соотвѣтственнымъ образомъ функцію отъ z, а φx есть припятая за мѣру произвольная функція x, потому что при этомъ всѣ конечные множители φz, $\varphi(z+\xi)$, $\varphi(z+2\xi)$, и пр., составляя факультатъ, являются независимыми отъ перемѣннаго x. Эта форма и есть общая форма *показательныхъ факультатовъ*.

Ряды, непрерывныя дроби, непрерывныя произведенія и показательные факультаты служатъ такимъ образомъ предметами элементарной части техніи и составляютъ четыре первоначальные технические алгориѳма. Съ помощью каждаго изъ нихъ можетъ быть найдено техническое происхожденіе или численное опредѣленіе всякой функціи. Совокупность основныхъ законовъ этихъ четырехъ алгориѳмовъ и составляетъ *элементарную часть техническаго происхожденія*.

Четыре выведенные сейчасъ первоначальные технические алгориѳма образуютъ два класса техническаго происхожденія, которые зависятъ отъ употребленія нумераціи и факультатовъ или, въ своемъ началѣ, отъ употребленія суммаціи и градуаціи. Своимъ сочетаніемъ они могутъ производить только теоретическіе алгориѳмы, такъ что въ отношеніи формы происхожденія производные технические алгориѳмы собственно не существуютъ. Однако-же если принять во вниманіе прямой или обратный процессъ, которому можно слѣдовать при опредѣленіи функціи Fx съ цѣлью нахожденія ея техническаго происхожденія, то представится особенный классъ производныхъ техническихъ алгориѳмовъ, образующій то, что обыкновенно называется *методами интерполяціи*. Въ самомъ дѣлѣ, въ ряды, въ непрерывныя дроби и въ показательные факультаты входятъ постоянныя количества, величина которыхъ выводится изъ частныхъ опредѣленій предложенной функціи Fx, численное значеніе которой эти алгориѳмы должны опредѣлить. Но разъ эти частныя опредѣленія извѣстны или по крайней мѣрѣ съ помощью данныхъ обстоятельствъ могутъ быть найдены, всегда становится возможнымъ при посредствѣ обратнаго процесса опредѣлить вообще величину Fx, къ которой употребленныя частныя опредѣленія относятся. Этотъ обратный процессъ и составляетъ предметъ *интерполяціи*.

Систематическое соединеніе элементарныхъ техническихъ алгоріѳмовъ можетъ состоять только въ ихъ общей формѣ, которая необходимо и есть первоначальная форма всей науки чиселъ. Чтобы не входить въ подробности, для которыхъ здѣсь нѣтъ мѣста, достаточно замѣтить, что общая форма рядовъ есть

$$Fx = A + B\varphi x + C\varphi x^2 + C\varphi x^3 + \ldots.$$

Въ принципѣ же она приводится къ агрегату членовъ формы

$$Fx = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \ldots$$

Подобнымъ же образомъ приводится къ агрегату членовъ той же формы и общій видъ непрерывныхъ дробей

$$Fx \cdot A + \cfrac{\varphi x}{B + \varphi x \atop C + \varphi x \atop D + \ldots.}$$

Наконецъ дѣлаются агрегатами подобныхъ же членовъ также и общія формы непрерывныхъ произведеній и показательныхъ факультатовъ, полагая, конечно, что перемноженіе множителей уже сдѣлано въ нихъ. Такимъ образомъ всѣ элементарные техническіе алгоріѳмы могутъ быть приведены къ агрегату членовъ, въ формѣ котораго слѣдовательно и заключается систематическое соединеніе этихъ алгоріѳмовъ. Другими словами, подъ той же самой формой долженъ представляться и самъ систематическій техническій алгоріѳмъ, соединяющій всѣ элементарные алгоріѳмы и обнимающій всѣ техническіе процессы.

Если обозначить черезъ Ω_0, Ω_1, Ω_2 взятыя за мѣру произвольныя функціи перемѣннаго x, которыя могутъ соединяться закономъ или не имѣть между собою никакой связи, а черезъ A_0, A_1, A_2, и пр. количества независимыя отъ x, то искомой формой систематическаго техническаго происхожденія окажется общее выраженіе

$$Fx = A_0\Omega_0 + A_1\Omega_1 + A_2\Omega_2 + A_3\Omega_3 + \ldots.$$

Абсолютная общность этого закона распространяется на всю алгоріѳмію, такъ какъ онъ обнимаетъ даже самое независимое и непосредственное приложеніе первоначальныхъ и противоположныхъ алгоріѳмовъ суммаціи и градуаціи. Открывъ этотъ законъ, Вронскій назвалъ его въ силу всего сейчасъ изложеннаго *верховнымъ или всеобщимъ закономъ (loi suprême ou universelle).*

Такъ какъ технія алгоріѳміи разсматривалась въ предыдущемъ

изложеніи только съ точки зрѣнія происхожденія количествъ, то остается разсмотрѣть ее также и съ точки зрѣнія ихъ отношенія или ихъ сравненія. Это отношеніе, какъ вообще приводящее къ *равенству* или *неравенству* количествъ, должно представляться здѣсь съ характеромъ *конца* или *цѣли*, отличающимъ технію отъ теоріи Такимъ образомъ если принимать во вниманіе только одни равенства, какъ являющіяся условіями неравенствъ, то техническое сравненіе окажется состоящимъ во *всеобщемъ составленіи равенствъ* и въ ихъ преобразованіи или рѣшеніи, то есть во *всеобщемъ рѣшеніи уравненій*. Законы этого составленія и этого рѣшенія соотвѣтственно образуютъ первые элементарную часть *техническаго сравненія*, вторые систематическую его часть. Это и есть то, что Вронскій назвалъ *алгоритмическимъ канономъ* (Canon algorithmique) и *всеобщею задачею* (problème universel).

Все изложенное резюмируется Вронскимъ въ видѣ слѣдующаго заканчивающаго его Introduction à la philosophie des mathématiques схематическаго обозрѣнія содержанія математическихъ наукъ.

Примѣчаніе. Въ этой таблицѣ *частнымъ воспроизведеніемъ вмѣстѣ съ суммаціей* (нумералы, numérales) и *частнымъ воспроизведеніемъ вмѣстѣ съ градуаціей* (факторіалы, factorielles) называются въ алгоритмахъ нумераціи

$$A_0 \,.\, F_0 x + A_1 \,.\, F_1 x + A_2 \,.\, F_2 x + \text{etc.}$$

и факультатовъ

$$\Phi_1 x \,.\, \Phi_2 x \,.\, \Phi_3 x \,.\,.\,.\,.\ \text{etc.}$$

(см. стр. 31) тѣ ихъ формы, въ которыхъ они представляются, если ихъ разсматривать въ первоначальной простотѣ. Формы эти имѣютъ соотвѣтственно слѣдующій видъ

$$A_0 x^{\mu} + A_1 x^{\mu+\nu} + A_2 x^{\mu+2\nu} + \text{etc}\,.\,.\,.\,.\,.$$
$$(x+0) \,.\, (x+\xi) \,.\, (x+2\xi) \,.\, (x+3\xi) \,.\, \text{etc}\,.\,.\,.\,.$$