Киевское Губернское Статистическое Бюро.

Р ОРЖЕНЦКИЙ

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН И ВЫЧИСЛЕНИЙ



Державне Видавництво Київ—1921

9

„Пров 38“

Р В Ц—3 № 650—3000

Библиотека
коммунистической
академии.
4
7

КИЕВ
7-я Государственная типография, Б.-Житомирская № 20
1921

О статистическом методе вообще.

Понятие рода и совокупности, родовая и сводная характеристика явлений. Действительность состоит из бесчисленного множества бесконечно разнообразных явлений. Для того, чтобы правильно ориентироваться в этом бесконечном разнообразии—от чего зависит наше существование и благополучие,—необходимо познать мир явлений. Однако, разум наш может вместить и усвоить только ограниченное количество психического материала. Поэтому он прибегает к упрощению действительности, оперируя с отвлеченными обобщениями, которые в одном понятии обнимают ряд конкретных явлений. Одним из способов такого обобщения являются родовые понятия. Родовое понятие представляет собою признак или совокупность признаков, в тожественном виде присущих каждому отдельному представителю рода. Родовое понятие отвлекается, таким образом, от конкретных особенностей и индивидуальных отличий каждого единичного представителя рода. Для того, чтобы родовое понятие было целесообразным орудием познания, оно должно быть содержательным, т. е. должно в достаточной степени определять сущность охватываемых им явлений. Во многих случаях родовые понятия вполне удовлетворяют этому условию, и все наше знание сводится к характеристике явлений исключительно признаками, неизменно присущими всему роду и в то же время каждому экземпляру рода. Но иногда, даже при достаточной содержательности родового понятия, познавательный интерес идет далее родовых признаков и стремится охватить индивидуальные особенности представителей рода.

Когда в группе явлений, охватываемых родовыми признаками, мы принимаем во внимание индивидуальные особенности единичных явлений, получается новое логическое образование, которое назовем совокупностью. Образование совокупностей является абсолютно необходимым во всех тех случаях, когда родовое понятие оказывается недостаточно содержательным, тогда

как круг охватываемых им явлений богат содержанием. Таковы, например, родовые понятия „англичанин“, „крестьянин“, „фабричный рабочий“ и т. п. Хотя понятие „англичанин“ вызывает в нашем уме представление о целом ряде особенностей, характеризующих эту нацию и резко отличающих ее от других народов, но все эти особенности не укладываются в рамки родового понятия, они не являются признаками, тожественно присущими каждому экземпляру данного рода. То же следует сказать и относительно других приведенных примеров. Если круг реальных явлений богат содержанием, а родовое понятие, охватывающее эти явления, мало содержательно, то очевидно, что богатство содержания лежит в таких особенностях, которые, хотя встречаются именно в данном круге явлений, однако присущи не всем экземплярам данного рода, а только некоторым, или присущи отдельным случаям в разной величине, виде или качестве. В таких случаях для достаточного познания явлений в содержание понятия, охватывающего данный круг явлений, должны быть привлечены и индивидуальные особенности или отличия единичных случаев. Это достигается образованием понятия совокупности. Родовое понятие мы воплощенно мыслим в виде безличного носителя признаков, тожественно присущих каждому экземпляру рода, носителя, лишенного всякой индивидуальности (дуб, человек). Каждый экземпляр, входящий в об'ем рода, проходя через содержание родового понятия, обезличивается в своих индивидуальных особенностях и не прибавляет ничего нового к содержанию родового понятия. Когда же мы обращаем внимание на индивидуальные особенности отдельных экземпляров рода, эти особенности наслаиваются на безличный остов тожественных признаков, а вместе с индивидуальными различиями в содержание понятия проникает момент множественности носителей этих различий—родовое понятие превращается в понятие совокупности. Таким образом, из ряда отчасти сходных, отчасти различных, явлений мы можем образовать или родовое понятие или понятие совокупности: первое, если отвлечем от единичных явлений лишь совокупность тожественных для всех их признаков; второе, если в пределах некоторого числа явлений, охватываемых родовыми признаками, обратим внимание на те или другие индивидуальные отличия единичных случаев. Родовому понятию „человек“ отвечает совокупность „человеческий род“; последнее понятие содержит в себе момент

множественности людей и различия рас, племен, народов, возрастов и т. п.; родовому понятию „крестьянин“ отвечает понятие совокупности „крестьянство“ и т. д.

Познавательная ценность тожественных признаков и индивидуальных особенностей бывает различна для разных явлений. В одних случаях явления достаточно полно характеризуются одними родовыми признаками. Это имеет место по отношению к наиболее простым и устойчивым сторонам явления; так, химия оперирует лишь с родовыми признаками элементов. В других случаях, наряду с тожественными признаками, не менее существенную роль играют индивидуальные различия. И, наконец, индивидуальные особенности могут иметь преобладающее значение. Последнее имеет место в особенности в тех понятиях, где родовой признак применяется исключительно, как средство для об'единения в одно собирательное целое ряда индивидуально-своеобразных случаев. Таким характером обладают совокупности, нарочито создаваемые в целях статистического исследования, как-то: совокупность умерших в течение года, родившихся, совокупность преступлений и т. п.

Наряду с образованиями совокупностей на почве родовых понятий или при помощи родовых признаков, мы имеем и такие случаи, когда отдельные самостоятельные предметы сами по себе образуют одно реальное целое—собирательный об'ект. Это так называемые естественные совокупности. Таково понятие—город, население города, лес и т. п. Отличие этого рода совокупностей от ранее рассмотренных состоит в том, что в последних связь между единичными случаями имеет логический характер, тогда как в естественных совокупностях она реальна. При этом реальность связи состоит либо в том, что совокупность единичных явлений воспринимается нами, как один об'ект или процес (публика, дождь, лес,); либо в том, что отдельные предметы связаны в одно целое реально существующими между ними зависимостью или отношениями (общество). Такого рода собирательные предметы получают характер совокупностей, аналогичных ранее рассмотренным, если разнородные явления, их составляющие, логически об'единить одним или несколькими родовыми признаками. Такими признаками могут служить родовые признаки, характеризующие явления естественной совокупности, если последняя состоит из явлений в каком-либо отношении одиородных; либо признак времени или места, поскольку единичные об'екты разнород-

ны и об'единяются в собирательный предмет единством времени или места.

Во всех случаях, когда мы имеем дело с понятием совокупности, задача познания ее сводится к тому, чтобы характеризовать ее на основании признаков, присущих отдельным случаям совокупности в нетождественном виде. Эта задача выполняется нами на каждом шагу; образцово выполняют ее художники слова и мысли.

Когда Гете воспроизводит образ Вертера, перед нами возникает яркая характеристика настроений известной эпохи. Но, разумеется, Гете создавал тип Вертера не таким образом, что об'единил в нем все признаки, присущие каждому отдельному представителю общества этого времени в тождественном виде. Типичные признаки Вертера составлены из черт, свойственных некоторым индивидам в разной мере и в различном виде; эти свойства собраны и воплощены в один образ, характеризующий общее настроение и дух эпохи. То же делает Маколей, характеризуя эпоху и царствование Якова II Стюарта. Он берет отдельные события, отдельных деятелей, отдельные их поступки, некоторые черты характера и поведения и в этих немногих сравнительно особенностях воспроизводит общую характеристику всей эпохи, полную содержания и наглядности.

Такой результат достигается путем интуиции и творчества. Мы не знаем логических правил такой общей характеристики массы разнородных явлений, неопределенно об'единенных одним каким-либо родовым признаком скудного содержания. Когда такая характеристика сделана, мы не можем уложить ее в какую-либо формальную схему логического построения; она остается результатом художественного творчества.

Есть, однако, один частный случай, когда подобную общую характеристику массы разнородных явлений можно уложить в определенную логическую схему. Этот случай имеет место тогда, когда различия носят исключительно количественный характер или когда разным случаям свойственны признаки разного качества, но каждый случай может быть принят за единицу, и таким образом может быть получен подсчет общего числа случаев каждого качества. В первом случае общая характеристика получается посредством вывода средней величины, во втором—относительной. Рост присущ каждому индивиду, но особенность роста состоит в том, что для каждого индивида он имеет свою вели-

чину; среднеарифметическая величина роста дает общую характеристику роста индивидов определенного возраста и племени. Общество состоит из лиц различных профессий; общая характеристика общества получается путем вычисления отношения числа лиц каждой отдельной профессии к общему числу всего населения.

Средние и относительные величины характеризуют некоторый круг однородных предметов с точки зрения количественно или качественно различных свойств отдельных экземпляров общей массы. Они сводят эти индивидуальные различия и особенности к некоторому единому выражению. Такого рода характеристики мы можем назвать сводными, и средние и относительные величины—сводными признаками. Подобно родовым признакам, сводные характеризуют всю совокупность однородных предметов или известный род предметов; но в противоположность родовым свойствам, они характеризуют только всю массу в общей совокупности, не будучи однако характеристикой каждого отдельного предмета или явления, входящего в совокупность или в ряд предметов данного рода. Сводные признаки не присущи ни одному конкретному случаю.

Относительно реального смысла родовых признаков не возникает никакого сомнения—они представляют свойства каждого конкретного явления, подходящего под родовое понятие. Но каков смысл сводных признаков, конкретно не присущих никакому реальному об'екту? Не являются ли они просто результатом арифметических действий, не имея никакого реального смысла, никакого корелата в действительности?

Можно, разумеется, взять произвольный ряд чисел и из них вывести среднюю величину. Она будет в этом случае простым результатом арифметической операции и, обладая всеми свойствами средней, характеризующими ее по отношению к числам, из которых она выведена, тем не менее не будет соответствовать ничему реально существующему, какой-либо реальной вещи, предмету или явлению. Но относительно сводных величин, которые выводятся из данных наблюдения, есть основание думать иначе. Есть основание думать, что сводные признаки соответствуют известным реальным условиям, лежащим в основе той совокупности явлений, которая послужила материалом для их вывода, что они характеризуют, улавливают и выражают в численной величине и отношении некоторые свой-

ства, правильности и соотношения, незаметные или скрытые в отдельных случаях и поддающиеся обнаружению лишь в массе наблюдений.

Основанием для подобного рода суждения являются: во 1-х, устойчивость сводных величин; во 2-х, закономерная их изменяемость и зависимость й, в 3-х, своеобразное распределение отдельных индивидуально различных признаков в общей совокупности явлений. Все эти основания подкрепляются еще и тем, что мы можем составить гипотезу, которая делает для нас понятными все эти особенности сводных величин.

Устойчивость сводных величин проявляется в двояком виде. Первый случай устойчивости состоит в следующем. Если мы имеем достаточно большую совокупность индивидуально различных случаев какого-либо явления, например, 20.000 показаний об урожае в пределах губернии, то, разделив совокупность на две более или менее равные части, путем случайного отбора соответствующего числа карточек из общей массы показаний, и вычислив для каждой части отдельно средние величины (напр., средний урожай) или разные отношения, мы обычно найдем, что сводные величины для каждой из двух совокупностей мало отличаются друг от друга и от сводных величин общей совокупности.

Ниже приведена таблица чисел, показывающих, сколько раз буква *i* встречается на сотню букв латинского текста.

Всего сосчитано 100 сотен или 10.000 букв.

9	12	6	11	10	9	11	17	11	15
16	16	15	18	9	13	14	11	9	12
8	11	13	11	11	12	12	13	10	15
18	5	9	12	13	12	7	10	10	12
11	17	16	13	12	6	10	16	15	7
10	15	11	16	13	8	20	9	9	9
12	9	14	11	8	14	14	15	14	8
11	15	12	10	10	8	15	10	13	13
14	6	12	13	10	13	13	11	11	11
19	9	13	13	13	9	13	13	8	8

Беря через одну цыфру, мы получим две совокупности по 50 сотен в каждой. В первой совокупности буква *i* встречается всего 601 раз, т. е. по 12,02 раз на сотню в среднем и во второй — 578 раз, т. е. по 11,56 раз на сотню; в общей же

совокупности средняя составляет 11,79 на сотню; таким образом, средние обоих частных совокупностей отличаются друг от друга на 0,46 и каждая средняя, в свою очередь, отличается от средней всей совокупности на 0,23. Такая устойчивость показывает, что средняя величина, колеблющаяся между $11^1/_2$ и 12, не является простою случайностью, но характеризует некоторое свойство латинской прозы Цицерона.

Другого рода устойчивость состоит в том, что средние отношения, характеризующие однородные совокупности в разных местах или в разное время, оказываются более или менее постоянными. Таким образом, численное преобладание женщин в населении, сравнительно с мужчинами, составляет устойчивую особенность целого ряда стран; оно же характерно и для значительного числа городов. Незначительный перевес мужских рождений, сравнительно с женскими, является давно подмеченной правильностью достаточно крупных совокупностей рождений. Эта устойчивость отношения числа рождающихся мальчиков к числу девочек является, очевидно, результатом какого то устойчивого соотношения причин и указывает на некоторую определенную цель, какую преследует здесь природа.

Но и в тех случаях, когда сводные величины изменяются с течением времени или различны для разных мест, мы часто без труда можем найти достаточное об'яснение такого рода изменений и различий, что опять таки свидетельствует о том, что сводные величины являются выражением реальных свойств соответствующего рода явлений. Таково, например, понижение общей смертности и, в частности, детской смертности в культурных странах, легко находящее себе об'яснение в улучшении условий жизни населения.

Наконец, доказательством того, что сводные величины являются выражением некоторых реальных свойств совокупности явлений, служит характерное распределение отдельных величин, часто наблюдаемое в статистических рядах; оно-же дает ключ к уразумению смысла индивидуальных различий отдельных явлений общей совокупности. Характерная особенность в распределении многих статистических рядов состоит в том, что очень больших и очень малых величин бывает обычно сравнительно немного, и больше всего величин, лежащих посредине, так что, если распределить все случаи совокупности по величине явления от наименьшей к наибольшей, число случаев нарастает

к середине ряда, а затем убывает. Иногда такое распределение оказывается близким к симметрии, а изредка и совершенно почти симметричным.

Так, совокупность 7879 лиц призывного возраста Подольского уезда Московской губ. (Левицкий В. А. в Сборнике Статист. Свед. по Моск. губ. Москва 1901, I. Czekanowski, Zarys metod statystycznych, 1913) распределяется по возрасту следующим образом:

Рост от	до	Число лиц
32,6875	33,6875	7
33,6875	34,6875	218
34,6875	35,6875	793
35,6875	36,6875	1734
36,6875	37,6875	2219
37,6875	38,6875	1731
38,6875	39,6875	833
39,6875	40,6875	275
40,6875	41,6875	69

Распределение, подобное приведенному, можно получить, исходя из некоторого априорного допущения — из гипотезы т. н. случайной ошибки. Представим себе, что необходимо сделать повторные измерения какого-либо предмета. Если мы приложим все старания к тому, чтобы устранить грубые и систематические ошибки, какие могли-бы произойти от недостаточно внимательного отношения к делу или устранимой неточности инструментов, то все-же останутся неустранимые источники погрешностей. Так, например, при измерении углов треугольника в натуре надо установить центр теодолита в вершине угла; надо установить круг инструмента в горизонтальной плоскости; надо направить зрительную трубку по стороне треугольника, центрируя ее на веху; то же надо сделать с другой стороной; надо отсчитать число делений окружности между сторонами. Ни одной из этих операций нельзя сделать с математическою точностью, каждая является источником ошибок. К этим источникам ошибок присоединяется множество других подобных же источников. Правда, ошибки эти не будут ни грубы, ни систематичны, они будут незначительны и случайны, но все же каждый результат измерения будет несколько уклоняться от истинной

величины, и отдельные результаты будут разниться друг от друга. При случайности ошибок, каждая ошибка может уклонить результат измерения от истинной величины как в положительную, так и отрицательную сторону, т. е. сделать его больше истинной величины, или меньше истинной величины. Ошибки, происходящие от разных источников, независимых друг от друга, будут сочетаться в каждом измерении различным образом. Возможно, разумеется, и такое стечение обстоятельств, что все ошибки упадут в одну и ту же сторону, и тогда результат измерения получит наибольшее возможное уклонение от истинной величины; надо однако думать, что такие случаи, являющиеся результатом исключительного стечения обстоятельств, должны быть сравнительно редки; гораздо чаще должно случаться так, что часть источников вызовет погрешности в одну сторону, другие—в другую. Тогда противоположные ошибки уравновесят друг друга в той или другой мере и окончательная погрешность окажется сравнительно малой. Так как таких случаев можно ожидать больше, чем случаев уклонения всех ошибок в одну и ту-же сторону, то в результате должно оказаться, что сравнительно больших уклонений как в одну, так и в другую, сторону должно быть сравнительно мало, большая-же часть результатов должна быть посредине между двумя крайностями, т.-е. должно получиться такое именно распределение, какое мы наблюдаем в действительных статистических рядах. Это дает основание рассматривать отдельные величины такого статистического ряда, как уклонения от некоторой одной величины, общей для всего ряда.

Сказанное может быть наглядно пояснено следующим примером, идея которого заимствована у Кетле. Пусть требуется сделать тысячу, по возможности, точных измерений одной и той же статуи. Вследствие неизбежности случайных погрешностей получатся различные результаты; если мы расположим их в ряд по возрастающей величине результатов, ряд начнется с наименьших величин, встречающихся в малом числе случаев, затем число случаев будет увеличиваться по мере приближения к середине и, пройдя середину ряда, начнет убывать, вплоть до наибольших величин, встречающихся опять таки в сравнительно малом числе случаев. Если все измерения сложить и разделить на их число, то в одной общей массе противоположные погрешности взаимно уничтожаются, и полученная средняя арифмети-

ческая будет если и не совсем точно, то во всяком случае сравнительно близко, совпадать с истинной величиной; во всяком случае ее можно принять за правдоподобное выражение истинной величины с меньшим риском, чем какой-либо один результат измерения. Представим себе, далее, что требуется сделать тысячу точных копий этой статуи. К случайным ошибкам измерения присоединяются случайные ошибки воспроизведения. Но так как эти ошибки так же случайны, как и предыдущие, то средняя арифметическая из величин всех копий должна дать опять таки наиболее приемлемое выражение истинной величины статуи. Если мы сделаем по сотне измерений каждой отдельной копии, то сто тысяч результатов должны расположиться в ряд также по типу случайных погрешностей, с тою только разницею, что погрешности каждого результата будут слагаться теперь, во-первых, из ошибок измерения и, во-вторых, погрешностей, обязанных своим происхождением физическому, но также случайному, уклонению копий от общей модели. Средняя из всех результатов и здесь должна служить наименее рискованным, наиболее верным, способом получить близкое к действительности значение истинной величины модели. Если бы модель была уничтожена, то все-же средняя арифметическая сохранила-бы значение приближенного выражения истинной величины, лежащей в основе всего ряда измерений. Когда измерения роста конкретных индивидов дают картину такого-же распределения, какое должно получаться при допущении случайных погрешностей, то мы можем рассматривать средне арифметический рост, как вероятное приближенное выражение некоторой истинной величины, которая, хотя и не существует конкретно в природе, в виде какой-либо штандартной меры, но тем не менее реально лежит в основе ряда.

Все эти факты и соображения дают основание рассматривать сводные величины во многих случаях, как непосредственное изображение реальных свойств явлений, как признаки рода или совокупности предметов, или как численное выражение условий, определяющих свойства явлений и процессов. Но и в тех случаях, когда сводные величины представляют собою лишь условный способ сведения индивидуального многообразия к единому выражению, они служат удобным средством изображения действительности. Все это делает сводные величины орудием познания действительности, а так как орудие это своеобразно,

то применение его создает особый способ описания и изучения — статистический метод. Статистическим методом приходится пользоваться во всех отраслях знания, всякий раз, когда исследователь встречается с явлениями, индивидуальные особенности которых, с одной стороны, не поддаются сведению к родовым характеристикам или правильностям, и, с другой, не представляются настолько маловажными, чтобы ими можно было пренебречь. В прежнее время случаи индивидуального различия признаков весьма часто рассматривались, как подробности, не имеющие существенного значения, и игнорировались. Теперь индивидуальные особенности привлекают все больше внимания и весьма часто оказываются материалом, весьма пригодным для выяснения характера явлений и закономерности процессов природы. Сообразно с этим применение статистического метода становится все более и более распространенным, и он делается необходимым орудием изучения явлений во всех отраслях знания; результаты статистического изучения пополняют и углубляют то, что в каждой науке достигается применением обычной индукции, укладываясь в общую систему соответствующей науки. Особенно широкое применение получает статистический метод в области изучения явлений общественной жизни. Но вследствие того, что многие общественные науки находятся на довольно примитивной стадии развития и в своих теоретических построениях предпочитают прибегать к дедукциям из истин, известных из житейского опыта или полученных путем неточной популярной индукции, обширный материал эмпирических данных, соотношений и правильностей, накопляемый точным методом статистического наблюдения, часто не находит себе места в общей системе теоретических знаний и образует особую область, пока не распределенную между отдельными общественными науками. Это создало довольно распространенное среди статистиков мнение, будто существует особая материальная наука, содержанием которой является изучение общественных явлений путем применения статистического метода *).

*) Это безобидное, само по себе, теоретическое заблуждение ведет к нелепым практическим последствиям, если соединяется с представлением, что для работы в области статистики, понимаемой в смысле материального исследования какой-либо области явлений, достаточно одного знания статистического метода. На практике нередко думают, что лицо, усвоившее

Но, хотя применение статистического метода к явлениям различной материальной природы и не может создать особой материальной науки, — изучение самого метода требует особой дисциплины. Такой дисциплиной является теория статистики.

Логические основы статистики могут составлять часть общего учения о методах и входить, таким образом, в общую систему логики, но количественный характер сводных величин требует привнесения математического изучения их свойств и соотношений в таком размере, который превышает интерес и направление мысли представителей чистой логики. С другой стороны, изучение статистических приемов исследования, хотя и основанных на известных свойствах величин и их соотношений, не может составить части математики как потому, что требует анализа логических понятий, выходящего за пределы интересов и нужд математики, так, главным образом, и потому, что неразрывно связано с эмпирической природой явлений, которая служит исходной точкой и постоянным критерием того, что статистический метод может использовать из области математических понятий и аппарата математических вычислений. К этому надо прибавить еще и то обстоятельство, что уяснение природы статистического метода и результатов, какие может дать его применение, требует знания статистической техники, которая требует не только теоретического усвоения, но и практического знакомства с приемами и условиями конкретного массового наблюдения и способами обработки его результатов.

Все это в общей совокупности приводить к убеждению, что учение о статистическом методе должно составлять особую науку. Но если бы даже теоретически этот вывод оказался недостаточно обоснованным с точки зрения какой-либо классификации, то фактически теория статистики всегда будет соста-

---

особенности статистического метода, может с успехом работать в любой отрасли практической деятельности, где требуется применение статистического метода, будет ли это область хозяйственных, нравственных или технических явлений общественной жизни. В действительности, успешная работа в каждой области, требует, разумеется, прежде всего знания материальной природы соответствующих явлений, и поэтому прежде всего необходимо быть экономистом, агрономом, техником и т. п. специалистом, а затем уже статистиком, совершенно так же, как для применения статистического метода в ботанике надо быть прежде всего ботаником, а в зоологии — зоологом и т. д.

влять особую дисциплину, требующую специфического соединения знаний.

Задача теории статистики состоит в получении способов характеристики явлений посредством сводных признаков—средних относительных величин; в изучении способов обнаружения сводной правильности наступления или появления событий посредством относительных величин, коэфициентов и статистических вероятностей; в изучении способов исследования сводной зависимости явлений, функциональной и кореляционной.

Область применения статистического метода определяется двумя условиями: 1) сводным характером признака, закономерности или зависимости, т. е. таким характером явлений, в силу которого признаки, правильности и закономерности обнаруживаются лишь в массе однородных случаев, но незаметны в каждом отдельном случае массы; и 2) возможностью измерения или учета явлений, что осуществимо, если однородные явления различаются величиной (мерой, числом, весом и т. п.); или, при качественном различии об'ектов, каждый может быть принят за единицу и все сосчитаны; или, наконец, качественные различия могут быть приведены в ряд и условно или символически заменены количественным рядом.

Всякие другие условия и особенности явлений не имеют значения. Поэтому статистический метод одинаково применим как к явлениям механическим, так и к явлениям жизни—физической, психической и социальной.

Варианты, частоты, интервалы. Для того, чтобы получить характеристику явлений сводным признаком, или сводною закономерностью, надо иметь некоторое число явлений или предметов, об'единенных каким-либо одним или несколькими родовыми признаками и индивидуально различающихся в другом или других признаках количественно или качественно. Об'единенные таким образом однородные в каком-либо отношении индивидуально многообразные об'екты образуют совокупность.

Об'екты, составляющие совокупность, отличаемые друг от друга количественно или качественно, мы называем вариантами. Варианты бывают либо предметами, либо процессами—явлениями, событиями; в первом случае мы рассматриваем совокупность предметов в их статическом состоянии (распределение

населения по различным признакам); во втором мы имеем дело с переходом об'екта из одного состояния в другое (процент умирающих в течение года); иногда статистическая совокупность представляет сложную комбинацию процессов (например, понятие естественного прироста населения представляет совокупность рождений минус совокупность смертных случаев). Варианты совокупности называются различно—случаями, событиями, иногда исходами (событий).

Варианты могут быть либо свободными, либо связанными. Свободными мы называем варианты тогда, когда они могут быть расположены в пределах совокупности в любом порядке, не изменяя этим характера совокупности; связанными варианты бывают в том случае, если место, занимаемое вариантой, зависит от какого либо другого обстоятельства, и варианты не могут быть свободно перемещаемы без нарушения смысла совокупности; таковы, например, исторические совокупности, в которых место каждой варианты определяется моментом времени; то же бывает, когда случаи совокупности сперва расположены в каком либо порядке по одному признаку, давая тот или иной ряд вариант этого признака, а затем те-же случаи рассматриваются в отношении какого либо другого признака; тогда варианты по второму признаку связаны в своем расположении с порядком расположения вариант первого рода. Варианты бывают связаны, следовательно, тогда, когда мы ставим один признак в зависимость от другого, т. е. когда мы изучаем зависимость двух или нескольких признаков, иначе говоря, связанность вариант является результатом некоторой дальнейшей стадии изучения совокупности. Пока же мы имеем дело с характеристикой совокупности только по одному признаку, варианты имеют свободный характер.

Свободные варианты могут быть приведены в порядок правильным расположением в ряд по величине или свойству признака (или в таблицу, если распределение производится в зависимости от двух или нескольких признаков). При этом может обнаружиться, что варианты, тожественные по величине или характеру признака, встречаются многократно; число случаев, сколько раз повторяется одна и та же варианта, называется ее *частотою* (f); отношение же частоты данной варианты к частоте всех вообще вариант называется частостью данной варианты.

Если признак имеет количественный характер, то варианты обычно располагаются в ряд по возрастающей или убывающей величине. В таком случае совокупность обычно принимает вид двух рядов: один обозначает последовательные величины вариант (ряд вариант), другой—соответствующие каждой величине варианты их частоты (ряд частот).

Признак, по которому располагаются варианты, может изменяться раздельными (дискретными) числами, напр., семьи с 0,1,2,3, и т. д. детьми; промежутки между числами могут быть равными или неравными. Или-же величина вариант меняется непрерывно, т. е. так, что разница между величиной одной варианты и ближайшей к ней предшествующей или последующей менее любой величины, какую мы могли-бы или пожелали принять во внимание. Так, в большом государстве каждую минуту кто-нибудь рождается, поэтому последовательные возрасты населения идут непрерывною цепью с как угодно малыми промежутками между двумя соседними возрастами. Однако, практически мы интересуемся обычно разницами не менее одного года, или полугода, иногда месяца, редко недели и только в исключительном случае считаем возраст днями. В таких случаях мы либо округляем варианты, т. е., отбрасывая величины менее условно принятой, принимаем варианты разной величины за варианты одной и той-же величины и распределяем ряд по раздельным вариантам; либо распределяем варианты по непрерывно идущим интервалам—от . . до . . такой-то величины.

Распределение вариант совокупности может быть изображено графически при помощи системы прямоугольных координат. На горизонтальной оси абсцисс мы откладываем соответствующим масштабом последовательные значения вариант. Если варианты даны в виде дискретных чисел, то из точки, отвечающей данному значению варианты, мы восстановляем перпендикуляр—ординату, длина которой при помощи соотвествующего масштаба делается пропорциональной частоте данной варианты. Вершины ординат могуть быть соединены прямыми линиями, которые для всей совокупности образуют ломаную линию. Эта ломаная линия в статистике называется кривою распределения, так как с увеличением числа значений вариант, т. е. с уменьшением промежутков между последовательными значениями вариант она приближается к сплошной кривой, как к своему пределу. Увеличение числа значений вариант—заполнение промежутков между соседни-

ми значениями достигается либо увеличением числа наблюдений и более детальным подразделением величин вариант, либо теоретическим вычислением частот, какие должны были-бы лежать в промежутках, если-бы изменение величины вариант происходило по достаточно малым интервалам (интерполирование).

Если частоты даны по непрерывно идущим интервалам равной величины, частота вариант данного интервала может быть изображена прямоугольником, основанием которого служит соответствующий интервал на оси абсцис, а высота пропорциональна частоте. Если частоты даны только одной цифрой для всего интервала, как это обычно и бывает в статистических таблицах, и частота каждой варианты в пределах интервала неизвестна, то для статистических вычислений приходится прибегнуть к какому-либо допущению. Самым простым и удобным допущением будет помещение всех вариант в центральной точке интервала — варианты нагружаются на центральную ординату. От этого происходит некоторая ошибка; если варианты распределены неравномерно по всему интервалу, а скопляются, например, больше в одной половине интервала, и притом таким образом, что средняя арифметическая всех вариант интервала не совпадает с величиной варианты, лежащей в средней точке интервала, то при вычислении, например, средней ряда мы делаем ошибку, уменьшая величину некоторых вариант перемещением их к центру. Ошибка эта тем меньше, чем уже взяты интервалы, и сверх того ошибки часто выравниваются, так как скоплению вариант во второй половине интервалов в одной части ряда часто отвечает обратное преобладание вариант в первой половине интервала в другой части ряда. Но и независимо от того, статистические цифры, в особенности в области общественных явлений, основаны обычно на столь грубых и неточных показаниях, что небольшие погрешности от условных упрощений, в сущности, оказывают мало влияния на действительную точность результатов.

Если в одних случаях приходится сдвигать все варианты интервала в одну центральную точку, то в других случаях, обратно, вместо одного значения варианты, данного в виде определенного дискретного числа, приходится брать интервалы известного протяжения. Для этой цели мы можем разделить промежуток между двумя соседними значениями вариант пополам и одну половину отнести к одному значению, другую к другому; вследствие этого каждое действительное значение варианты ста-

РОТЕК. ИСТИ ДЕЛИЯ

новится как-бы центральной точкой интервала. Такое рассеяние вариант по интервалу имеет определенное реальное значение в том случае, если значения данных в таблице вариант получены путем округления действительных величин наблюдения. Но и вне этого случая такой условный прием не представляет собою ничего противного разуму, если мы приймем во внимание, что сводные статистические величины обычно падают в промежутки между дискретными значениями вариант, безразлично как тогда, когда промежуточные значения конкретно возможны (рост в 160 сант.), так и тогда, когда они невозможны ($2^1/_4$ ребенкана семью). Рассеяние дискретных вариант, по сплошным интервалам удобно, между прочим, в том отношении, что, при необходимости сведения дискретных вариант в группы, не оставляет между группами пустых промежутков.

При распределении вариант по непрерывным интервалам от . . . до . . . возникает вопрос о величине интервала. Весьма часто вопрос этот решается той ближайшей практической задачей, ради которой приводится статистический материал. Так, для учета рабочей силы населения возраст распределяется по интервалам, соответствующим различной степени трудоспособности; например, от 0 до 12 лет, от 12 до 17 лет, от 17 до 21 и от 21 до 60 и свыше 60 лет. Иначе распределяется возраст для целей школьной или продовольственной статистики и т. п.

Характерною особенностью таких распределений являются неравные интервалы. Это обстоятельство делает материал пригодным лишь для той специфической цели, ради которой он приведен, и делает невозможным или затруднительным использование его для каких-либо иных задач. Между тем статистический материал весьма часто имеет общий характер и предназначен служить для самых разнообразных надобностей. Поэтому важно придать ему такой вид, который делал-бы его возможно разносторонне пригодным. Это лучше всего достигается распределением вариант по равным интервалам. Преимущество такого распределения состоит, прежде всего, в том, что оно дает возможность составить представление об относительной частоте вариант разной величины, что возможно только тогда, когда мера вариант однообразна на всем протяжении ряда; затем из одних и тех-же интервалов одинаковой величины, в особенности если они не велики, можно образовать путем соединения

всякие другие интервалы, какие требуются различными специальными заданиями; если даже границы интервалов, нужных для какой-либо особой цели, и не совпадают с делениями равных интервалов, — последние можно разделить на части путем интерполяции; наконец, равные интервалы значительно упрощают всякого рода вычисления.

Часто проведение равных интервалов на всем протяжении представляет то неудобство, что интервалы, подходящие для малых значений вариант, оказываются слишком мелкими для больших значений вариант и, обратно, интервалы, приспособленные к величине крупных вариант, слишком велики для вариант мелких. В таких случаях можно либо разделить ряд на два ряда, если крупная разница в величинах ряда свидетельствует о разнородности самих явлений, либо давать два построения: одно с более мелкими интервалами только для части ряда и другое с более крупными интервалами, где варианты малой величины войдут общей цифрой в один — два первых интервала.

Что касается самой величины интервалов то она определяется, с одной стороны, природой явления, с другой — целью для которой приводится материал. Во всяком случае, в основных статистических сборниках материал должен быть сгруппирован по практически возможно малым интервалам, так как из них можно составить, в случае надобности, большие интервалы, но не наоборот.

Выбор интервала оказывает существенное влияние на характер распределения ряда: интервалы различной величины могут дать различную картину распределения вариант. Желательно выбирать такие интервалы, которые нагляднее всего вскрывали-бы природу ряда. Так, например, одним из весьма часто встречающихся видов распределения вариант является более или менее правильное возрастание их частот к средине ряда и убывание в обе стороны от этой наибольшей частоты; однако, если интервалы взяты очень малые, и на каждый интервал приходится недостаточное число вариант, то ряд может и не обнаруживать такой правильности, и хотя в общем частоты вариапты к средине ряда возрастают, однако в отдельных интервалах большие и меньшие частоты чередуются часто без всякого порядка; ряд может получить обычное правильное строение, если увеличить число наолюдений; но тот-же самый результат часто получается

путем расширения интервалов; в каждом интервале число вариант увеличивается, ряд выравнивается и получает более правильное строение. Но, с другой стороны, нельзя брать слишком широких интервалов, так как в этом случае ряд становится слишком коротким, и в общих цифрах будут сглаживаться последовательные различия частот. Удобнее всего соединять варианты в такие интервалы, чтобы, при умеренном числе членов ряда, закон изменения частот обнаруживался с достаточною ясностью. Однако, сглаживание ряда путем сведения его к меньшему числу более широких интервалов уместно только тогда, когда есть основания предполагать, что неправильное чередование частот является результатом недостаточного числа наблюдений; часто неправильность эта не случайна и может явиться результатом неоднородности материала; если взять два ряда, из которых каждый, сам по себе, построен правильно, но в каждом наиболее частые варианты лежат в разных интервалах, то при смешении такого разнородного материала в один ряд могут получиться две максимальные частоты, разделенные друг от друга некоторым числом интервалов меньшей частоты. Если расстояние этих максимальных частот не особенно значительно, расширение интервалов может искусственно сгладить эту разницу и дать ложное представление о характере изучаемого материала. Поэтому выбор подходящих интервалов не следует делать чисто механически; он должен быть основан на изучении характера материала.

Не меньшее значение имеет и выбор начальной точки ряда. Нет основания начинать первый интервал непременно с первой крайней варианты ряда. Величина варианты, которая в данной совокупности наблюдений фактически оказывается наименьшей или наибольшей, может быть совершенно случайной, и ставить в зависимость от такой случайной величины деление на интервалы всего ряда нет оснований. Лучше намечать границы интервалов, начиная с середины ряда, где скопляется наибольшее число вариант, с таким расчетом, чтобы преобладающая масса вариант распределялась по интервалам наиболее целесообразно; затем уже от середины ряда интервалы придется продолжить механически в обе стороны. При этом может случиться, что для образования крайних интервалов придется пополнить ряд с одной или обоих сторон вариантами с нулевою частотою. Это представляет то неудобство, что, когда при раз-

личных вычислениях, вместо фактического значения варианта, берется центральная варианта, принятая величина варианты крайнего интервала может оказаться более или менее значительно уклоняющейся от действительного значения варианта этого интервала; а это может отразиться на результатах вычисления; например, может сместить в одну или другую сторону среднеарифметическую величину ряда, увеличить среднеарифметическую ошибку и т. п. Эта опасность тем меньше, чем уже берутся интервалы. Выбор той или иной начальной точки размещает одни и те-же варианты в разных интервалах и потому может придавать различное строение ряду точно так же, как и величина интервала.

Если выбор величины интервала и начальной точки ряда порознь оказывают влияние на распределение частот по интервалам, то тем более влияют на строение ряда обе причины совместно. К сожалению, вопрос о делении ряда по интервалам теоретически совершенно не изучен, и на практике все зависит от искуства и добросовестности исследователя. Поэтому особенного внимания заслуживает идея „естественных интервалов", т. е. таких интервалов, начальная точка которых и величина устанавливаются не произвольно механически, но сообразуются с технической природою исследуемых об'ектов. Так, например, пусть при распределении числа квартир по размерам наемной платы мы имеем ряд месячных плат от 10 до 19 р. включительно по интервалам в 1 р., и каждой плате отвечает 10 квартир; если мы разделим платы на интервалы от 10 до 14 и от 14 до 19, то на каждый интервал придется по 50 случаев. Если-же вместо месячной платы мы возьмем годовую и распределим полученный ряд по интервалам от 100 до 150 р., от 150 до 200 р. и от 200 до 250 р., то число случаев по этим интервалам получится 30, 40, 30. Неравномерность распределения в последнем случае происходит только от того, что интервалы взяты механически, без соображения с тем, что годичные платы представляют 12-кратные числа. Если принять во внимание последнее обстоятельство и взять интервалы от 100 до 160 и от 160 до 280, оба распределения совпадают*).

*) Идея „нормальных" интервалов принадлежит проф. М. Б. Гуревичу.

Виды совокупностей: совокупности теоретические, эмпирические; составные, простые; исчерпывающие, выборочные. Совокупности могут быть теоретические и эмпирические. Теоретические совокупности представляют собою систему индивидуально различных случаев, нарочито составленную, выдуманную или найденную по определенному заданию. Такова, напр., совокупность всех возможных исходов при подбрасывании дважды монеты кверху, состоящая из следующих мыслимых случаев: первый исход—монета оба раза падает лицевой стороной кверху; второй исход—монета один раз падает лицом, другой раз оборотной стороной кверху; третий исход—монета первый раз падает оборотом кверху, второй лицом и последний — оба раза оборотом кверху. Или система всех мыслимых исходов при метании двух игральных костей.

Эмпирические совокупности — это те, которые получаются нами в действительности путем опыта (эксперимента) или наблюдения; такова совокупность умерших в течение известного года с распределением их по возрасту, или совокупность действительно получившихся исходов при повторном подбрасывании монеты.

Теоретические совокупности, в свою очередь, бывают либо априорные, либо апостериорные. Априорные совокупности составлены нарочито и от разума, исходя из тех или иных допущений и определений. Апостериорные совокупности составлены или найдены, исходя из известных допущений, но на основании определенных действительных, эмпирических данных.

Примером априорной совокупности может служить ранее приведенный случай совокупности всех мыслимых исходов повторного подбрасывания монеты; примером совокупности апостериорной может служить таблица смертности, полученная путем теоретической, исходящей из известных допущений, обработки эмпирических материалов о числе населения, числе умерших, числе родившихся.

Существенное и важное преимущество теоретических совокупностей состоит в том, что они могут быть совершенны, т. е. дают совершенно точное закономерное изображение явления, свободное от случайностей и неправильностей, происходящих от дефектов эмпирического материала. Совокупности же эмпирические никогда не бывают совершенными; некоторые варианты в них могут случайно отсутствовать, другие встречаться в

числе не соответствующем их действительному значению, третьи снабжены погрешностями измерения или наблюдения. О степени совершенства эмпирических совокупностей мы судим лишь по степени приближения их к теоретическим совокупностям, составленным логически правильно и на основании целесообразных допущений. Совершенством теоретических совокупностей объясняется назначение, какое они выполняют в теории статистики. Априорные совокупности служат материалом и средством изучения точной зависимости между различными элементами совокупности, а правильно и целесообразно составленные апостериорные совокупности обнаруживают и выражают в точной форме те зависимости, которые скрыты или неточно выражены в эмпирических совокупностях.

Совокупности могут быть разделены на общие и частные. Это отношение обнимает собою три логически различных случая. Во-первых, общая совокупность может относиться к частной, как род к одному из своих видов; в таком случае мы можем говорить об обще-родовой и частно-видовой совокупности. Так, например, обще-родовая совокупность — население Петербурга может распадаться на частно-видовые совокупности: население Петербургской стороны, население Васильевского Острова и т. д. Во-вторых, общая совокупность может быть сводною или составной по отношению к частным, из которых она составлена или на которые она может быть разложена; в этом случае мы говорим о совокупности обще-составной и частно-простой. Так, например, пусть будет две совокупности, одна состоящая из 3 элементов a и 7 элементов b, и другая, состоящая из 7 элементов a и 3 элементов b; в первой относительное число элементов a равно $^3/_{10}$, во второй — $^7/_{10}$; если обе совокупности смешать в одну общую, в ней окажется 10 элементов a и 10 элементов b, и относительное число элементов a будет равно $^{10}/_{20}$. Последняя совокупность будет обще-составною по отношению к двум первоначальным частно-простым. Частный случай простой совокупности представляют такие простые совокупности, которые далее не могут быть разложены на составные части, иначе говоря, совокупности элементарно-простого состава. Частно-простые совокупности могут быть в то же время и видовыми совокупностями, если они разграничены в общей совокупности каким-либо видовым признаком, отличающим каждый частный случай одной совоку-

ности от случаев другой совокупности; например, общую совокупность умерших мы можем расчленить на частные совокупности индивидов разных профессий. Но случаи обще-составной совокупности, относящиеся к различным частным совокупностям, могут и не иметь отличия, кроме своей принадлежности к данной частной совокупности; так, например, элементы *a* в вышеприведенном примере составной совокупности не имеют сами по себе никаких видовых отличий, кроме своей принадлежности к различным простым совокупностям.

В третьих, совокупность может быть общей, в смысле исчерпывающей, в противоположность частичной совокупности или выборочной. Исчерпывающей совокупностью мы называем такие совокупности, в которых исчерпывающим образом даны все варианты в пределах родового признака, определяющего совокупность; так, если таким признаком является, например, время и место – население города N к 1 января 1910 года,— то совокупность должна состоять из исчерпывающего учета всех бывших к тому времени в этом городе жителей. В противоположность исчерпывающей, частичная или выборочная совокупность состоит только из части случаев, но выбранных таким образом, что они не образуют ни видовой, ни частно-простой части общей совокупности; вследствие этого выборочная совокупность представляет собою по существу то же, что и общая совокупность, только составленную из меньшего числа случаев; она является как-бы изображением исчерпывающей совокупности в уменьшенном размере; выборочная совокупность репрезентирует сплошную, почему такие совокупности называются репрезентативными.

Значение репрезентативной совокупности основывается на том общем положении, что достаточно устойчивые сводные признаки и закономерности одной совокупности могут быть перенесены на всякую другую совокупность, однородную с данной. Положение это вытекает из содержания т. н. закона больших чисел, о котором более подробно будет сказано далее. Очевидно, что в силу этого положения сводные характеристики выборочной совокупности могут быть перенесены на совокупность исчерпывающую, если выборочная совокупность хорошо репрезентирует исчерпывающую совокупность, и обе являются однородными по своему составу, различаясь лишь численно по объему. Если выводами выборочной совокупности можно воспользо-

зоваться для характеристики всей совокупности данного рода явлений, то ясно, что выборочный способ исследования, помимо теоретического интереса получает большое практическое значение. Преимущество его перед исчерпывающим учетом явлений состоит в том, что собирание подсчет и разработка меньшего количества статистического материала требует меньше времени, сил и материальных средств.

Но для того, чтобы можно было пользоваться выводами выборочной совокупности для характеристики совокупности исчерпывающей, необходимо соблюдение двух условий. Необходимо, во-первых, чтобы сводные признаки и закономерности, выводимые на основании выборочной совокупности, обладали достаточно устойчивым характером, не были случайными и, во-вторых, чтобы выборочная совокупность имела действительно репрезентативный характер. Первое условие есть общее условие всякой статистической характеристики, и для соблюдения его необходимо, чтобы статистические величины выводились на основании достаточно большого числа случаев. Поэтому первое требование, которому должна удовлетворять выборочная совокупность, заключается в том, чтобы она состояла из достаточно большого абсолютного числа наблюдений. Понятие достаточно большого числа наблюдений довольно неопределенно, и мы не можем дать точного критерия, какое именно абсолютное число случаев следует считать достаточным. О достаточности или недостаточности числа случаев можно судить лишь a posteriori, по характеру получаемых результатов; так, число случаев можно считать достаточным, если, при разбивке совокупности на две случайные половины, статистические величины для каждой половины мало разнятся друг от друга; если отдельные варианты группируются около средних величин с определенною правильностью; если средние уклонения относительно невелики. Число случаев может быть тем меньше, чем более устойчивы, менее изменчивы для отдельных единичных явлений те признаки, которые подлежат исследованию. Кроме того, что число случаев выборочной совокупности должно достигать достаточно большой абсолютной величины, оно должно быть достаточно велико относительно—по сравнению с общим числом всех случаев исчерпывающей совокупности. Это условие вытекает из требования, чтобы выборочная совокупность имела репрезентативный характер. В самом деле, чем больше случаев

содержит исчерпывающая совокупность, тем более можно ожидать, что варианты ее могут представлять различные разновидности, встречающиеся с различной относительной частотою. Для того, чтобы и сравнительно менее часто встречающиеся варианты могли быть представлены в выборочной совокупности в достаточном числе без ущерба для остальных вариант, общее число случаев выборочной совокупности должно находиться в известном соотношении с числом случаев исчерпывающей совокупности.

Репрезентативный характер выборочной совокупности обусловливается тем, что в ней встречаются те же варианты, что и в полной совокупности, с той-же относительной частотою, как в полной совокупности. Такой результат может быть достигнут в том случае, если нет никаких причин, которые давали бы возможность одним вариантам попадать в выборочную совокупность непропорционально их относительному числу в общей исчерпывающей совокупности, в ущерб или за счет других вариант. Иначе говоря, репрезентативный характер выборочной совокупности обеспечивается отсутствием какого-либо систематического подбора вариант определенного типа в непропорционально большом числе в ущерб другим вариантам. Отсутствие систематического подбора означает случайность выбора вариант. При случайности выбора можно ожидать, что варианты общей совокупности, встречающиеся в большем числе, имеют больше шансов попасть в состав выборочной совокупности; те же, которые встречаются реже, имеют меньше шансов, и таким образом каждого рода варианты попадают в выборочную совокупность пропорционально их относительной частоты в общей совокупности, сообщая выборочной совокупности репрезентативный характер.

Технически организовать наблюдение таким образом, чтобы оно удовлетворяло указанному условию случайности можно двумя способами: или делая выбор об'ектов наблюдения наугад, либо выбирая их по признаку, заведомо не находящемуся ни в какой зависимости от тех признаков, которые будут подлежать исследованию. При первом способе мы предоставляем случаю решать, какой об'ект попадет в сферу наблюдения, или выбираем случаи по жребию. Во втором случае мы намечаем об'екты исследования по месту, занимаемому им в каком-либо случайном ряде (пятый, десятый), по начальной букве фамидии и т. п. Однако, простое механическое применение этих приемов не

обеспечивает еще безусловно отсутствия подбора. При выборе об'ектов наблюдения наугад может случиться, что в месте и времени регистрации окажутся об'екты, привлеченные сюда какой-либо целью или причиной, которая обусловливает их определенный подбор; при опросе десятого индивида по списку, может получиться систематический отбор при замене отсутствующих следующим наличным индивидом, если отсутствие вызывается какой-либо общей причиной и т. п. Поэтому применение всякого приема случайного выбора требует контрольного внимания, направленного на то, чтобы в выборочную массу незаметно не проник систематический отбор.

Иногда при выборочном исследовании случайность выбора ограничивается привнесением известного систематического подбора случаев наблюдения. Так, при хозяйственных переписях, с целью избегнуть возможного пропуска какой-либо категории хозяев или получить по ней недостаточное число показаний, заранее устанавливаются определенные категории хозяев, и затем по этим категориям производится случайный выбор нужного числа показаний (например, деление по степени зажиточности, по количеству землевладения или землепользования). Если число показаний по каждой категории одинаково или произвольно, то выборочная совокупность теряет репрезентативный характер по отношению к сплошной совокупности, так как число случаев каждой категории не пропорционально числу их в общей массе. Она превращается в репрезентативные совокупности для каждой категории отдельно. Определение числа случаев каждой категории пропорционально данным предшествующей сплошной переписи представляет, с другой стороны, то неудобство, что предрешает вопрос о неизменной численности случаев по категориям к моменту новой переписи, сравнительно с предшествующей. Иначе обстоит дело в том случае, когда число показаний по каждой категории устанавливается в процессе производства переписи, пропорционально оказавшемуся в действительности числу случаев. Здесь мы имеем в зародыше соединение одновременных сплошной и выборочной переписей.

Иногда в целях экономии времени и средств вместо отбора известного процента населения по всей территории делается отбор известного процента селений. Такой прием дает в сущности репрезентативную совокупность селений, а не населения. Совокупность сохранила бы репрезентативный характер по от-

ношению к населению лишь в том случае, если бы принадлежность к селению не налагала общего видового отличия на всех индивидов данного селения.

Когда выборочное исследование произведено, то решить вопрос, имеет ли оно репрезентативный характер, возможно лишь путем сравнения признаков, даваемых выборочной совокупностью с признаками сплошной совокупности. Теоретических критериев для установления репрезентативного характера выборочной совокупности не может быть, так как теоретически a priori можно лишь судить о том, что должно быть, но не о том, что есть. Если некоторая часть сводных признаков и зависимостей выборочной и сплошной совокупности совпадают, то можно думать, что вообще совокупности однородны. Однако, если для сравнения мы берем исчерпывающую совокупность более раннего сплошного исследования, то расхождение цифр в отдельных случаях не всегда доказательно, так как самые явления могли измениться за промежуток между переписями, в особенности, если он длителен и в массе существуют динамические процессы. Вполне убедительным может быть лишь сравнение данных, относящихся к одному и тому же времени. Поэтому в последнее время начинают применять одновременно производство сплошных и выборочных исследований, обнимая сплошным исследованием всю массу об'ектов в отношении немногих существенных признаков и детализируя исследование некоторой части об'ектов, путем образования репрезентативной совокупности.

Выборочный метод исследования всегда применялся в статистике в очень большом числе случаев. Некоторые явления обычно исследуются только выборочным способом, причем получаемым результатам всегда приписывается репрезентативный характер, как это имеет, например, место в статистике цен, заработных плат, урожаев, погоды и многих других случаях. Особое внимание и интерес к выборочным исследованиям вызывается не этими привычными случаями, а опытами применения выборочного исследования для получения таких характеристик, которые ранее получались лишь путем исчерпывающего учета, или для более углубленного и детального обследования сплошной массы. Недоверие, какое в этих случаях встречает выборочный метод среди многих статистиков, находит себе об'яснение как в недостаточно разработанном теоретически но

пятии достаточного числа наблюдений, так и в неуверенности, что применяемые технические приемы исследования достаточно обеспечивают репрезентативный характер выборочной совокупности. К тому же и число опытов эмпирической проверки репрезентативного характера выводов, получаемых путем выборочного исследования, до сих пор довольно ограничено.

Область использования репрезентативных совокупностей ограничивается сводными характеристиками, т. е. средними величинами, относительными числами и сводными зависимостями. Когда же вопрос идет о получении абсолютных чисел (как количество населения, число смертей, рождений и т. п.), то единственным способом, обеспечивающим возможную точность результата, является сплошной исчерпывающий учет явлений. Получение этих цифр при помощи косвенных вычислений на основании выборочных сведений сопряжено с необходимостью прибегать к разного рода коэфициентам и всегда связано с возможностью ошибок, не говоря уже о возможных сомнениях в репрезентативном характере самой выборочной совокупности. Поэтому способы косвенных вычислений для получения абсолютных цифр применялись лишь в начале исторического развития статистики, когда еще не было сплошных учетов, и применяются в настоящее время при невозможности произвести исчерпывающую перепись или регистрацию.

Эмпирический характер сводных характеристик. Возможно-ли их отвлечение. Сводные признаки и закономерности получаются на основании какой-либо эмпирически данной совокупности определенных конкретных случаев; поэтому они имеют эмпирический характер и характеризуют ту именно совокупность, для которой они выведены. Этим они отличаются от родовых признаков и точных законов, которые имеют отвлеченный характер и характеризуют любой случай, подходящий под данный род явлений. Возникает вопрос, является ли эмпирический характер сводных величин и зависимостей органическим свойством их, или-же сводные характеристики могут получать отвлеченный характер. При решении этого вопроса необходимо прежде всего выяснить, что можно подразумевать под отвлеченным характером сводных величин и зависимостей. Под отвлеченным характером вообще мы понимаем отвлечение характеристики от того эмпирического материала, на основании

которого она получена, и распространение ее на любой однородный материал. По отношению к совокупностям мы можем различать несколько возможных случаев отвлечения, в зависимости от различного соотношения между родовыми признаками и индивидуальными особенностями. Прежде всего мы имеем тот случай, когда родовое понятие само по себе достаточно содержательно, и совокупность образована путем принятия во внимание индивидуальных особенностей некоторого числа экземпляров данного рода. В этом случае однородной с данной совокупностью будет всякая другая совокупность, образованная из каких-либо других экземпляров того-же рода и, следовательно, вообще любая совокупность любых экземпляров того-же рода. Поэтому отвлечение сводной характеристики от эмпирической совокупности, на основании которой она получена, и распространение ее на однородный материал означает распространение сводной характеристики на любую совокупность случаев данного рода; сводная характеристика становится характеристикой любой совокупности данного рода, иными словами, сводная характеристика становится характеристикой рода, наравне с родовыми признаками. Понятие „яйцо кукушки“ достаточно характеризуется родовыми признаками; если мы составим совокупность из 1000 конкретных яиц данного рода и определим среднюю длину яйца этой эмпирической совокупности, то сводный признак получит отвлеченный характер, если его можно приписать любой случайно составленной совокупности яиц того-же рода; иначе говоря, средняя величина становится в этом случае вообще характеристикой яйца кукушки, наравне с другими признаками родового характера. Образование совокупности имеет здесь значение лишь средства для получения сводной характеристики рода.

Иначе обстоит дело тогда, когда относительное значение тожественных и нетожественных признаков обратное, и совокупность не служит только орудием для дополнительного познания рода, а скорее родовой или родовые признаки служат средством для об'единения разнородных случаев в одно логическое понятие совокупности. В этих случаях совокупность всегда сохраняет значение совокупности, и сводная характеристика одной какой-либо эмпирически данной совокупности не становится путем отвлечения характеристикой просто рода, а

всегда остается характеристикой совокупности, и отвлечение состоит в том, что характеристика, полученная на основании данной совокупности, распространяется на другие, неисследованные совокупности, с нею сходные, хотя и нетождественные. Совокупности, в одном отношении сходные, в другом отличные все вместе образуют частно-видовые совокупности обще-родовой совокупности; при этом видовые отличия частных совокупностей могут состоять из отличительных признаков родового характера (тождественных для каждого экземпляра видовой совокупности), либо сводного характера. Отвлечение сводной характеристики будет состоять здесь в отнесении ее к каждой частно-видовой совокупности и, следовательно, к обще-родовой совокупности вообще. Наконец, третий случай имеет место тогда, когда наблюдаемая совокупность имеет репрезентативный характер, и тогда отвлечение сводной характеристики состоит в перенесении ее с данной выборочной совокупности на соответствующую ей совокупность исчерпывающую.

Всякая сводная характеристика является в первую очередь характеристикой именно данной совокупности и, как было сказано, имеет эмпирический характер. Опыт показывает, что сводные характеристики обычно и не поддаются отвлечению. Это явление настолько обычно, что существует даже взгляд, что сводным величинам и закономерностям органически присущ эмпирический характер, что логическая природа сводных характеристик не допускает отвлечения и обобщения, и что сводные характеристики являются специфическим логическим приемом т. н. идиографического описания явлений. Для правильного решения этого вопроса надо принять во внимание, что родовые характеристики и абстрактные точные законы также в первую очередь получаются путем наблюдения эмпирически данных конкретных случаев и, в первую очередь, являются характеристикой того, что есть и происходит в наблюдаемом случае. Необходимо поэтому выяснить, благодаря каким логическим условиям и посредством какого логического процесса наблюдаемое в одном или некоторых случаях получает характер общеобязательного закона для случаев, не бывших предметом наблюдения.

Превращение результатов конкретного наблюдения в общий закон составляет сущность логической индукции. Иссле-

дование условий применения этого метода покажет, имеются-ли эти условия в применении к сводным величинам и зависимостям, и в случае, если совокупности не удовлетворяют условиям точной и совершенной индукции, происходит-ли это от логической природы совокупностей, или-же от привходящих фактических обстоятельств, которые часто делают невозможным отвлечение и обобщение и по отношению к таким признакам и зависимостям, которые не имеют сводного характера.

Сущность индукции состоит в том, что в опыте (посредством наблюдения или эксперимента) устанавливается какое-либо положение, которое получает характер общей истины, обязательной для всех случаев такого же рода. Формальное содержание этих истин бывает различно. Или в них утверждается, что определенному роду предметов присуще определенное свойство—золоту атомный вес в 197 единиц; или что одно явление вызывается другим, как его причина — расширение тел происходит от их нагревания; или что явление происходит по определенному закону — сила притяжения действует обратно пропорционально квадрату разстояния. Эта различная формулировка содержания индуктивных истин на первый взгляд указывает как-бы на то, что мы имеем здесь дело с совершенно различными вещами. В действительности, это различие сводится исключительно к способу выражения, а не к сущности логического утверждения. Последнее по существу одинаково во всех случаях. Во всех случаях утверждается логическая связь между двумя моментами: между телом (т. е комплексом свойств) и одним из его свойств, между молекулярным движением (теплотой) и проявлением этого движения в увеличении об'ема; между скоростью падения тела в два последующие момента времени. Эта логическая связь двух моментов получает свои различные названия в зависимости от того, относится ли один и другой момент к одному или разным предметам, к одному и тому-же или разному времени. Если мы помещаем оба момента в одном и том же предмете в одно и то же время, мы говорим о свойстве, присущем предмету; когда оба момента относятся к разным явлениям в разное или одно и то же время, мы говорим о причинной связи; когда оба момента относятся к одному и тому же явлению в два последовательные периоды времени, мы говорим о законе явления.

Кроме понятия связи двух моментов, индуктивная истина заключает в себе понятие безусловной обязательности этой связи для всех таких-же случаев и во все времена. Последнее мы понимаем не в том смысле, что связанные моменты во всякое время должны где-либо осуществляться или находиться в природе. Для индуктивной истины неважно то, осуществляется ли она теперь или осуществится ли она вообще; она может и вовсе не осуществляться. Может случиться, что золота вовсе не станет во вселенной. Но существенно то, что если вообще где-либо есть один из взаимно-связанных моментов, обязательно и всегда должен быть и другой. Если вообще где-либо есть золото, оно обязательно будет обладать свойственным ему атомным весом; если-же атомный вес тела оказался бы не 197, а иной, то это тело не было-бы золотом; или если-бы оно обладало всеми свойствами золота, за исключением атомного веса, то было-бы не одно золото, а два химически различных золота.

Из приведенного определения понятия индуктивной истины ясно, что для ее установления необходимо проделать две логические операции: 1) установить путем наблюдения или опыта наличность связи двух моментов и 2) придать этой связи характер общей и безусловной истины.

Первая операция схематически изображается двумя основными правилами индукции Милля. Для того, чтобы установить связь двух моментов, и именно данных моментов, мы должны разложить исследуемое явление на возможно простые составные части и установить эти части исчерпывающим образом; затем мы должны подыскать или искуственно воспроизвести другое явление, которое имело-бы с первым явлением лишь один общий элемент, это именно тот момент (*a*), связь которого с чем-либо мы ищем; если при всех изменениях условий вместе с моментами (*a*) в явлении неизменно остается некоторый другой момент (*α*), то следует заключить, что оба момента друг с другом связаны (правило единственного сходства). Или, иначе, если оставляя все условия неизменными, мы исключаем из опыта один только элемент (*a*) и вместе с ним исчезает из явления некоторый другой элемент (*α*), мы точно также заключаем, что оба элемента связаны друг с другом (правило единственной разницы).

Символически оба случая могут быть изображены следующим образом:

I. Правило единственного сходства:

Первое явление после исчерпывающего разложения на элементы	$abc\alpha\beta\gamma$
Второе явление после изменения всех элементов кроме a	$ade\alpha\delta\varepsilon$
Вывод	$a—\alpha$

II. Правило единственной разницы:

1-е явление	$abc\alpha\beta\gamma$
2-е явление	$bc\ \beta\gamma$
Вывод	$a—\alpha$

Для безупречности вывода необходимо исчерпывающее знание всех элементов исследуемых явлений; если бы, кроме известных и учтенных составных частей, явление сопровождалось какими-либо неизвестными и неучтенными комплексами (x и y), мы не могли-бы с уверенностью утверждать, что между двумя сравниваемыми случаями единственно общим является наличность момента a, и что именно за счет этого момента следует отнести неизменную наличность в обоих случаях момента (α); может быть в неучтенных частях (x) и (y) также остается какой-либо общий элемент в обоих случаях, и именно от его присутствия и зависит наличность в обоих случаях момента (α). Если мы не в состоянии разложить явление исчерпывающим образом на элементы и всегда остается некоторый неучтенный остаток (x), то известным коррективом может служить увеличение числа наблюдаемых случаев, подбираемых таким образом, чтобы, при всем их различии, во всех неизменно присутствовал исследуемый момент (a); чем более длинный ряд таких случаев нам удастся подобрать по признаку наличности (a), тем менее шансов, чтобы во все случаи, подбираемые искуственно и нарочито только по этому одному признаку, неизменно проникал какой-либо другой общий элемент среди неучтенной части явления. В этом случае мы будем иметь перед собою т. н. сравнительный или историко-сравнительный метод исследования. Символически мы можем изобразить его следующим образом:

$$\begin{array}{l} x_1 abc\alpha\beta\gamma y_1 \\ x_2 ade\alpha\delta\varepsilon y_2 \\ x_3 ahg\alpha\varkappa\eta y_3 \\ \ldots\ldots \\ x_n apr\alpha\mu\nu y_n \\ \hline a—\alpha \end{array}$$

После того, как в двух (или нескольких) случаях установлена связь двух моментов, и именно двух данных моментов, связь эта получает общеобязательный характер на основании постулата о постоянстве законов природы: то, что связано в данном наблюдении, должно быть связано всегда и везде при повторении тех же условий. Под постулатом мы понимаем такую истину, которая, подобно аксиоме, не может быть доказана, но, в отличие от аксиомы, не самоочевидна; единственным основанием для ее принятия является ее познавательная и практическая целесообразность, т. е. то обстоятельство, что, не принимая данного положения за истину, мы этим отрезываем себе путь к познанию явлений и к построению наших будущих действий на основании данных прошлого опыта. Таким постулатом является положение „нет действия без причины“ или „всякая причина неизменно производит свой результат“. Что эта истина несамоочевидна, ясно из того, что $^9/_{10}$ человечества и почти каждый человек в исключительные минуты жизни верит в чудеса или, по крайней мере, желает или ждет чуда; что эта истина не получена индуктивным путем ясно из того, что для того, чтобы утверждать что-либо по отношению к будущему на основании прошлого, необходимо раньше иметь знание, что прошлое логически обязательно для будущего, т. е. надо раньше знать то, что требуется доказать; что эта истина не основывается на опыте, ясно также из того, что на один случай, когда причина происходящего нам известна, приходятся тысячи случаев, когда причины происходящего нам неизвестны, и тем не менее мы не сомневаемся в том, что они должны существовать.

Подобный же характер произвольного, но целесообразно необходимого положения имеет истина о постоянстве действия сил и законов природы. Раз мы принимаем эту истину, нет надобности нагромождать большое число наблюдений. Достаточно на одном случае,—а если технически для этого необходимо не менее двух случаев, то на двух случаях — безспорно и точно установить, что два момента связаны друг с другом, чтобы положение это, в силу постоянства действия природы, сразу приобрело характер общей безусловной истины. Однако, природа постулата о постоянстве действия природы ставить одно условие, которому должно удовлетворять наблюдение. В силу постулата, то, что наблюдалось по отношению к известному моменту один раз, будет наблюдаться всегда, везде и всякий раз, если данный

момент повторится в тожественном виде. Но в тожественном виде может повториться только то, что по своей природе неизменно; неизменным же является только то, что элементарно просто; все, что сложно, может измениться и, следовательно, неизвестно, в каком виде повторится, а потому постулат постоянства ничего по отношению к таким случаям утверждать наперед не может.

Таким образом, для получения общей истины путем индукции необходима наличность следующих двух условий:

1. явление должно быть разложено исчерпывающим образом на его составные части и

2. эти составные части должны быть элементарно-просты.

Только при этих условиях индуктивный вывод получает характер общего и точного закона; в противном случае вывод всегда более или менее связан с условиями данного или данных наблюдений, не может абстрагироваться от них и получить характер общей и безусловной истины; наблюдаемые соотношения и правильности будут в той или иной мере сохранять эмпирический характер.

Только в редких случаях в действительности удается хотя приблизительно осуществить условия точной индукции; лишь в идеально поставленном эксперименте мы имеем некоторое отдаленное приближение к указанным условиям. Поэтому множество законов, которые мы считаем точными, с течением времени приходится изменять и совершенствовать. На каждом шагу приходится убеждаться, что то, что мы считаем элементарно-простым, в действительности оказывается сложным; что при анализе и учете условий наблюдения, который мы считали полным и исчерпывающим, в действительности нами упускались те или другие обстоятельства. Сообразно с этим, то, что прежде мы считали точным законом, в действительности оказывается либо просто ошибочным выводом, либо более или менее эмпирическою правильностью. Значительная устойчивость многих оказывающихся впоследствии эмпирическими закономерностей об'ясняется тем, что в природе некоторые простые элементы часто встречаются в неизменных соединениях, которые мы нередко принимаем за простые элементы, до тех пор, пока случай не натолкнет нас на сомнения в элементарности явления. Часто незначительные изменения в постоянном комплексе простых элементов производят непонятные для нас уклонения от того, что

мы ожидаем и должны получить на основании точного закона. Нередко эти уклонения просто не замечаются до тех пор, пока более внимательный и оригинальный ум не откроет противоречия между действительностью и тем, что следовало-бы ожидать на основании закона.

Точные индуктивные истины легче всего получаются, разумеется, в тех областях знания, где мы имеем дело с изучением наиболее простых элементов явлений — в неорганической химии, физике; там, где явления состоят из более сложного сочетания простых элементов, получение точных законов становится все более и более затруднительным, и индуктивные истины получают все более и более описательный эмпирический характер.

Родовые свойства и основанные на них закономерности, очевидно, проще сводных признаков и сводных закономерностей. Ибо первые представляют собою то, что повторяется в отдельных случаях в тожественном виде, вторые же — особенности и различия; то же, что повторяется в тожественном виде, несомненно устойчивее того, что меняется от случая к случаю; все более устойчивое проще, более сложное—изменчивее. Поэтому понятно, что родовые свойства и правильности являются и более подходящим, а в силу этого, и более обычным материалом индуктивных исследований, дающих в результате точные истины. Напротив того, совокупности, в силу одной логической их природы, труднее поддаются индукции и должны давать результаты более эмпирического характера. К этому надо прибавить и то обстоятельство, что главное средство получения точных индуктивных истин—эксперимент—почти неприменим в области изучения совокупности; здесь нам приходится иметь дело почти исключительно с наблюдением. Помимо того, что мы лишены возможности искуственно воспроизводить случаи, построенные сообразно с целями нашего исследования—единственно верный способ осуществления условий индукции — и должны ограничиваться подысканием наиболее подходящих случаев, какие может дать простое наблюдение—в совокупность, наблюдаемую в условиях определенного времени и места проникает вся окружающая обстановка, со всей сложностью ее условий, часть которых ускользает от нашего внимания, а остальная главная масса просто оставляется нами без внимания, за невозможностью подвергнуть ее какому-либо учету и анализу. При таких усло-

виях, естественно, наблюдаемые совокупности могут служить лишь материалом для вывода эмпирических характеристик и правильностей. И этот эмпирический характер статистических законов в особенности бросается в глаза благодаря тому, что преобладающая масса совокупностей, фактически являющихся предметом статистического изучения, относится к явлениям социальным, которые исторически составляют главное поле приложения статистического метода. Социальные же явления принадлежат к наиболее сложным, и здесь даже обычные методы индукции дают до сих пор лишь скудные результаты. Лишь в сравнительно последнее время статистический метод получил широкое и плодотворное применение в области естествознания и, в частности, в биологии, и здесь он сразу дает и обещает дать индуктивные выводы более точного характера.

Одной из главных задач статистического изучения является получение совокупностей возможно простого состава и расчленение их на возможно простые элементы. К этому статистик стремится уже в самом процессе наблюдения. С этой целью опросные бланки строятся таким образом, чтобы сложные вопросы расчленить на простые и в этом расчленении дойти до возможно простых элементарных условий, не поддающихся практически дальнейшему упрощению. Однако и эти наиболее простые условия все же остаются сложными комплексами, далекими от тех действительно простых элементов, с которыми имеет дело химик и физик. С другой стороны, в самом наблюдении статистик стремится получить возможно исчерпывающий учет всех элементов совокупности. С этой целью получение самых простых сведений сопровождается почти всегда постановкой весьма сложной сети вопросов, стремящихся уловить все сопутствующие обстоятельства.

В последующих стадиях сводки собранного материала и в построении таблиц мы стремимся к тем-же двум целям: расчленить совокупность на возможно простые составные части и дать возможно исчерпывающий учет всех сопутствующих друг другу обстоятельств. Здесь перестройка массового материала по различным признакам и в различной их комбинации в известной мере возмещает невозможность эксперимента, создает если не искуственное воспроизведение явления, то искуственное изображение его с точек зрения, выдвигающих более наглядно неизменную связь или зависимость двух каких-либо моментов со-

вокупности и умышленно смешивающих и отодвигающих на задний план влияние всех других моментов.

Наконец, той-же цели служит в последней стадии математическая обработка статистических рядов и кривых распределения, стремящаяся разложить составную совокупность на ее простые частные совокупности приемами формально математического анализа.

Таким образом, эмпирический характер статистических истин является результатом сложного фактического характера тех совокупностей, с которыми нам приходится иметь дело. По мере того, как совокупности эти получают более элементарный характер, статистические выводы приобретают большую точность и более общее значение. Если-бы нам удалось получить путем наблюдения или последующей обработки материала совокупность элементарно-простого состава, то и выводы, относящиеся к ней, имели-бы характер вполне точных индуктивных законов.

Хотя мы не можем получить такой элементарной совокупности в опыте, но мы можем воспроизвести ее умозрительно. Построив такую совокупность, мы можем дедуктивно вывести те соотношения и закономерности, которыми она должна обладать. Это и составляет задачу теории вероятности. Точные законы и соотношения, которые теория вероятности выводит дедуктивно для теоретических совокупностей, могут быть сопоставлены с результатами, какие получаются для совокупностей, получаемых путем экспериментов, производимых отчасти для целей научного исследования, главным же образом для различных практических надобностей. Сопоставление показывает, что правильности, обнаруживаемые совокупностями, образованными экспериментально, с значительною точностью совпадают с дедуктивно-точными законами теоретических совокупностей. Это совпадение свидетельствует, с одной стороны, о целесообразном выборе определений и исходных точек зрения при построении теоретических совокупностей, и, с другой — о том, что правильности экспериментальных совокупностей, при известной доле присущего им эмпиризма, все-же являются выражением определенных теоретически-точных законов. Мы можем сделать шаг дальше и сравнить экспериментальные совокупности с совокупностями полученными уже из реальной действительности путем простого наблюдения. Сравнение и здесь обнаруживает такие правильности и соотношения, которые, при всем их эмпириче-

ском характере, все-же ясно указывают на слишком большое соответствие их с теоретическими правильностями, чтобы такое соответствие можно было приписать случаю. Поэтому учение о теоретических совокупностях и их законах лежит в основе учения о совокупностях эмпирических и составляет таким образом основу статистического метода.

Закономерность производных совокупностей. Вероятность. Простейшим образом мы можем получить теоретическую совокупность, если возьмем некоторое число индивидуально различных элементов: a, b, c, d . . . . и т. д., из которых каждый входит в совокупность один или несколько раз. Каждый отдельный случай вхождения того или иного элемента (одного и того же или разных) в совокупность назовем случаем совокупности. Тогда совокупность

$$aabccddee$$

будет состоять из 10 случаев и 5 индивидуально-различных элементов; из них

a	встречается	в	совокупности	2 раза
b	„	„	„	1 „
c	„	„	„	3 „
d	„	„	„	2 „
e	„	„	„	2 „

Всего 10 случаев.

Отношение частоты каждого элемента к общему числу всех случаев совокупности назовем вероятностью данного элемента. Так, вероятность элемента a или p_a составляет $^2/_{10}$ и подобным же образом p_b—$^1/_{10}$; p_c—$^3/_{10}$, p_d—$^2/_{10}$ и p_e—$^2/_{10}$.

Из определения вероятности ясно, что сумма вероятностей всех элементов совокупности всегда равна 1.

Для упрощения дальнейшего изложения возьмем совокупность, состоящую только из двух элементов a и b, из которых каждый повторяется в совокупности только один раз. Тогда вероятность элемента a или $p=^1/_2$, и вероятность элемента b или q также $=^1/_2$ и

$$p+q=1 \text{ или } p=1-q$$

Если p есть вероятность появления элемента a, то q можно рассматривать как вероятность непоявления этого элемента (т. е. вероятность появления не этого, а другого элемента b).

Назовем эту простейшую совокупность первоначальной. Из этой первоначальной совокупности мы можем образовать совокупность производную, сочетая элементы a и b всеми возможными способами в группы, состоящие из заданного числа случаев. Так, составляя группы из 2 случаев, мы можем получить следующие соединения:

$$aa\ ab\ ba\ bb.$$

Если не обращать внимания на порядок, в котором элементы входят в группу, а лишь на число элементов каждого рода в группе, то вторую и третью группу можно об'единить, потому что обе состоят из одного случая a и одного b. После такого об'единения каждую отличаемую от других группу назовем вариантой. Тогда производная совокупность будет состоять из трех вариант и 4 случаев, а именно:

варианты	aa	ab bb
число случаев	1	2 1

и вероятность этих вариант составляет

$$\frac{1}{4} \quad \frac{2}{4} \quad \frac{1}{4}$$

вместе же 1.

При образовании групп из 3 случаев все мыслимые сочетания дают следующий результат:

$$\begin{matrix} aaa \\ aab \\ aba \\ baa \\ abb \\ bab \\ bba \\ bbb \end{matrix}$$

что, при сведении в одно групп, содержащих одинаковые числа элементов a и элементов b, независимо от порядка их появления, даст совокупность, состоящую из вариант

$$aaa\ aab\ abb\ bbb,$$

встречающихся соответственно в числе случаев

1 3 3 1

или с вероятностями

$$^1/_8 \quad ^3/_8 \quad ^3/_8 \cdot ^1/_8,$$

вместе составляющими 1.

При группах по 4 случая в каждой получатся следующие варианты с соответствующими им числами случаев:

aaaa	1
aaab, *aaba*, *abaa*, *baaa*	4
aabb, *bbaa*, *abba*, *baab*, *abab*, *baba*	6
abbb, *babb*, *bbab*, *bbba*	4
bbbb	1

Построение каждой следующей более сложной совокупности можно производить механически, если принять во внимание, что 1) первое крайнее сочетание состоит только из элемента a; следующая группа дает на один раз меньше элементов a и один раз элемент b; следующая—на 2 раза меньше элементов a и 2 элемента b, и т. д. до последней крайней группы, которая состоит только из элементов b; 2) что число случаев, сколько раз повторяется каждая вариата, образует таблицу рядов, где каждая строчка начинается с 1, а любой член какой-либо строки равен сумме стоящего над ним и предшествующего члена предыдущей верхней строчки, как это и видно из прилагаемой таблицы:

По 1 элементу	1	1						сумма = 2	$=2^1$
„ 2 элемента	1	2	1					= 4	$=2^2$
„ 3 „	1	3	3	1				= 8	$=2^3$
„ 4 „	1	4	6	4	1			=16	$=2^4$
„ 5 „	1	5	10	10	5	1		=32	$=2^5$
„ 6 „	1	6	15	20	15	6	1	=64	$=2^6$.

и т. д.

Строки эти представляют собою ничто иное, как коэфициенты, получающиеся при возведении двучлена (например $a+b$) в степень первую (первая строка), вторую (вторая строка) и т. т. Так, $(a+b)^2 = 1a^2+2ab+1b^2$; $(a+b)^3 = 1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3$ и т. д.

При образовании вариант группами из 6 случаев, соответствующие частоты вариант получаются из коэфициентов двучлена, возводимого в шестую степень. Коэфициенты эти образуются следующим образом:

$$1 \ldots\ldots = 1$$

$$\frac{6}{1} \ldots\ldots = 6$$

$$\frac{6.5}{1.2} \ldots\ldots = 15$$

$$\frac{6.5.4}{1.2.3} \ldots\ldots = 20$$

$$\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} \ldots\ldots = 15$$

$$\frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5} \ldots = 6$$

$$\frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6} = 1$$

Первый коэфициент равняется единице; второй — степени двучлена, деленной на единицу; третий, четвертый и т. д. образуется из предыдущего умножением числителя на ближайшее нисходящее число, а знаменателя — на ближайшее восходящее число.

Закон построения этих рядов выражается в следующих положениях:

1. Сумма вероятностей всех вариант каждого ряда является величиной постоянной и равна *1*.

2. Частоты сперва возрастают, достигают максимума, а затем убывают.

3. Чем дальше к концу, тем убывание идет с возрастающей силой, потому что с каждым следующим членом разница между числами, на которые множится числитель и знаменатель, становится все больше; так, в пятом члене числитель множится на 3, знаменатель на 4, в шестом—числитель на 2, знаменатель на 5. По той-же причине—но только обратно, члены ряда сначала возрастают очень быстро, а к середине возрастание замедляется.

4. С увеличением степени двучлена, т. е. с образованием вариант путем групп из возрастающего числа случаев, вероятность каждой отдельной варианты убывает, ибо число вариант возрастает, а сумма вероятностей всех вариант неизменно остается равной 1.

5. Чем длиннее ряд вариант, тем быстрее убывают частоты по направлению к краям ряда; поэтому с увеличением степени двучлена, сумма вероятностей средней части ряда будет расти за счет суммы вероятностей крайних членов ряда и будет исчерпывать все возрастающую часть единицы, оставляя на долю суммы вероятностей крайних вариант очень малую часть 1; при этом, с увеличением степени двучлена, для образования этой средней части ряда, почти исчерпывающей всю вероятность, достаточно брать все меньшее и меньшее число членов, сравнительно с общим их числом в ряде.

6. Наиболее вероятные варианты, лежащие в середине ряда, это варианты среднего состава, в которых элементы a и b повторяются равное число раз каждый или близкое к равному число раз, т. е. повторяются в таком числе раз, которое соответствует вероятности каждого элемента (равной $^1/_2$), или близко к ней.

7. Отсюда следует вывод: при сочетаниях, состоящих из достаточно большого числа случаев, наиболее вероятными, приближающимися к 1, являются такие сочетания, в которых элементы повторяются число раз, соответствующее их вероятности, или близкое к этому число раз.

Этот вывод может быть формулирован следующим образом: В производных совокупностях наиболее вероятными являются такие варианты, в которых число случаев каждого элемента пропорционально, или близко к его вероятности в первоначальной совокупности, причем вероятность таких вариант до-

стигает очень большой величины, если число случаев, из которых состоят варианты, достаточно велико.

Если вместо первоначальной совокупности, состоящей из одного элемента a и одного b, взять совокупность с неодинаковою вероятностью элементов, напр. a, b, b (где $p=\frac{1}{3}$ и $q=\frac{2}{3}$), то и здесь наиболее вероятной вариантой производной совокупности будет та, в которой элементы a и b повторяются пропорционально их вероятностям; разница будет лишь в том, что вероятности вариант, идущих в обе стороны от наиболее вероятной, не будут расположены симетрично; сочетания с преобладанием элементов, обладающих большею вероятностью, будут более вероятны; сочетания же с преобладанием элемента менее вероятного будут относительно реже.

Примечание. Вероятность сложных вариант производной совокупности, состоящих из сочетания элементов первоначальной совокупности, может быть получена более простым и общим способом на основании правил умножения и сложения вероятностей и бинома Ньютона.

Правило умножения вероятностей состоит в следующем: если вероятность элемента a составляет $\frac{c}{m}$ и вероятность элемента b соответственно $\frac{d}{m}$, то вероятность совпадения элементов a и b в одном каком либо определенном порядке равняется произведению их вероятностей. В самом деле, один какой либо элемент совокупности a может войти в группу из двух случаев либо оба раза, либо один раз вместе с каким либо другим из остальных элементов; таким образом получится m исходов; а так как всех элементов m, то всего получится $m \times m$ возможных исходов. С другой стороны, число групп, содержащих элементы a и b в каком нибудь одном определенном порядке, например, ab, определяется таким образом: один из элементов a может соединиться с каждым из элементов b, которых всего имеется d, образуя таким образом d возможных исходов; а так как всех элементов a имеется c, то всех вообще исходов ab будет $c \times d$. Вероятность же такого исхода составит:

$$\frac{c \times d}{m \times m} = \frac{c}{m} \times \frac{d}{m}.$$

Если мы желаем образовать группу из трех случаев и ищем вероятность совпадения одного элемента a с двумя случаями b в одном определенном порядке, например abb, то общее число исходов определяется следующим образом: какой нибудь один из $m \times m$ исходов предшествующего случая может соединиться с любым из m элементов, образуя m исходов, а так как всех исходов раньше было $m \times m$, то общее число

их теперь будет $m \times m \times m$. Равным образом, если мы к какому нибудь исходу группы ab прибавим последовательно каждое из b, то получим d исходов; а так как исходов ab было $c \times d$, то общее число исходов abb составит $c \times d \times d$ и вероятность такого исхода

$$\frac{c \times d \times d}{m \times m \times m} = \frac{c}{m} \times \frac{d}{m} \times \frac{d}{m}$$

и т. д.

Правило сложения относится к тому случаю, когда какое либо обстоятельство E может произойти в данной совокупности случаев различными способами: или в виде e_1, или в виде e_2 и т. д., и вероятность каждого такого вида соответственно составляет $p_1 = \frac{l_1}{n}$; $p_2 = \frac{l_2}{n}$... и т. д.; тогда вероятность p, что E вообще произойдет, или что оно произойдет любым способом, равняется сумме вероятностей или $p = p_1 + p_2 + \ldots$, ибо все случаи l_1; l_2;... каждого вида суть в то же время и случаями обстоятельства E, а общее число всех случаев $= n$. Так, если элементы a и b могут появиться в сочетании либо в виде ab, либо в виде ba и вероятность каждого вида составляет в отдельности $^1/_4$, то вероятность того, что сочетание будет вообще состоять из элементов a и b в любом порядке составит $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Если вероятность элемента a равняется p и элемента b q, то вероятность того, что в группе из 6 случаев a появится пять раз и b один раз в каком нибудь одном определенном порядке составит $p^5 q$; а так как порядок расположения элементов в группе может быть различен, то вероятность, что группа будет вообще состоять из 5 случаев a и 1 случая b в любом порядке их расположения, будет равняться сумме вероятностей каждого определенного порядка, или, в виду одинаковой вероятности каждого отдельного порядка—произведению последней на число возможных порядков расположения элементов. В группе из 6 различных случаев можно переставить их 6.5.4.3.2.1 способами; но так как в данном случае 5 случаев однородны, то общее число перестановок надо уменьшить во столько раз, сколько перестановок приходится на однородные элементы, в данном случае в 5.4.3.2.1 раз, таким образом вероятность сочетания 5 случаев a с одним b составит:

$$\frac{6.5.4.3.2.1}{5.4.3.2.1} \times p^5 q = 6 p^5 q.$$

Таким же образом вероятность появления элемента a четыре раза и элемента b два раза составит

$$\frac{6.5.4.3.2.1}{4.3.2.1 \times 2.1} \times p^4 q^2 = 15 p^4 q^2.$$

и вообще вероятность появления элемента a в группе из m случаев $m-k$ раз и элемента b k раз составит:

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots 3.2.1}{(m-k)(m-k-1)\ldots\ldots 2.1\times k(k-1)\ldots\ldots 2.1} p^{m-k} q^k.$$

Если разделить числителя и знаменателя дроби на $(m-k)(m-k-1)\ldots 3.2.1$, то же выражение примет вид:

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1.2.3\ldots(k-1)k} p^{m-k} q^k.$$

В общем виде вероятность вариант, получающихся от всех возможных сочетаний двух элементов, выражается разложением в ряд двучлена общего вида:

$$(p+q)^m$$

где p означает вероятность одного элемента (a), q—вероятность другого элемента (b); m—число случаев в группе.

В общем виде ряд строится по следующему закону:

$$(p+q)^m = p^m + m p^{m-1} q^1 + \frac{m(m-1)}{1.2} p^{m-2} q^2 +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} p^{m-3} q^3$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} p^{m-4} q^4 + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)}{1.2.3.\ldots\ldots k} p^{m-k} q^k + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots 3.2}{1.2.3\ldots(m-1)} p q^{m-1} + \frac{m(m-1)\ldots\ldots 3.2.1}{1.2.3\ldots\ldots(m-1)m} q^m.$$

Показатели степени при p убывают с каждым членом на 1, показатели при q возрастают на 1; в сумме показатели при p и q дают для каждого члена m. Числитель коэфициента состоит из произведения нисходящего ряда чисел, начиная от m и кончая показателем степени при p, увеличенным на 1; например, для члена, содержащего p в степени $m-k$, последний множитель числителя будет $m-k+1$; знаменатель коэфициента состоит из произведения ряда чисел, начиная с 1 и кончая показателем степени при q.

Нетрудно доказать, что коэфициент каждого члена может быть представлен также в виде дроби с произведением восходящего ряда чисел, начиная с 1 и кончая m в числителе, и в знаменателе с произведениями двух рядов— восходящего ряда, начиная с 1 и до показателя при p, и восходящего ряда, начиная с 1 и кончая показателем при q.

Такие произведения символически изображаются следующим образом:

$$\frac{m!}{(m-k)!\,k!} p^{m-k} q^k.$$

В этом ряде членов разложения бинома один член имеет наибольшее значение, т. е. больше предыдущего и больше последующего члена; пусть таким членом будет тот, который имеет p с показателем $m-k$ и q с показателем k; следовательно

$$\frac{m!}{(m-k+1)!\,(k-1)!}p^{m-k+1}q^{k-1} < \frac{m!}{(m-k)!\,k!}p^{m-k}q^{k} > \frac{m!}{(m-k-1)!\,(k+1)!}p^{m-k-1}q^{k+1}.$$

Сократив все части неравенства на

$$\frac{m!}{(m-k-1)!\,(k-1)!}p^{m-k-1}q^{k-1}$$

получим

$$\frac{1}{(m-k+1)\,(m-k)}p^2 < \frac{1}{(m-k)\,k}pq > \frac{1}{k\,(k+1)}q$$

Умножим каждый член неравенства на $\frac{(m-k)\,p}{p\,q}$:

$$\frac{(m-k)\,k}{(m-k+1)\,(m-k)}\cdot\frac{p^2}{p\,q} < \frac{(m-k)\,k}{(m-k)\,k}\cdot\frac{p\,q}{p\,q} > \frac{(m-k)\,k}{k\,(k+1)}\cdot\frac{q^2}{pq}$$

что после сокращений даст:

$$\frac{kp}{(m-k+1)\,q} < 1 \quad \text{и} \quad 1 > \frac{(m-k)\,q}{(k+1)\,p}$$

Заменим q через $1-p$ и освободим неравенство от знаменателей:

$$kp < (m-k+1)\,(1-p) \text{ и } (k+1)\,p > (m-k)\,(1-p).$$

Раскрыв скобки, сделав приведение, и перенеся некоторые члены в другую часть неравенства, получим:

$$mp+p-1 < m-k \text{ и } m-k > mp+p$$

или

$$mp-q < m-k > mp+p.$$

Так как $mp+p-1$ и $mp+p$ отличаются друг от друга на 1, то $m-k$ будет то целое число, которое содержится в пределах между $mp+p-1$ и $mp+p$. Таким числом будет либо mp, если mp целое число, или ближайшее к mp целое число, больше $mp-q$. Если же $mp-q$ и $mp+p$ оба представляют собою целые числа, отличающиеся одно от другого на 1, то в середине ряда будут два наибольших члена.

Следовательно наибольшее значение имеет тот член ряда или те два члена ряда, в которых показателем степени при p является число, пропорциональное вероятности p или ближайшее к нему целое число,

а показателем при q число, пропорциональное вероятности q или ближайшее к нему *).

Таким образом наиболее вероятной вариантой будет та, которая получается от сочетания элементов a и b, пропорционально их вероятностям; ближайшими к ней по величине вероятности будут те варианты, в которых сочетания элементов a и b менее всего уклоняются от их вероятностей; те же варианты, в которых число повторений элементов a и b сильно уклоняется от их вероятности, обладают малой вероятностью.

Вероятность наиболее вероятного сочетания элементов a и b или y_0 выражается формулой

$$y_0 = \frac{m!}{mp!\,mq!}\,p^{mp}\,q^{mq}.$$

При большом m нахождение численного значения этого выражения затрудняется необходимостью вычисления произведения длинного ряда нисходящих множителей. Это затруднение устраняется формулой Stirling'a, которая дает приближенную величину такого рода произведений сравнительно простым способом, а именно, произведение нисходящего ряда чисел от m до 1 или $m!$ приближенно равно

$$m^m\,e^{-m}\sqrt{2\pi m},$$

где e представляет основание неперовых логарифмов и равно 2,718... и π—отношение радиуса к окружности и приблизительно равно 3,14.

При помощи этой формулы (доказательство которой здесь не может быть приведено), после ряда преобразований, величина наиболее вероятного члена ряда выражается в следующем виде:

$$y_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}}.$$

Частота этой наиболее вероятной варианты пропорциональна ее вероятности, и если общее число всех возможных вариант N, то частота выразится величиной

$$Y_0 = \frac{N}{\sqrt{2\pi mpq}}.$$

Частота варианты, уклоняющейся от наиболее вероятной варианты на x, или отстоящей от нея на x членов, т. е. такой варианты, где элемент a появляется $mp - x$ раз, вместо наиболее вероятного числа раз mp, а элемент q $mp + x$, вместо mq раз, выразится:

$$y_x = \frac{m!}{(mp-x)!\,(mq+x)!}\,p^{mp-x}\,q^{mq+x}$$

*) Если $m - k = mp$, то $k = m - mp = mq$.

и после преобразований приближенно выразится в виде:

$$y_x = y_0 e^{-\frac{x^2}{2mpq}}$$

частота же такой варианты составит

$$Y_x = Y_0 e^{-\frac{x^2}{2mpq}}.$$

В частном случае, при $p = q = 1/2$, такова же будет частота и вероятность варианты, отстоящей на такое же число членов от наиболее вероятной варианты в другую сторону, т. е. такой, в которой элемент a повторяется $mp + x$ раз и элемент q $mq - x$ раз. Вообще же при всяком p и q сумма равностоящих членов или $y_x + y_{-x}$ равняется $2 y_0 e^{-\frac{x^2}{2mpq}}$.

Из формул видно, что вероятность вариант, уклоняющихся от наиболее вероятного сочетания, зависит от величины этого уклонения, является функцией уклонения. При этом функция эта обладает тем свойством, что значение ее быстро убывает по мере увеличения уклонения. Можно выбрать такие пределы уклонения для x в обе стороны от наиболее вероятного сочетания, например от $+l$ до $-l$ в обе стороны, что в этих пределах сумма вероятностей всех вариант будет больше суммы вероятностей всех вариант, лежащих за этими пределами. Сумма вероятностей этой средней части ряда P_l может быть выражена в виде

$$P_l = y_0 \sum_{x=-l}^{x=+l} e^{-\frac{x^2}{2mpq}} = y_0 2 \sum_{x=0}^{x=l} e^{-\frac{x^2}{2mpq}}.$$

С увеличением m абсолютная величина наиболее вероятной варианты y_0 убывает (так как в формуле $\frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}}$ все величины кроме m, которое мы увеличиваем, остаются постоянными); вместе с тем убывают значения и ближайших к y_0 вариант, заключающихся в пределах от $+l$ до $-l$; но варианты, лежащие ближе к краям ряда, за пределами $+l$ и $-l$, убывают еще быстрее. А так как сумма вероятностей всего ряда остается постоянной и равна 1, то сумма средней части ряда в пределах $\pm l$ растет за счет суммы крайних частей ряда, выходящих за эти пределы. Можно взять настолько большое m, что сумма вероятностей в границах уклонений на $-l$ и $+l$ от наиболее вероятного сочетания исчерпывает почти всю единицу. В наиболее вероятном сочетании элемент a будет повторяться mp раз; в крайних сочетаниях в границах уклонений от $-l$ до $+l$ он будет повторяться $mp - l$ раз и $mp + l$ раз. Если разделить число повторений элемента a на все число случаев в сочетании или m, мы получим вероятность элемента a

в данном сочетании; вероятность эта в крайних сочетаниях составит $p-\frac{l}{m}$ и $p+\frac{l}{m}$; при очень большом m дробь $\frac{l}{m}$ будет очень мала, и следовательно даже в крайних сочетаниях в границах уклонений $\pm l$ вероятность элемента a может быть сделана как угодно мало отличающейся от p; вместе с тем самая граница уклонений l делается как угодно малой, по сравнению со всем числом уклонений. Тогда можно сказать, что при достаточно большом m имеется как угодно большая вероятность, что варианты будут состоять из сочетания элементов в пропорции, отвечающей их вероятностям или уклоняющейся от их вероятностей на как угодно малую величину.

Если вероятности сумировать по как угодно малым интервалам уклонений x (или по dx), то сумирование превращается в интегрирование, знак Σ заменяется знаком интеграла и формула получает вид

$$P_l=\frac{2}{\sqrt{2\pi mpq}}\int_0^l e^{-\frac{x^2}{2mpq}}dx.$$

Эту формулу можно представить в несколько ином виде, если положить, что

$$\frac{x}{\sqrt{2mpq}}=t \text{ и следовательно } x=t\sqrt{2mpq} \text{ и } dx=\sqrt{2mpq}\cdot dt$$

и что $\frac{l}{\sqrt{2mpq}}=g$ или $l=g\sqrt{2mpq}$;

тогда формула примет вид

$$P_g=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^g e^{-t^2}dt.$$

В этой формуле P_g означает вероятность всех сочетаний в границах уклонений на $g\sqrt{2mpq}$ в одну сторону и $+g\sqrt{2mpq}$ в другую сторону от наиболее вероятного сочетания.

Вероятность P_g сразу растет очень быстро и уже при сравнительно малых уклонениях сторон почти исчерпывает 1.

Из приведенной в сокращенном виде таблицы значений вероятности P_g соответственно различной величине g, видно, что при $g=2$ (т. е. когда $\frac{l}{\sqrt{2mpq}}=2$ или $l=2.82\sqrt{mpq}$), $P=0.995$. Иначе говоря, существует вероятность, равная 0.995 (т. е. почти единица, почти достоверность), что на достаточно большое число всех вообще случаев данный элемент повторится такое число раз, которое пропорционально его вероятности или которое уклоняется от этого числа не больше, чем на $2.82\sqrt{mpq}$ в одну и другую сторону. Величина $\sqrt{mpq}$ представляет собою т. н. среднеквадратическое уклонение.

Так, если вероятность элемента a равняется $1/2$, и образуется сочетание из 100 случаев; то $p=q=\frac{1}{2}$, $m=100$ и $\sqrt{mpq}=$ $=\sqrt{100\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=5$; $3\sqrt{mpq}$ составит 15; наиболее вероятное число раз повторения элемента a в сочетании составит $mp=50$; уклонение в одну и другую сторону от этого числа на $3\sqrt{mpq}$ дает границы колебаний от 35 до 65. Вероятность P, что число раз повторения элемента a не выйдет за эти границы может быть найдена в таблице по величине

$$g=\frac{l}{\sqrt{2mpq}}=\frac{15}{\sqrt{2\times 25}}=2.12$$

этой величине g соответствует вероятность 0.9973. Уклонение на 15 составляет в данном случае 30% наиболее вероятной величины 50. Если вместо 100 элементов в сочетании взять 10000 элементов, то

$$\sqrt{mpq}=\sqrt{10000\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=50$$

уклонению на $3\times 50=150$ будет отвечать

$$g=\frac{150}{\sqrt{2\times 2500}}=2.12$$

и следовательно та же вероятность 0.9973. Наиболее вероятное число повторений элемента a составит $mp=5000$ и уклонение 150 составит лишь 3%; т. е. с увеличением числа случаев в сочетании относительные границы уклонений суживаются.

При $p=q=\frac{1}{2}$, вероятности последовательных сочетаний располагаются симетрично в обе стороны от наибольшего члена ряда; при неравенстве $p\gtrless q$ ряд становится несимметричным. Один (или два соседние) член ряда во всяком случае будет представлять максимальную вероятность, сравнительно с остальными, и таким членом будет тот, в котором элементы повторяются в сочетании, пропорционально их вероятностям, т. е.

$$y_0=\frac{m!}{mp!\,mq!}p^{mp}q^{mq};$$

но члены, расположенные в обе стороны от наибольшего, перестают быть соответственно равны друг другу, и ряд частот становится асимметричным. С несколько большим приближением величины членов отстоящих от y_0 на $+x$ и $-x$ выражаются:

$$y_x=y_0\,e^{-\frac{x^2}{2mpq}}\left(1+\frac{(p-q)x}{2mpq}\right)$$

$$y_{-x}=y_0\,e^{-\frac{x^2}{2mpq}}\left(1-\frac{(p-q)x}{2mpq}\right).$$

Однако с увеличением m асимметрия сглаживается; так при $p=\frac{1}{3}$, $q=\frac{2}{3}$ и при $m=4$, $m=6$ и $m=9$ получим:

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)^4=\frac{1}{81}(1+8+24+32+16);$$

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{2}\right)^6=\frac{1}{729}(1+12+60+160+240+192+64)$$

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)^9=\frac{1}{19683}(1+18+144+672+2016+4032+5376+$$
$$+4608+2304+512).$$

Поэтому при достаточно большом m мы можем практически рассматривать ряд как симетричный. Если производная совокупность образуется сочетанием элементов не одной простой первоначальной совокупности, но нескольких или многих, то и при неравенстве в них p и q, производная совокупность, при достаточно большом m, будет представлять симетричный ряд, если только не все неравенства $p \gtrless q$ будут направлены в одну и ту же сторону, и ни одна из первоначальных совокупностей не будет иметь подавляющего значения, сравнительно с другими, при образовании производной совокупности.

Математическое доказательство закономерной связи между первоначальной вероятностью элемента и вероятностью появления его в производных сочетаниях то или другое число раз составляет содержание теоремы Бернулли. Теорема Бернулли представляет собою умозрительное априорное логическое построение, не оперирующее ни с какими эмпирическими фактами или доказательствами.

Представим себе производную совокупность в виде результата некоторого мысленного эксперимента. Пусть дана некоторая первоначальная совокупность с определенною вероятностью и требуется путем мысленного эксперимента воспроизвести результаты сочетания элементов в группе, состоящей из 100 случаев. Для наглядности изобразим совокупности в каком нибудь конкретном виде и образование производной совокупности в виде какого нибудь конкретного процесса. Пусть монета, имеющая лицевую и оборотную сторону, представляет первоначальную совокупность, состоящую из двух элементов одинаковой вероятности; пусть производная совокупность образуется путем мысленного эксперимента—воображаемого повторного подбрасывания монеты, в результате которого после 100 подбрасываний получится неко-

торое сочетание случаев падения монеты лицевой и оборотной стороной кверху. На основании ранее приведенного соотношения между первоначальной и производной совокупностями мы можем предсказать наиболее вероятный исход такого мысленного эксперимента, а именно: наиболее вероятное соотношение числа случаев падения монеты лицом и оборотом кверху будет пропорционально вероятностям этих элементов в первоначальной совокупности, или близко к ним, т. е. вероятнее всего, что на 50 случаев лицевой стороны прийдется 50 случаев оборотной, или отношение будет близко к этому. Таким образом приведенное положение дает возможность судить о результатах мысленного опыта на основании знания условий, данных до опыта. Если бы мысленный опыт мы могли превратить в действительный, то приведенное положение могло бы стать орудием опытного исследования. Для того, чтобы мысленный опыт можно было заменить действительным экспериментом, последний должен давать всевозможные сочетания элементов, соответствующие всем мыслимым сочетаниям воображаемого эксперимента. Для того, чтобы действительность могла воспроизвести сочетание элементов в любом мыслимом порядке, она не должна давать какого либо предпочтения одному конкретному порядку наступления случаев при экспериментальном образовании сочетания перед другим мыслимым порядком, не должна включать в образующиеся группы одни случаи первоначальной совокупности предпочтительно перед другими, подобно тому, как логика дает каждому случаю логическую возможность попасть в группу в любом мыслимом сочетании с другими случаями. Отсутствие какой либо системы или подбора в порядке наступления событий означает господство случайности. Случайность же получается в результате стечения двух или нескольких независимых друг от друга причин. Поэтому, чтобы действительность дала наступление случаев в любом мыслимом порядке, появление каждого случая первоначальной совокупности, ввиде события действительного эксперимента, должно обусловливаться стечением независимо действующих причин. Одной из таких причин является наличность элементов в первоначальной совокупности, данной эмпирически (наличность двух сторон в монете). Другая причина (подбрасывание монеты) не должна находиться в какой либо закономерной связи с той или другой стороной монеты. При таких условиях повторное подбрасывание монеты осуществит появление сторон монеты в каком

либо конкретном порядке, который будет одним из мыслимых порядков. При достаточно большом числе опытов, фактически осуществимы все мыслимые порядки, а при таких условиях наиболее вероятными в действительности окажутся те исходы, которые наиболее вероятны в мыслимом построении сочетаний.

Таким образом, мы можем установить те условия, при наличности которых возможно применение понятия вероятности к эмпирическому опыту, в качестве средства об'яснения и предвидения действительного хода событий.

Прежде всего необходима наличность первоначальной совокупности. Анализ этой совокупности показывает, что она состоит из отдельных случаев, из которых каждый может представлять собою различные элементы или частью различные, частью одинаковые. Каждый случай в процессе опыта может переходить в соответствующее ему явление, событие, а потому может быть назван его причиной (точнее одной из причин), а весь комплекс причин — комплексной причиной событий. Случаи эти должны быть ограничены определенным числом, чтобы при данном количестве опытов или испытаний они всякий раз могли дать какое-либо вполне определенное сочетание. Все случаи должны быть нам исчерпывающе известны, дабы мы могли предвидеть все мыслимые сочетания. Наконец, случаи должны быть таковы, чтобы их можно было сосчитать, как равноценные единицы, что требует, чтобы они могли быть приняты в этом отношении за элементарно-простые далее не разложимые обстоятельства. Наличность комплексной причины делает возможным переход любого из ее случаев в соответствующее событие, но не определяет какой именно из случаев осуществится в данном испытании. Переход какого-либо случая комплекса в соответствующее ему явление обусловливается действием другой совокупности причин, дающих совместно одно общее действие. Эта дополнительная совокупность причин, проявляющихся совместно в одном общем действии, должна быть устроена таким образом, чтобы способ ее действия не обусловливался никакой закономерной связью ее с основной комплексной причиной, не находился ни в какой от нее зависимости. Тогда общий результат стечения в данном испытании действия основной комплексной причины и совокупной дополнительной причины будет представлять собою совпадение двух независимых друг от друга причинных рядов. Результатом та-

кого совпадения будет переход какого-либо одного случая основного комплекса в соответствующее ему событие. Так как исход данного испытания не является частным случаем какого-либо одного общего закона, и конфигурация условий, вызывающих данный исход создается на один данный случай и всякий раз заново, то исход каждого последующего испытания не зависит от исходов предыдущих опытов. Поэтому переход каждого случая основного комплекса в соответствующее событие в каждом данном опыте обеспечен также, как переход любого другого случая, что делает осуществимым всякое мыслимое сочетание случаев в ряде испытаний. При безразличном же отношении дополнительной причины к отдельным случаям основного комплекса и заново создаваемой конюнктуре условий каждого отдельного опыта, единственным фактором, неизменно и постоянно действующим в течение всего ряда опытов, остается численное отношение случаев основного комплекса, вследствие чего оно и проявляет свое действие в массе испытаний, делая наиболее вероятными сочетания случаев, отвечающие этому отношению. Таким образом при достаточно большом числе испытаний случай в хаотическом беспорядке воспроизводит все мыслимые сочетания, какие разум предусматривает в известной системе.

Конкретной иллюстрацией описанных условий могут служить следующие примеры: тиражи шаров разного цвета на угад, метание игральной кости, рулетка, лотто и т. п. При тираже шаров мы имеем первоначальную совокупность в виде основной комплексной причины, состоящей из определенного числа совершенно одинаковых шаров, различающихся лишь цветом. Опыт состоит в том, что шары помещаются в закрытой урне, тщательно перемешиваются, и один из них вынимается на угад. Различные сочетания шаров по цвету в ряде опытов или в ряде серий опытов создают производную совокупность. Безразличие шаров на ощупь, перемешивание их перед каждым опытом, случайное направление руки, вынимающей шар, обусловливают то что совокупность движений, дающих в результате тираж шаров, не находится ни в какой зависимости от цвета шара, как в каждом отдельном испытании, так и в ряде их. Точно также же ряд причин, вызывающих движение шарика рулетки и остановку его на определенном делении, не зависит от цвета или номера этого деления. Тоже и во всех других случаях.

Чтобы дать определение вероятности применительно к условиям действительного опыта в возможно простом виде, мы должны принять во внимание, что значение дополнительной совокупности причин сводится к тому, что 1) она делает необходимым в процессе опыта переход одного из случаев основного комплекса в соответствующее событие; 2) обеспечивает в ряде опытов появление каждого случая основного комплекса также, как любого другого, или, как выражаются, делает все случаи основного комплекса ровновозможными и 3) обеспечивает независимость каждого исхода от других. Если все эти результаты мы припишем в виде свойств основному комплексу, и скажем, что случаи основного комплекса должны отвечать следующим условиям: в каждом испытании должен осуществиться один из комплекса случаев; все случаи комплекса должны быть равновозможны, и каждый должен быть независим от других, то понятие вероятности в применении к действительному опыту может быть сведено к одной основной комплексной причине. Этот комплекс должен обладать следующими свойствами. Комплекс должен состоять из определенного числа случаев или причин; каждый случай должен представлять собою элементарное обстоятельство в том смысле, чтобы его можно было принять за простую далее неразложимую единицу; все случаи комплекса должны быть учтены исчерпывающим образом; в каждом опыте обязательно осуществляется один из случаев; осуществление одного исключает осуществление всякого другого случая в том-же опыте, или случаи должны быть взаимно исключающими друг друга; каждый случай должен быть равновозможен, и все случаи должны быть независимы друг от друга.

При наличности такого неизменного в течение всего ряда опытов комплекса определенного числа причин, элементарных, взаимно исключающих друг друга, равновозможных и независимых, с обязательным осуществлением одной из них в каждом опыте, вероятностью события называется отношение числа причин, вызывающих данное событие, к числу всех вообще причин данного комплекса; или, так как каждая причина вызывает один определенный соответствующий ей исход, то вероятность может быть определена и в терминах исходов: вероятностью события называется отношение числа исходов, дающих данное событие, к числу всех исходов; или, наконец, если понятие причины и исхода мы об'единим в один общий неопределенный термин

„шанса", то вероятностью события мы можем называть отношение числа шансов, благоприятствующих данному событию, к числу всех шансов.

Понятие основного комплекса причин и основанное на нем определение вероятности могут быть рассматриваемы двояко. Во-первых, мы можем рассматривать их как абстрактно-логические понятия, совершенно независимые от каких бы то ни было эмпирических явлений; в таком случае из понятия равновозможности и независимости причин систематически действующий разум может предусмотреть все мыслимые исходы определенного числа испытаний, с соответствующей каждому исходу его вероятностью, и таким образом, из данного определения вероятности, взятого в этом абстрактном смысле, с логическою необходимостью вытекают абстрактно математические положения теоремы Бернулли. С другой стороны, те-же понятия могут быть рассматриваемы с эмпирической точки зрения; в этом смысле они являются простым описанием тех условий действительности, при наличности которых совокупность испытаний фактически дает определенные правильные массовые результаты. Понятие основного комплекса изображает условия образования этих эмпирических правильностей, в виде известных свойств совокупности—с статической точки зрения; когда-же мы изображаем способ взаимодействия двух независимых рядов причин — основного комплекса и дополнительной причины — тот же процесс образования эмпирических массовых правильностей описывается с динамической точки зрения. Отсюда ясно, что из статического описания условий образования этого рода правильностей динамический процесс их образования является в виде естественно-необходимого результата. Таким образом, благодаря двоякому характеру, какой могут иметь основные понятия вероятности, из них, с одной стороны, с логической необходимостью вытекают абстрактно-математические положения теоремы Бернулли, с другой с необходимостью естественного закона — эмпирические правильности. Благодаря этому, дедукции из произвольно, но целесообразно выбранных отвлеченных понятий служат об'яснением индуктивно устанавливаемых закономерностей, и теория вероятности является орудием изучения действительности.

Теоремы вероятности дают нам возможность составить определенное суждение о ходе явлений в тех случаях, когда мы не обладаем полным знанием действительности. Когда мы обладаем

полным знанием, мы имеем возможность найти точный индуктивный закон, которому подчиняется явление. Если бы нам были известны все обстоятельства, вызывающие образование каждого случая, мы могли-бы установить с полною точностью исход каждого опыта и исход любой массы таких опытов. Между тем, когда мы имеем дело с массовыми правильностями статистического характера и с расчетами, построенными на теории вероятности, мы не знаем, наступит ли данное событие в отдельном случае или не наступит; мы говорим лишь о „возможных“ исходах опыта; по отношению же к исходу событий в совокупности случаев мы говорим о численном перевесе одних возможностей, сравнительно с другими. Это понятие „возможности“ по отношению к реальным событиям действительности является именно выражением нашего неполного знания всех причин, вызывающих явления. В самом деле, „возможность“, в смысле реальной категории быть или не быть явлению, не существует: в эмпирической действительности все причинно обусловлено, и явление произойдет одним определенным и предопределенным, безусловно необходимым способом. О возможности мы можем говорить лишь в области мысленного опыта, где от нас зависит либо мыслить событие наступившим, либо мыслить его ненаступившим, и оба случая для нас логически равноценны, ибо оба равномыслимы и следовательно равновозможны. Когда мы говорим о возможности или равновозможности двух (или нескольких) исходов по отношению к эмпирическим явлениям, подобный способ выражения является результатом неточного знания причин, предопределяющих исход события; и этот недостаток знания оставляет простор для допущения ряда мыслимых исходов. Допущения эти не могут быть однако произвольными, и мыслимые исходы не могут быть лишь абстрактно-логическими возможностями, дизъюнктивными суждениями, не основанными ни на каких эмпирических данных. Они не могут быть результатом полного незнания условий, производящих действительные явления. Одна логика дизъюнктивного суждения не может заменить знания действительности и не может служить средством об'яснения эмпирических явлений. Если допущения относительно различных мыслимых исходов опыта не могут быть результатом полного незнания, то они могут проистекать лишь от недостатка знания. Они должны быть во всяком случае основаны на некоторых об'ективных данных, хотя и недоста

точных для того, чтобы вполне и точно определить исход опыта, но достаточных для того, чтобы утверждать, что мыслимо на основании имеющегося знания условий опыта. Таким образом, понятие вероятности предполагает некоторое сочетание знания с незнанием, известную степень знания действительности. Степени знания действительности могут быть весьма различны; не всякая однако степень знания пригодна для определения вероятности события. Если-бы любая степень знания была достаточна для этой цели, мы имели-бы дело с различными вероятностями для одного и того-же события; но из различных вероятностей вытекают различные выводы относительно реального течения событий; все эти выводы не могут быть одновременно правильными по отношению к одной и той же действительности; только одно определенное исчисление может соответствовать действительным условиям опыта, и это одно единственно правильное исчисление будет исходить из одной определенной степени знания, из одного точно определенного сочетания знания и незнания. Таким образом, хотя применение понятия вероятности предполагает неполное отражение действительности в сознании и в этом смысле, как не вполне отвечающее действительности, может быть названо суб'ективным состоянием знания, самое исчисление вероятности основано не на этой суб'ективной особенности, а на той части состояния знания, которая отвечает об'ективным условиям действительности. Разумеется, это обстоятельство не может служить препятствием для того, чтобы делать вычисление вероятности и на основании недостаточной степени знания. В таком случае величина вероятности будет иметь характер суб'ективного ожидания, гипотезы; при проверке на опыте она может оказаться ложной и тогда теряет ценность; либо может оказаться отвечающей условиям действительности и в таком случае получает значение орудия об'яснения действительности. Но последнее значение она приобретает не на основании своего первоначального суб'ективного состояния, а благодаря тому, что это суб'ективное состояние знания при опытной проверке оказалось соответствующим об'ективным условиям действительности.

Из характера основных понятий вероятности явствует, какая часть условий действительности должна быть нам известна и относительно какой у нас имеется недостаток знания. Очевидно, нам должны быть известны те причины, из которых каждая

дает в опыте соответствующее ей явление, иначе говоря, мы должны обладать знанием состава основного комплекса причин; далее мы должны знать, что конструкция опыта—искуственная или естественная—такова, что исключает какую-бы то ни было зависимость между основным комплексом и дополнительной причиной и связь между общей конфигурацией всех условий одного и другого испытания. Но нам нет надобности обладать знанием конфигурации условий каждого отдельного случая. Нетрудно видеть, что при таком состоянии знания мы можем составить определенное суждение о результатах достаточно большого количества испытаний. Если в условиях действия дополнительной причины нет обстоятельств, благоприятствующих в ряде испытаний предпочтительному появлению одних причин основного комплекса сравнительно с другими, то единственным основанием — логическим и реальным — появления событий в массе испытаний остается их численное соотношение в основном комплексе; если исходы событий в каждом отдельном случае независимы друг от друга, то логически и реально не исключается наличность всякой и любой последовательности исходов. А так как мы не можем предвидеть исхода опыта в каждом отдельном случае, мы не в состоянии установить никакой закономерности для чередования единичных исходов; и наше предвидение и об'яснение может относиться лишь к целой совокупности испытаний, достаточно большой для того, чтобы дать простор логическому и фактическому осуществлению всех возможных сочетаний исходов.

Чем больше увеличивается число испытаний, тем яснее и точнее должно проявляться в общей их совокупности влияние основного комплекса; в каждом отдельном случае результат опыта зависит столько же от основного комплекса, сколько и от действия дополнительной причины; но в то время, как основной комплекс в составе всех своих элементов остается неизменным для всего ряда испытаний, действие дополнительной причины получает всякий раз направление, обусловленное специфической конфигурацией каждого данного случая; с увеличением числа испытаний влияние переменного действия фактической конфигураций отдельных случаев все более и более покрывается неизменным действием основного комплекса.

В экспериментальной совокупности мы имеем зависимость между вероятностью события, вычисленной до опыта, a priori,

на основании известных свойств первоначальной совокупности, и действительным исходом опытов. Раз такая зависимость установлена, она допускает обратный вывод: по исходу событий мы можем судить о их вероятности. Благодаря этому мы можем определить вероятность события на основании опыта, a posteriori, даже в том случае, если бы она была нам неизвестна до опыта. Если достаточно большое число опытов дает устойчивое соотношение числа случаев появления события в массе всех случаев; если уклонения от этого наиболее частого соотношения встречаются с определенной вероятностью, являющейся функцией величины уклонения, то с большой вероятностью мы можем допустить, что в основе совокупности случаев лежат условия, соответствующие понятию вероятности, и что наиболее вероятным выражением вероятности служит фактическое отношение числа случаев появления события к числу всех вообще случаев при достаточно большой массе наблюдений.

Это бетоятельство дает нам возможность перейти от совокупностей экспериментальных к совокупностям простого наблюдения. В последних мы нередко наблюдаем устойчивость всякого рода сводных величин, правильное распределение уклонений отдельных вариант; в общем мы имеем достаточно большое сходство с закономерностями, свойственными теоретическим и экспериментальным совокупностям. Но в условиях простого наблюдения естественно протекающих событий мы лишены возможности знать доопытные условия образования совокупности, которые дали бы нам возможность вычислить вероятность событий a priori, или вообще судить о том, насколько в этих условиях осуществляются допущения теории вероятности. Единственным источником для суждения о соответствии действительности теоретическим допущениям являются результаты наблюдения. Если эти результаты обнаруживают правильности, достаточно близко совпадающие с теоретическими закономерностями, мы имеем основание предполагать наличность условий, аналогичных допущениям теории вероятности; это дает нам возможность применить к наблюдаемой совокупности понятие вероятности и на основании результатов наблюдения определить ее величину. Эта гипотеза будет иметь тем больше оснований, чем больше и достовернее число наблюдений, на которых она основана, чем точнее совпадение наблюдаемых правильностей с теоретическими закономерностями.

При наличности этих условий и благодаря им, положения теоремы Бернулли получают применение и к совокупностям простого наблюдения. Однако вследствие того, что в совокупностях простого наблюдения вероятность события a priori неизвестна, положения теоремы Бернулли не могут быть к ним приложены непосредственно. Требуется несколько иная их формулировка. Эта измененная формулировка составляет содержание того, что в статистике называется законом больших чисел. Статистический „закон больших чисел“ имеет следующее содержание:

Если отношение числа случаев появления события к числу всех случаев наблюдения, вычисленное на основании достаточно большой совокупности случаев, может быть принято за апостериорное выражение вероятности, то, при достаточно большом числе новых однородных наблюдений, с наибольшей вероятностью можно ожидать такого отношения числа случаев появления события к числу всех наблюдений, которое отличается от принятой величины на практически малую величину, причем к исчислению как вероятности наиболее вероятного числа случаев появления событий, так и уклонений от этой величины могут быть применены положения теории вероятности.

Вероятность в применении к составным совокупностям. Теорема Бернулли относится к простейшему случаю, когда производная совокупность образуется из сочетаний элементов одной первоначальной совокупности. Если, вместо одной, взять две (или более) первоначальных совокупности, получится произвольная совокупность составного характера. Образование вариант произвольной совокупности зависит здесь от двух обстоятельств: во-первых, от того, какая совокупность берется для образования сочетания, и, во-вторых, какой элемент этой совокупности попадает в сочетание. Пусть даны две совокупности A и B и каждая из них состоит из двух элементов a и b. Если брать для образования вариант производной совокупности всякий раз по два случая, то все мыслимые соединения совокупностей дадут равновозможные исходы: AA, AB, BA, BB. Каждый из этих четырех случаев, в свою очередь, дает всевозможные сочетания элементов одной и другой совокупности: например, случай AA дает группы: aa, ab, ba, bb. Все мыс-

лимые соединения легко получить из следующей комбинационной таблицы:

		A	A	$Б$	$Б$
		a	b	a	b
A	a	aa	ab	aa	ab
A	b	ba	bb	ba	bb
$Б$	a	aa	ab	aa	ab
$Б$	b	ba	bb	ba	bb

Если не обращать внимания на порядок элементов, то производная совокупность будет состоять из 16 вариант, образующих следующие сочетания:

$$4\,aa,\ 8\,ab,\ 4\,bb.$$

Тот же результат можно получить, если вместо двух первоначальных совокупностей A и $Б$ взять одну, состоящую из элементов $aabb$.

Если взять более сложный случай, например, совокупность A, состоящую из элементов aab и совокупность $Б$ из элементов bc, то соединения совокупностей дадут по прежнему четыре мыслимых равновозможных исхода; для получения же всех возможных сочетаний элементов каждой пары совокупностей, нужно взять для каждой совокупности по 6 мыслимых исходов ее элементов (при меньшем числе исходов нельзя исчерпать всех мыслимых равновозможных сочетаний элементов). Результат можно видеть в следующей таблице:

		А	А	А	А	А	А	Б	Б	Б	Б	Б	Б
		a	a	b	a	a	b	b	c	b	c	b	c
А	a	aa	aa	ab	aa	aa	ab	ab	ac	ab	ac	ab	ac
А	a	aa	aa	ab	aa	aa	ab	ab	ac	ab	ac	ab	ac
А	b	ba	ba	bb	ba	ba	bb	bb	bc	bb	bc	bb	bc
А	a	aa	aa	ab	aa	aa	ab	ab	ac	ab	ac	ab	ac
А	a	aa	aa	ab	aa	aa	ab	ab	ac	ab	ac	ab	ac
А	b	ba	ba	bb	ba	ba	bb	bb	bc	bb	bc	bb	bc
Б	b	ba	ba	bb	ba	ba	bb	bb	bc	bb	bc	bb	bc
Б	c	ca	ca	cb	ca	ca	cb	cb	cc	cb	cc	cb	cc
Б	b	ba	ba	bb	ba	ba	bb	bb	bc	bb	bc	bb	bc
Б	c	ca	ca	cb	ca	ca	cb	cb	cc	cb	cc	cb	cc
Б	b	ba	ba	bb	ba	ba	bb	bb	bc	bb	bc	bb	bc
Б	c	ca	ca	cb	ca	ca	cb	cb	cc	cb	cc	cb	cc

Примечание: Так как каждый окончательный исход образуется соединением элементов двух совокупностей, первая же совокупность состоит из 3 элементов, а вторая, из 2, то элементам второй совокупности приходится повторяться чаще, и именно в пропорции, обратной отношению числа элементов каждой совокупности, или 3 : 2; иначе говоря, в то время, как каждый элемент совокупности *А* должен появиться два раза, каждый элемент совокупности *Б* должен появиться три раза.

Если не обращать внимания на порядок букв, то всего получится следующее число сочетаний:

Сочетания,	их число,	их вероятность
aa	16 . . .	$\frac{16}{144} = \frac{1}{9}$
bb	25 . . .	$\frac{25}{144} = \frac{25}{144}$
cc	9 . . .	$\frac{9}{144} = \frac{1}{16}$
ab	40 . . .	$\frac{40}{144} = \frac{5}{18}$
ac	24 . . .	$\frac{24}{144} = \frac{1}{6}$
bc	30 . . .	$\frac{30}{144} = \frac{5}{24}$

Тот же результат получится, если вместо двух первоначальных совокупностей A и $Б$ взять одну совокупность, состоящую из элементов

$$aaaa\,bbbbb\,ccc$$

(что непосредственно видно из комбинационной таблицы). Вообще, для всяких двух (или больше) первоначальных совокупностей можно подыскать одну совокупность с таким составом элементов, что она дает те же сочетания элементов и с тою же вероятностью, как и две первоначальные совокупности. Состав такой совокупности можно определить, если определить вероятность выхода элементов a, b, c на основании правил сложения и умножения вероятностей. Выход элемента a обусловливается вероятностью выхода совокупности A и вероятностью в ней элемента a; при 2 совокупностях вероятность каждой равна $^1/_2$; вероятность элемента a в совокупности A равна $^2/_3$; вероятность совпадения выхода совокупности A и выхода из нее элемента a по правилу умножения составит:

$$p_a = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Для b вероятность выхода из совокупности A, при наличности 2 совокупностей, составит:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

и из совокупности $Б$ таким же образом

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4};$$

по правилу сложения вероятность b при условии выхода или из A или из $Б$ составит

$$pв=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}.$$

Наконец, вероятность элемента c составит:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

Те же вероятности $\frac{4}{12}$; $\frac{5}{12}$ и $\frac{3}{12}$ дает совокупность, состоящая из 4 элементов a, 5 элементов b и трех c. Совокупность такого состава дает следующие вероятности различных соединений b, b и c в группах из 2 случаев:

$$aa \ldots\ldots\ldots \frac{4}{12}\cdot\frac{4}{12}=\frac{16}{144}=\frac{1}{9}$$

$$bb \ldots\ldots\ldots \frac{5}{12}\cdot\frac{5}{12}=\frac{25}{144}$$

$$cc \ldots\ldots\ldots \frac{3}{12}\cdot\frac{3}{12}=\frac{9}{144}=\frac{1}{16}$$

$$ab \text{ и } ba \ldots\ldots 2\cdot\frac{4}{12}\cdot\frac{5}{12}=\frac{40}{144}=\frac{5}{18}$$

$$ac \text{ и } ca \ldots\ldots 2\cdot\frac{4}{12}\cdot\frac{3}{12}=\frac{24}{144}=\frac{1}{6}$$

$$bc \text{ и } cb \ldots\ldots 2\cdot\frac{5}{12}\cdot\frac{3}{12}=\frac{30}{144}=\frac{5}{24}$$

Все эти мыслимые сочетания образуют производную совокупность того же состава, как и мыслимые сочетания элементов двух совокупностей A и $Б$. Таким образом случай образования производной совокупности из двух (или нескольких) первоначальных совокупностей можно свести к случаю образования производной совокупности из одной первоначальной совокупности. Поэтому положение теории вероятности, применимые к этому последнему случаю, могуть быть распространены и на случай образования производной совокупности из двух или многих пер-

воначальных совокупностей. И здесь, следовательно, наиболее вероятное число появлений какого-либо элемента в группе, состоящей из достаточно большего числа случаев, пропорционально вероятности этого элемента в первоначальной совокупности. Разница состоит лишь в том, что вероятность элемента в первоначальной совокупности имеет здесь составной характер и представляет собою среднеарифметическую (с весом) вероятностей этого элемента в простых совокупностях, из которых образована составная первоначальная совокупность. Если вероятность отдельных простых первоначальных совокупностей A, $Б$, B и т. д. обозначим через g_1; g_2; g_3... и т. д.; вероятность элемента a в каждой из указанных совокупностей обозначим соответственно через p_1; p_2; p_3.... и т. д., то составная вероятность p_a в составной первоначальной совокупности выразится ввиде:

$$p_a = g_1\, p_1 + g_2\, p_2 + g_3\, p_3 + \ldots\ldots$$

Как и в простейшем случае, вероятность сочетаний, уклоняющихся от наиболее вероятного исхода, является функцией уклонения и выразится той же самой формулой, как в теореме Бернулли.

Математическое доказательство изложенных положений в теории вероятности носит название закона больших чисел Пуассона. Закон больших чисел Пуассона представляет собою обобщение теоремы Бернулли. В теореме Бернулли в основе каждого опыта лежит одна неизменная вероятность события; в законе же больших чисел Пуассона вероятность события для каждого испытания меняется и зависит отвероятности появления совокупности и от обусловленной этой совокупностью вероятности наступления явления.

Подобно теореме Бернулли и закон больших чисел Пуассона допускает обратный вывод: на основании отношения числа случаев появления события к числу всех случаев опыта мы можем судить о вероятности события. Благодаря этому закон больших чисел Пуассона может быть применен к тем случаям, когда вероятность события a priori неизвестна, следовательно, эмпирическим случаям простого наблюдения. В этом отношении обобщение Пуассона представляет особую важность, так как эмпирические совокупности, получающиеся путем наблюдения, являются результатом весьма сложных условий и, вероятно, ни-

когда не подходят под схему одной простой совокупности, как этого требует теорема Бернулли. Положения же Пуассона допускают применение и в том случае, когда, совокупность случаев является результатом действия многих причин, обладающих различною вероятностью.

Закон больших чисел Пуассона основан на допущении, что появление в опыте той или иной совокупности, дающей явлению определенную вероятность его наступления, само является результатом случая и определяется вероятностью самой совокупности. Возможно представить себе условия опыта построенными несколько иначе, а именно, таким образом, чтобы появление определенной совокупности случаев в опыте определялось не только случайностью, но и известной системой. Так, например, вместо того, чтобы образовать группу из s шаров таким образом, чтобы перед всяким тиражем шара определять урну по жребию и из нее наугад тянуть шар, можно брать урны в известном систематическом порядке; можно сделать m тиражей подряд из одной урны и n тиражей из другой. Тогда отношение числа случаев появления первой и второй совокупности к общему числу опытов, или числа

$$\frac{m}{s} \text{ и } \frac{n}{s} \text{ или } \frac{m}{m+n} \text{ и } \frac{n}{m+n}$$

перестают быть выражением вероятности появления урн, а являются результатом определенного заранее установленного порядка.

Рассмотрение этого случая составляет содержание т. н. теоремы Пуассона. Теорема Пуассона доказывает, что если первоначальные совокупности берутся для образования производной совокупности в определенном постоянном отношении друг к другу, то и в этом случае наиболее вероятный результат достаточно большого числа опытов с очень большей вероятностью отвечает (составной) вероятности события, представляющей собою сумму произведений относительного числа случаев появления каждой совокупности на соответствующую ей вероятность события. Если первая, вторая и т. д. совокупность берутся для образования производной совокупности соответственно m_1, m_2, m_3.....m_n раз и отношения

$$\frac{m_1}{m_1+m_2+\ldots+m_n}; \frac{m_2}{m_1+m_2+\ldots+m_n} \ldots\ldots \text{и т. д.}$$

мы обозначим через $k_1, k_2, \ldots . k_n$, то составная вероятность выразится ввиде

$$p_0 = k_1 p_1 + k_2 p_2 + \ldots + k_n p_n.$$

Составная вероятность этого ряда может быт названа производной вероятностью постоянного состава (Bortkiewicz), в отличие от составной вероятности переменного состава, в который и выбор совокупности определяется случаем.

Вероятность уклонений от наиболее вероятного сочетания и здесь является функцией величины уклонения и подчиняется закону распределения, выражающемуся той же формулой, что и для случая, соответствующего теореме Бернулли. Разница заключается лишь в величине уклонений. Мера уклонений различных возможных сочетаний здесь меньше, чем в прежних случаях, что весьма понятно, если принять во внимание, что случай здесь отчасти заменяется известным порядком; порядок же, подчиняющийся определенному закону, устраняя действие случайности, стремится устранить случайные уклонения от нормы, отвечающей закону. Поэтому, поскольку определенный порядок примешивается к действию случая, он имеет тенденцию ограничивать размеры уклонения от нормы.

Элементам теоретической совокупности мы можем придавать либо количественное либо качественное значение. В первом случае каждое сочетание двух или более элементов будет давать определенную величину, и ряд сочетаний дает ряд количественных вариант. В частности, мы можем придать элементам значение количественных погрешностей наблюдения или измерения, положительных или отрицательных; например, элементу a можно придать значение положительной ошибки 1, элементу b отрицательной ошибки —1. Различные сочетания таких ошибок будут уклонять каждый случай измерения или наблюдения на определенную величину от истинного значения, и в результате ряда измерений или наблюдений мы получим ряд отличающихся друг от друга количественных вариант. Такой же ряд получится и в том случае, если элементам совокупности мы придадим значение не ошибок, а количественных уклонений от некоторой основной величины. Все подобного рода ряды количественных вариант будут обнаруживать известную закономерность — варианты различной величины будут встречаться с различной относительной частотою или вероятностью, что обуслов-

ливается всевозможными сочетаниями ошибок или уклонений, все же возможные сочетания подчиняются известной закономерности. Поэтому относительная частота отдельных вариант, или, точнее говоря, зависимость относительной частоты варианты от ее величины по сравнению с величиной какой либо исходной варианты, принимаемой за основание для сравнения, может служить характеристикой ряда. Однако, для более простой сумарной характеристики подобного рода рядов могут служить просто средние величины ряда, так как в них положительные и отрицательные погрешности взаимно уничтожаются вполне или отчасти, и в результате получаются величины совпадающие или близкие к истинным или основным величинам наблюдения; средние величины ряда характерны и в том отношении, что они обладают наибольшей относительной частотой, так как являются результатом некоторого среднего сочетания положительных и отрицательных погрешностей, лежащего по середине между результатами крайних сочетаний одних только положительных или одних только отрицательных ошибок; крайние же сочетания обладают меньшею вероятностью, сравнительно со средними. Так как сумарная характеристика рядов количественных вариант посредством средних величин, как более простая, чаще применяется на практике и исторически вошла в употребление раньше более сложной характеристики ряда посредством распределения вариант, то отдел статистики, изучающий свойства рядов количественных вариант получил название учения о средних величинах.

Если элементы совокупности имеют качественный характер, каждый элемент изображает собою определенное явление, и сочетание элементов представляет собою сочетание явлений. В этом сочетании нас может интересовать то, как часто или сколько раз повторяется одно определенное явление на то или другое число всех вообще явлений данного сочетания. Это отношение числа случаев появления какого либо явления к числу всех вообще случаев представляет собою то, что мы называем относительным числом, и учение о рядах качественных вариант может быть названо поэтому учением об относительных числах.

Таким образом на основе закономерностей, свойственных сочетаниям элементов при образовании теоретических производных совокупностей из совокупностей первоначальных, строится учение о средних и учение об относительных величинах. Зако-

номерность как средних, так и относительных величин сводится к одной и той же закономерности сочетаний, но она характеризуется в том и другом случае в несколько иных терминах и расматривается с несколько различных точек зрения, в зависимости от разницы между количественным и качественным характером рядов явлений.

Средние величины.

Средней величиной вообще называется величина, не выходящая за пределы крайних вариант совокупности. Из числа возможных средних величин некоторые имеют особое практическое и теоретическое значение. К числу их, прежде всего, относится средняя арифметическая, издавна занявшая прочное положение в статистике; с тех пор, как особое внимание было обращено на свойственную многим статистическим материалам асимметрию, получили значение две другие средние: средняя наибольшей частоты (мода) и средняя центральная (медиана). В известных случаях применяется средняя геометрическая.

Средняя арифметическая. Средней арифметической называется величина, которая получается от деления суммы вариант на их число. Если одни и те же варианты встречаются в совокупности более одного раза, то непосредственное сумирование вариант заменяется сумированием произведений каждой варианты на ее частоту. Если обозначим среднеарифметическую через M_e, варианту через v и частоту через f, то

$$M_e = \frac{Sfv}{Sf}.$$

Когда варианты расиределяются по не непрерывным интервалам от . . . до . . ., с одной общей частотой для всего интервала, то при вычислении средней приходится заменять действительные величины вариант в пределах каждого интервала центральной вариантой этого интервала. Если центральная варианта по своей величине совпадает с среднеарифметической каждого интервала, такой способ вычисления дает верный результат; поскольку величина центральных вариант расходится с среднеарифметическими своих интервалов, результат снабжен погрешностью. Погрешность эта бывает тем меньше, чем симет-

ричнее ряд (ибо погрешность одной половины ряда погашается обратной погрешностью другой половины), чем меньше интервалы (ибо и самое расхождение центральной и среднеарифметической интервала в этом случае меньше); чем больше число наблюдений в совокупности (ибо тогда каждый интервал заполнен большим числом случаев и поэтому равномернее), и чем меньше прибавлено вариант с нулевыми частотами для образования крайних интервалов. Опыт показывает, что даже при сравнительно неравномерном распределении вариант и относительно немалых интервалах погрешность обычно не достигает размеров, которые имели бы практическое значение для элементарных статистических вычислений, в особенности, если принять во внимание, что при обычной неточности первоначальных наблюдений статистической практики нет оснований стремиться к слишком большой математической точности результатов вычислений, которая может дать превратное представление о точности результатов. А так как вычисление по непрерывным интервалам представляет значительные практические удобства, то этот способ целесообразно применять даже и тогда, когда первоначальный ряд дан в дискретных вариантах, заменяя последние с этой целью непрерывными интервалами от . . . до . . . Ниже приведен пример погрешностей при вычислении средней по разным интервалам и при разной начальной точке. Первоначальный ряд—сколько раз встречается в латинском тексте буква i на 100 букв текста: всего взято 100 сотен; в них буква i встречается всего 1179 раз, т. е. на сотню букв в среднем 11.79 раз. Если соединить по две варианты в один интервал (5—6, 7—8 и т. д.) и взять в каждом интервале центральную варианту (5.5; 7.5 и т. д.), то средняя составить 11.84; при образовании интервалов путем соединения трех вариант, средняя = 11.76; при интервалах в 4 варианты средняя = 11.88, при интервалах в 5 вариант = 11.80. Погрешности составляют: 0.05; 0.03; 0.07; 0.01.

Число раз в сотне	Число сотен
5	1
6	3
7	2
8	7
9	11
10	10
11	14
12	11
13	16
14	6
15	8
16	5
17	2
18	2
19	1
20	1

Если для образования интервалов

из 3 вариант взять началом крайнего интервала варианту 3 (3—5, 6—8 и т. д.), то средняя = 11.84; при начальной точке 4 (4—6; 7—9 и т. д.) средняя = 11.78; при начальной точке 5 (5—7; 8—10 и т. д.) средняя = 11.76. Погрешности составляют = 0.05; 0.01; 0.03. Результат зависит главным образом от того, насколько симметрично группируются варианты в интервале вокруг центральной варианты.

При вычислении средней арифметической нередко приходится иметь дело с умножением многозначных, целых или дробных, цифр, что затрудняет вычисление. Последнее можно упростить путем введения условных величин вариант.

1. Если нам дан ряд вариант

232, 234 и т. д. до 238,

из которых каждую приходится множить на какую нибудь частоту, то мы можем ограничиться умножением каждой частоты лишь на последнюю цифру варианты: 2, 4 . . . . 8 и к результату прибавить 230. Графически этот прием обозначает то, что мы передвигаем нулевую точку абсциссы на место варианты 230; тогда ближайшая варианта окажется в точке равной 2 и т. д. Когда вычисление окончено, и получен результат при условном положении нулевой точки (напр. среднеарифметическая оказалась бы в точке равной $4\frac{1}{4}$), переносим нулевую точку обратно на ее первоначальное место, и найденная при вычислении точка выражается в подлинных значениях вариант (варианта, соответствующая точке $4\frac{1}{4}$ окажется в точке, соответствующей варианте $234\frac{1}{4}$).

2. В иных случаях удобно переносить нулевую точку в середину ряда; в таком случае варианты вправо будут выражаться положительными цифрами, варианты влево—отрицательными, например:

0	2	232	234	236	238	240
		—4	—2	0	2	4

После перемножения этих условных вариант, мы получим результат, который окажется на некотором расстоянии от нулевой точки вправо или влево; заменив нулевую точку подлинной вариантой, т. е. прибавив к полученному результату 236, мы получим окончательный результат, выраженный в подлинных вариантах ряда.

3. Если ряд идет равными интервалами от нулевой точки, то, не меняя положения нулевой точки, можно подлинные интервалы заменить условными, принимая их равными единице; например, пусть ряд идет от 0 равными интервалами в 0.06; принимая интервал 0.06 равным 1, получим для части ряда следующие условные варианты:

0	0.06	0.24	0.30	0.36
0	1	4	5	6

Результат вычислений с условными вариантами следует умножить для получения подлинной величины на действительную величину интервала.

Особенного внимания заслуживает способ вычисления, состоящий в сочетании двух приемов: перенесения нулевой точки в середину ряда и принятия равных интервалов за единицу; при этом в одну сторону варианты получают положительное значение, в другую отрицательное. Условные значения вариант перемножаются на соответствующие частоты и алгебраическая сумма произведений делится на сумму частот. Чтобы этот результат, полученный в условных обозначениях, перевести на подлинную величину, надо, во-первых, умножить его на подлинное значение интервала и, во вторых, к полученной величине прибавить подлинное значение варианты, условно приравненной нулю. Ход вычислений виден из приводимого ниже примера.

Подлинные варианты.	Частоты.	Варианты в условном обозначении интервалов.	Произведения.
v	f	z	fz
6	6	—2	—12
9	28	—1	—28
12	41	0	0
15	19	1	19
18	5	2	10
21	1	3	3
	$s=100$		—40
			32
			$Sfz=-8$

$$\frac{Sfz}{Sf} = -0.08 = v_1 \; ; \; v_1 \times i = -0.08 \times 3 = -0.24$$

$$Me = 12 - 0.24 = 11.76.$$

Условные обозначения вариант в интервалах, принятых за единицу, выражают собою расстояние каждой варианты от условной нулевой точки, измеренное определенным числом интервалов, равных единице. Среднеарифметическая вариант в условном обозначении выражает среднеарифметическое расстояние вариант от условного нуля, или расстояние между точкой, где лежит среднеарифметическая величина вариант, и точкой условного нуля. Расстояние это может быть положительным или отрицательным, в зависимости от того, лежит ли среднеарифметическая справа или слева от условного нуля. Оно выражено в условных интервалах, равных единице. Чтобы выразить то же расстояние в мере подлинных интервалов, его надо умножить на величину подлинного интервала (i). Чтобы найти подлинное значение варианты, лежащей в точке среднеарифметической величины, условную нулевую точку надо заменить подлинным значением варианты, лежащей в этой точке.

Среднеарифметическая расстояний вариант ряда от нулевой точки обозначается термином момент распределения. Если расстояния взяты в первой степени, как это было сделано для вычисления среднеарифметической величины ряда, указанная величина называется первым моментом; для других вычислений надо брать расстояние в квадратах, кубах, четвертой степени и т. д.; среднеарифметическая квадратов расстояний называется вторым моментом, расстояний в третьей степени—третьим моментом и т. д. Моменты разных степеней служат удобным способом для получения равного рода величин, которые нужны для построения формул, предложеных Пирсоном (Pearson); эти формулы служат для подыскания теоретических рядов, соотствующих эмпирическим рядам, и для получения различных величин, характеризующих ряды. Вычисление среднеарифметической ряда посредством способа моментов (а именно, при помощи первого момента) является таким образом частным случаем применения этого общего приема вспомогательного вычисления.

Условная исходная нулевая точка для вычисления моментов может быть взята произвольно в любом месте ряда; ее удобно помещать в середину ряда, так как при таком положении расстояние вариант выражается меньшими цифрами, чем если бы нулевая точка находилась бы где нибудь на краю ряда, или за его пределами, а это облегчает вычисления; а также по-

тому что в середине ряда обыкновенно находятся одна из наибольших частот, которую таким образом приходится умножать на 0.

Из всех точек середины ряда, которые можно принять за нулевую точку, особенное значение имеет точка, где лежит среднеарифметическая варианта, так как все величины формул Пирсона вычисляются в моментах от этой точки. Однако брать расстояние вариант непосредственно от точки средней арифметической ряда неудобно, так как она обычно лежит внутри какого либо интервала, и расстояния от нее до вариант пришлось бы выражать в частях интервала, т. е. в числах с дробями. Поэтому моменты первоначально вычисляются от какой-либо произвольно выбранной средней варианты, совпадающей с одной из вариант ряда, и затем при помощи соответствующих формул, переводятся в моменты от средней арифметической точки. Моменты от произвольной нулевой точки обозначаются греческою буквою ν, и от средней арифметической буквою μ. Нулевой момент от любой нулевой точки, равняется 1; действительно, каждое расстояние в нулевой степени равняется 1; если мы каждую единицу умножим на соответствующую частоту и сумму произведений разделим на сумму частот, в результате получим 1. Поэтому нулевой момент от среднеарифметической точки или μ_0 также $= 1$. Первый момент от среднеарифметической точки или $\mu_1 = 0$, так как среднеарифметическая лежит именно в точке среднеарифметического расстояния. Зависимость между остальными моментами от произвольной нулевой точки и от точки среднеарифметической выражается следующими формулами:

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2$$
$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3$$
$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4$$

(или в общем виде:

$$\mu_n = \nu_n - n\nu_1\mu_{n-1} - \frac{n(n-1)}{1.2}\nu_1^2\mu_{n-2} - \ldots.)$$

Численный пример вычисления моментов приводится ниже:

v	f	z	fz	fzz	fz^3	fz^4
6	6	—2	—12	24	—48	96
9	28	—1	—28	28	—28	28
12	41	0	—	—	—	
15	19	1	19	19	19	19
18	5	2	10	20	40	80
21	1	3	3	9	27	81
S	100		—40	100	—76	304
			+32		+86	
SS			— 8		10	

$$\nu_1 = -0.08 \qquad \mu_0 = 1$$
$$\nu_2 = 1.00 \qquad \mu_1 = 0$$
$$\nu_3 = 0.10 \qquad \mu_2 = 0.9936$$
$$\nu_4 = 3.04 \qquad \mu_3 = 0.339\,488$$
$$\mu_4 = 3.397\,555\,2$$

Среднеарифметическая дает характеристику целого ряда одной общей цифрой. Такая характеристика является очень простой и потому очень удобной, но в то же время она недостаточна. Два ряда могут значительно отличаться друг от друга и в то же время давать одинаковые среднеарифметические варианты; в одном ряде варианты могут быть сгруппированы близко к средней, в другом—рассеяны на более значительном протяжении. Разстояние всей совокупности отдельных вариант от среднеарифметической является существенным пополнением характеристики как ряда, так и его среднеарифметической. Это расстояние для всей совокупности вариант выражается в среднем уклонении. Простое среднее уклонение представляет среднеарифметическую из абсолютных (без внимания к знаку) величин разниц между каждой вариантой и среднеарифметической ряда.

Если среднеарифметическую варианту обозначим через Me, отдельные варианты ряда через v, частоты—через f, среднее уклонение через d, то

$$d = \frac{S\,(v - Me) \times f}{Sf} = \frac{S\,[x]}{Sf}$$

Так два ряда:

1	3	5	7	9
1	2	5	8	9

дают одну и ту же среднюю 5, но в первом среднее уклонение составляет $^{12}/_{5}$, в другом $^{14}/_{5}$.

Одна и таже абсолютная сумма уклонений может состоять в свою очередь, из отдельных уклонений более равномерных или более различающихся друг от друга, например:

1	3	5	7	9
2	2	5	8	8

оба ряда дают одинаковую среднюю 5 и одинаковое среднее уклонение $^{12}/_{5}$. Можно оттенить способ распределения уклонений, если каждое уклонение вместо первой степени взять в квадрате. Тогда большие уклонения получают преобладание сравнительно с меньшими. Так первый ряд дает сумму квадратов уклонений 40, второй—36. Если взять для характеристики уклонений квадраты уклонений, мы получим т. н. среднеквадратическое уклонение (δ), которое равно корню квадратному из среднеарифметической квадратов уклонений, или

$$\delta = \frac{\sqrt{Sfx^2}}{Sf}$$

Из определения видно, что квадрат среднеквадратического уклонения есть не что иное, как второй момент распределения, взятый от точки средней арифметической ряда, так что

$$\delta = \sqrt{\mu_2}$$

Среднеквадратическое уклонение является величиной особенно характерной для среднеарифметической; среднеарифметическая обладает тем свойством, что сумма квадратов уклонений от нее представляет величину меньше суммы квадратов уклонений от всякой другой величины ряда. Так в ряде

1	3	5	7	9

сумма квадратов уклонений от 5 составляет 40, от 3—60, от 4—45 и т. п.

Другое характерное свойство среднеарифметической в отношении уклонений это то, что алгебраическая (со знаками) сумма уклонений в первой степени равна 0. Благодаря этим

двум свойствам среднеарифметическая становится частным случаем средних величин, характеризуемых тем общим свойством, что суммы уклонений в n-ой степени в обе стороны от средней равны, а в $(n+1)$-ой степени—минимальны. Из этого типа средних в статистике находит применение, кроме среднеарифметической, медиана, для которой сумма уклонений в 0 степени дает равные числа в обе стороны, а сумма уклонений в первой степени—минимум.

В одном случае среднеарифметическая получает особый смысл, а именно, когда варианты ряда расположены симметрично по отношению к средней, и частоты вариант наростают по направлению к середине ряда. Подобного рода ряды представляют аналогию с членами разложения бинома $(p+q)^n$ при $p=q=\frac{1}{2}$. В таких рядах уклонения вариант от среднеарифметической можно рассматривать, как результат сочетаний положительной и отрицательной погрешности (или уклонения) одинаковой величины и равной вероятности. В средней арифметической все уклонения, благодаря симетрии ряда, взаимно уничтожаются, средняя оказывается свободной от погрешностей и может быть рассматриваема, как верное выражение истинного значения величины, лежащей в основе ряда; отдельные варианты представляются в таком случае как бы образовавшимися из этой основной величины, путем присоединения к ней сочетания случайных ошибок измерения или наблюдения или реальных уклонений от типа; частоты эмпирического ряда представляются членами разложения бинома. В таких рядах вычисление средней арифметической является, очевидно, способом получить наиболее верное выражение истинного значения основной величины. Это обстоятельство служит теоретическим основанием применения средней арифметической.

Ниже приведен пример 196 случаев измерения суммы трех углов треугольника. Истинное значение измеряемой величины равняется 180^0; действительные результаты измерения уклоняются от этой величины вследствие случайных ошибок на то или иное число секунд. Если отдельные измерения свести в интервалы по величине уклонения, получается следующая таблица:

Уклонения от . . до . . v	Число случаев f	Условн. интерв. z	fz	fz^2
—1.7 . . —1.3	3	—3	— 9	27
—1.2 . . —0.8	13	—2	—26	52
—0.7 . . —0.3	51	—1	—51	51
—0.2 . . +0.2	71	0	. .	. .
0.3 . . 0.7	37	1	37	37
0.8 . . 1.2	13	2	26	52
1.3 . . 1.7	8	3	24	72
	196		+87 —86	291
			+ 1	

$$\nu_1 = \frac{1}{196} = 0.005$$

$$\nu_2 = \frac{291}{196} = 1.48$$

$$Me = 0.0'' + 0.005 \times 0.5 = 0.0025''$$

$$\mu_2 = 1.48 - 0.005^2 = 1.48.$$

При вычислении по принятым интервалам средняя арифметическая дает уклонение от истинного значения всего на $0.0025''$. Сопоставляя данный эмпирический ряд с двучленом

$$\frac{196}{64}(1+1)^6$$

получаем следующую таблицу:

Эмпирический ряд 3; 13; 51; 71; 37; 13; 8.
Теоретический ряд 3; 18; 46; 62; 46; 18; 3.

Если двучлен $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^6$ представляет вероятность всех возможных сочетаний некоторой положительной и отрицательной ошибок ε, обладающих равными вероятностями, то первый член разложения бинома даст частость сочетания шести отрицательных ошибок, или -6ε, второй 5 отрицательных и одной положительной или -4ε и т. д. Сравнение центральных вариант

интервалов эмпирического ряда с результатами сочетания ошибок теоретического ряда даст следующую таблицу:

Эмпирический ряд: $-1{,}5$; $-1{,}0$; $-0{,}5$; 0; 0,5; 1,0; 1,5.

Теоретический ряд: -6ε; -4ε; -2ε; 0; 2ε; 4ε; 6ε.

Из этого сопоставления видно, что $\varepsilon = 0.25$. Таким образом варианты эмпирического ряда могут быть рассматриваемы, как результаты сочетания положительной и отрицательной ошибки $= 0.25$, и мы можем рассматривать эмпирические результаты как бы слагающимися из основной величины и сочетания привходящих в измерение случайных погрешностей; члены разложения бинома $(1+1)^8$ представляют теоретические частоты соответствующих вариант.

Пример более удовлетворительного соответствия между эмпирическим и теоретическим рядами дает следующая таблица, основанная на большем числе наблюдений.

В ней приведены измерения роста призывного населения Подольского уезда Московской губернии; рядом с эмпирическими цифрами показаны цифры теоретического ряда, полученные путем разложения двучлена восьмой степени с пропорциональным увеличениям ряда, чтобы привести его к сумме наблюдений эмпирического ряда:

$$\frac{7879}{256}(1+1)^8 =$$

$$\frac{7879}{256}(1+8+28+56+70+56+28+8+1).$$

Интервалы.	Эмпир. ряд.	Теор. ряд.	Разница между эмп. и теор. цифрами в % теорет. ряда.
32,6875—33,6875	7	31	—80%
33,6875—34,6875	218	246	—11,4
34,6875—35,6875	793	862	— 8,0
35,6875—36,6875	1734	1724	+ 0,6
36,6875—37,6875	2219	2154	+ 3,0
37,6875—38,6875	1731	1724	+ 0,4
38,6875—39,6875	833	862	— 3,3
39,6875—40,6875	275	246	+ 1,2
40,6875—41,6875	69	31	+123,0
	7978	7880	

По аналогии с теоретическим рядом, средний рост можно рассматривать, как наиболее верное приближенное выражение не-

которой типичной величины, от которой рост отдельных индивидов уклоняется под влиянием стечения случайных причин положительного и отрицательного характера. Частость отдельных размеров роста аналогична вероятности соответствующих сочетаний теоретического ряда.

Варианты эмпирического ряда сводятся к вариантам теоретического ряда в данном случае несколько более сложным способом, вследствие того, что среднеарифметическая эмпирического ряда не лежит точно в центре ряда, вследствие некоторой его асимметри. В подобных случаях уклонения эмпирического ряда надо высчитывать не от среднеарифметической ряда, а от центральной его варианты, лежащей в той точке ряда, которая соответствует нулевой точке биномиального ряда. Такой вариантой в данном случае будет 37,1875, тогда как среднеарифметическая составляет 37,2505. Уклонение центральных вариант каждого интервала от этой точки будут:

$$-4, \quad -3, \quad -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4.$$

Всевозможные сочетания двух элементарных ошибок $-\varepsilon$ и $+\varepsilon$ равной вероятности при восьми элементах в сочетании дают ряд:

$$-8\varepsilon, \quad -6\varepsilon, \quad -4\varepsilon, \quad -2\varepsilon, \quad 0, \quad 2\varepsilon, \quad 4\varepsilon, \quad 6\varepsilon, \quad 8\varepsilon.$$

Из сопоставления обоих рядов видно, что для эмпирического ряда $\varepsilon = {}^1/_2$. Чтобы выразить варианты эмпирического ряда при помощи найденой величины ε, считая уклонения от среднеарифметической точки ряда, надо каждое уклонение увеличить на разницу между вариантой взятой за исходную точку, и среднеарифметической, т. е. на величину $37,1875 - 37,2505 = -0,0630$; тогда ряд уклонений представится в следующем виде:

$$-6 \times \frac{1}{2} - 0,063; \quad -4 \times \frac{1}{2} - 0,063 \ldots\ldots 0 \times \frac{1}{2} - 0,063;$$

$$1 \times \frac{1}{2} - 0,063 \ldots\ldots 6 \times \frac{1}{2} - 0,063, \text{ что составить:}$$

$-4,063$; $-3,063$; $-2,063$; $-1,063$; $-0,063$; $0,937$; $1,937$; $2,937$; $3,937$.

Степень (m), в которую надо вывести двучлен $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)$ для того, чтобы получить теоретический ряд, наиболее подходящий к эмпирическому ряду, определяется формулой

$$m = 4\mu_2$$

В первом примере $\mu_2 = 1,4847$, $m = 5,9$; во втором $\mu_2 = 1,8954$, $m = 7,5816$. Момент μ_2 следует брать здесь всегда в условных интервалах, равных 1.

Преобразование эмпирического ряда посредством бинома имеет нестольно практическое, сколько теоретическое значение. Оно элементарными средствами показывает наглядно, что совокупность уклоняющихся друг от друга вариант какого либо однородного явления может быть рассматриваема, как уклонения от некоторого истиного значения конкретной величины или типа, происходящие от всевозможных сочетаний элементарной ошибки или уклонения (или системы таковых) положительных и отрицательных равной вероятности (при симетрии ряда). Аналогия с биномом дает возможность просто и наглядно обосновать применение среднеарифметической, как наиболее вероятного приближенного выражения истинной величины, а частоты отдельных вариант, как эмпирические выражения вероятности соответствующих случайных ошибок или уклонений.

Практического значения этот способ преобразования эмпирического ряда не имеет ввиду того, что, во первых, этим путем редко можно получить удовлетворительное совпадение теоретического ряда с эмпирическим; правда, степень совпадения увеличивается с возрастанием степени бинома, но в таком случае возникает второе неудобство—а именно, сложность арифметических вычислений. Оба неудобства устраняются применением формулы, которая соответствует биному при достаточно высокой степени показателя

$$y = \frac{N}{\sqrt{2\pi\mu_2}} e^{-\frac{x^2}{2\mu_2}}.$$

В этой формуле N обозначает общее число случаев совокупноети или ряда, π равняется 3,141593, $\varepsilon = 2{,}718282$, μ_2 обозначает второй момент распределения и x—уклонение от средней арифметической ряда. В знаменателе величина μ_2 должна быть взята в условных интервалах, равных 1, в выражении же $\frac{x^2}{2\mu_2}$ она может быть взята либо в этих же интервалах, либо в подлинных, при условии, что в тех же единицах берется и уклонение x. Первая часть выражения, а именно $\frac{N}{\sqrt{2\pi\mu_2}}$, представляет собою величину наибольшей частоты ряда (y_0), соответствующей нулевому уклонению или среднеарифметиче

ской теоретического ряда. В обе стороны от наибольшей частоты равные уклонения x дают равные значения y-ов, так что ряд является симетричным и притом убывающим по направлению к краям. Графически формула дает непрерывную кривую с максимальной ординатою посередине и симетрично расположенными ветвями, асимптотически приближающимися к оси абсцис. Величина максимальной ординаты и крутость под'ема кривой зависит от величины среднеквадратического уклонения ряда или $\mu_2 = \delta^2$. Указанная здесь кривая носит название нормальной кривой Гаусса.

Вычисления при помощи этой формулы облегчаются готовыми таблицами функции

$$F = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \int_0^{x/\delta} e^{-x^2/2\delta^2} dx,$$

где по величине x/δ дается сумма вероятностей (сумма $\frac{y}{N}$) от 0 до $+x$ или от 0 до $-x$; для получения частот в абсолютных цифрах соответствующую цифру таблицы нужно умножить на N. Для того, чтобы найти частоту вариант в пределах интервала от $x = a$ до $x = b$ надо найти сумму частот до большего уклонения и вычесть сумму частот до меньшего уклонения.

Если не требуется особой точности, то для практических целей удобно пользоваться сокращенной таблицей функции F, помещаемой ниже. Цифры в графе u означают величины x/δ, т. е. уклонения от среднеарифметической (нулевой точки), выраженные в единицах среднеквадратического уклонения. Из $x/\delta = u$ следует, что $u \times \delta = x$, т. е. что значения u, умноженные на среднеквадратические уклонения ряда, дают величину определенного уклонения от нулевой точки. Цифра, стоящая в графе F_u против соответствующего u, означает вероятность всех уклонений от нулевой точки до $x = u\delta$ в обе стороны. Чтобы по этой вероятности получить абсолютную цифру частот, надо соответствующее значение F_u помножить на сумму частот всех членов ряда. Если цифру вероятности помножим на 100, получим % числа случаев, не выходящих за пределы уклонений от $-u\delta$ до $+u\delta$. Так, например, для случая измерений суммы углов треугольников, второй момент распределения от средне-

квадратической, выраженный в интервалах = 1, $\mu_2 = 1{,}4847$; в переводе на подлинные интервалы, равные 0,5, $\mu_2 = 0{,}7424$ и $\delta = \sqrt{\mu_2} = 0{,}61$; если взять пределы уклонений от $-0{,}7$ до $+0{,}7$, то $u = \frac{x}{\delta} = \frac{0.70}{0.61} = 1.15$. Для $u = 1{,}1$ соответствующее значение $F_u = 0{,}73$, для $u = 1{,}2$, $F_u = 0{,}77$, и для промежуточного значения $u = 1{,}15$, F_u составит 0,75. При 196 случаях ряда $0{,}75 \times 196$ составит 147, т. е. 147 случаев ряда не должно выходить за пределы уклонений от $-0{,}7$ до $+0{,}7$, если ряд построен аналогично нормальной кривой. В действительности в данном эмпирическом ряде в этих пределах содержится больше, а именно 159 случаев. Подобным же образом в пределах от $-1{,}2$ до $+1{,}2$ (при $u = \frac{1.20}{0.61} = 2.0$ $F_u = 0{,}95$; $0{,}95 \times 196 = 186$) согласно закону нормальной кривой должно лежать 186 случаев; действительное число случаев 185.

Таблица значений F_u

u	F_u	u	F_u	u	F_u	u	F_u
0.1	0.08	0.7	0.52	1.3	0.81	1.9	0.94
0.2	0.16	0.8	0.58	1.4	0.84	2.0	0.95
0.3	0.24	0.9	0.63	1.5	0.87	2.1	0.96
0.4	0.31	1.0	0.68	1.6	0.89	2.2	0.97
0.5	0.38	1.1	0.73	1.7	0.91	2.3	0.98
0.6	0.45	1.2	0.77	1.8	0.93	2.4	0.98

u	F_u
2.5	0.99
3.0	0.997
3.5	0.999
4.0	0.99994

Преобразованный по формуле нормальной кривой ряд величин роста дает следующие результаты:

Интервалы.	Эмпирические частоты.	Теоретический ряд.
31,6875—32,6875	—	3
32,6875—33,6875	7	35
33,6875—34,6875	218	208
34,6875—35,6875	793	763
35,6875—36,6875	1734	1680
36,6875—37,6875	2219	2231
37,6875—38,6875	1731	1790
38,6875—39,6875	833	866
39,6875—40,6875	275	253
40,6875—41,6875	69	45
41,6875—42,6875	—	4

Нормальная кривая может служить теоретическим выражением эмпирических рядов в случае их симетрии. А так как в действительности вполне симетричные ряды встречаются только в виде исключения, то и применение нормальной кривой должно было бы быть весьма ограниченным. Теоретическим критерием применимости нормальной кривой, согласно Пирсону, являются равенства:

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = 0 \; ; \; \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = 3$$

$$\text{и } F = 2\beta_2 - 3\beta_1 - 6 = 0,$$

которым должен удовлетворять эмпирический материал. Если F и β_1 незначительно уклоняются от 0, это может быть приписано неточности эмпирического материала, и в этом случае применение нормальной кривой допускают при условии, если величина

$$\frac{\beta_1 (\beta_2 + 3)^2}{4 (4\beta_2 - 3\beta_1) (2\beta_2 - 3\beta_1 - 6)} \times \mu_2^3$$

не выходит за пределы ± 1. Г. Дункер находит допустимым применение нормальной кривой в тех случаях, когда выражение:

$$\frac{3\nu_2^2 - 2\nu_1^4 + \frac{1}{60}}{\nu_4}$$

которое теоретически должно быть равно 1, не выходит за пределы 0,8 — 1,25.

Условие, требующее, чтобы эмпирический материал давал критерий, равный точно определенной величине, трудно выполнимо и крайне ограничивает случаи применения нормальной кривой. На практике, однако, применение нормальной кривой гораздо шире, чем это допускается строго математическими критериями. Ее вообще применяют во всех случаях, когда асимметрия ряда неособенно велика, и здесь применение ее оправдывается ее сравнительной простотой и тем соображением, что при обычной неточности первоначальных эмпирических данных нет оснований стремиться к математической точности в их обработке. Даже для рядов явно асимметричных обычно пользуются приемами исследования, основанными на свойствах нормальной кривой, как то, при определении крайних допустимых пределов уклонений от средней, вероятности уклонений до известных пределов и т. п., и лишь в случаях резкой асимметрии нормальная кривая утрачивает свое значение, как способ преобразования ряда и сохраняет значение разве как критерий для обнаружения степени асимметрии.

Подобно тому, как симетрические ряды могут быть сводимы к биному $(p+q)^m$ при $p=q$, несиметрические ряды во многих случаях могут быть рассматриваемы, как эмпирическое выражение бинома $(p+q)^m$ при $p \gtrless q$. При $p>q$ большие частоты расположены в первой половине ряда и постепенно убывают к концу ряда, при $p<q$ — обратно.

Для отыскания величин p, q и m, наиболее соответствующих эмпирическому материалу, в этом случае служат следующие уравнения:

$$p+q=1$$

$$p-q=d=\frac{\mu_3}{\mu_2}$$

$$m=\frac{4\mu_2}{1-d^2}.$$

Так для примера на стр. 77:

$\mu_2 = 0.9936$
$\mu_3 = 0.339488$
$4\mu_2 = 3.9736$
$\frac{\mu_3}{\mu_2} = 0.3146 = d$
$d^2 = 0.1167$
$1-d^2 = 0.8833$

$p+q=1$
$p-q=0.3416$
$2p=1.3416$
$p=0.67$
$m=\frac{3.9736}{0.8833}=4.5$

с округлением цифр получаем двучлен:

$$100 \times (0.7 + 0.3)^4,$$

дающий следующий ряд:

$$100 \times (0.2401 + 0.4116 + 0.2646 + 0.0756 + 0.00081).$$

Сопоставление полученного ряда с эмпирическим приведено в следующей таблице:

v	f	f'	$f-f'$
6	6	0	+6
9	28	24	+4
12	41	41	0
15	19	26	−7
18	5	8	−3
21	1	1	0
	100	100	0

Сведение несиметрического эмпирического ряда к биному представляет те же неудобства, что и в рядах симетричных. Сверх того, вследствие различной степени асиметрии и различного характера строения ряда, многие ряды вовсе не поддаются удовлетворительному изображению посредством бинома. Поэтому несиметричные ряды нуждаются в лучшем способе теоретического изображения в большей степени, чем это имеет место для симетричных рядов. Само собою разумеется, что для изображения несиметричных рядов нужны различные формулы, сообразно с различным характером эмпирического материала. Среди возможных способов преобразования эмпирических рядов особенного внимания заслуживает способ, предложенный Пирсоном, о котором будет сказано ниже.

Асиметрия рядов имеет следствием то, что средняя арифметическая может не быть вариантой, обладающей наибольшей частотой. Это бывает уже и в рядах, выражающихся при помощи бинома. Член разложения бинома, дающий максимальную величину, определяется выражением

$$y_0 = \frac{m!}{mp!\ mq!} p^{mp} q^{mq}$$

если mp и mq целые числа; если они дробные то mp и mq заменяются ближайшими целыми числами, удовлетворяющими неравенствам

$$mp - q < \mu p < mp + p.$$

Так как первый член разложения содержит p в степени m, второй—в степени $m-1$, то член в степени mp находится на $(m-mp+1)$-ом месте ряда. Если mp целое число, то в этом же месте ряда находится и среднеарифметическая варианта; если mp не целое число и наибольшая частота выражается членом, показатель которого ближайшее к mp целое число, то среднеарифметическая остается на прежнем месте, не совпадает с вариантой наибольшей частоты, и положение ее на оси абсцисс (точка Ma оси) определяется выражением

$$Ma = m - mp + 1 = mq + 1 = \frac{m}{2}\Big(1 - (p-q)\Big) + 1.$$

Так как разница между mp и ближайшим к нему целым числом не может быть значительна, то в несиметричных рядах этого типа расхождение среднеарифметической и варианты с наибольшей частотой также не может быть значительным. Но в рядах иного типа оно может достигать значительных размеров. Кроме того, что среднеарифметическая может утратить свойство быть наиболее вероятной вариантой ряда, она перестает быть выражением истинной величины, свободной от погрешностей; она равняется истинной величине с прибавлением некоторой средней погрешности. Так, если отрицательная погрешность $-\varepsilon$ обладает вероятностью $^1/_3$ и положительная $+\varepsilon$ вероятностью $^2/_3$, то всевозможные сочетания погрешностей в группах по 6 элементов дадут следующие результаты.

$$\begin{aligned}
6\times -\varepsilon \quad &= -6\varepsilon \\
(5\times -\varepsilon) + \varepsilon \quad &= -4\varepsilon \\
(4\times -\varepsilon) + 2\varepsilon \quad &= -2\varepsilon \\
(3\times -\varepsilon) + 3\varepsilon \quad &= \quad 0 \\
(2\times -\varepsilon) + 4\varepsilon \quad &= +2\varepsilon \\
-\varepsilon + 5\varepsilon \quad &= +4\varepsilon \\
6\varepsilon \quad &= +6\varepsilon
\end{aligned}$$

Соответствующие частоты выражаются членами разложения бинома.

$$\Big(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\Big)^6 = \frac{1}{729}(1 + 12 + 60 + 160 + 240 + 192 + 64).$$

Среднеарифметическая варианта равняется

$$Me = \frac{(-174 + 1632)\varepsilon}{729} = 2\varepsilon$$

и совпадает с вариантой наибольшей частоты; она представляет истинную величину с прибавлением средней погрешности равной 2ε.

Ввиду этого в асимметрических рядах средняя арифметическая теряет свое прежнее значение—она не выражает истинной величины, и вместе с тем и самое понятие истинной величины теряет реальное значение: последняя не находит себе об'ективно-эмпирического выражения в какой-либо характерной варианте ряда. Представление об истинной величине получает характер вспомогательной абстрактной фикции. По аналогии с рядами симетрическими, среднюю арифметическую можно рассматривать гипотетически как бы составленной из двух факторов: некоторой истиной величины и излишка одних уклонений сравнительно с другими. Но так как в средней эти два фактора органически слиты и нигде раздельно эмпирически не расчленяются, то подобное гипотетическое представление не дает каких либо полезных результатов. Средняя арифметическая оказывается, таким образом, просто выражением одной из вариант ряда, снабженной некоторым уклонением, подобно другим вариантам, и с этой точки зрения ничем по своей реальной природе не выделяется среди всех остальных вариант ряда. В то-же время среднеарифметическая, расходясь с вариантой наибольшей частоты, перестает быть и наиболее вероятной величиной совокупности. Она сохраняет лишь значение, как такая точка ряда, которая дает в обе стороны равные суммы уклонений с обратными знаками. Значение это характерно и весьма существенно, но внешне-формально и не имеет ничего общего с значением арифметической средней при симетрическом расположении уклонений, когда средняя может быть рассматриваема, как реальное выражение истиной величины.

Чтобы вернуть среднеарифметической ее прежнее значение, иногда отбрасывают крайние варианты; благодаря этому асимметрия ряда в известной степени уменьшается, и средняя передвигается в место сравнительно симетрического скопления вариант. Однако прием этот не имеет теоретического обоснования и может вести к ложным результатам. Если асимметрия произошла от смешения разнородных рядов, относящихся к явлениям разной величины (например, урожай при разной технике обработки), то возникает необходимость не отсечения крайних вариант, а разделения материала. Если крайние варианты про-

изошли от грубой ошибки наблюдения, они должны быть исключены, но не как крайние, а как ошибочные, если это можно установить; но на том-же основании подлежат исключению и некрайние варианты. Во всех других случаях исключение крайних вариант является просто суб'ективным усмотрением, искажающим об'ективные результаты цифр; решая, какие варианты мы считаем неподходящими, мы этим самым предрешаем вопрос о том, какую среднюю мы считаем подходящей. Вообще же стремление превратить асиметричный ряд в симетричный во что-бы то ни стало ни на чем не основано, так как асиметрия связана, очевидно, с природой, если не всех, то многих естественных и социальных явлений. Естественные и общественные условия жизни организма и человека допускают, повидимому, вариации в устройстве органов, функциях и действиях в одну сторону большие, чем в другую, без вреда или с пользой для организма.

Если асиметрия рядов не есть случайность или уклонение от симетрии, а явление органическое, то очевидно, что особая природа таких рядов требует особых величин для своей характеристики, и вполне естественно, что среднеарифметическая, имеющая реальное значение в рядах асиметричных, теряет его в рядах асиметричных и что в последних эту роль должна выполнить какая-либо другая характерная величина. Прием отбрасывания крайних вариант, в сущности, представляет собою попытку подойти к такой характерной для асиметрических рядов величине, хотя и исходящую из ложных оснований, но стремящуюся к правильной цели. Отбрасывая крайние варианты и передвигая этим среднеарифметическую к месту наибольшего скопления вариант, мы приближаем среднеарифметическую к наиболее часто встречающейся варианте ряда, так называемой моде.

Мода, варианта наибольшей частоты, лежит в месте наибольшего скопления вариант; ближайшие к ней варианты образуют обычно некоторый участок кривой более или менее симетрично расположенных частот; мода является средним выражением этих наиболее распространенных величин ряда, выражением наиболее вероятного результата совместного действия всех факторов, производящих наиболее частый тип явления. Уклонения от этого типа, хотя и достигают сравнительно больших размеров, но встречаются относительно редко; от этого типа естественно измерять уклонения всех других величин ряда.

Мода является, таким образом, типичным и жизненно-реальным представителем ряда.

Теоретическое местонахождение моды следует отличать от эмпирического ее места в ряде. Вследствие недостаточно большого числа наблюдений, или случайно, в центральном месте наибольшего скопления вариант и наростания частот—там, где можно было-бы ожидать варианту наибольшей частоты, нередко оказывается частота меньшая, сравнительно с соседними; часто эмпирические ряды дают две, три (и больше) вариант, разделенных промежутками меньших частот. Эти случайности эмпирического материала часто сглаживаются при сведении материала в большие интервалы, выборе другой начальной точки для группировки по интервалам или выравнивании ряда элементарными приемами, после чего ряд обнаруживает максимальную частоту для одного определенного интервала. В этом интервале, следовательно, и лежит мода. Положение ее здесь определяется формулой:

$$Mo = l + \frac{F_0 - F_{+1}}{2F_0 - F_1 - F_{-1}} \cdot i$$

где l означает начальную границу интервала, F_0 частоту интервала, где лежит мода, F_1 и F_{-1} частоты следующего и предшествующего интервалов, i величину интервала. Если интервал с наибольшей частотою можно получить путем незначительной перегруппировки ряда, или если различные приемы распределения первоначальных цифр ряда дают моду приблизительно в одном и том-же месте ряда, можно думать, что место это приблизительно и в грубых чертах соответствует об'ективному характеру материала. Если-же для получения одной максимальной частоты требуется какая либо слишком искусственная группировка или разные приемы дают моду в разных местах ряда, эмпирическое определение ее становится произвольным. Вообще же эмпирические способы определения моды в той или иной мере несвободны от произвола. Верное местонахождение моды дается путем теоретического вычисления. К сожалению, теоретическое вычисление моды усложняется тем обстоятельством, что положение моды зависит от степени и характера асимметрии ряда; поэтому предварительно приходится найти тип кривой, соответствующей эмпирическому материалу (об этом будет сказано дальше) и затем вычислить положение

моды способом, соответствующим данному типу. Определение же типа кривой требует довольно сложных вычислений.

Можно привести формулы вычисления моды для двух сравнительно распространенных типов кривых, а именно для кривых I и IV типа Пирсона.

Первый тип кривых Пирсона служит теоретическим выражением эмпирического материала в том случае, если последний удовлетворяет следующим критериям:

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} > 0$$

$$F = 2\beta_2 - 3\beta_1 - 6 < 0 \quad , \text{ где } \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

Тип IV применим при условии если

$$\beta_1 > 0 \; ; \; \beta_2 > 3 \text{ и } F > 0$$

В типе I величина моды определяется следующей формулой:

$$Me - Mo = \frac{\mu_3}{2\mu_2} \cdot \frac{s+2}{s-2},$$

для типа IV

$$Me - Mo = \frac{\mu_3}{2\mu_2} \cdot \frac{s-2}{s+2}$$

где $s = \frac{6(\beta_2 - \beta_1 - 1)}{2\beta_2 - 3\beta_1 - 6}$.

В виду сложности вычисления моды этим путем Пирсон дает простой способ приблизительного вычисления положения моды; этот способ может быть применяем в рядах неособенно большой асимметрии. Мода лежит по другую сторону от медианы, сравнительно с средней арифметической, расстояние ее от среднеарифметической втрое больше, чем расстояние между среднеарифметеческой и медианой. Указанное отношение выражается формулой:

$$Me - Mo = 3\,(Me - Mi)$$

и следовательно

$$Mo = Me - 3\,(Me - Mi)$$

Так как величина медианы (Mi) определяется просто (см. ниже), то вычисление не представляет затруднений.

Расстояние между среднеарифметической и модой $(Me - Mo)$, выраженное в единицах среднеарифметического уклонения

($\delta = \sqrt{\mu_2}$) служит мерой асимметрии ряда и для асимметрических рядов является одной из существенных характеристик.

Из способа вычисления теоретической величины моды видно, что мода зависит от всех величин ряда, так как значение ее определяется на основании средней арифметической и средних квадратических и кубических уклонений. При эмпирическом же нахождении моды она определяется лишь местом наибольшего скопления вариант и следовательно не зависит от вариант, лежащих за пределами этого скопления.

Как среднеарифметическая, так и мода являются характерными величинами ряда при условии, если он представляет достаточно большое скопление вариант в одном месте — либо в центре ряда при симетрии, либо на одной из ветвей кривой при асимметрии. Если такого наростания частот нет, мода совершенно теряет смысл, а среднеарифметическая получает условно-формальное значение. В таких рассеянных рядах приобретает значение новая средняя величина — центральная средняя или медиана. Медиана (Mi) это та варианта, которая находится в средине ряда и делит его пополам таким образом, что в обе стороны от нее расположено одинаковое число вариант: с одной стороны — варианты больше медианы, с другой — меньше ее. В этом отношении медиана представляет некоторую аналогию со средней арифметической; среднеарифметическая также делит ряд на две части таким образом, что с одной стороны лежат величины меньше средней, с другой — больше средней. Разница состоит в том, что средняя арифметическая дает равные суммы уклонений в обе стороны, тогда как средняя центральная — только равное число уклонений. Как величина средней арифметической, так и величина медианы зависят от всех величин ряда; но зависимость среднеарифметической от всех величин ряда больше, чем медианы; средняя арифметическая зависит от абсолютной величины каждой варианты, медиана же только от относительной величины варианты, определяющей место этой варианты в ряде. Поэтому чем больше абсолютная величина какой-либо отдельной варианты ряда, тем более она перемещает положение среднеарифметической, притягивая ее к себе; тогда как по отношению к медиане, самая большая варианта оказывает лишь то влияние, что, укладываясь в одной из половин ряда, прибавляет с этой стороны одну лишнюю варианту и

таким образом передвигает медиану по направлению к себе на один или половину интервала.

По своему математическому характеру медиана относится к одному роду величин со средней арифметической; подобно тому, как уклонения от средней в первой степени дают одинаковые суммы в обе стороны, а уклонения в квадрате дают минимальную сумму, так и медиана обладает аналогичным свойством, но лишь с понижением уклонений на одну степень: уклонения в нулевой степени дают равные суммы в обе стороны (ибо каждое уклонение в нулевой степени равно 1, а число уклонений в обе стороны одинаково), а уклонения в первой степени по абсолютной величине дают минимальную сумму.

Если ряд построен из дискретных вариант, то при нечетном числе вариант модой будет варианта, лежащая в средине ряда, при четном — средняя из двух соседних вариант в центре ряда. Если ряд построен по интервалам, то положение медианы определяется суммированием частот последовательных интервалов, начиная с крайнего, до тех пор, пока сумма частот составит ровно $^1/_2$ всего числа вариант ряда. Если частоты распределены таким образом, что сумма их до известного интервала меньше $^1/_2$ всех частот ряда, а с прибавлением данного интервала становится больше $^1/_2$, то медиана лежит внутри данного интервала. Положение ее здесь можно определить, если допустить, что в пределах интервала варианты распределены равномерно по всему протяжению интервала. Пусть до данного интервала сумма частот составляет N_1, менее $\frac{N}{2}$ половины всего числа членов ряда на величину m, или $\frac{N}{2} - N_1 = m$; недостающее число вариант m надо взять из данного интервала, начиная с нижней границы интервала v_i; если на протяжении интервала i находится f частот, то одна частота занимает $\frac{i}{f}$ интервала и m частот занимает $\frac{m \cdot i}{f}$ интервала и следовательно медиана будет лежать в точке

$$v_i + \frac{m \cdot i}{f}$$

Способ вычисления показан на следующем примере:

v	f	Sf
56	1	1
56 — 66	3	4
66 — 76	4	8
76 — 86	8	16
86 — 96	14	30
96 — 106	17	—
106 — 116	3	—
	Сумма 50	

$\frac{1}{2} \times 50 = 25$; сумма первых 4 интервалов составляет 16, до половины всего числа членов не достает $25 - 16 = 9$ вариант. Пятый интервал $86 - 96$ на протяжении $i = 10$ содержит 14 вариант; на одну варианту приходится $\frac{10}{14}$ интервала, на 9 недостающих вариант $90/14 = 6.4$ интервала; следовательно медиана лежит от нижнего предела интервала или от $v_4 = 86$ на расстоянии 6.4 и составляет

$$Mi = 86 + 6.4 = 92.4.$$

Этот способ вычисления может быть изображен графически. Обозначим интервалы на оси абсцис; суммы частот изобразим в виде пропорциональной длины ординат, выходящих из конечных точек каждого интервала; верхние концы ординат соединим прямыми линиями, которые образуют кривую (собственно ломаную линию). Взяв на оси ординат точку, соответствующую $^1/_2$ всего числа членов ряда, проводим от нее прямую параллельно оси абсцис; она встретит кривую как раз в точке, отвечающей сумме половины всего числа частот ряда; перпендикуляр, опущенный из этой точки кривой на ось абсцис, покажет на ней соответствующее значение медианы.

Особо от всех предыдущих средних стоит средняя геометрическая (Ge); геометрическая средняя представляет собою корень степени, равной числу вариант, из произведения вариант

$$Ge = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}$$

Вычисление средней геометрической облегчается при помощи логарифмов; так как

$$lg\ Ge = \frac{1}{n}\ (lg\ a_1 + lg\ a_2 + \ldots + lg\ a_n);$$

то логарифм средней геометрической получается путем вычисления средней арифметической из логарифмов вариант. Если варианты снабжены частотами, то формула принимает следующий вид:

$$lg\ Ge = \frac{1}{Sf}\ (f_1\ lga_1 + f_2\ lga_2 + \ldots + f_n\ lga_n).$$

Средняя геометрическая не обладает такими свойствами, которые ставили бы ее в реально-наглядное отношение к отдельным величинам любого статистического ряда. К тому же способ вычисления ее довольно сложен. Благодаря этим обстоятельствам она редко применяется на практике. Средняя геометрическая получает однако вполне определенный смысл в одном случае, а именно, когда ряд составлен так, что одни величины во столько же раз больше, во сколько другие меньше какой-либо одной основной величины; тогда при перемножении всех величин противоположные отклонения взаимно уничтожаются и корень соответствующей степени из произведения вариант, т. е. средняя геометрическая дает истинное значение основной величины *). Ряды этого рода характеризуются тем, что они построены по неравным интервалам, возрастающим в геометрической прогрессии.

*) Какой смысл может иметь применение средней геометрической, видно из следующего примера. При взвешивании на неверных весах, если на одной чашке весов взвешиваемый груз g весит g_1, а на другой — g_2, и длина неравных коромысел с одной и другой стороны соответственно равны l_1 и l_2, то существуют соотношения:

$$gl_1 = g_2 l_2 \text{ и } gl_2 = g_1 l_1,$$

откуда

$$g = g_2 \frac{l_2}{l_1} \text{ и } g = g_1 \frac{l_1}{l_2}$$

и

$$g^2 = g_1 g_2 \frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{l_1}{l_2}$$

или

$$g = \sqrt{g_1 g_2}\ .$$

т. е. средняя геометрическая из двух ошибочных результатов дает правильный вес груза.

Такой характер имеет, например, следующий ряд:

Частота	Варианта	Интервал от	Интервал до	Величина интервала
1	25	18,75	37,50	18,75
5	50	37,50	75,00	37,50
10	100	75	150	75
5	200	150	300	150
1	400	300	600	300

В нем варианты в одну и другую сторону от 100 получаются путем деления и умножения этого среднего числа на 2, на 4 и могут быть рассматриваемы, как выражение основной величины, снабженное особого рода погрешностями; средняя геометрическая равная 100 дает истинное значение основной величины. Поэтому средняя геометрическая является подходящей средней величиной для рядов подобного строения, когда мы имеем основание предполагать, что по характеру явления варианты возрастают в геометрической прогрессии. Ряды этого рода асимметричны даже при симетричном распределении частот, так как противоположные уклонения равного значения— $Ge \times \frac{1}{z}$ и $Ge \times z$ — отстоят от истинной величины на разное расстояние. Если вместо вариант на оси абсцис взять их логарифмы, то, принимая во внимание, что логарифмы чисел, возрастающих в геометрической прогрессии, дают ряд, возрастающий в арифметической прогрессии, мы получим симетрический ряд. Этот ряд будет группироваться вокруг логарифма средней геометрической, как своего центра. Так, приведенный ряд при таком преобразовании получит следующий вид:

$lg\ v$	f
1.4	1
1.7	5
2.0	10
2.3	5
2.6	1

$$Me = 2.0 = lg\ 100 = lg\ Ge.$$

Применение средних. Среднеарифметическая является наиболее часто применяемой средней величиной. Это об'ясняется, прежовсего, тем, что при известном строении ряда, ее можно рассматрдевать, как выражение истинного значения некоторой реальной вели-

чины, лежащей в основе ряда. Но и в тех случаях, когда ей нельзя приписать такого реального характера, и средняя арифметическая имеет лишь условно-формальное значение, она является весьма характерной величиной, благодаря некоторым своим особенностям. Средняя арифметическая ближайшим образом и непосредственно зависит от абсолютной величины каждой отдельной варианты ряда и репрезентирует все разнообразие ряда в едином выражении, сводя все отдельные величины к одному общему уровню. Это сумарное представление о ряде пополняется дополнительной сумарной характеристикой распределения вариант, благодаря тому свойству средней арифметической, что она дает в обе стороны от себя равные суммы уклонений. Наконец, вычисление средней арифметической чрезвычайно просто и дает вполне определенный результат, не нуждаясь ни в каких произвольных допущениях и субъективном усмотрении. К этому надо прибавить и то обстоятельство, что, благодаря прочно укоренившемуся употреблению, средняя арифметическая приобрела характер общепризнанной обычной меры изображения и сравнения рядов.

Понятно также употребления моды. Она в известном отношении заступает место средней арифметической в рядах асиметричных, являясь выражением наиболее распространенного обычного типа явлений. Она является методологически точным выражением той величины, которую показывают нестатистики по субективному впечатлению в качестве средней величины. Когда спрашивают, например, о средней величине урожая, отвечающий, если он не статистик, едва ли вычисляет среднеарифметическую из ряда известных ему величин; он указывает цифру, наилучше репрезентирующую величины, встречающиеся чаще других или обычно, т. е. указывает моду. Применение моды допустимо однако только в тех случаях, когда скопление вариант в каком-либо месте ряда ясно выражено, и сумма частот этого скопления составляет более или менее значительную часть всего числа случаев. Если место скопления вариант возле моды составляет, например, 10 или 15% всего числа случаев, мода не может иметь значения средней величины, характеризующей весь ряд; она сохраняет значение лишь как характеристика определенного ограниченного участка всего распределения.

В статистической практике мода применяется до сих пор редко. Это можно об'яснить отчасти трудностью методологически

правильного ее вычисления, а, главным образом, новизною ее введения в статистический оборот и недостатком опытов проверки ее практического значения. Впрочем, говоря о редком применении моды следует понимать открытое ее применение, так как нередко она применяется в скрытом виде. Это бывает тогда, когда отбрасывают крайние показания, что делается можно думать, почти всегда при первоначальной сводке и критическом просмотре материала; точно также мы имеем дело с модой в скрытом виде, когда выводим среднеарифметическую из субъективных показаний, которые дают, в сущности, величины модального характера.

Также сравнительно редко применяется и медиана. Эта средняя величина во многих отношениях аналогична средней арифметической и должна была бы заменять последнюю для рядов рассеянных, без сколько-нибудь значительного симметричного или несимметричного скопления вариант, и, в особенности, при наличности немногих резко выделяющихся по своей величине вариант. Медиана представляет ту особенность, что она может быть представлена ввиде конкретной варианты даже в тех случаях, когда варианты не допускают по своему характеру измерения в точном смысле слова и могут быть лишь расположены в возрастающий или убывающий ряд по сумарному (и даже субъективному) сравнению, какая из сопоставляемых величин больше или меньше.

Геометрическая средняя применяется в тех специфических случаях, когда мы имеем основания допускать или усматривать наростание величин ряда в геометрическом отношении. Такое допущение является, например, наиболее целесообразным при вычислении количества населения в промежутке между двумя переписями, когда фактический прирост в единицу времени промежуточного периода неизвестен. Этот фактический прирост может быть различен из года в год; но раз он неизвестен, наиболее простым допущением будет считать его равномерным на всем протяжении периода. Если разницу между населением конца периода P_t и начала периода P_o разделить на число промежуточных лет и ежегодно прибавлять к начальному населению, то процент прироста окажется убывающим для каждого последующего года сравнительно с предшествующими. Это ведет к необходимости допущения геометрического прироста; поэтому численность населения середины промежутка P_m должна быть во столько же

раз меньше населения конца периода P_t, во сколько она больше населения начала периода P_0, или

$$P_0 : P_m = P_m : P_t$$

откуда

$$P_m = \sqrt{P_0 P_t}.$$

Самый же процент прироста z определится из равенства

$$P_t = P_0 (1+z)^t$$

и составит

$$z = \sqrt[t]{\frac{P_t}{P_0}} - 1.$$

О весе средней арифметической. Весом при вычислении средней арифметической называется то значение, с которым каждая величина привходит в образование средней. Значение это определяется либо об'ективными моментами, либо суб'ективной оценкой. Наибольшую важность представляет об'ективное определение веса. Среди об'ективных моментов, определяющих вес варианты, наиболее обычным является число показаний, относящихся к данной варианте. Частота является таким образом частным случаем общего понятия веса. По аналогии с частотою значение веса может иметь сравнительная величина того об'екта, к которому относится варианта; например, при вычислении средней цены товара за вес каждого отдельного показания цены может быть принято количество товара в партии, проданной по этой цене. Далее значение веса может иметь степень точности данного показания; когда вариантами являются средние арифметические, мерою точности их могут служить величины, обратные среднеквадратическому уклонению каждой средней $\left(\frac{1}{\sigma}\right)$. Наконец, суб'ективный вес определяется суб'ективной оценкой варианты на основании оценки всех условий ее получения. В статистике представляют интерес веса об'ективные, преимущественно, число показаний, относящихся к каждой варианте.

Интересным представляется вопрос, следует ли принимать во внимание вес каждой варианты при определении средней арифметической, и если следует, то всегда ли, или только в определенных случаях. Обычно можно встретить утверждение, что средняя с весом всегда точнее и лучше простой средней.

Действительно, когда мы имеем дело с наиболее обыкновенным случаем веса—частотою вариант, относящихся к одной общей совокупности, непринятие во внимание веса было бы равносильно исключению части вариант. Принимая во внимание вес вариант, мы придаем этим большее значение вариантам, имеющим большую частоту, что вполне целесообразно, когда отдельные варианты не имеют иного значения, кроме того что они представляют единичные случаи одного общего наблюдения. Однако, нельзя делать общего правила из этого частного случая и утверждать, что во всех случаях без исключения средняя арифметическая с весом лучше вычисленной без веса. Применение или неприменение веса зависит от взаимного отношения вариант в совокупности, и в известных случаях применение веса может придать средней смысл, не соответствующий характеру явления.

Так, например, если мы собираем показания на известном пространстве, и наперед известно или в результате исследования обнаруживается, что в отдельных районах величина явления различна; в таком случае при вычислении средней по всей территории нельзя принимать в качестве веса вариант числа показаний, собранных по районам. Соберем ли мы по району 10 или 30 показаний, все они репрезентируют только одну цифру—величину явления в районе; разумеется, большее число показаний репрезентирует эту цифру вернее, и потому желательно, чтобы все районы были представлены достаточным числом показаний; но тройное количество показаний не должно делать из одной районной цифры тройную при вычислении средней для всех районов. При определении средней цены какого либо продукта на определенном базаре мы вполне целесообразно стремимся установить количество единиц продукта, проданных по каждой цене, исходя из представления, что более соответствует действительности та цена, по которой продано большее количество товара. Если однако мы определяем среднюю базарную цену товара для всей губернии, то принятие или непринятие во внимание веса сообщает разный смысл средней. Принимая во внимание количество товара, проданного по каждой цене, мы даем преобладание рынку с большим оборотом данного продукта, и умаляем значение остальных; это равносильно тому, как если бы из всех базаров губернии мы сделали один общий рынок. Такой прием может отвечать действительному

отношению в том случае, если действительно цена крупного базара регулирует цены всей территории, и цены отдельных базаров можно рассматривать лишь, как единичные случайно уклоняющиеся проявления той самой цены, которая наиболее верно проявляется в большом обороте на крупном рынке. Если однако отдельные рынки в той или иной степени экономически самостоятельны, то и при выводе средней цены по всей территории они должны фигурировать в качестве самостоятельных и равноценных единиц. Правда, средняя, вычисленная в этом предположении, будет иметь лишь формальное показательное значение и не будет являться выражением истинной величины реально существующей цены; но надо принять во внимание, что при указанных условиях такой единой цены реально и не существует, и не следует изображать ее якобы существующей, исходя из неверной гипотезы.

То, что сказано относительно пространства, относится и ко времени. Когда ежегодно мы имеем некоторое число показаний о цене продукта, и число этих показаний по годам различно, то при выводе общей средней цены за ряд лет ошибочно было бы брать годичные средние с весом, соответствующим числу показаний, из которых они выведены, ибо средние за каждый год рассматриваются, как равноценные. Иначе было бы в том случае если бы величина явления не менялась по отдельным промежуткам времени, т. е. была независима от времени, и отдельные показания можно было бы рассматривать как индивидуальные вариации одной и тож же цены, общей для всего периода времени; в этом случае для вывода общей средней следовало бы взять все единичные показания или промежуточные погодные средние с их относительным весом.

Сказанное можно формулировать в общем виде таким образом, что вес следует принимать в расчет в тех случаях, когда все единичные данные представляют собою случаи одного и того же явления в пределах определенного пространства или времени; если же явление получает различное выражение в отдельных частях пространства или промежутках времени, то эти частные выражения явления при выводе общей средней являются равноценными, независимо от числа показаний, на основании которых они выведены, и следовательно в общую среднюю привходят с одинаковым весом.

Другое обстоятельство, от которого может зависеть принятие или непринятие во внимание веса, это исчерпывающий или выборочный характер данных. Если материал представляет собою исчерпывающую совокупность в пределах времени, пространства или иного признака, нет оснований выбрасывать какие либо данные, и каждая варианта должна войти в среднюю с своим весом. Так, например, когда мы определяем средний урожай на десятину по губернии путем сплошной переписи, мы принимаем в качестве веса каждого отдельного показания об урожае площадь участка, к которой относим это показание. Иначе бывает в том случае, когда материал имеет выборочный характер. Если выборочные данные имеют бесспорно репрезантативный характер, и вес отдельного показания в выборочном исследовании пропорционален весу его в исчерпывающей совокупности, вес принимается во внимание при вычислении средней по тем же основаниям, какие имеют место по отношению к исчерпывающим совокупностям. В тех же случаях, когда выборочный материал репрезентирует сплошную перепись не столь точно, чтобы веса выборочных данных можно было считать пропорциональными весам сплошного материала, вычисление средней с весом не всегда допустимо; необходимо принимать во внимание характер и род веса. Так, например, в вопросе о средней величене урожая при выборочном опросе неправильно было бы принимать в качестве веса размер участка, если не принять мер к тому, чтобы число обследованых участков каждого размера было пропорционально общему их числу на всей территории. Если же это условие не имело места, то нет оснований принимать, что урожай сам пять, отмеченный на участке в 20 десятин, занимает в пределах всей территории пространство вдвое большее, чем урожай сам три, зарегистрированный на участке в 10 десятин. Равным образом нет оснований думать, что показания больших участков лучше репрезентируют урожай окрестного района хозяйств, чем участки малые. Напротив, если вес вариант выражается в их частоте, частоты не приходится игнорировать при вычислении средней; в самом деле, если неизвестно, отвечают ли частоты выборочного материала частотам сплошного или не отвечают, нет оснований считать их не отвечающими и выбрасывать; всегда скорее можно допустить, что варианты часто встречаются в выборочном исследовании именно потому,

что их больше и в материале сплошном, если только число показаний вообще не слишком мало; если же оказывается, что частоты выборочного материала заведомо расходятся с частотами исчерпывающей совокупности, то это свидетельствует лишь о том, что выборочного материала вообще недостаточно, и средняя, которая получится, будет случайной, неустойчивой и может значительно уклонится от средней сплошного материала; но нет никаких оснований вычислять среднюю без частот.

Вес показательных чисел. Много сомнений возбуждает вопрос, следует ли брать вес и какой именно при вычислении так называемых показательных чисел. И здесь решение вопроса зависит от логического содержания, которое связывается с показательны числом. Если мы берем среднюю из ряда цен различного рода товаров (хлеб, мясо, перец, железо, сукно, полотно, лес, и т. п.), то решение вопроса, следует ли принимать какой либо вес для каждого из товаров, зависит от цели, с какой образуется сводная показательная величина. Целью этой может быть, во первых, определение изменения цены денег. Рассматривая вопрос абстрактно независимо от изменений в условиях производства и сбыта отдельных продуктов, мы находим, что изменение цены денег должны выражаться в изменении цены всех товаров без исключения и притом совершенно одинаково, как тех товаров, которые продаются в малом количестве, так и тех, которые имеют обширный сбыт; поэтому нет основания, с этой точки зрения, принимать во внимание какие либо различные количества товаров в качестве их веса, как обстоятельство безразличное; напротив, важно брать как можно большее число товаров, так как этим увеличиваются шансы открытия общей всем товарам причины и характера изменения их цены. В действительности однако изменения цен товаров, зависящие от денег, для отдельных товаров скрадываются теми изменениями, которые вызываются условиями производства и сбыта этих именно товаров, и если какой либо из таких товаров взять с весом, то взятый вес только усиливает значение этих посторонних влияний. Таким образом принятие во внимание веса единичных товаров в этом случае нисколько не дает более правильной средней величины, а, напротив, может сделать ее неправильной. Иначе обстоит дело в том случае, когда вопрос идет о вздорожании жизни; здесь целью образования сводной средней

цены является обнаружение изменения покупной силы единицы денег, производимого не только изменением цены самих денег, но и изменением цены продуктов и других средств удовлетворения потребностей. Само собой разумеется, что изменения цен отдельных предметов имеют тем большее значение чем в большем количестве они приобретаются, и по существу дела является логически правильным принимать во внимание, в качестве веса, то количество каждого товара, какое входит в бюджет потребления, или хотя бы условными коэфициентами определять относительное значение различных категорий предметов.

Формулы кривых распределения Pearson'a. Многие биологические и социальные явления дают ряды с характерным нарастанием частот к середине ряда, симетричным или несимитричным. Такого рода ряды могут быть сведены к биному в степени $(p+q)^m$ с $p=q$ в случае симетрии и $p \gtrless q$ при асимметрии. Однако, как уже было сказано, изображение эмпирических рядов посредством бинома представляет собою несовершенный способ их преобразования. Для этой цели необходимо иметь формулы, которые давали бы лучшее совпадение теоретического ряда с эмпирическим и не требовали бы слишком громоздких вычислений. Для рядов симетрических удобной формулой является нормальная кривая. Ряды несимметрические нуждаются в более сложных формулах и притом разнообразных, соответственно с различным характером распределения.

Для преобразования рядов можно пользоваться различными способами. Из них особо следует упомянуть о способе Пирсона (Pearson). Преимущество этого способа состоит в том, что ряд формул Пирсона, представляющих различные типы распределения, выводится из одного и того же основного допущения, в зависимости от того, какое значение получают величины, входящие в основную формулу; величины эти являются таким образом критерием типа; значение, которое этот критерий получает, будучи вычислен на основании данного эмпирического материала, определяет тип кривой, соответствующий данному эмпирическому распределению. Нормальная кривая оказывается при этом одним из частных случаев значения критерия. Не малым преимуществом способа Пирсона является и то, что он тщательно разработан автором, его сотрудниками и учениками;

определение численного значения величин, входящих в формулы делается однообразным способом при помощи моментов, и самые вычисления значительно упрощаются, благодаря значительному числу готовых вспомогательных таблиц.

Если мы обозначим частоту варианты через y и расстояние данной варианты от варианты, принимаемой за исходную, через x, то сущность характерного для рядов распределения выражается в том, что величина y сперва возрастает, а потом убывает, в зависимости от постоянного изменения величин x. Скорость, с которой растет переменная величина y, может быть различна как для разных рядов, в зависимости от характера x распределения, так и для разных мест одного и того же ряда. Мерою скорости роста является отношение прироста величины y к приросту величины x или $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Если x увеличивается на какую либо конечную величину a, переходя из значения x в значение $x+a$ через ряд мысленных точек, то, с каждым безконечно малым изменением x, так или иначе изменяется значение y; поэтому на конечном протяжении от x до $x+a$, отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ изменяется непрерывно, получая то или иное значение в каждой точке протяжения. Поэтому для всякого конечного измеримого промежутка отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ не имеет какого либо одного определенного неизменного значения. Такое отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ имеет только для идеального промежутка, который мы мыслили бы менее всякой данной величины, и в котором безконечно малому приращению x или dx отвечает безконечно малое приращение y или dy. Отношение этих как угодно малых приращений и может служить мерой роста кривой. Когда y достигает своего максимального значения, рост y в этой точке на идеальное мгновение приостанавливается, т. е. величина $\frac{dy}{dx}$ получает значение 0; то же самое имеет место в том случае, когда y достигает значения, равного нулю—и здесь рост приостанавливается. В промежутках между этими значениями отношение $\frac{dy}{dx}$ может принимать различную величину, в зави-

симости от характера кривой. Можно выразить закон изменения отношения $\frac{dy}{dx}$ при помощи различных формул посредством переменных y, x и каких либо постоянных величин a, b_0, b_1, b_2 и т. д. Этой цели можно удовлетворять простая формула

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x+a)}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots},$$

обращающая $\frac{dy}{dx}$ в 0 в трех случаях: когда y равняется 0 в начале и в конце ряда и когда $x+a=0$ в точке $x=-a$. Эту формулу можно представить в виде

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{x+a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$$

если ограничиться тремя членами в знаменателе.

Из правил дифференцирования известно, что $\frac{1}{y}$ представляет собою отношение как угодно малого приращения $log\ y$ к как угодно малому приращению y или $\frac{d\ log\ y}{dy}$, вследствие чего предыдущее выражение можно представить так:

$$\frac{d\ log\ y}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{d\ log\ y}{dx} = \frac{x+a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$$

Приймем, что в этом выражении $b_1 = b_2 = 0$, тогда

$$\frac{d\ log\ y}{dx} = \frac{x+a}{b_0}$$

Эта формула представляет собою выражение скорости роста y в зависимости от x для безконечно малых протяжений. Для того, чтобы получить выражение для всего протяжения, надо сумировать все значения формулы по безконечно малым промежуткам dx. Это делается при помощи интегрирования и обозначается в виде

$$\int \frac{d\ log\ y}{dx}\,dx = \int \frac{x+a}{b_0}$$

По правилам интегрирования в результате получается

$$log\ y = \frac{(x+a)^2}{2b_0} + c$$

Из определения логарифма известно, что если $log\ z = t$, то то $z = e^t$; следовательно

$$y = e^{\frac{(x+a)^2}{2b_0}+c} = e^{\frac{(x+a)^2}{2b_0}} e^c$$

где e, основание Неперовых логарифмов, равно 2.718 . . . . Если $x+a$ примем равным 0, то

$$y = e^c$$

но, при $x+a$, первоначальное отношение $\frac{dy}{dx}$, также будет равно 0:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x+a)}{b_0} = 0,$$

что означает, что рост кривой приостанавливается, или, иначе говоря, что y в этой точке достигает своего максимального значения. Иначе говоря e^c есть величина максимальной ординаты y_0, или

$$e^c = y_0$$

и

$$y = y_0 e^{\frac{(x+a)^2}{2b_0}}$$

В этом выражении необходимо определить значение величин a b_0. Эти величины могут быть получены из уравнения, которое выводится из первоначального равенства:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+a}{b_0}$$

путем некоторых сравнительно несложных преобразований, которых мы здесь не приводим, так как они требуют знакомства с приемами интегрирования. В результате получается уравнение

$$a\mu_n + nb_0\mu_{n-1} = -\mu_{n+1}$$

Придавая n последовательно значение 0 и 1 и принимая во внимание, что $\mu_0 = 1$ и $\mu_1 = 0$, получим:

$$a\mu_0 = -\mu_1 \text{ или } a = 0 \quad \text{и}$$

$$a\mu_1 + b_0\mu_0 = -\mu_2 \text{ или } b_0 = -\mu_2$$

На основании этого

$$y = y_0 e^{-\frac{x^2}{2\mu_2}}$$

Полученное выражение представляет собою не что иное как формулу нормальной кривой.

Формула эта получилась из основного равенства путем принятия, что $b_1 = b_2 = 0$. При иных допущениях относительно величин, входящих в выражение $b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ мы получим другие типы кривых. Значения, какие может получать приведенное выражение, в зависимости от значения величин b_0, b_1, b_2, определяется исследованием значений корней этого уравнения второй степени, или

$$\left(x - \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_0b_2}}{2b_2} \right) \left(x - \frac{-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4b_0b_2}}{2b_2} \right)$$

что в свою очередь, сводится к исследованию возможных значений величины

$$\frac{b_1^2}{4b_0b_2}$$

Различные значения этой величины будут приводить первоначальную формулу к различным типам кривых.

Так допустим, что $\frac{b_1^2}{4b_0b_2} < 0$, т. е. представляет отрицательную величину. Так как b_1^2 величина положительная, то это возможно при условии, когда $4b_0b_2$ величина отрицательная, в таком случае $-4b_0b_2$ величина положительная и $\sqrt{b_1^2 - 4b_0b_2}$ тоже положительная и притом больше $\sqrt{b_1^2}$ или b_1, и потому выражение $-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_0b_2}$ дает величину положительную $+A_1$, $-b - \sqrt{b_1^2 - 4b_0b_2}$ величину отрицательную $-A_2$, и выражение $b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ в знаменателе может быть представлено в виде

$$\frac{x + a}{(x + A_1)(x - A_2)}$$

или иначе

$$\frac{A_1 - a}{A_1 + A_2} \cdot \frac{1}{x + A} + \frac{A_2 + a}{A_1 + A_2} \cdot \frac{1}{x - A_2}$$

Интегрирование этого выражения дает

$$\log y = \frac{A_1 - a}{A_1 + A_2} \log (x + A_1) + \frac{A_2 + a}{A_2 + A_2} \log (x - A_2) + c$$

откуда

$$y = e^c (x + A_1)^{\frac{A_1 - a}{A_1 + A_2}} (x - A_2)^{\frac{A_2 + a}{A_1 + A_2}}$$

Эта последняя формула путем ряда преобразований и принятия упрощенных обозначений получает вид

$$y = y_0 \left(1 + \frac{x}{a_1}\right)^{ra_1} \left(1 - \frac{x}{a_2}\right)^{ra_2}$$

и представляет собою кривую I типа Пирсона.

Принимая $\frac{b_1^2}{4b_0b_2}$ равным 0, мы аналогично приходим к кривой вида

$$y = y_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^m,$$

представляющей собою II тип кривых Пирсона.

Допущение $\frac{b_1^2}{4b_0b_2} > 0$ и < 1 дает IV тип кривой:

$$y = y_0 \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{-m} e^{r \operatorname{tang}^{-1} \frac{x}{a}}$$

При $\frac{b_1^2}{4b_2b_0} = \infty$, получается кривая III типа

$$y = y_0 \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\gamma a} e^{-\gamma x}$$

Нормальная кривая получается при том же допущении, что и кривая II типа, если при этом и $b_2 = 0$.

Величина $\frac{b_1}{4b_0b_2}$ может быть выражена в моментах ряда; если принять обозначения

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}; \quad \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

то

$$\frac{b_1^2}{4b_0b_2} = k = \frac{\beta_1(\beta_2 + 3)^2}{4(4\beta_2 - 3\beta_1)(2\beta_2 - 3\beta_1 - 6)}$$

Имея эмпирический ряд, мы находим первые четыре момента μ, вычисляем величины β_1 и β_2 и определяем значение критерия k; последнее указывает тип кривой, соответствующий данному эмпирическому материалу. Ниже приведена таблица значений критерия, типов кривых и их формул:

Значение критерия	Тип кривой	Формула кривой
$k<0$	I . . .	$y=y_0\left(1+\frac{x}{a_1}\right)^{ra_1}\left(1-\frac{x}{q_2}\right)^{rq_2}$
$k=0$	II . . .	$y=y_0\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^m$
$k=0;\ \beta_2=3$ . .	V . . .	$y=y_0 e^{-\frac{x^2}{2\mu_2}}$
$k>0$ и <1 . .	IV . . .	$y=y_0\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{-m} e^{-r\,tang^{-1}\frac{x}{a}}$
$k=\infty$	III . . .	$y=y_0\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\gamma a} e^{-\gamma x}$

В этих формулах y_0 обозначает ординату, которая для данного типа принимается за исходную, и y искомую ординату, относящую на x от исходной; расстояние x измеряется в условных интервалах, равных 1; остальные величины должны быть вычислены на основании особых формул, которые даются для каждого типа. Для примера приведем способ вычисления кривой I типа.

Эмпирический материал представляет собою распределение частоты Мюллеровых желез у 2000 экземпляров свиньи. Число желез составляет ряд вариант (v), число случаев каждой варианты — ряд (f). Для вычисления моментов одна из средних вариант (4) принята равной 0 и расстояния остальных вариант от этой исходной варианты измерены в условных интервалах z, равных 1.

Таблица представляет вычисление четырех первых моментов от условной середины. Численные величины моментов (v) приведены ниже. На основании первого момента средняя арифметическая *Me* равняются 3.5. На основании моментов от условной середины определяются

v	f	z	fXz	fXz^2	fXz^3	fXz^4
0	15	—4	— 60	240	— 960	3840
1	209	—3	—627	1881	—5643	16929
2	365	—2	—730	1460	—2920	5840
3	482	—1	—482	482	— 482	482
4	414	0	0	0	0	0
5	277	1	277	277	277	277
6	134	2	268	536	1072	2144
7	72	3	216	648	1944	5832
8	22	4	88	352	1408	5632
9	8	5	40	200	1000	5000
10	2	6	12	72	422	5292
Сумма	2000		—998	6148	—3872	48568

моменты (μ) от точки среднеарифметической; квадратный корень второго момента $\sqrt{\mu_2}$ дает среднеквадратическое уклонение, равное 1.68. После вычисления вспомогательных величин β_1 и β_2 критерий k оказывается меньше нуля.

$$\nu_1 = \frac{-998}{2000} = -0.499$$

$$\nu_2 = \frac{6148}{2000} = 3.074$$

$$\nu_3 = \frac{3872}{2000} = -1.936$$

$$\nu_4 = \frac{48568}{2000} = 24.284 \quad Me = 4 - 0.499 = 3.501.$$

$\mu_1 = 0 \quad \mu_2 = 3.074 - (-0.499)^2 = 2.824999; \sqrt{\mu_2} = 1.680774$

Величина критерия $k < 0$ показывает, что кривая относится к I типу.

$\mu_3 = -1.936 - 3(-0.499 \times 3.074) + 2(-0.499)^3 = 2.417278$

$$\mu_4 = 24.284 - 4(-0.499 \times -1.936) + 6(0,249001 \times 3.074) - 3(-0.499)^4 = 24,826297$$

$$\beta_1 = \frac{(2.417278)^2}{(2,824999)^3} = \frac{5.843232929}{22.545241683} = 0.259178$$

$$\beta_2 = \frac{24.826297}{(2.824999)^2} = \frac{24.826297}{7.98061935} = 3.110823$$

$$k = \frac{0.259 \times (6.111)^2}{4(12.443 - 0.778)(6.222 - 6.778)} = -0.373.$$

Формула кривой I типа:

$$y = y_0 \left(1 + \frac{x}{a_1}\right)^{ra_1} \left(1 - \frac{x}{a_2}\right)^{ra_2}$$

требует определения величин: a_1, a_2, r, вычисление которых, в свою очередь, требует ряда вспомогательных величин. Величины a_1 и a_2 суть части оси абсциссы (b), составляющей протяжение кривой распределения; абсцисса (b) делится на эти две части точкой выхода исходной ординаты y_0. Протяжение абсциссы (b) составляет:

$$b = \frac{\sqrt{\mu_2}}{2} \sqrt{\beta_1 (s+2)^2 + 16(s+1)};$$

в этом выражении вспомогательная величина

$$s = \frac{6(\beta_2 - \beta_1 - 1)}{-2\beta_2 + 3\beta_1 + 6}.$$

Части обсциссы a_1 и a_2 равняются:

$$a_1 = \frac{1}{2}(b - as) \text{ и } a_2 = \frac{1}{2}(b + as);$$

величина (a) представляет собою разстояние между среднеарифметической и модой (y_0):

$$Me - Mo = a = \frac{1}{2}\sqrt{\beta_1} \cdot \frac{s+2}{s-2} \cdot \sqrt{\beta_2}$$

Величина $r = \frac{s-2}{b}$ и

$$a_1 r = \frac{a_1}{b}(s-2) = m_1$$

$$a_2 r = \frac{a_2}{b}(s-2) = m_2.$$

Для данного ряда соответствующие величины равняются:

$$s = \frac{6.(3.11082 - 0.25918 - 1)}{0.55589} = 19.9857.$$

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{0.259178} \times \frac{21{,}9857}{17.9857} \cdot 1.680774 = 0.523$$

$$b = \frac{1.680774}{2}\sqrt{0.259178 \times 21.9857^2 + 16 \times 20.9857} = 18.0448$$

$$a_1 = \frac{1}{2}(18.0448 - 0.523 \times 19.9857) = 3.7965$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(18\,0448 + 0.523 \times 19.9857) = 14.2483$$

$$a_1 r = \frac{3.7965 \times 17.9850}{18.0448} = 3.78401 = m_1$$

$$a_2 r = \frac{14.2483 \times 17.9857}{18.0448} = 14.2006 = m_2$$

На основании полученных результатов уравнение кривой получает следующий вид:

$$y = y_0 \left(1 + \frac{x}{3.7965}\right)^{3.78401} \left(1 - \frac{x}{14.2483}\right)^{14.2006}$$

В этой формуле $_0$ определяется с достаточным приближением из уравнения:

$$y_0 = \frac{N}{b} \times \frac{(m_1 + m_2 + 1)\sqrt{m_1 + m_2}}{\sqrt{\pi m_1 m_2}} e^{\frac{1}{12}\left(\frac{1}{m_1 + m_2} - \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}\right)}$$

На основании которого

$$y_0 = \frac{2000}{18.0448} \times \frac{18.9846\sqrt{17.9846}}{\sqrt{2 \times 3.141593 \times 3.784 \times 14{,}2006}} \times$$

$$\times 2.171828^{0{,}0833 \times (0{,}6556 - 0{,}2643 - 0{,}0704}$$

Что составляет $y_0 = 475.24$ и представляет собою частоту модального интервала *).

*) Вычисления приведены по Davenport'y, Statistical Methods, 1904 стр. 35—36.

Величина самой моды определяется расстоянием от среднеарифметической:

$$Mo = Me - a = 3.501 - 0.523 = 2.978.$$

Теоретические частоты, вычисленные для вариант ряда представляют следующий ряд:

a	f	y	$f-y$
0	15	21.1	— 6.1
1	209	185.8	+ 23.2
2	365	395.1	— 30.1
3	482	475.2	+ 6.8
4	414	405.6	+ 8.4
5	277	272.1	+ 4.9
6	134	147.6	— 13.6
7	72	65.9	+ 6 1
8	22	24.1	— 2.1
9	8	7.0	+ 1.0
10	2	1.6	+ 0.4
11	0	0.2	— 0.2
	2000	2000.3	

При вычислениях приходится пользоваться вспомогательными таблицами и счетной машиной. Умножение и деление делается посредством счетной машины (обычно Брунсвига или арифмометр Однера) или при помощи таблиц умножения (Crelle или более удобные— O'Pypka); за отсутствием этих пособий—при помощи логарифмов. Посредством логарифмов производится возведение в степень и извлечение корня. Так, например, вычисление y_0 в вышеприведенном примере при помощи логарифмов представляется в следующем де

$$y_0 = \frac{2000}{18.0448} \cdot \frac{18.9846\sqrt{17.9846}}{\sqrt{2\pi \times 3.784 \times 14.2006}}, e^{-0,232}$$

$$lg y_0 = lg\,2000 + lg\,18,9846 + {}^1/_2\,lg\,17,9\ 46$$
$$- 0,0232\,lg\,e - lg\,18,0448$$
$$- {}^1/_2\,(lg\,2 + lg\,\pi + lg\,3,784 + lg\,14,2006)$$

lg 2000		3.301030
lg 18,9846		1.278401
lg 17,9846	1,254901	
${}^1/_2\,lg$ 17,9846		0,627450
$+\Sigma =$ Сумма		5.206881
$lg\,e$	0.434295	
0,0232 $lg\,e$		0.010076
lg 18.0448		1,256353

$lg\,2$	0.301030
$lg\pi$	0.497150
$lg\,3{,}784$	0.577951
$lg\,14{,}2006$	1.152288
$S = 2.528419$	
$^1/_2\ S$	1.264210
$-\Sigma$ Сумма	2.530639
$+\Sigma$	5.206881
$-\Sigma$	2.530639
Итого	2.676242

$$Nlg\ 2.676242 = 474.5 = y_0$$

Полученный результат выражает частоту моды, которая равна 2,978; ближайшая варианта 3 отстоит от моды на расстояние

$$x = 3 - 2978 = 0{,}022.$$

Частота этой варианты (y_3) выражается:

$$y_3 = y_0\left(1 + \frac{0.022}{3.80}\right)^{3.78}\left(1 - \frac{0.022}{14.25}\right)^{14.2}$$

$$= 474.5\ (1{,}006)^{3.78}\ (0\ 9985)^{14\ 2}$$

и $lJ_3 = lgy_0 + 3\ 78\ lg\ 1{,}006 + 14.2\,lg\ 0{,}9985.$

$lg\ y_0$	2.676242
$3.78\ lg\ 1{,}006$ . . .	0.009820
$14.2\ lg\ 0{,}9985$ . . .	1.990742
Сумма . .	2.676804

$$Nlg\ 2.676704 = 475.2 = y_3$$

Для варианты 4 $x = 1.022$ и частота

$$y_4 = y_0\,(1{,}27)^{3.78}\,(0{,}928)^{14.2}$$ или

$lg\ y_0 =$	2.676242
$3.78\ lg\ 1{,}27$ . . .	0.392379
$14.2\ lg\ 0928$ . .	1.539182
Сумма . .	$2.607803 = lg\ 405.4$ и т. д.

Приведенный пример и другие многочисленные опыты показывают что кривые Пирсона дают хорошее совпадение с эмпирическими данными, если последние, разумеется, сами по

себе достаточно удовлетворительны. Поэтому этот метод теоретической характеристики статистического материала представляет большую методологическую ценность. В сжатом виде одной формулы он дает характеристику всего распреде ния и возможность легко получить целый ряд характерных ред их с указанием их взаимного соотношения. Однако практическ е применение его в широком масштабе представляет различ ые затруднения. Первое из них состоит в сложности вычислений. Из двух особенно распространенных типов — I и IV — п рвый тип представляется сравнительно легким, а м жду м, к видно из приведенного примера, он требует сло ных вычисл - ний; четвертый же тип гораздо сложнее. Требуем я точ ть вычислений доступна только научн м у р кдениям, практ ческие бюро могут, разумеется, достигнуть такой ч ос и, ввиде специальной задачи, а не в качестве по седневной буд ичн й работы. Точность вычислений, кроме техничес й руд сти, представляет еще одно неудобство; она может создать и люз ю математической точности результатов там, где г убая п бл - зительность первоначальных данных не дает к т у осн в ий Так как точность вычислений не может возмес ить не и ти наблюдения, то нет оснований затрачивать труд то ь обработки материала, во много раз превыш щу о т ос самих наблюдений. Поэтому точные методы П р о а е применимы в обл сти естественных наук, где м тоды зме я и наблюдения более точны самые обекты н б ю е ия б л е просты, и где, к тому же, сравнительная прос о а ле ия дает возможность предполагать наличность точ ых с с н х законов; они сравнительно менее применимы в области ц а - ных явл ний, как вследствие меньшей точност н бл о й, так и вследствие большей сложности законо ер остей. Те не менее в тех случаях, когда статистически да ные д ст точ о полны и обнаруживают сравнительно ясную и р стую зак о- мерность распределения, кривые Пирсона дают оч ь х р результаты, как, например, в распределении вел чины б т- ной платы; в качестве особенно удачного приме ия эт го способа исследования следует указать на изследования мертности путем разложения на ряд кривых разных типов *).

Упрощение вычислений путем, например, сокраще ия числа десятичных знаков до двух, часто дает, при яс о выраж нном

*) Pearson, The Chances of Death and other Studies in Evolution, 1897, vol I.

типе кривой, практически удовлетворительные результаты; но в иных случаях от точности вычисления зависит само установление типа.

Другое обстоятельство, которое мешает более широкому распространению применения кривых Пирсона в области практической статистики, состоит в недостаточной наглядности формул. Вследствие сравнительно большого числа постоянных величин и сравнительно сложного отношения к ним независимой переменной x, нужно хорошее знакомство с математикой и большой навык, чтобы абстрактные символы формулы перевести в наглядное представление элементов, определяющих характер распределения.

В этом отношении большое преимущество представляет сравнительно простая формула нормальной кривой, как вследствие малого числа и сравнительно несложного соотношения входящих в нее величин, так и благодаря легкой сводимости к представлению о биноме.

Относительные числа.

Относительным числом вообще называется отношение двух чисел, выражающих меру каких либо однородных или разнородных явлений; так, например, отношение числа рождений мальчиков к числу рождений вообще; отношение числа рождений к числу населения; отношение числа рождений к числу смертей и т. п. Относительные числа распадаются на несколько видов по признаку логического отношения сравниваемых явлений. Прежде всего отношение это может состоять в том, что сравниваются две совокупности, из которых одна составляет часть другой или выделилась из другой; таким образом, одна совокупность—числитель отношения—состоит из явлений, входящих и в другую совокупность—знаменатель, но лишь отмеченных каким либо особым признаком; таково отношение числа рождений мальчиков к числу рождений вообще—первая совокупность составляет часть второй, отмеченную признаком мужского пола; или отношение числа умерших в течение первого года жизни из числа родившихся к этому последнему числу. Первая совокупность входит в общее число лиц второй совокупности и выделяется из нее для сравнения по признаку изменения состояния. Такого рода отношения можно назвать

относительными числами—вероятностями. Они делятся на отношения статические и динамические. Отношения статические представляют собою отношение части совокупности ко всей совокупности, как рождения мальчиков и рождения вообще; отношения динамические представляют собою отношение числа случаев, подвергающихся изменению своего состояния, к общему начальному или исходному числу всех случаев наблюдаемой совокупности.

Следующую категорию, близкую к относительным числам вероятностям, составляют т. н. коэфициенты, как то коэфициенты смертности, коэфициенты брачности и т. п. Они представляют собою отношение двух однородных совокупностей, из которых одна отмечена каким либо особым признаком или изменением состояния, а другая представляет собою общую совокупность явлений подобно тому, как и в предшествующем случае; с тем однако различием, что одна совокупность не составляет вполне и точно части другой или не происходит вполне точно из этой другой совокупности, путем изменения состояния элементов этой совокупности; обе совокупности находятся в более неопределенном и сложном отношении. Так, коэфициент смертности представляет отношение числа умерших в теч ние года к числу населения начала года (или середины) года; лица, смерть которых зарегистрирована в пределах определенной территории в течение года, в преобладающей массе состоят из индивидов, которые были зарегистрированы в начале года в виде общей цифры населения; однако совокупность умерших не составляет точно части совокупности переписанных в начале года, так как в числе умерших могут быть лица явившиеся после учота населения в начале года (родившиеся втечение года и умершие, иммигрировавшие и умершие) и, с другой стороны, в составе умерших может не быть тех индивидов из начального населения, которые эмигрировали из данной территории и умерли за ее пределами. Дальнейшую категорию относительных чисел составляют отношения разнородных совокупностей, из которых одна составляет как бы общую среду, в которой имеет место другая, или которая производит другую Таково отношение числа рождений к числу всего населения. Наконец, последнюю категорию составляют отношения двух совершенно разнородных явлений, как отношение количества населения к площади территории и т. п.

По своему строению из числителя и знаменателя относительные числа имеют двоякое значение; во первых, они представляют собою способ измерения явления, показанного в числителе, путем отнесения его к наиболее подходящему основанию, как единице сравнения или меры. Такой мерой является совокупность случаев того рода, к которому данное явление относится, как частный случай; относительное число представляет в этом случае частоту или интенсивность явления; или за основание для сравнения берется какая либо более или менее устойчивая среда, в которой происходит явление; чем более общее значение имеет выбранная среда, тем большее количество явлений может быть к ней отнесено, и тем большее число разнообразных явлений может быть сравнимо друг с другом. Такой наиболее общей средой для явлений общественных является население, и преобладающая масса относительных чисел представляет собою отношение числа случаев того или иного явления к числу населения определенного момента времени. Наконец, основанием относительного числа может служить какое либо явление, находящееся с данным явлением в существенной или характерной связи и зависимости, так население и территория и т. п.

С другой стороны, относительные числа дают характеристику того явления или той среды, которая в виде знаменателя взята за основание при вычислении относительной величины. В этом отношении они сходны с средними величинами; подобно им, они в одной сводной цифре дают характеристику совокупности, но только с точки зрения признаков, которыми отдельные случаи совокупности отличаются друг от друга.

Благодаря последнему сходству, целый ряд показательных чисел занимает среднее место между средними и относительными числами; таковы, например, среднее число писем на одного человека, средняя площадь территории на душу населения число населения на единицу территории и т. п.

Научное и практическое достоинство относительных чисел зависит от их наглядности и точности. То и другое достигается тем более, чем очевиднее, теснее и ограничнее связь между сопоставляемыми явлениями. Связь эта тем больше и очевиднее, чем точнее одно явление относится к той именно совокупности, часть которой оно составляет, из которой оно выделяется частным признаком или изменением своего первоначального состояния. Такие относительные числа по преимуществу

в состоянии уловить и выразить закономерность явлений, имеющих место в известной совокупности, и потому они могут служить выражением реальных свойств и процессов совокупности; в этом отношении такие числа сходны с тем и средними величинами, которые имеют реальное или типическое зн чение. Таким именно характером обладают относительные ч сла в р ятности; относительные числа вероятности служат поэтому ключем к уразумению правильности, свойственной в обще относительным числам, подобно подобно тому как средняя арифметическая, соответствующая нормальному распределению уклонен й, служит исходной точкой для уразумения реальной пр роды средних величин. По мере того, как отношение между числителем и знаменателем относительного числа уклоняет я от отношения части к целому или следствия к причине, отн тельное число утрачивает свою реальность и приобретает условно-показательный характер. Подобного рода изменения в ража тся в том, что либо в числитель пр никают явлени я, не в ше ние из той среды, которая показана в знаменателе, либо не включаются явления, происш дшие в данной среде, л бо тоже имеет место в знаменателе по отношению к числителю. Отношение между срав иваем ми явлени ми усложняется, в а ная связь их ослабляется и затемняется, каждая з сра и ых величин является лишь частью следст ия л частью п ичины, будучи в другой части показателем дейст ия други , е входящих в отношение обстоятельств. Если тем не менее при всей сложности отношений между сравниваемыми велич а существует несомненная, хотя бы и частичная за ис сть, казательные числа, хотя и утрачивают свой непосредст янно реальный характер, тем не менее могут с хран ть н глядность и показательность.

Так как задача научной методологии состоит в том, чтобы свести сложные отношения к возможно простым, то исследование природы и закономерности простых отношений является основною задачею методологической теории. Н ибол е простым и методологически правильным случаем относительных чисел являются относительные числа—вероятности. Поэтому они и служат преимущественно об'ектом изучения статистической теории.

Относительные числа, имеющие характер вероятности, показывают отношение числа случаев какого-либо одного рода к

числу всех вообще случаев данной совокупности. При достаточно большом числе наблюдений отношение это может быть разсматриваемо как наиболее вероятное приближенное выражение вероятности данного события или признака. Вследствие этого относительныя числа такого рода обнаруживают все те правильности, которые свойственны апостериорным вероятностям в силу статистического закона больших чисел. Если относительное число выведено на основании достаточно большой совокупности наблюдений, мы в праве ожидать и в действительности весьма часто находим, что повторные наблюдения в той же или однородной среде дают те же или приблизительно те же результаты. Если результаты наблюдения отдельных достаточно больших совокупностей расходятся, мы можем судить на основании закона больших чисел, следует ли это расхождение приписать случайным уклонениям наблюдаемых величин от их наиболее вероятного значения или неслучайному различию в характере наблюдаемых совокупностей. В первом случае относительная частота отклоняющихся случаев должна представлять собою функцию величины отклонения, и распределение частот должно подчиняться закону случайных ошибок, т. е. нормальной кривой; крайние уклонения не будут выходить за известные практические пределы. Относительная же величина, получаемая на основании всей массы наблюдений, может быть рассматриваема, как наиболее вероятное выражение истинного значения вероятности. Если же уклонения не подчиняются закону нормальной кривой, выходят за пределы случайных погрешностей, и мы не имеем оснований приписать это обстоятельство недостаточному числу или неточности наблюдений, мы должны допустить, что самая вероятность явлений различна для разных совокупностей. Отсюда явствует, что исследование относительных чисел сходно с исследованием рядов при выводе средней арифметической — что вполне понятно, если принять во внимание, что и в том и другом случае мы исходим из одного и того же основания — положений теории вероятности. Разница заключается лишь во внешнем выражении чисел: в одном случае мы имеем дело с абсолютными числами, в другом с вероятностями, имеющими выражение дробей. Но и эту внешнюю разницу можно устранить, если уравняв число наблюдений во всех совокупностях, мы вместо выражения вероятности события, возьмем абсолют-

ную цифру случаев, приходящихся на известную цифру наблюдений, например 100, 1000, 10000 и т. п. В этом случае мы получаем ряд цифр, имеющих характер вариант, выраженных в абсолютных числах, который допускает все те же приемы исследования, какие применяются по отношению к средней арифметической.

Таким образом и здесь наиболее вероятным выражением величины, лежащей в основе ряда, является средняя арифметическая и мерою уклонения—среднеквадратическое уклонение отдельных вероятностей от средней. Но благодаря особенной природе вероятностей они допускают и другие приемы исследования, им специфически свойственные. Так, прежде всего, самое построение ряда уклоняющихся друг от друга вариант может быть получено двояким способом. В то время, как при наблюдении абсолютных величин каждая величина является неразложимой единицей и представляет собою варианту, являющуюся прямо и непосредственно результатом одного наблюдения, относительная величина является результатом ряда наблюдений, и только совокупность достаточно большого числа наблюдений дает одну варианту. Поэтому ряд вариант относительных чисел может быть получен, прежде всего, путем многократного повторного наблюдения достаточно большого числа отдельных случаев и об'единения их в одну совокупность; но тот же самый результат может быть получен путем расчленения одной достаточно большой совокупности наблюдений на достаточное число частей, при условии, если на каждую часть придется достаточное число наблюдений.

Благодаря этому и наиболее вероятное выражении истинного значения вероятности может быть получено здесь двояким путем: либо в виде средней арифметической из ряда отдельных вероятностей, либо в виде общего относительного числа путем простого сведения всех наблюдений в одну совокупность. В самом деле, если мы имеем ряд относительных чисел:

$$\frac{m_1}{n}\ \frac{m_2}{n} \ldots\ldots \frac{m_s}{n},$$

где $m_1, m_2, \ldots$ представляет число случаев появления определенного события, n—число всех наблюдений каждой совокупности, сумма $m_1+m_2+\ldots+m_s=M$, сумма $n+n+\ldots+n=sn=N$,

то среднеарифметическая

$$Me = \frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_s}{n} : s = \frac{M}{N}$$

равняется отношению всего числа случаев появления события к числу всех вообще случаев наблюдения.

Далее, когда мы имеем дело с абсолютными числами, каждое наблюдение дает одну варианту, равноценную всякой другой варианте. Для относительных чисел варианта образуется из совокупности наблюдений; совокупности эти могут состоять из одинакового или неодинакового числа наблюдений. В первом случае варианты будут равноценны, во втором случае неравноценны, и различное число случаев в каждой совокупности будет придавать различный вес отдельным относительным числам. Пусть число случаев появления определенного события будет m_1, m_2 .... m_s, все число случаев каждой совокупности соответственно n_1, n_2 .... n_s; пусть $m_1 + m_2 + \ldots + m_s = M$ и $n_1 + n_2 + \ldots + n_s = N$; ряд относительных чисел выразится в виде

$$\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2} \ldots\ldots\ldots \frac{m_s}{n_s};$$

общеотносительная, согласно предыдущему составит $\frac{M}{N}$ что может быть представлено в таком виде:

$$\frac{M}{N} = \frac{m_1}{N} + \frac{m_2}{N} + \ldots + \frac{m_s}{N} =$$

$$\frac{n_1}{n_1} \cdot \frac{m_1}{N} + \frac{n_2}{n_2} \cdot \frac{m_2}{N} + \ldots + \frac{n_s}{n_s} \cdot \frac{m_s}{N} =$$

$$\frac{n_1}{N} \cdot \frac{m_1}{n_1} + \frac{n_2}{N} \cdot \frac{m_2}{n_2} + \ldots + \frac{n_s}{N} \cdot \frac{m_s}{n_s}.$$

Если ввести обозначения

$$\frac{m_1}{n_1} = p_1, \frac{m_2}{n_2} = p_2 \ldots \frac{m_s}{n_s} = p_s$$

и

$$\frac{n_1}{N} = g_1, \frac{n_2}{N} = g_2 \ldots \frac{n_s}{N} = g_s,$$

то общеотносительная (p_0) получит следующее общее выражение:

$$p_0 = g_1 p_1 + g_2 p_2 + \ldots + g_s p_s$$

и будет иметь вид взвешенной средней.

Среднеквадратическое уклонение для ряда относительных чисел может быть получено также двояким способом. Прежде всего его можно получить тем же путем, как для ряда абсолютных чисел, т. е. путем вычисления фактического уклонения каждой варианты от каждой среднеарифметической: в данном случае среднеарифметической будет общеотносительная p_0, вариантами—относительные числа $p_1, p_2 \ldots p_s$, их соответственными весами $g_1, g_2, \ldots g_s$, равные $\frac{n_1}{n_1+n_2+\ldots n_s}$, $\frac{n_2}{n_1+n_2+\ldots+n_s\ldots}$ и т. д. и среднеквадратическое уклонение δ будет иметь выражение:

$$\delta = \sqrt{Sg_i(p_i-p_0)^2}.$$

Но измерение уклонений каждой относительной величины от общей относительной может быть получено и другим способом. Так как относительная величина получается в результате некоторой совокупности наблюдений, то уменьшая число наблюдений в совокупности, мы можем дойти до единичного наблюдения и измерить уклонение этого единичного наблюдения от общей относительной. В единичном наблюдении событие либо произойдет либо не произойдет; в первом случае относительная величина его (т. е. отношение числа случаев появления явления или 1 к числу всех случаев также равному 1) составит 1, во втором 0; уклонение от общей относительной p_0 в первом случае будет $1-p_0$, и квадрат его $(1-p_0)^2$; во втором случае $0-p_0$ и квадрат $(0-p_0)^2$. Если вероятность появления явления есть p_0 и обратная вероятность непоявления его $q_0=1-p_0$, то, на основании закона больших чисел, число случаев появления события и следовательно число случаев уклонения $1-p_0$ должно быть пропорционально p_0, число случаев уклонения $0-p_0$ пропорционально q_0; p_0 и q_0 составят следовательно веса соответствующих уклонений, и сумма квадратов уклонений с их соответственными весами выразится в виде

$$p_0(1-p_0)^2+q_0(0-p_0)^2=p_0q_0^2+q_0p_0^2=p_0q_0(p_0+q_0)=p_0q_0;$$

квадратный корень из этого выражения $\sqrt{p_0q_0}$ даст среднеквадратическое уклонение. Последнее вычислено в предположении, что каждая первоначальная величина выведена на основании одного случая наблюдения; если относительные величины будут вычислены не на основании одного случая, а на основании всякий раз совокупности n случаев наблюдения, то, как мы

увидим впоследствии, среднеквадратическое уклонение будет в $\sqrt{n}$ раз меньше и составит $\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}$; обозначим это выражение через σ; так как раньше среднеквадратическое уклонение было вычислено иным способом ввиде δ, то следовательно

$$\delta = \sqrt{Sgi\ (p_i - p_0)^2} = \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}} = \sigma$$

Формула уклонения $\sigma = \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}$ показывает, что величина σ обратно пропорциональна квадратному корню из n, т. е. числа случаев или наблюдений, на основании которого выведена каждая частноотносительная величина. Если число случаев увеличивается, среднеквадратическое уклонение уменьшается, т. е. относительная величина становится более точной; однако точность ее увеличивается не в той же пропорции, как возрастает число наблюдений, а медленнее, как квадратный корень из числа наблюдений.

Если для относительной, выведенной на основании n наблюдений, среднеквадратическое уклонение, составляет $\sigma = \sqrt{\frac{p q}{n}}$, то для однородной относительной выведенной на основании большого числа наблюдений $m = \varepsilon n$, среднеквадратическое σ' будет равно $\sqrt{\frac{p q}{m}}$ или

$$\sigma' = \sqrt{\frac{p q}{m}} = \sqrt{\frac{p q}{\varepsilon n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon}}$$

Поэтому если мы имеем ряд частноотносительных $p_1, p_2 \ldots p_z$, из которых каждое выведено на основании n наблюдений, и ряд этот дает среднеквадратическое уклонение каждой частноотносительной $\sigma = \sqrt{\frac{p q}{n}}$, то для средней этого ряда или общеотносительной p, выведенной на основании совокупности наблюдений всей серии, т. е. на основании εn случаев, среднеквадратическое уклонение будет в $\sqrt{z}$ раз меньше, т. е. составит $\frac{\sigma}{\sqrt{z}}$. Это значит, что если бы мы вычислили ряд одно-

родных общеотносительных на основании других таких же совокупностей, состоящих каждая из nz наблюдений, то среднеквадратическое уклонение для такого ряда общеотносительных должно было бы равняться $\frac{\sigma}{\sqrt{z}}$; иначе говоря такой ряд обнаруживал бы меньшую степень рассеяния по отношению к своей средней или общеотносительной в $\sqrt{z}$ раз, или был бы в $\sqrt{z}$ раз точнее.

При сравнении меры рассеяния двух относительных величин, выведенных на основании разного числа наблюдений, например n и $m=zn$, для элиминирования влияния различного числа наблюдений на меру уклонения, мы должны среднеквадратическое уклонение первой величины уменьшить в $\sqrt{z}$ раз, т. е. придать ему такую величину, какую оно им ло бы если бы соответствующая ему относительная была вычислена на основании не n а nz случаев; или второе среднеквадратическое увеличить в $\sqrt{z}$ раз, т. е. привести его числу наблюдений n.

Относительные величины, как было указано, могут быть выр жены в виде абсолютных чисел: сколько раз д нное явление по торилось на то число случаев, которое состав ет совокупность. Если совокупность состоит из n случаев наблюдений, то о носительное число надо помножить на n; от ум ож ния на n, месте с увеличением каждого относител ного, увеличивается в то же число раз и средняя из отно ит льных или общеотносительная и среднеквадратическое уклонение; результат м жно сравнить с тем, как если бы ряд, выраженный, например, в метрах, мы перевели на сантиметры. Среднеквадратическое уклонение для такого ряда относительных в личин составит

$$n\sigma = n\sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{npq}.$$

Если число случаев совокупности с n увеличится до nz, то среднеквадратическое уклонение возрастает в $\sqrt{z}$ раз и будет равно $\sigma' = \sqrt{mpq} = \sqrt{z}\sqrt{npq}$.

В выражении

$$p_0 = g_1 p_1 + g_2 p_2 + \ldots g_s p_s,$$

во всем предшествующем изложении мы принимаем, что в

основе каждого единичного случая лежит одна и та неизменная вероятность, находящая свое выражение в общеотносительной p_0.

В частных первоначальных совокупностях эта вероятность проявляется в частноотносительных величинах

$$\frac{m_1}{n}=p_1, \frac{m_2}{n}=p_2 \cdots \frac{m_s}{n}=p_s,$$

с случайными уклонениями. Такого рода вероятность, действующую неизменно и в тождественном виде на протяжении всей серии испытаний и в каждом единичном случае, мы называем элементарною вероятностью. Свойственные ей уклонения подчиняются закону нормального распределения уклонений, и ее среднеквадратическое уклонение $\sigma=\delta$ является мерой нормального уклонения.

Относительные числа, являющиеся выражением элементарной вероятности, представляют собою простейший случай относительных величин. Более сложные случаи получаются тогда, когда общеотносительная представляет собою выражение составной или переменной вероятности. Случай составной вероятности будет иметь место тогда, когда на протяжении всей серии наблюдений, при образовании каждой первоначальной совокупности действует совместно и одновременно несколько независимых элементарных вероятностей; случай переменной вероятности состоит в том, что вероятность меняется от одной серии наблюдений и другой.

При составной вероятности в основе всей совокупности наблюдении лежит несколько вероятностей $p_1, p_2 \ldots p_s$. Совокупное их действие может происходить двояким образом. Во первых, совместность действия может относиться к каждому единичному случаю и состоять в том, что в каждом единичном случае может найти свое осуществление любая из вероятностей, и то, какая именно вероятность окажется действующей, зависит от случайности. Иначе говоря, каждая вероятность имеет свою вероятность появления: вероятность того, что в данном случае наступит действие вероятности p_1, составляет g_1; вероятность появления p_2 составляет g_2 и т. д. При таких условиях совместное действие всех вероятностей дает такой же результат, как если бы в основе испытаний лежала одна средняя вероятность p, равная

$$p=g_1p_1+g_2p_2+\ldots\ldots+g_sp_s;$$

каждая частная совокупность дает приближенное выражение этой средней вероятности с тем или иным случайным уклонением, а общеотносительная из всей серии совокупностей явится наиболее вероятным ее выражением. Величина среднеквадратического уклонения в этом случае будет такова же, как если бы мы имели дело с элементарной вероятностью; вычисление его непосредственно на основании средней вероятности ввиде σ или путем фактических разниц между общеотносительной и частноотносительными, ввиде δ, дает одинаковый результат, так что

$$\sigma = \delta \text{ и } \frac{\delta}{\sigma} = Q = 1.$$

Таким образом частноотносительные будут давать в этом случае нормальное рассеяние по отношению к общеотносительной. Относительные величины этого рода могут быть названы относительным среднеслучайного состава.

Другой случай совместного действия вероятностей состоит в том, что в пределах частной совокупности каждая вероятность действует в определенном постоянном числе случаев, и каждая частноотносительная является таким образом результатом действия одной и той же системы вероятностей в определенном постоянном их соотношении. И в этом случае общий результат получается такой же, как если бы в основе опыта лежала одна общая средняя вероятность, с тою однако разницею, что величины $g_1, g_2 \ldots$, выражающие вероятности соответствующих вероятностей, заменяются постоянными коэфициантами $k_1, k_2 \ldots$, которые представляют собою неменяющуюся относительную частоту случаев действия каждой вероятности.

Средняя вероятность выразится в виде

$$p = k_1 p_1 + k_2 p_2 + \ldots + k_s p_s,$$

отдельные частноотносительные будут приближенными выражением этой средней вероятности, и общеотносительная — наиболее вероятным ее значением.

Что касается степени рассеяния частноотносительных по отношению к общеотносительной, то в данном случае оно будет меньше, чем в том случае, когда вероятность p имеет элементарный характер. Объясняется это тем, что результаты действия отдельных вероятностей, сливаясь вместе в пределах частной совокупности всякий раз в определенной пропорции, более или

менее уравновешивают друг друга. Для того, чтобы более наглядно представить этот процесс, возьмем крайний случай, когда одна вероятность $p_1 = 1$ и другая $p_2 = 0$; средняя вероятность будет $p = \frac{1}{2}$; если выбор вероятности зависит от случая, то при двух испытаниях возможны следующие исходы 1, 1; 1, 0; 0, 1; 0, 0; отношение числа случаев появления события к числу испытаний для каждой группы будет равно 1; $^1/_2$; $^1/_2$; 0. Если же выбор вероятности не зависит от случая и для образования совокупности всякий раз берется один раз первая и один раз вторая совокупность, то все исходы будут состоять из 1 и 0, давая в среднем $^1/_2$ во всех группах без всяких колебаний.

Благодаря этому, если при постоянном составе средней вероятности мы вычислим среднеквадратическое уклонение на основании действительных уклонений частноотносительных от общеотносительной по способу δ и сравним полученную величину с величиной среднеквадратического уклонения, вычисленной в предположении элементарного характера средней вероятности по способу σ, то первая величина должна быть меньше или

$$\delta < \sigma \text{ и } \frac{\delta}{\sigma} = Q < 1.$$

Если же принять во внимание составной характер вероятности и вычислить среднеквадратическое уклонение типа σ, оно принимает вид

$$\sigma_0 = \sqrt{k_1^2\sigma_1^2 + k_2^2\sigma_2^2 + \ldots + k_z^2\sigma_z^2},$$

оказывается меньше σ или $\sigma_0 < \sigma$ и равным δ, так что $\frac{\delta}{\sigma_0}$ снова оказывается равным 1.

Величина отношения Q является таким образом мерою рассеяния; при $Q = 1$ рассеяние нормально, при $Q < 1$ оно меньше нормального и при $Q > 1$ — больше нормального.

Относительные, получающиеся в результате указанного здесь действия многих вероятностей, могут быть названы общеотносительными среднепостоянного состава. Оба вида относительных, как среднеслучайного, так и среднепостоянного состава являются результатом действия одной общей вероятности для

всех частноотносительных групп, как и в случае элементарного характера вероятности, с тою однако разницею, что общая для всего ряда испытаний вероятность в случае нескольких вероятностей имеет составной средний характер.

От этих относительных составного характера отличаются относительные, являющиеся результатом действия переменной вероятности. Переменное действие вероятности выражается в том, что она меняется от серии к серии. Ряд частноотносительных

$$\frac{a_1}{n}, \frac{a_2}{n}, \ldots \frac{a_k}{n}$$

представляет собою случайные уклонения вероятности p_1 и образует одну серию наблюдений; общеотносительная этой серии $\frac{a_0}{n}$ является наиболее вероятным значением вероятности p_1; другой ряд частноотносительных

$$\frac{b_1}{n}, \frac{b_2}{n}, \ldots \frac{b_k}{n}$$

образует другую серию и представляет собою случайные уклонения вероятности p_2; общеотносительная этой серии представляет собою наиболее вероятное значение этой вероятности p_2 и т. д. до серии z_1 которая является результатом действия вероятности p_s.

Таким образом получается ряд общеотносительных $\frac{a_0}{n}$, $\frac{b_0}{n}, \ldots \frac{z_0}{n}$, представляющих собою наиболее вероятные значения ряда вероятностей $p_1\ p_2, \ldots p_s$. Общая общеотносительная, выведенная из этого ряда промежуточных общеотносительных или непосредственно на основании всего материала наблюдений—p_0—представляет собою при описанных условиях наиболее вероятное значение некоторой вероятности p, которая, подобно тому, как и в предшествующих случаях, является средней величиной и представляет собою среднеарифметическую из вероятностей отдельных серий или

$$p_0 = (p) = \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_s}{s}$$

Отношение ряда вероятностей $p_1\ p_2 \ldots p_n$ друг к другу и к средней вероятности p может быть различно. В простейшем случае эти вероятности могут быть случайными уклонениями общей вероятности p. В других случаях вероятности могут представлять собою систематически различающиеся друг от друга величины; при этом они могут либо быть подчинены какому либо закону в своем изменении, либо могут изменяться без всякой закономерности. Отношение сериальных вероятностей друг к другу и общей или средней вероятности отражается на характере рассеяния ряда и среднем уклонении.

Когда промежуточные вероятности отдельных серий представляют случайные уклонения одной и той же основной вероятности, то и первоначальные частноотносительные можно рассматривать также, как случайные уклонения от этой общей основной вероятности; но только уклонения более сложного порядка; в них сочетаются уклонения двоякого рода: с одной стороны обычные уклонения, свойственные всякой совокупности наблюдений по отношению к истинному (или наиболее вероятному) значению вероятности, и, с другой стороны, также случайные уклонения, свойственные целым сериям наблюдений. Благодаря этим двоякого рода колебаниям, рассеяние ряда частноотносительных оказывается больше нормального. Поэтому, если вычислить среднеквадратическое уклонение по действительным разницам между первоначальными частноотносительными и общей общеотносительной и сравнить его с среднеквадратическим уклонением σ, вычисленным в предположении элементарного характера общеотносительного числа, отношени Q будет больше 1. В действительности среднеквадратическое уклонение типа σ, вычисленное с принятием во внимание переменного характера вероятности, выразится в виде

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{pq}{n} + \frac{n-1}{n}\,\frac{S(p_i-p)^2}{z}}$$

и очевидно будет больше $\sigma = \sqrt{\frac{pq}{n}}$.

Отношение между σ и σ_c составит

$$\frac{\sigma_c}{\sigma} = \sqrt{1+(n-1)\,\frac{S(p_i-p)^2}{z}\,\cdot\,\frac{1}{pq}}$$

При n сколько нибудь большом, отношение $\frac{n-1}{n}$ близко к единице и среднеквадратическое уклонение σ_c может быть представлено в упрощенном виде

$$\sigma_c = \sqrt{\sigma^2 + \delta^2}$$

где δ представляет собою среднеквадратическое уклонение для промежуточных (сериальных) вероятностей.

Когда сериальные вероятности не представляют собою случайных уклонений, но подчинены какому либо другому закону, то рассеяние ряда может обнаруживать ту или иную правильность; но правильность эта всякий раз зависит от характера закона, которому подчиняются изменения величины вероятностей; в этом случае нельзя дать какой либо одной меры среднеквадратического уклонения. Если в изменениях значений вероятностей нельзя уловить закономерности, то характер рассеяний ряда и выражение среднеквадратического уклонения не поддаются вовсе априорному определению.

Приведенные выше положения о характере и мере рассеяния рядов могут быть приложены к исследованию относительных чисел. Имея ряд эмпирических относительных чисел, мы, прежде всего, можем исследовать, является ли их рассеяние правильным или неправильным. Для этой цели мы, прежде всего, определим среднеквадратическое уклонение δ по действительным разностям частноотносительных и общеотносительной; взяв затем последовательно различные уклонения (x) отдельных частноотносительных от общеотносительной, мы по величине отношения $u = \frac{x}{\delta}$ находим при помощи таблиц функции F_u теоретическую вероятность уклонений до величины x. Если действительное число уклонений ряда в пределах данной величины x соответствует этой вероятности, рассеяние ряда представляется правильным, соответствующим распределению случайных погрешностей по закону нормальной кривой. Сообразно с законом нормальной кривой случайные уклонения не должны выходить за пределы 2.5—3 среднеквадратических уклонений. Если действительные наблюдения выходят за эти пределы, мы имеем основание считать их не случайными отклонениями от одной и той же вероятности, а выражением различной вероятности.

Далее, мы можем сравнить среднеквадратическое уклонение, вычисленное по фактическим уклонениям, с среднеквадратическим отклонением, вычисленным в предположении элементарного состава общеотносительной вероятности. Отношение этих двух величин $Q \lessgtr 1$, свидетельствует о нормальном, поднормальном и сверхнормальном рассеянии. Нормальное рассеяние указывает на то, что общеотносительная является выражением либо элементарной, либо составной вероятности среднеслучайного состава. При сложном характере статистических совокупностей, в особенности в области социальных явлений, мы имеем мало оснований рассчитывать натолкнуться на случай элементарной вероятности; более вероятным является допущение, что при нормальном рассеянии мы имеем дело с составною вероятностью. Задача исследования в таком случае состоит в том, чтобы путем удачного расчленения материала выделить из общей совокупности частные совокупности, которые соответствуют частным вероятностям, входящим в состав общей составной вероятности. Если такое расчленение сделано, вычисление среднеквадратического уклонения по способу σ, с принятием во внимание составного характера вероятности, служит проверкой правильности достигнутого результата. Среднеквадратическое уклонение, вычисленное таким способом на основании найденных частных вероятностей, должно дать приблизительно ту же величину, что и среднеквадратическое уклонение, вычисленное на основании действительных отклонений или δ.

Среднепостоянный состав вероятности свидетельствует о том, что при наличности отдельных совокупностей с разными вероятностями, участие каждой совокупности в образовании общей составной совокупности определяется какой-либо неизменной нормой естественного или общественного порядка.

Сравнительно более сложным является исследование случаев сверхнормального рассеяния. И здесь, подобно тому, как и в предшествующих случаях способом исследования является сравнение двух мер уклонений—среднеквадратического уклонения, вычисленного по фактическим уклонениям (δ) и в предположении элементарного состава вероятности (σ). Отношение этих величин $Q > 1$ указывает на наличность сверхнормального рассеяния и требует расчления общей совокупности на ряд серий с различными промежуточными вероятностями. Дело однако

осложняется тем, что в случае вероятности переменного состава величины среднеквадратического уклонения находится в зависимости от того, какое число случаев берется для образования частноотносительного числа, т. е. находится в зависимости от величины n. В самом деле, среднеквадратическое уклонение в этом случае составляет

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{pq}{n} + \frac{n-1}{n}\,\frac{S(p_i-p)^2}{s}};$$

с уменьшением n первый член выражения под корнем (или σ) возрастает, и если уклонения частных (сериальных) вероятностей невелики, нормальные колебания основной вероятности могут покрыть собою дополнительные колебания вероятности по сериям. При сравнении среднеквадратического уклонения в целом с уклонением σ может получиться величина близкая к 1. Напротив, с увеличением n первая часть выражения уменьшается и может быть затушевана второй частью. Таким образом для одного и того же явления при одном и том же переменном характере общей вероятности рассеяние может быть сверхнормальным или приближаться к нормальному, в зависимости от того, будем-ли мы сводить отдельные наблюдения в большие или малые первоначальные совокупности.

Сказанное станет еще очевиднее если взять отношение Q; последнее составит:

$$Q = \sqrt{1 + (n-1)\,\frac{S(p_i-p)^2}{s}\,\frac{1}{pq}}.$$

Формула показывает, что величина Q будет тем больше отличаться от 1, чем больше величина n или число случаев в каждой первоначальной частноотносительной совокупности. При малом числе случаев в совокупности, Q будет более приближаться к 1. Таким образом, если каждое частноотносительное составлено на основании совокупности с небольшим числом случаев наблюдения, рассеяние будет приближаться к нормальному; при сведении наблюдений в большие первоначальные группы, сверхнормальный характер рассеяния будет обнаруживаться больше. Это свойство сверхнормального рассеяния пр. Борткевич назвал законом малых чисел. Закон малых чисел указывает на то, что величина отношения Q, близкая к 1, не указывает еще на отсутствие переменного характера вероят-

ности. Чтобы убедиться в истинном характере рассеяния, необходимо свести наблюдения в большие группы. Тогда, в случае переменной вероятности величина Q будет возрастать; напротив, в случае, постоянной вероятности, увеличение числа наблюдений в каждой частноотносительной сделает последние лишь более устойчивыми, менее отклоняющимися от общей вероятности и отношение более близким к 1.

Пр. Борткевич заметил, что рассеяние весьма близкое к нормальному обнаруживают явления очень редкие, т. е. такие, для которых значения p и q сильно уклоняются от $^1/_2$. Для таких явлений величина Q бывает близкой к 1. Эту особенность явлений редких пр. Борткевич назвал также законом малых чисел. Здесь малым числом является не число случаев, из которых составлена каждая частная совокупность, а число случаев появления события в каждой из таких совокупностей. В том случае когда p и q сильно уклоняются от $^1/_2$, величина σ может быть выражена в несколько иной форме. Если число случаев появления события в каждой совокупности из n наблюдений составляет соответственно

$$a_1, a_2, \ldots\ldots a_s,$$

и средняя из этих чисел равняется

$$\frac{\Sigma a}{s} = a,$$

то среднеквадратическое уклонение составит:

$$\delta = \sqrt{\frac{(a_1-a)^2+(a_2-a)^2+\ldots\ldots+(a_s-a)^2}{s}}$$

среднеквадратическое же уклонение типа $\sigma = \sqrt{npq}$ может быть сведено к выражению $\sigma = \sqrt{a}$ и отношение Q составит $\frac{\delta}{\sqrt{a}}$.

Все рассмотренные случаи рассеяния сходны в одном отношении—они исходят из предположения, что вероятность появления события, будет ли она постоянной или переменной, не зависит для каждого данного случая от предшествующих исходов: то обстоятельство, что событие осуществилось один или несколько раз, не увеличивает и не уменьшает вероятности его появления в новом испытании. Если представить себе наступление события в виде выхода шара того или иного цвета при

случайном тираже из урны, содержащей шары разного цвета в определенной пропорции, то указанное допущение выразится в том, что вынутый шар возвращается обратно в урну, и таким образом перед каждым тиражем численное отношение шаров в урне не меняется. Если есть несколько урн и одна из них выбирается по жребию или в каком-либо последовательном порядке, вынутый на удачу шар все равно возвращается в свою урну и впоследствии, когда случай или систематический порядок снова намечает урну к действию, состав ее остается таким же, как с самого начала, независимо от результатов, какие получались при предшествующих тиражах из нее.

Однако можно представить себе условия опыта и в таком виде, что вынутый при испытании шар не возвращается в урну и таким образом число шаров и численное отношение шаров разного цвета будет менятся перед всяким новым испытанием, в зависимости от предшествующего исхода. Так, пусть в урне a белых шаров и b черных и общее число шаров $a+b=n$; вероятность появления белого шара составит $\frac{a}{n}$ и черного $\frac{b}{n}$; если бы при первом испытании появился белый шар, то к следующему тиражу число белых шаров уменшилось бы на один, число всех шаров тоже стало бы меньше на единицу, и вероятность появления белого шара была бы равна $\frac{a-1}{n-1}$, а вероятность появления черного шара $\frac{b}{n-1}$; если бы и при втором тираже был вынут белый шар, к третьему испытанию вероятность появления белого и черного шара составили бы $\frac{a-2}{n-2}$ и $\frac{b-2}{n-2}$; в случае появления черного шара при третьем тираже, к четвертому тиражу вероятности получили бы значение

$$\frac{a-2}{n-3} \text{ и } \frac{b-1}{n-3} \text{ и т. д.}$$

При этих условиях, если мы сделаем из урны m тиражей подряд и получим l_1 раз выход белого шара; затем восстановив содержание урны в первоначальном виде, снова повторим опыт

m раз получив l_2 случаев выхода белого шара и т. д., то мы получим ряд частноотносительных

$$\frac{l_1}{m}, \frac{l_2}{m}, \ldots\ldots \frac{l_x}{m};$$

общеотносительная $\frac{l}{m}$ представит наиболее вероятное выражение первоначальной вероятности $\frac{a}{n}$, к которой с меньшею точностью будут приближаться и отдельные частноотносительные $\frac{l_1}{m}, \frac{l_2}{m}$ и т. д. Но степень рассеяния последних будет меньше, чем в случае неизменного состава урны. В самом деле, если бы $m=n$, т. е. для образования каждой частноотносительной типа $\frac{l}{m}$ были последовательно вынуты из урны все шары, то каждая из частноотносительных дала бы одно и то же отношение числа шаров, равное содержанию урна (т. е. $\frac{a}{n}$), без всяких колебаний, и никакого рассеяния не было бы. Если бы каждая частноотносительная состояла только из одного испытания, т. е при $m=1$, мы получили бы условия, тождественные со случаем возвращения шара в урну после каждого испытания; в этом случае рассеяние было бы нормальным. При m больше 1 и меньше n рассеяние содержится в пределах между нормальным и 0, т. е. оно должно быть меньше 1. Среднеквадратическое уклонение отдельной частноотносительной получает в этом случае выражение (для абсолютных величин l)

$$\sigma' = \sqrt{m \frac{n-m}{n} pq}$$

где p и q соответственно равны $\frac{a}{n}$ и $\frac{b}{n}$ или приближенно выражаются в эмпирических общеотносительных $\frac{l}{m}$ и $\frac{m-l}{m}$. При n очень большом сравнительно с m, величина добавочного коэфициента $\frac{n-m}{n}$ всегда близка к 1 и не оказывает существенного влияния на характер нормального уклонения.

Статистические способы наблюдения обычно отвечают только что описанным условиям опыта. Это яснее всего видно на случае выборочного исследования. Если бы для определения вероятности рождения мальчика, мы взяли совокупность всех рождений в течение года и из нее в случайном порядке отобрали бы каждый десятый случай, то условия производства наблюдений подходили бы под схему опыта с невозвращающимся шаром. Уклонение относительнаго числа мужских рождений от подлинного соотношения их в основной исчерпывающей совокупности было бы тем меньше, чем больший процент отбора был бы взят; всякая разница исчезла бы, если бы мы взяли 100% случаев, т. е. всю основную совокупность. Иначе было бы в том случе, если бы каждый случай рождения мы отметили бы последовательным номером и тянули бы номера на угад, возвращая вышедший номер в урну после каждаго тиража; тогда с увеличением числа тиражей точность результата возрастала бы в пропорции квадратнаго корня из числа наблюдений, но рассеяние всегда оставалось бы, сохраняя нормальную величину.

Когда мы производим сплошное наблюдение (напр., берем все случаи рождения за год), мы можем представить себе каждый случай, как тираж из урны, находящейся за пределами наблюдений, без возвращения зарегистрированного случая обратно в урну; но по мере регистраци наступающих событий, состав шансов их появления в воображаемой урне возстановляется. Если совокупность причин, от которых зависит явление, остается неизменной, причины эти имеют тенденцию возстановлять шансы в первоначальном соотношении, с случайными лишь уклонениями, взаимно нивелирующимися во времени. Если же причины меняются, то изменяется и состав воображаемой урны, изменяется и вероятность появления события. Но это изменение вероятности обусловливается не исходом зарегистрированных случаев, а изменением самых причин, т. е. заменой одной урны другою, независимо от произведенных из нее тиражей.

Функциональная зависимость.

В средних и относительных величинах мы имеем дело с такими рядами, в основе которых лежит одна неизменная и постоянная величина. Все величины ряда рассматриваются, как различные значения этой основной величины, и все уклонения

измеряются от одной постоянной точки. Даже в том случае, когда в относительных величинах отдельные варианты являлись результатом действия различных или переменных вероятностей, мы рассматривали их в конечном итоге, как уклонения от одной и той же общей общеотносительной величины. Подобного рода ряды мы называем статическими. В отличие от них рядами динамическими мы назовем такие ряды, в которых каждая варианта является выражением своей особой истинной величины, и эти величины систематически изменяются на протяжении ряда. Подобно тому, как по отношению к статическим рядам задача исследования заключается в том, чтобы свести ряд к его основной величине, так и в рядах динамических задача сводится к тому, чтобы найти наиболее вероятное значение тех основных величин ряда, которые неточно и с уклонениями проявляются в соответствующих эмпирических вариантах ряда. Найти ряд изменяющихся величин возможно только тогда, когда эти величины в своих изменениях подчинены какому либо закону; закон же выражается в том, что изменения одних величин находятся в зависимости от изменений какой либо другой величины. Исследование динамического ряда сводится таким образом к тому, чтобы поставить ряд в зависимость от какой либо переменной величины, (независимой переменной), каждому значению которой должно соответствовать определенное значение другой переменной величины, (зависимой переменной), последняя же с случайными уклонениями и приближенно выражается в эмпирических величинах ряда. Благодаря этим случайным уклонениям эмпирические величины не обнаруживают точной зависимости от независимой переменной; зависимость эта затемняется случайными уклонениями, и для того, чтобы найти ее, необходимо устранить, элиминировать случайные уклонения, заменив эмпирические величины ряда наиболее вероятным выражением истинного их значения.

Независимой переменной может быть время, место или какой либо признак или обстоятельство, допускающее численное измерение. В простейшем случае эта независимая переменная изменяет свое значение по равным интервалам, которые мы можем условно принять равными единице. Если последовательные значения этой переменной изобразить равноотстоящими точками на оси абсцис, то перпендикуляр из каждой точки изобразит своей пропорциональной длиной соответствующую эмпири-

ческую величину ряда. Соединив вершины перпендикуляров прямыми, мы получим ломаную линию; последняя представляет собою неточное, снабженное уклонениями выражение зависимости величин ряда от независимой переменной. Для того, чтобы получить точную зависимость, эту неправильную ломаную линию надо заменить такой линией, которая изменялась бы по какому нибудь определенному закону, в зависимости от изменения независимой переменной, представляла бы определенную ее функцию.

Простейший способ состоит в том, чтобы эмпирическую ломаную заменить прямой. Такая замена равносильна допущению, что величины ряда изменяются пропорционально изменению независимой переменной. Подобного рода зависимость выражается формулой

$$y = a + bx$$

Величина a означает место на оси ординат, от которого начинается прямая; эта величина представляет собою значение прямой в нулевой точке независимой переменной (т. е. там, где $x = 0$). Коэфициент b соответствует углу, который прямая образует с осью абсцис, и показывает скорость изменения зависимой переменной по сравнению с независимой. Если $b > 1$, зависимая переменная растет быстрее независимой: когда независимая увеличивается на единицу, зависимая увеличивается больше, чем на 1; при $b < 1$—обратно: увеличению независимов переменной на 1 отвечает увеличение зависимой менее, чем на единицу. Положительное b означает, что значения зависимой переменной возрастают с увеличением значений независимой; при отрицательном b зависимая переменная изменяется в обратном отношении к независимой.

На чертеже изображен приведенный ниже ряд эмпирических величин y по равным интервалам независимой переменной x. Если x изменяется по интервалам равным единице, и каждому значению x отвечает известная величина y, то последовательные значения y зависят от места, какое данный y занимает в ряду, чтобы ни означала в действитель ости независимая переменная x: время, место или какое либо другое обстоятельство.

x	y
1	11
2	14
3	15
4	18
5	16
6	22

Замену эмпирической ломаной линии прямой можно сделать просто на глаз, стараясь провести прямую между эмпирическими точками так, чтобы она проходила в общем как можно ближе к ним. Так, например, проведена линия QQ. Если по возможности точно измерить расстояние линии QQ от оси абсцис для двух произвольно взятых значений x, например, для $x=0$ и $x=6$, то нетрудно воспроизвести формулу зависимости y от x; в самом деле:

для $x=0$ $\quad y=9{,}3$
для $x=6$ $\quad y=20{,}6$

вычитая первую строку из второй, получим, что на шесть единиц x-а y увеличился на 11,3 единицы, или на единицу x приходится приблизительно $\frac{11{,}3}{6}=1{,}9$ увеличения y, т. е. $b=1{,}9$; при $x=0$ $a=9{,}3$, и вся зависимость выразится ввиде

$$y=9{,}3+1{,}9\,x.$$

На основании этого уравнения мы получаем для каждого эмпирического y теоретически вычисленное значение y'; ниже сопоставлены оба ряда.

y	y'
11	11,2
14	13,1
15	15,0
18	16,9
16	18,8
22	20,7

Неудобство такой замены эмпирического ряда теоретическим состоит в том, что она основана на произвольном усмотрении и лишена какого либо об'ективного критерия. Для того, чтобы получить такой критерий, необходимо поставить какое либо условие, которому должны удовлетворять искомые величины a и b. Целесообразнее всего и здесь поставить то же условие, которому удовлетворяет среднеарифметическая, а именно: величины a и b должны быть выбраны так, чтобы уклонения эмпирических величин от вычисленных в сумме давали 0, и сумма квадратов уклонений была минимальной. Разрешая это последнее задание обычным способом (который здесь не прово-

дится), мы приходим к двум уравнениям, определяющим значение a и b. Возьмем ряд уклонений эмпирических величин (y) от вычисленных $(a+bx)$:

$$\begin{aligned} -y_1+a+bx_1&=d_1\\ -y_2+a+bx_2&=d_2\\ &\cdots\cdots\\ -y_n+a+bx_n&=d_n \end{aligned}$$

Первое уравнение имеет вид:

$$d_1+d_2+\ldots+d_n=0$$

и второе:

$$d_1x_1+d_2x_2+\ldots+d_nx_n=0$$

Подставляя вместо d его значения, получим:

$$-Sy+na+bSx=0$$

и

$$-Sxy+aSx+bSx^2=0.$$

Решая эти уравнения относительно a и b, получим искомый результат:

$$a=\frac{Sx^2\,Sy-Sx\,Sxy}{nSx^2-Sx\,Sx}$$

и

$$b=\frac{nS\,xy-Sx\,Sy}{nSx^2-Sx\,Sx}$$

Таким образом для определения значений a и b необходимо вычислить, на основании эмпирического ряда, следующий ряд величин:

$$Sy,\ Sx,\ Sxy,\ Sx^2.$$

Ниже приведен пример вычисления.

y	x	xy	x^2
11	1	11	1
14	2	28	4
15	3	45	9
18	4	72	16
16	5	80	25
22	6	132	36
96	21	368	91
Sy	Sx	Sxy	Sx^2

$$-96+6a+21b=0$$
$$-368+21a+91b=0$$

$$a=\frac{91\times 96-21\times 368}{6\times 91-21\times 21}=9.6$$

$$=\frac{6\times 368-21\times 96}{6\times 91-21\times 21}=1.83$$

$$y=9.6+1.83x.$$

Вычисленный на основании этого уравнения ряд дает слудующие величины:

y	y'
11	11.43
14	13.26
15	15.09
18	16.92
16	18.75
22	20.58
$S=96$	$S=96.03$

Суммы Sd и Sdx представляют собою нулевой и первый момент распределения. В приведенном вычислении мы принимали исходную точку лежащей на один интервал до начала ряда, так что первый член ряда оказывался в точке $x=1$; можно взять нулевую точку в середине ряда; результат получится тот же, вычисления же упростятся. Так например:

y'	y	x	yx	x^2
11.42	11	—3	—33	9
13.25	14	—2	—28	4
15.08	15	—1	—15	1
16.91	18	0	—	—
18.74	16	1	16	1
20.57	22	2	44	4
95.97	96	—3	—16	19
Sy^1	Sy	Sx	Sxy	Sx^2

$$a=\frac{19\times 96-3\times 16}{6\times 19-9}=16.91$$

$$b=\frac{-6\times 16+3\times 96}{6\times 19-9}=1.83$$

Из изложенного видно, что сведение эмпирического ряда к прямой линии основано на том же принципе, как и сведение к средней арифметической; разница заключается лишь в том, что в последнем случае мы сводим все эмпирические величины к одному неменяющемуся уровню, тогда как в случае прямой линии уровень этот меняется. Средняя арифметическая является таким образом частным случаем прямой линии: она заменяет

эмпирические величины величинами, лежащими на прямой, параллельной оси абсцисс, тогда как уравнение прямой при меняющемся уровне дает линию, идущую под углом к оси абсцисс: действительно при $b = 0$, уравнение прямой превратится в

$$-Sy + na + 0 = 0$$
$$a = \frac{Sy}{n},$$

т. е. дает среднеарифметическую.

Уравнение прямой может быть выражено в несколько ином виде, если вместо абсолютных величин y—ов и x—ов взять их уклонения от их среднеарифметических. Формула зависимости между уклонениями будет отличаться от прежней тем, что здесь a равно 0; если уклонение каждой зависимой переменной y от их среднеарифметической обозначим ζ и такие же уклонения независимой через ξ, то

$$\zeta = b\xi$$

Графически разница выражается в том, что новая прямая, оставаясь параллельной прежней, опустится вниз по направлению к оси обсцисс на величину средней арифметической y-ов; нулевая точка прямой пройдет через нулевую точку уклонений x-ов, т. е. через точку их среднеарифметической.

Уравнение уклонений получается из уравнения абсолютных величин и обратно через простую подстановку. Так если

$$y_i = y_o + \zeta_i$$
$$x_i = x_o + \xi_i$$

то

$$y_i = y_o + \zeta_i = a + b(x_o + \xi_i)$$
$$\zeta_i = -y_o + a + bx_o + b\xi_i;$$

так как

$$y_o = a + bx_o, \text{ то}$$
$$\zeta_i = b\xi_i$$

И обратно: если

$$\zeta_i = b\xi_i, \text{ то}$$
$$y_o - y_i = b(x_o - x_i)$$
$$y_i = y_o - x_o + bx_i$$

так как

$$y_o - bx_o = a, \text{ то}$$
$$y_i = a + bx_i$$

По аналогии с зависимостью от одной переменной — можно поставить y в зависимость от двух переменных — x, а именно:

$$y = a + bx + cz.$$

Три уравнения, необходимые для отыскания трех постоянных a, b, c получаются, по аналогии с предыдущим, путем суммирования Sd, Sdx и Sdz и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} -Sy + na + bSx + cSz &= 0 \\ -Sxy + aSx + bSx^2 + cSxz &= 0 \\ -Szy + aSz + bS\,z + cSz^2 &= 0 \end{aligned}$$

Во многих случаях выражение эмпирического ряда в виде прямой дает неудовлетворительные результаты; это выражается в том, что в каком либо месте ряда эмпирические цифры систематически уклоняются от вычисленных. Так например, если в начале и в конце ряда уклонения имеют один и тот же знак, а в середине обратный, то очевидно, что расположению эмпирических величин более отвечает кривая, и что зависимость, выражаемая прямой линией, не отвечает природе явления. Для того, чтобы перейти к формулам кривых линий, надо ввести один или несколько членов с x в степени выше 1; в простейшем случае, если ограничиться только второй степенью независимого переменного, формула будет иметь следующий вид:

$$y = a + bx + cx^2$$

Три уравнения, необходимые для отыскания трех неизвестных a, b, c, получаются аналогично предыдущему, а именно: первое из суммы d, второе из Sdx и третье из Sdx^2, где

$$d = -y + (a + bx + cx^2).$$

Уравнения эти имеют слудующий вид:

$$\begin{aligned} &\text{I:} && -Sy + na + bSx + cSx^2 = 0 \\ &\text{II:} && -Sxy + aSx + bSx^2 + cSx^3 = 0 \\ &\text{III:} && -Sx^2y + aSx^2 + bSx^3 + cSx^4 = 0. \end{aligned}$$

Таким образом для нахождения постоянных a, b, c надо образовать на основании эмпирического ряда следующие суммы:

$$Sy,\ Sx,\ Sx^2,\ Sx^3,\ Sx^4,\ Sxy,\ Sx^2y.$$

Величины a, b, c, полученные таким путем, будут удовлетворять тому условию, что уклонения вычисленных величин от эмпирических в сумме равны нулю и квадраты их дают минимальную сумму.

Ход вычислений показан на следующем примере:

y	x	yx	yx^2	x^2	x^3	x^4
3	1	3	3	1	1	1
7	2	14	28	4	8	16
9	3	27	81	9	27	81
10	4	40	160	16	64	256
11	5	55	275	25	125	625
40	15	139	547	55	225	979
Sy	Sx	Sxy	Sx^2y	Sx^2	Sx^3	Sx^4

Преобразование ряда y при помощи уравнения первой степени дает:

$$a = 2.3; \quad b = 1.9$$

$$y = 2{,}3 + 1.9x.$$

Вычисленные на основании этого уравнения величины дают следующие уклонения от эмпирических величин:

3	4.2	-1.2
7	6.1	$+0.9$
9	8.0	$+1.0$
10	9.9	$+0.1$
11	11.8	-0.8
40	40.0	0.0

Уклонения систематически имеют в концах ряда отрицательные знаки, в середине положительные. Если прибавить еще один член с x во второй степени, мы получим уравнение кривой

$$y = a + bx + cx^2,$$

для определения которого надо составить следующие три равенства:

$$-40 + 5a + 15b + 55c = 0$$
$$-139 + 15a + 55b + 225c = 0$$
$$-547 + 55a + 225b + 979c = 0.$$

На основании первого равенства

$$a = 8 - 3b - 11c.$$

На основании второго

$$-139+15\times(8-3.5-11c)+554+225c=0$$

$$b=1.9-6c,$$

следовательно

$$a=2.3+7c$$

На основании третьего уравнения

$$-547+55\times(2.3+7c)+225\times(1.9-6c)+979c=0$$

$$c=-0.5$$

$$b=\ \ 4.9$$

$$a=-1.2$$

и $y=-1.2+4.9x-0.5x^2$.

Отсюда вычисленные значения $\bar{y}$ и уклонения d дают следующий ряд:

3	3.2	−0.2
7	6.6	+0.4
9	9.0	0.0
10	10.4	−0.4
11	10.8	+0.2
40	40.0	0.0

Кривая дает более удовлетворительные результаты, так как вычисленные величины проходят ближе к эмпирическим и уклонения имеют случайный характер.

Приведенные здесь формулы являются общим способом преобразования эмпирических рядов; к ним мы прибегаем во всех случаях, когда нет основания отдавать предпочтение какой либо другой формуле. В тех случаях, когда нам известно, или мы предполагаем, что переменные связаны какой либо иной определенной функциональной зависимостью, мы можем дать предпочтение той формуле, которая выражает эту именно зависимость.

Так, например, нам известно, что равные приращения удобрения дают убывающие приращения урожая; мы можем допустить, что урожай увеличивается, как логарифм удобрения, т. е. с каждым равным приращением удобрения урожай увеличивается все медленнее, стремясь к некоторому пределу; в этом случае для преобразования ряда мы можем воспользоваться зависимостью

$$y=a+b\lg x$$

Или при определении понижения ценности строений от времени, мы можем исходить из априорного предположения, что процесс обветшания и изнашивания аналогичен учету по сложным процентам, т. е. происходит в геометрической прогрессии, и выразить зависимость в виде:

$$y = w_0 \left(1 - \frac{z}{100}\right)^x$$

где x время, z процент, и w_0 начальная ценность и т. п.

Кореляция.

Когда мы заменяем эмпирические величины ряда величинами, вычисленными на основании независимого переменного, мы исходим из предположения, что эмпирические величины представляют неточное, снабженное уклонениями выражение того или иного признака или явления, тогда как независимое переменное точно выражает соответствующее ему обстоятельство. Поэтому на основании точной меры одного явления мы исправляем неточное выражение другого явления. Так например, когда независимым переменным является время, последовательные годы представляют собою точную меру времени; их нельзя рассматривать, как величины снабженные какими либо случайными уклонениями и подлежащие исправлению или замене какими либо другими более вероятными значениями; напротив, то явление, которое изменяется в зависимости от времени, может подвергаться разного рода случайным и побочным влияниям, затемняющим точный закон развития явления во времени; и потому эмпирические цифры могут подлежать исправлению и замене другими, с целью элиминировать случайные уклонения и разного рода побочные влияния. При этом, естественно, за исходную точку для такого преобразования неточных и приблизительных цифр мы принимаем точные и устойчивые цифры независимо переменного, от которого данное явление зависит.

Точно такой же характер имеет зависимость урожая от количества удобрения. Цифры констатированного удобрения десятину земли представляют собою то количество его, которое действительно было вложено в почву; быть может при изме

рении этого количества были допущены большие или меньшие погрешности измерения, но они выравниваются при сведении данных в интервалы. Что же касается урожая, то, кроме удобрения, он зависит от множества других факторов, которые мы считаем побочными и случайными, когда стремимся установить зависимость урожаев исключительно от удобрения; поэтому эти влияния должны быть элиминированы или уравнены для всех случаев, и эмпирические цифры урожаев исправлены в зависимости единственно от независимого переменного. Обратная операция не имела бы реального содержания: количество удобрения вообще не зависит от урожая и по различным урожаям, зависящим от многих причин, нельзя восстановить реального—действительного или нормального—количества удобрения, какое было применено.

Однако невсегда независимое переменное действительно выражает собою устойчивое явление, не подвергающееся случайным колебаниям и уклонениям и могущее служить точной мерой для отыскания верной величины зависимого переменного. Собственно говоря, кроме времени, трудно отыскать какое-либо явление или признак, который не был бы подвержен случайным и побочным влияниям и мог бы служить устойчивой и точной мерой для измерения изменений других явлений. Если между двумя явлениями существует определенная зависимость, которая в отдельных случаях проявляется неточно и с уклонениями, то эта неточность и уклонения могут обусловливаться как случайными влияниями, которым подвергается одно явление, так и случайными влияниями, которым подвергается другое явление. Когда мы одно из явлений принимаем за независимое переменное, мы обычно условно допускаем, что неточное выражение зависимости, существующей между двумя явлениями, целиком обусловливается случайными уклонениями на стороне того обстоятельства, которое принимается за зависимое переменное; другое же обстоятельство находит себе точное выражение в цифрах последовательных значений независимого переменного. Это допущение мы облекаем в соответствующую внешнюю форму, когда независимое переменное мы располагаем в правильный ряд по равным интервалам и для каждого интервала даем среднюю величину зависимого переменного. Последние образуют более или менее неправильный эмпирический ряд, кото-

рый мы заменяем правильным, исходя из правильного ряда цифр независимого переменного и принимаемой нами точной формулы зависимости явлений. Но во многих случаях мы с равным правом могли бы исходить и из обратного допущения и принимать за независимое переменное второй ряд и за зависимое—первый. Тогда, принимая ту же самую формулу зависимости между явлениями, мы получили бы исправленные цифры для первого ряда. В самом деле, если мы принимаем первый ряд за независимое переменное и на основании его вычисляем при помощи определенной формулы, с известными численными значениями постоянных, второй ряд, то от вычисленных таким образом цифр мы можем при помощи той же формулы обратным путем прийти к цифрам первого ряда; но так как вычисленные цифры второго ряда разнятся от эмпирических данных, то исходя из последних, мы не можем получить действительных цифр первого ряда; если же мы примем действительные цифры второго ряда за независимое переменное и будем преобразовывать первый ряд, то получим новую зависимость, отличную от первой. Таким образом принимая один раз одно явление за независимое переменное, другой раз—другое, мы приходим к двум различным несогласным друг с другом результатам. Функциональная зависимость между двумя явлениями будет выражаться двояко, и это двоякое выражение будет состоять в том, что в формуле одного и того же вида постоянные величины будут иметь различные численные значения в одном и другом случае. Такой противоречивый результат происходит от условного допущения, несоответствующего действительности, а именно от того, что мы принимаем, что только один ряд цифр—либо первый, либо второй—является неточным приближенным выражением истинных значений явлений, тогда как другой точно выражает меру своего явления. Между тем в действительности оба ряда могут одинаково давать уклонения от своих точных или истинных значений. Благодаря этому последнему обстоятельству, ни одно из двух различных выражений зависимости между явлениями не является точным воспроизведением действительной зависимости, каждое односторонне уклоняется от истинного соотношения. Последнее должно представлять собою нечто среднее между этими двумя выражениями.

Пусть мы имеем два ряда x и y, варианты которых мы распределяем по равным интервалам с центральными варианта-

ми интервалов 1,2 . . . 5. Число случаев совпадения вариант определенного интервала ряда x с вариантами того или иного интервала ряда y показаны в соответствующих клетках прилагаемой таблицы.

y \	1	2	3	4	5	n_y	x_m
1	5	2	1	1	1	10	2.1
2	4	8	3	2	1	18	2.3
3	1	11	20	7	1	40	2.9
4		4	10	5	1	20	3.2
5			1	10	1	12	4.0
n_x	10	25	35	25	5	$100 = N$	
y_m	1.6	2.7	3.2	3.8	3.0		

n_y и n_x обозначают сумму случаев, отвечающих каждому интервалу y и x; N—все число случаев; x_m представляет собою средние x-ов для каждого интервала y-ов; y_m—средние y-ов для каждого интервала x-ов.

Примем x за независимое переменное, распределим его по равным интервалам, и для каждого интервала вычислим среднеарифметическую y-ов. Получим два ряда:

$$x = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;$$
$$y = 1.6; 2.7; 3.2; 3.8; 3.0,$$

между которыми будем искать зависимость. Так как сущность зависимости характеризуется главным образом коэфициентом b, постоянная же a указывает только на соотношение абсолютных величин обоих рядов, то мы можем упростить формулу устранением из нее a, если вместо абсолютных величин возьмем уклонения их от их средних арифметических. Средняя ряда y-ов составит 2.86 и x-ов—3.

Уклонения y-ов и x-ов образуют следующие два ряда:

y	x	xy	x^2
— 1.26	— 2	2.52	4
— 0.16	— 1	0.16	1
0.34	0	0.00	0
0.94	1	0.94	1
0.14	2	0.28	4
0.00	0	3.90	10
Sy	Sx	Sxy	Sx^2

Выражение для b, которое для абсолютных величин x и y имеет вид:

$$b = \frac{n\,Sxy - Sx\,Sy}{nSx^2 - Sx\,Sx},$$

для уклонений упрощается, вследствие того, что $Sx = 0$ и $Sy = 0$, и получает следующий вид:

$$b = \frac{nSxy}{nSx^2} = \frac{Sxy}{Sx^2},$$

что в данном случае составит $b_1 = \frac{3.9}{10} = 0.39$, зависимость y от x выразится таким образом:

$$y = 0.39x.$$

Сделаем теперь обратное допущение: что y—независимое переменное, и по данным значениям y вычислим соответствующие ему значения x; в формуле b Sxy останется без перемены, а Sx^2 заменится Sy^2, которая в данном случае равна 2.632. Поэтому

$$b_2 = \frac{3.9}{2.63} = 1.48 \text{ и } x = 1.48y.$$

Таким образом зависимость между рядами выражается различно, в зависимости от того, какой ряд принять за независимое переменное. Если за независимое переменное принять x, то $y = 0.39x$, откуда x должен быть равен $\frac{1}{0.39}y = 2.56y$; принимая же y за независимое переменное, получаем, что $x = 1.48y$. Первая формула выведена при допущении, что значения x выражают точную меру соответствующего явления, значения же y представляются неточными; вторая—в обратном допущении, что значения y точны, значения же x неточны. Ни одно из этих допущений не соответствует действительности вполне, так как неточное выражение зависимости обуславливается как воз-

можными уклонениями x-ов от их истинных значений, так и такими же уклонениями y-ов. Поэтому как коэфициент b_1, так и b_2 неточно выражает зависимость между двумя явлениями, и так как нет никаких оснований отдавать какое либо предпочтение одному перед другим, остается принять простейшее допущение, что оба неточны в одинаковой мере, что один во столько же раз уклоняет отношение между переменными в одну сторону, во сколько другой в другую, при таких условиях наиболее вероятным выражением зависимости будет средняя геометрическая обоих значений или $\sqrt{b_1 b_2}$, которая в данном случае составит $\sqrt{1.48 \times 0.39} = \sqrt{0\,5772} = 0.76$. Эта последняя величина носит название коэфициента кореляции, обозначается буквой r и служит мерой зависимости двух переменных величин. Коэфициент кореляции характерен в том отношении, что его величина содержится в границах от -1 до $+1$. Прежде всего он может быть либо положительным, либо отрицательным $(\pm\sqrt{b_1 b_2})$; положительное значение отвечает прямой зависимости (т. е. когда положительным уклонениям одного ряда отвечают положительные же другого), отрицательное—обратной зависимости. Если зависимость между двумя рядами совершенна, т. е. вполне точно проявляется в каждой паре соответствующих друг к другу членов ряда, то, когда,

$$y = b_1 x,$$

то x, обратно должен равняться

$$x = \frac{1}{b_1} y,$$

или иными словами

$$b_2 = \frac{1}{b_1}$$

и

$$r = \sqrt{b_1 b_2} = \sqrt{b_1 \times \frac{1}{b_1}} = +1.$$

Если между двумя рядами существует полная независимость, то уклонениям одного ряда не отвечают уклонения другого: другой ряд либо останется неизменным, либо обнаруживает лишь случайные колебания, выравнивание которых приводит все величины ряда к одному уровню. Вследствие этого один или оба коэфициенты b равны нулю и коэфициент кореляции также равен 0. Когда между рядами существует непол-

ная зависимость величина коэфициента кореляции содержится в промежутке между 0 и $+1$ или -1. Таким образом коэфициент кореляции своим знаком и величиной показывает направление и степень зависимости

Коэфициент кореляции может быть предоставлен в ином виде, который обнаруживает характер этой величины с другой точки зрения. Принимая во внимание, что

$$b_1 = \frac{Sxy}{Sx^2} \quad \text{и} \quad b_2 = \frac{Sxy}{Sy^2}$$

где x и y означают уклонения от средней арифметической соответствующего ряда, и что

$$Sx^2 = n\sigma_x^2 \text{ и } Sy^2 = n\sigma_y^2,$$

где σ_x и σ_y означают среднеквадратические уклонения и n число величин ряда, получим:

$$b_1 b_2 = \frac{S(xy)^2}{n^2\sigma_x^2\sigma_y^2}$$

и

$$r = \frac{Sxy}{n\sigma_x\sigma_y},$$

или коэфициент кореляции представляет собою среднеарифметическую $\left(\frac{1}{n}\right)$ из произведений попарно связанных уклонений измеренных в единицах их среднеквадратических уклонений. Поэтому коэфициент кореляции может быть получен непосредственно путем перемножения соответствующих друг другу уклонений, сумирования их и деления на произведение среднеквадратических уклонений и число членов ряда. Способ вычисления показан на том же примере:

y	x	xy	y^2	x^2
-1.26	-2	2.56	1.5876	4
-0.16	-1	0.16	0.0256	1
0.34	0	—	0.1156	0
0.94	1	0.94	0 8836	1
0.14	2	0.28	0.0196	4
0	0	3.90	2.632	10
Sy	Sx	Sxy	Sy^2	Sx^2

$n = 5.$

$$\delta_y = \sigma_y = \sqrt{2.632 \div 5} = 0.7255$$

$$\delta_x = \sigma_x = \sqrt{10 \div 5} = 1.412$$

$$r = \frac{3.9}{5 \times 0.73 \times 1.41} = 0.76.$$

Значение коэфициента корелляции в этом виде уясняется из следующих сопоставлений. Имея два ряда уклонений, сосчитаем особо те случаи, когда положительным или отрицательным уклонениям одного ряда отвечают такие же уклонения другого ряда; и особо случая, когда уклонения одного ряда сопровождаются обратными по знаку уклонениями другого ряда. Пусть случаев совпадения знаков уклонений будет c и случаев расхождения d и $c+d=n$. Тогда отношение

$$\frac{c-d}{n}$$

т. е. избыток совпадений, сравнительно с расхождениями, или обратно, будет простейшей мерой зависимости двух рядов. Вместо сосчитывания числа случаев совпадения и расхождения, мы можем условно обозначить положительные уклонения символом $+1$ и отрицательные -1; тогда перемножив уклонения попарно и сумировав результаты мы сразу получив величину $c-d$ и выражение зависимости примет вид:

$$\frac{S(\pm 1)\times(+1)}{n}$$

Показатель зависимости в таком виде представляет то неудобство, что не учитывает величины отдельных уклонений. Он даст одинаковый результат как в том случае, когда большим уклонениям одного ряда отвечают малые уклонения, а малым — большие, так и в том случае, когда большим уклонениям отвечают большие уклонения, а малым — малые. А между тем зависимость в последнем случае, очевидно, теснее, чем в первом. Однако, если вместо того, чтобы всем уклонениям придавать одинаковый вес, обозначая их условно 1, мы возьмем обсолютные величины уклонений, то получается то неудобство, что сумма произведений уклонений Sxy может зависить просто от масштаба, в котором измеряются уклонения, или от абсолютной величины самого явления. Это последнее обстоятельство устраняется, если все уклонения привести к однообразной мере, выразив их в единицах среднеквадратических уклонений ряда, и тогда показатель зависимости получит форму коэфициента корелляции

$$r=\frac{Sxy}{n\sigma_x\sigma_y}.$$

От коэфициента кореляции нетрудно перейти к формулам зависимости между рядами уклонений. В самом деле, так как

$$b_1 = \frac{Sxy}{Sx^2} \text{ и } b_2 = \frac{Sxy}{Sy^2}, \text{ то}$$

$$b_1 = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \text{ и } b_2 = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

и следовательно

$$y = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x$$

$$x = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}y$$

В свою очередь, от уравнений между уклонениями можно перейти к уравнениям между первоначальными абсолютными величинами двух рядов. Для этого уклонение y следует заменить разницей между первоначальной абсолютной величиной Y и среднеарифметической ряда Y_m, и то же надо сделать для x. Или:

$$Y - Y_m = b_1(X - X_m)$$

$$Y = Y_m - b_1X_m + b_1X;$$

в последнем выражение $Y_m - b_1X_m$ представляет величину a. Таким же образом

$$X = X_m - b_2Y_m + b_2Y$$

Так, для данного примера:

$$b_1 = 0.76 \times \frac{0.73}{1.41} = 0.39 \text{ и } y = 0.39x$$

$$b_2 = 0.76 \times \frac{1.412}{0.7255} = 1.48 \text{ и } x = 1.48y$$

И далее, для перехода к абсолютным величинам:

$$Y - 2.86 = 0.39(X - 3)$$

$$Y = 1.69 + 0.39X$$

и

$$X - 3 = 1.48(Y - 2.86)$$

$$X = -1.23 + 1.48Y.$$

Преобразование первоначальных рядов на основании этих формул дает следующие результаты:

x	x'	y	y'
1	1.14	1.6	2.08
2	2.77	2.7	2.47
3	3.54	3.2	2.86
4	4.39	3.8	3.25
5	3.21	3.0	3.64
15	15.02	14.30	14.30

Приведенный здесь способ вычисления коэфициента корреляции страдает тем недостатком, что сопоставляемые ряды подвергаются неодинаковому выравниванию. Тот ряд, который первоначально принимается за независимое переменное (x) выравнивается только в пределах каждого отдельного интервала; все варианты в пределах интервала заменяются одной средней центральной вариантой. Но так как одному интервалу x-а могут соответствовать варианты y-а, находящиеся в разных интервалах, то сводя все эти варианты в одну общую среднеарифметическую, мы подвергаем ряд y гораздо более значительному выравниванию, чем ряд x.

Эта неравномерность не устраняется и в том случае, если, для вычисления обратной зависимости x от y, мы расположим y по равным интервалам и для каждого интервала y-а возьмем среднеарифметическую из соответствующих вариант x-ов. Для более выравненного ряда зависимость будет выступать в большей степени и при одном и при другом построении рядов.

Эта неравномерность выравнивания устраняется, если брать непосредственно произведения уклонений каждой пары связанных друг с другом вариант. Обычно однако берут произведение уклонений по равномерным интервалам x и y, отчасти вследствие того, что вычисления непосредственно по единичным вариантам слишком громоздки, отчасти вследствие того, что материал дается часто в готовом уже виде по интервалам.

Для вычисления коэфициента кореляции этим способом первоначальные данные сводятся в комбинационную таблицу; в вертикальном направлении располагаются равные интервалы y-а (слева), в горизонтальном (сверху) равные интервалы x. Горизонтальные строки дают число случаев совпадения данного интервала y с соответствующими интервалами x; вертикальные столбцы дают числа случаев совпадения данного интервала x с разными интервалами y-а. Сверх того, справа по строкам подсчитывается сумма частот каждого интервала y-ов и приводится среднеарифметическая x-ов для данного интервала y; вни-

зу горизонтальной строкой проводится такое же сумирование частот каждого интервала x и даются среднеарифметические значения y по интервалам x.

Порядок расположения показан в приводимой таблице.

Беря центральную варианту каждого интервала, мы вычисляем уклонение ее от ее среднеарифметической, затем последовательно перемножаем попарно уклонения, умножая при этом произведение каждой пары уклонений на число случаев совпадения данной пары уклонений; сумма всех произведений даст Sxy. Среднеквадратические уклонения вычисляются по тем же интервалам. Порядок вычисления показан на приводимом примере.

	x	−1.9	−0.9	+0.1	1.1	2.1		
y	Y \ X	1	2	3	4	5	n_y	y_m
−2.06	1	5	2	1	1	1	10	2.1
−1.06	2	4	8	3	2	1	18	2.3
−0.06	3	1	11	20	7	1	40	2.9
0.94	4		4	10	5	1	20	3.2
1.94	5			1	10	1	12	4.0
	n_x	10	25	35	25	5	$100 = N$	
	y_m	1.6	2.7	3.2	3.8	3.0		

1. Определим среднеарифметическую и среднеквадратическое уклонение ряда x:

X	f	fX	x	x^2	fx^2
1	10	10	−1.9	3.61	36.10
2	25	50	−0.9	0.81	20.25
3	35	105	0.1	0.01	0.35
4	25	100	1.1	1.21	30.25
5	5	25	2.1	4.41	22.05
$ss =$	100	290			109.00

$$X_m = 2.9; \quad \frac{Sf_x^2}{n} = 1.09; \quad \sigma_x = \sqrt{1.09} = 1.04.$$

2. Те же вычисления для ряда y дают следующие результаты:

Y	f	fY	y	y^2	fy^2
1	10	10	—2.06	4.2436	42.4360
2	18	36	—1.06	1.1236	20.2248
3	40	120	—0.06	0.0036	0.1440
4	20	80	0.94	0.8836	17.6720
5	12	60	1.94	3.7636	45.1632
	$ss = 100$	306			125.6400

$$Y_m = 3.06; \quad \frac{Sf^2}{n} = 1.2564; \quad \sigma_y = \sqrt{1.2564} = 1.12.$$

3. Определим сумму произведений всех пар уклонений — $Sfxy$. Уклонения каждого интервала ряда x-ов показаны горизонтальной строкой сверху, ряда y-ов вертикальным столбцом слева. Умножение производим по строкам y-ов:

$$\begin{aligned}
-2.06\,(-9.5 - 1.8 + 0.1 + 1.1 + 2.1) &= -2.06 \times -8 = 16.480\\
-1.06\,(-7.6 - 7.2 + 0.3 + 2.2 + 2.1) &= -1.06 \times -10.2 = 10.812\\
-0.06\,(-1.9 - 9.9 + 2.0 + 7.7 + 2.1) &= -0.06 \times 0 = 0.000\\
0.94\,(\ \ -3.6 + 1.0 + 5.5 + 2.1) &= 0.94 \times 5 = 4.700\\
1.94\,(\ \ 0.1 + 11.0 + 2.1) &= 1.94 \times 13.2 = 25.608\\
& \qquad Sfxy = 57.600
\end{aligned}$$

4. На основании предшествующих вычислений коэфициент кореляции составит:

$$r = \frac{57.6}{100 \times 1.04 \times 1.12} = \frac{57.6}{116.48} = 0.49.$$

При указанном способе вычисления затруднение представляют действия с дробями; дробные же числа получаются вследствие того, что приходится брать уклонения от среднеарифметической. Чтобы избегнуть этого, можно взять уклонения от произвольной варианты, например, центральной варианты одного из центральных интервалов; уклонения же центральных вариант всех других интервалов от избранной точки измерять расстоянием от этой точки, принимая условно величину интервала равной 1. Тогда уклонения выразятся в целых числах; интервалы в одну сторону от 0 дадут уклонения —1, —2, —3, и т. д.; в другую 1, 2, 3 и т. д. Перемножив попарно эти условные уклонения и сумировав их, придется затем перево-

сти результат к среднеарифметической точке. Прежде чем показать дальнейший ход вычислений приведем для ясности построение таблицы на том же численном примере

		x	−2	−1	0	1	2			
	y'	Y \ X	1	2	3	4	5	n_y		
I	−1	1	5	2	1	1	1	10	II	
	−1	2	4	8	3	2	1	18		
	0	3	1	11	20	7	1	40		
III	1	4		1	10	5	1	20	IV	
	2	5			1	10	1	12		
		n_x	10	25	35	25	5	100		

Нулевые интервалы x и y делят всю таблицу на 4 квадранта. В первом и четвертом произведения уклонений дают положительные величины, во втором и третьем—отрицательные.

Произведения каждой пары уклонений умноженные на их частоты, и сумма произведений по квадрантам дает следующие результаты:

I квадрант:

$$(-2\times-2\times5)+(-2\times-1\times2)+(-1\times-2\times4)+(-1\times-1\times8)=40$$

IV квадрант:

$$(1\times1\times5)+(1\times2\times1)+(2\times1\times10)+(2\times2\times1) \qquad -31$$

II квадрант:

$$(-2\times1\times1)+(-2\times2\times1)+(-1\times1\times2)+(-1\times2\times1) \quad =-10$$

III квадрант:

$$(1\times-2\times0)+(1\times-1\times4)+(2\times-2\times0)+(2\times-1\times0) \quad =-4$$

Сумма $Sfx'y'$ 57

$$\text{и}\ \frac{Sfx'y'}{n}=0.57.$$

Чтобы перевести этот результат от условных нулевых точек к точкам средних арифметических, его нужно уменьшить

на величину произведения первых моментов x и y или $\nu_{x,1} \times \nu_{y,1}$. Поэтому вычислим первый момент x и y, а также и второй для определения среднеквадратического уклонения:

X	x'	f	fx'	$fx'x'$
1	—2	10	—20	40
2	—1	25	—25	25
3	0	35	0	0
4	1	25	25	25
5	2	5	10	20
		100	—10	100

$$\nu_{1x} = -0.1$$
$$\nu_{2x} = 1.1$$
$$\mu_2 = 1.1 - 0.01 = 1.09$$
$$\sigma_x = \sqrt{\mu_2} = 1.04$$

Y	y'	f	fy'	$fy'y'$
1	—2	10	—20	40
2	—1	18	—18	18
3	0	40	0	0
4	1	20	20	20
5	2	12	24	48
		100	6	126

$$\nu_{1y} = 0.06$$
$$\nu_{2y} = 1.26$$
$$\mu_2 = 1.26 - 0.0036 = 1.2564$$
$$\sigma_y = \sqrt{\mu_2} = 1.12.$$

Произведение первых моментов составит

$$\nu_{1x} \times \nu_{1y} = -0.1 \times 0.06 = -0.006.$$

Вычтя эту величину из суммы произведений уклонений, деленной на N, получим:

$$\frac{Sfxy}{N} = \frac{Sfx'y'}{N} - \nu_{1x} \times \nu_{1y} = 0.57 - (-0.006) = 0.576,$$

и

$$r = \frac{Sfxy}{N\sigma_x\sigma_y} = \frac{0.576}{1.04 \times 1.12} = \frac{0.576}{1.1648} = 0.49$$

также, как и раньше.

Коэфициент кореляции и уравнения уклонений могут быть изображены графически.

Из центральной точки каждого интервала x опустим перпендикуляр на ось абсцис и из точек интервалов y проведем перпендикуляр к оси ординат. На горизонтальной прямой перпендикуляра, отвечающего данному интервалу y-а обозначим в соответствующем месте положение среднеарифметической x-ов, отвечающей этому интервалу y-а; таким же образом отметим положение среднеарифметических y-ов для интервалов x-а. Сделав это по всем интервалам, соединим прямыми линиями все точки среднеарифметических x-а и тоже сделаем по отношению к точкам среднеарифметических y-а. Получим две ломаные линии. Каждая из них в отдельности выравнивается прямой линией при помощи соответствующего уравнения зависимости между рядами. Получаются две прямые; их исходные нулевые точки совпадают; при полном отсутствии зависимости линии перпендикулярны друг к другу, так как среднеарифметические x-ов для всех интервалов y-ов (во всех строчках) лежат в одном и том же или приблизительно одном и том же месте, независимо от меняющейся величины y; и то же все среднеарифметические y-ов по отношению к интервалам x-а. Если же зависимость полная, обе линии совпадают на диагонали; во всех прочих случаях величина угла между двумя прямыми показывает величину коэфициента кореляции.

Коэфициент кореляции является наиболее подходящим приемом определения связи между двумя рядами явлений или признаков в тех случаях, когда ни один из рядов нельзя рассматривать, как причину другого, и когда ни один из них не представляет собою устойчивой меры, которую можно было бы принять за основание для выравнивания случайных уклонений другого ряда. Если при этом оба ряда обнаруживают известный параллелизм или противоположность в своих изменениях, то это обстоятельство обусловливается тем, что изменения обоих рядов вызываются одною и тою же совокупностью причин. В таком, например, отношении находится урожай двух культур на одних и тех же участках. Характер обработки, количество удобрения, плодородие почвы, климатические условия влияют на урожай ржи, так и на урожай овса в одном и том же направлении, хотя и в разной степени. Поэтому по урожаям ржи в общем можно судить об урожаях овса и обратно. Но ни одно явление

не может быть рассматриваемо, как причина другого. Вместе с тем фактический урожай ржи не представляет собою какой либо устойчивой, нормальной меры, которая могла бы служить для определения нормальной высоты урожая овса; урожай ржи в каждом отдельном случае столь же подвержен случайным колебаниям и уклонениям, как и урожай овса. В таком же отношении находится длина двух каких либо органов у разных экземпляров одного и того же вида. По длине руки можно судить в среднем и общем о соответствующей длине ноги; но длина руки в конкретных случаях или в пределах известного интервала не представляет собою свободной от уклонений меры, которую можно было бы принять за основание для исправления меры другого явления.

Принимая то один, то другой ряд за независимое переменное, мы получаем два результата, из которых ни один не может претендовать на точность, ибо при вычислении каждого мы исходим из ряда, несвободного от случайных уклонений. Здесь коэфициент кореляции выражает меру обоюдной зависимости явлений способом, наиболее соответствующем реальной и логической природе отношения явлений.

Коэфициент кореляции может быть применяем и во всех других случаях. Но тогда он будет иметь значение условного формального способа измерения соответствия между изменениями двух рядов, не имея того логически реального смысла, как в первом случае. Когда, мы, например, имеем два ряда—с одной стороны, различные количества удобрения, и, с другой, различные отвечающие им урожаи ржи, то очевидно, что первое явление представляет собою причину или одну из причин второго. Определенное количество удобрения при всех прочих равных условиях должно дать определенный соответствующий ему урожай. Все прочие условия однако не равны. Поэтому в отдельных случаях точная зависимость урожая от удобрения затемняется действием других причин, влияющих на урожай—качеством почвы, обработкой, условиями погоды и т. д. Беря за основание для об'единения различных урожаев в одну группу количество удобрения и смешивания в общую массу все прочие влияния, мы в большей или меньшей степени нейтрализуем действие последних—плохая почва нейтрализует действие хорошей, хорошая обработка нейтрализует действие плохой почвы и т. д.—и урожай оказывается результатом действия по пре-

имуществу той одной причины, которая в неизменной мере присутствует во всех случаях группы. В то же время меру количества удобрения в конкретном случае нельзя рассматривать, как снабженное случайным уклонением выражение какого либо другого реального или истинного количества. В крайнем случае это количество снабжено случайными погрешностями приемов измерения и опроса, и эти погрешности в достаточной степени сглаживаются в пределах интервала заменой конкретных показаний центральной средней интервала. Поэтому вполне естественно ряд вариант удобрения принять за независимое переменное, представляющее достаточно устойчивую меру для исправления случайных и побочных уклонений зависимого ряда урожаев. Разумеется, ничто не мешает принять с формально математической точки зрения ряд урожаев за независимое переменное и соединить в одну группу все случаи различных количеств удобрения, отвечающие одному и тому же урожаю; но так как урожай является результатом совместного действия многих причи, то различное количество удобрения свидетельствует лишь о том, что один и тот же результат вызывается в различных случаях различным сочетанием всех прич н, и среднее количество удобрения, отвечающее данному интервалу урожая, представляет понятие лишенное определенного логического содержания. Установление обратной зависимости удобрения от урожая представляет чисто условный формальный прием вычисления, и коэффициент кореляции имеет характер формально условного показателя меры совпадения изменений ряда. Естественным способом определения зависимости рядов, отвечающим логической природе подобные отношения служит здесь определение односторонней функциональной зависимости ряда урожаев как зависимого переменного, от ряда удобрений, принимаемого за независимое переменное.

Коэфициент сродства или притяжения. Для вычисления коэфициента кореляции необходимо, что-бы варианты имели количественный характер. Но аналогично можно вычислить нечто вроде коэфициента кореляции и для того случая, когда варианты не имеют количественного характера и различаются качественно если условно придать имколичественное значение. Такого рода коэфициент носит название коэфициента сродства или коэфициента притяжения. Так, если мы имеем комбинаци-

ондую таблицу с подразделением браков по признаку граматности и неграматности женихов и невест (Benini, Principii di statistica).

		x_1 грам.	x_2 неграм.	всего
y_2	граматн. . .	42.44	20.60	63.04
y_1	неграматн. .	5.00	31.96	36.96
	всего . . .	47.44	52.56	100

о признак грамотности и не грамотности представляет две варианты (x_1, x_2) признака невест, отличающихся друг от друга качественно. Мы можем условно придать им количественный характер, допустив, например, что одна варианта отличается от другой на один интервал, равный 1; тогда варианта x_1 может быть условно принята за $-{}^1/_2$, варианта x_2 за ${}^1/_2$. То же по отношению к y_1 и y_2. Далее вычисление производится также, как и в случае количественных вариант.

В общем виде вычисление коэфициента сродства дает следующий результат.

Пусть дана комбинационная таблица

		$-{}^1/_2$ x_1	$+{}^1/_2$ x_2	всего
$-{}^1/_2$	y_1	α	β	A
$+{}^1/_2$	y_2	γ	δ	B
	всего	C	D	N

которой x_1, x_2 представляют качественные варианты признака x, и y_1, y_2 то же по отношению к y; α, β, γ, δ—соответственно числа случаев сочетания признаков x_1, x_2 с y_1, y_2; A, B, C, D—суммы и N—все число случаев. Взяв нулевую точку

в середине интервала между x_1 и x_2 и также между y_1 и y_2, получим условные обозначения для x_1 и x_2 $-^1/_2$ и $+^1/_2$ и тоже для y_1 и y_2. Вычисляя коэфициент кореляции получим:

$$\nu_{1,x} = \frac{-C+D}{2N} \qquad \nu_{1,y} = \frac{-A+B}{2N}$$

$$\nu_{2,x} = \frac{C+D}{4N} = \frac{1}{4} \qquad \nu_{2,y} = \frac{1}{4}$$

$$\mu_{2,x} = \frac{1}{4} - \left(\frac{-C+D}{2N}\right)^2 = \frac{CD}{N^2} \qquad \mu_{2,y} = \frac{AB}{N^2}$$

$$\sigma_x = \sqrt{\mu_2} = \frac{\sqrt{CD}}{N} \qquad \sigma_y = \frac{\sqrt{AB}}{N}$$

Сумма произведений уклонений деленная на все число случаев:

$$\frac{S(xy)}{N} = \frac{\alpha - \beta - \gamma + \delta}{4N},$$

с поправкой на произвольно выбранную нулевую точку:

$$\frac{S(xy)}{N} - \nu_{1,x} \cdot \nu_{1,y} = \frac{\alpha - \beta - \gamma + \delta}{4N} - \frac{(-A+B)(-C+D)}{2N\ 2N} =$$

$$= \frac{N(\alpha - \beta - \gamma + \delta) - (-\alpha - \beta + \gamma + \delta)(\alpha + \beta - \gamma - \delta)}{4N^2} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{N^2}$$

Отсюда

$$r = \frac{\frac{S(xy)}{N} - \nu_{1,x}\ \nu_{1,y}}{\sigma_x\ \sigma_y} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\sqrt{ABCD}} = q$$

Применительно к выше приведенному численному примеру

$$q = \frac{42.44 \times 31.96 - 20.60 \times 5.00}{\sqrt{63.04 \times 36.96 \times 47.44 \times 52.56}}$$

$$lg\ q = lg\ 1253.38 - 3.399025 = 1.699058$$

$$q = 0.50$$

Коэфициент q может принимать очевидно, все значения от—1 до 1; отрицательные значения его означают взаимное отталкивание, положительные—притяжение сродних признаков; нулевое значение означает безразличие или независимость признаков.

Числитель коэфициента сродства может быть представлен и в ином виде, а именно:

$$\alpha\delta - \beta\gamma \quad \alpha\delta + \alpha(\alpha+\beta+\gamma) - \beta\gamma - \alpha(\alpha+\beta+\gamma) = \alpha(\alpha+\beta+\gamma+\delta) - (\alpha+\beta)(\alpha+\gamma) = \alpha N - AC.$$

В таком случае коэфициент q получает выражение

$$q = \frac{\alpha N - AC}{\sqrt{ABCD}}$$

(коэфициент сродства Gini—Savorgnan'a).

Если числителя и знаменателя этой дроби разделить на N^2 и ввести обозначения:

$$\frac{\alpha}{N} = \pi; \frac{A}{N} = p_1, \frac{C}{N} = p_2; \frac{B}{N} = q_1; \frac{D}{N} = q_2$$

то формула примет вид:

$$q = \frac{\pi - p_1 p_2}{\sqrt{p_1 q_1 p_2 q_2}} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

В этом выражении p_1 означает вероятность для жениха оказаться грамотным, p_2—тоже для невесты; в таком случае $p_1 p_2$ означает вероятность, что как жених, так и невеста окажутся грамотными; π—означает фактическую частость такого рода браков среди всего числа N браков. Таким образом числитель выражает собою разницу между фактическим числом браков грамотных женихов с грамотными невестами и тем, какое по теории вероятности можно было бы ожидать, если-бы совпадение грамотности женихов и невест было случайным и не существовало никакого подбора по сродству этого признака. Эта разница измеряется в произведении среднеквадратических уклонений σ_x и σ_y вероятностей p_1 и p_2.

Benini берет в знаменателе не произведение средних уклонений $\sigma_x \sigma_y$, а вероятность браков с разнородными признаками жениха и невесты, т. е. $p_1 q_2$ или $p_2 q_1$, смотря потому, будет-ли $A < C$ или $C < A$; число разнородных браков рассматривается здесь, как среда, от которой часть браков должна оторваться, чтобы дать излишек в пользу браков однородных, если таковой имеется. Возможный максимум разнородных браков определяется цифрой грамотных женихов, или грамотных невест, смотря по-

тому, какая цифра меньше. Коэфициенты Benini могут быть представлены в несколько иной форме

$$q = \frac{\alpha N - AC}{qN - AC} \text{ и } A = \frac{\alpha N - AC}{CN - AC},$$

которая обнаруживает их логический смысл: разница между действительным и вероятным числами однородных браков относится к разнице между возможным максимальным и действительным числом однородных браков. Неудобство коэфициентов Benini состоит в том, что они дают две различные меры для одного и того же явления. Формула Gini—Savorgnan'a устраняет этот недостаток, беря для знаменателя среднюю геометрическую из обоих знаменателей Benini.

Несколько отличную формулу предлагает Yule, называя ее коэфициентом ассоциации:

$$Q = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\alpha\delta + \beta\gamma},$$

величина этого коэфициента также колеблется между -1 и $+1$; но недостаток его состоит в том, что он дает сравнительно высокие значения для случаев, когда притяжение или отталкивание выражены вовсе не столь заметно и резко.

ПРИЛОЖЕНИЯ.

К стр. 120.

Сводные величины, занимающие промежуточное место между средними и относительными, получаются в следующем случае. Пусть из совокупности n предметов a обладают каким либо признаком l и b не обладают этим признаком (курящие и некурящие); тогда отношение $\frac{a}{n}$ представляет обычное относительное число. Если при этом признак l такого рода, что может принимать различные количественные значения $l_1, l_2 \ldots l_a$ (каждый курящий фактически выкуриваст различное количество табаку в течение данного периода наблюдения), то $\frac{sl}{a}$ представит обычную среднюю величину. Отношение же $\frac{sl}{n}$ составит сводную величину промежуточного типа. В этом случае нули имеют двоякий смысл: для предметов b они означают отсутствие признака, т. е. качественное отличие от a, для a—количественную величину признака l.

БИБЛИОТЕКА
ЦЕНТРАЛЬНОГО СТАТИСТИЧЕСКОГО
КОМИТЕТА
АКАДЕМИИ.

Таблица

значений функции $F_g = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^g e^{-t^2} dt$

g	F_g	g	F_g
0.00	0.0000 000	1.50	0.9661 052
0.05	0.0563 718	1.55	0.9716 227
0.10	0.1124 630	1.60	0.9763 484
0.15	0.1679 959	1.65	0.9803 756
0.20	0.2227 025	1.70	0.9837 904
0.25	0.2763 263	1.75	0.9866 717
0.30	0.3286 267	1.80	0.9890 905
0.35	0.3793 819	1.85	0.9911 110
0.40	0.4283 922	1.90	0.9927 904
0.45	0.4754 818	1.95	0.9941 794
0.50	0.5204 999	2.00	0.9953 223
0.55	0.5633 233	2.05	0.9962 581
0.60	0.6038 561	2.10	0.9970 205
0.65	0.6420 292	2.15	0.9976 386
0.70	0.6778 010	2.20	0.9981 372
0.75	0.7111 556	2.25	0.9985 373
0.80	0.7421 010	2.30	0.9988 568
0.85	0.7706 680	2.35	0.9991 107
0.90	0.7969 082	2.40	0.9993 115
0.95	0.8208 908	2.45	0.9994 694
1.00	0.8427 008	2.50	0.9995 930
1.05	0.8624 360	2.55	0.9996 893
1.10	0.8802 050	2.60	0.9997 640
1.15	0.8961 238	2.65	0.9998 215
1.20	0.9103 140	2.70	0.9998 657
1.25	0.9229 001	2.75	0.9998 994
1.30	0.9340 080	2.80	0.9999 250
1.35	0.9437 622	2.85	0.9999 443
1.40	0.9522 851	2.90	0.9999 589
1.45	0.9596 950	2.95	0.9999 698
		3.00	0.9999 779

ОГЛАВЛЕНИЕ.

О Статистическом методе вообще 1 71

Понятие ро[illegible] и совокупности, родовая и сводная характе[illegible]истика явлений . . 1

Варианты, частоты, интервалы 13

Виды совокупностей: совокупности теоретические эмпири[illegible]еские, составные простые исче[illegible]пывающие, [illegible]ыборочные . 21

Эмпирический характер сво[illegible]ных характеристик. Возможно ли их отвлечение . 28

Закономерность производных совокупностей. В[illegible]оятность . 39

Вероятность в применении к составным совокупностям 62

Средние величины . . . . . 71—118

Средняя арифметическая 71

Мода 91

Медиана 91

Сре[illegible]ня геометрическая 96

Прим[illegible]нение сре[illegible]них 98

О весе средней арифметической 101

Вес показательных чисел 105

Формулы [illegible]ривых распределения Pearson'a. 106

Относительные числа . . . . . 118—139

Среднеквадратическое уклонение для относительных чисел 125

Мера ра[illegible]сеяния 130

Функциональная зависимость 139 149

Кореляция . . . . . 149—169

Коэфициент сродства или притяжение . . 165

Приложение.