О необходимомъ вѣрованіи, лежащемъ въ основѣ математическаго мышленія

Н. М. Соловьева

I

Для многихъ читателей заглавіе настоящей статьи можетъ показаться парадоксальнымъ. Въ немъ повидимому соединяются два несоединимыхъ понятія. Съ одной стороны мы имѣемъ здѣсь понятіе вѣрованія, которое по представленію многихъ людей относится лишь къ темной съ научной точки зрѣнія области религіи, гдѣ нѣтъ мѣста строгому мышленію, гдѣ царитъ свобода и произволъ и гдѣ объекты утвержденія не могутъ быть строго обоснованы; а съ другой стороны понятіе идеально точной науки — Математики, назначеніе которой какъ бы состоитъ въ томъ, чтобы служить образцомъ точности научнаго знанія и своимъ свѣтомъ озарять другія сферы человѣческой мысли, научая ее при этомъ своими методами той строгости, опредѣленности, ясности и необходимости, которыя въ наивысшей степени доступны лишь математическому знанію. Это недоразумѣніе должно еще болѣе усилиться въ виду взгляда на Математику царящаго въ умахъ нѣкоторыхъ людей, по которому эта наука оказывается въ положеніи какой-то машины, которая лишь обдѣлываетъ матеріалъ попадающій въ ея внутренность. Математика по ихъ мнѣнію не есть наука, поскольку эта послѣдняя должна имѣть свой реальный объектъ изслѣдованія, она—лишь методъ необходимый для изслѣдованія въ такъ называемыхъ естественныхъ наукахъ, которыя имѣютъ своимъ объектомъ Природу. Но если спросить такого мыслителя: что такое Природа, то даже въ лучшемъ случаѣ, т. е. если удастся получить отъ него болѣе или менѣе опредѣленный и ясный отвѣтъ, его опредѣленіе будетъ необходимо носить на себѣ субъ-

ективную окраску тѣхъ взглядовъ и мнѣній, которыя являются присущими данному лицу. Субъективныя же воззрѣнія могутъ быть чрезвычайно разнообразны и потому данное опредѣленіе, представлявшееся прежде столь простымъ, окажется не таковымъ на самомъ дѣлѣ. То что есть существеннаго и общаго всѣмъ воззрѣніямъ, это—нѣчто, утверждаемое нами, какъ Истина. Это нѣчто остается у всѣхъ независимо отъ разнообразія воззрѣній и направленій міросозерцанія. Но если освобожденіе отъ разнорѣчивыхъ мнѣній и произвольныхъ взглядовъ по поводу объекта Науки достигается здѣсь на почвѣ такого обобщенія, то съ другой стороны добытое нами понятіе теряетъ свой формализмъ, ибо формальное и реальное является уже второстепеннымъ съ этой точки зрѣнія подраздѣленіемъ. Оно просто утверждается нами какъ Сущее и является въ этомъ смыслѣ объектомъ всѣхъ наукъ, слѣдовательно и Математики.

Развитіе человѣческой мысли—совершается ли оно въ единичномъ сознаніи отдѣльной личности или въ универсальномъ человѣческомъ сознаніи, выраженіемъ котораго служитъ наука, философія и религія—обнаруживаетъ двѣ глубочайшихъ и существеннѣйшихъ черты нашего духа. Процесъ мышленія неизбѣжно содержитъ въ себѣ съ одной стороны утвержденіе безусловно обязательнаго для насъ Нѣчто, которое мы называемъ Истиной, а съ другой — стремленіе къ этому Нѣчто — Истинѣ. Мышленіе становится невозможнымъ, если нѣтъ предпосылокъ, которыя въ каждый моментъ его существованія утверждались бы какъ Истинныя и представляли бы собой исходный пунктъ его дальнѣйшей творческой дѣятельности. Равнымъ образомъ оно перестаетъ существовать и тогда, когда нѣтъ творческой силы и стремленія впередъ, нѣтъ способности развить, а иногда даже совсѣмъ покинуть положеніе принятое въ данный моментъ за истинное. Двумъ указаннымъ психологическимъ чертамъ нашего мышленія какъ дѣятельности соотвѣтствуютъ въ разумѣ человѣческомъ двѣ основныхъ идеи, которыя являются въ немъ отраженіемъ послѣдней цѣли и объекта нашего мышленія—Истины. Идея *Реальности* и идея *Безконечности,* какъ два невидимыхъ крыла, поднимаютъ мысль человѣческую надъ всѣмъ относительнымъ и конечнымъ и постоянно направляютъ ее къ единой Истинѣ, которая является въ концѣ концовъ объектомъ необходимой вѣры.

Такъ называемыя точныя науки или Естествознаніе въ широкомъ смыслѣ этого слова содержатъ въ себѣ двѣ вѣтви. Одна, къ которой

принадлежатъ экспериментальныя науки, стремится заполнить при помощи опыта идею Реальности и дать ей содержаніе. Постоянно производя этотъ опытъ, она смотритъ на него какъ на голосъ Реальности; и можно сказать, что эта вѣтвь по преимуществу имѣетъ дѣло съ идеей Реальности. Но то обстоятельство, что самъ опытъ никогда не прекращается, а наоборотъ захватываетъ все большія и большія сферы, совершенствуется и направляется къ опредѣленной цѣли, указываетъ на то, что въ глубочайшей основѣ экспериментальныхъ наукъ лежитъ вѣрованіе: *Реальность—безконечна.* Другая вѣтвь, къ которой принадлежитъ Математика, стремится вскрыть идею Безконечности. Въ виду этой идеи и чрезъ нее она *свободно* творитъ новыя положенія и теоремы, тѣмъ самымъ обнаруживая сокрытое въ глубинѣ ея вѣрованіе: *Безконечность — реальна.*

Канторъ, который своимъ введеніемъ въ математику безконечныхъ или *трансфинитныхъ* чиселъ и утвержденіемъ ихъ реальности ясно выразилъ выставленное нами вѣрованіе, высказывается въ одномъ изъ своихъ произведеній [1] по поводу реальности безконечныхъ чиселъ и свободы математическаго творчества слѣдующимъ образомъ.

„О дѣйствительности или существованіи какъ конечныхъ такъ и безконечныхъ цѣлыхъ чиселъ можно говорить въ двухъ смыслахъ, и это какъ разъ въ тѣхъ самыхъ двухъ отношеніяхъ, въ которыхъ вообще можно подвергать разсмотрѣнію реальность какихъ либо понятій и идей. Мы имѣемъ право разсматривать цѣлыя числа какъ дѣйствительныя благодаря тому, что они занимаютъ въ нашемъ разумѣ въ силу опредѣленія вполнѣ установленное мѣсто, превосходно отличаются отъ всѣхъ другихъ составныхъ частей нашей мысли, состоятъ съ ними въ опредѣленныхъ связяхъ и слѣдовательно опредѣленнымъ образомъ модифицируютъ сущность нашего духа; да будетъ мнѣ позволено назвать этотъ видъ реальности нашихъ чиселъ *интрасубъективной* или *иманентной реальностью.* Но кромѣ того можно еще приписать числамъ дѣйствительность именно благодаря тому, что они должны являться обязательными для выраженія процесовъ и отношеній въ предстоящемъ интелекту внѣшнемъ мірѣ, какъ впослѣдствіи окажется, что различные класы чиселъ (I), (II), (III) и т. д. служатъ представителями мощностей, которыя фактически входятъ и въ тѣлесную и въ духовную Природу. Этотъ вто-

[1] G. Cantor. Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, § 8.

рой видъ реальности я называю *трансубъективной* или *трансіентной реальностью* цѣлыхъ чиселъ.

„При непремѣнно реалистическомъ, но въ то же время и не менѣе идеалистическомъ основаніи моихъ изслѣдованій для меня не подлежитъ никакому сомнѣнію то обстоятельство, что оба эти вида реальности постоянно являются связанными въ томъ смыслѣ, что всякое опредѣляемое по первому воззрѣнію какъ существующее понятіе въ извѣстныхъ и даже безконечно многихъ отношеніяхъ всегда обладаетъ трансіентной реальностью. Ея установленіе конечно составляетъ одну изъ труднѣйшихъ задачъ Математики, и часто надо бываетъ это предоставить времени, въ которомъ естественное развитіе какой нибудь изъ другихъ наукъ открываетъ трансіентное значеніе стоящаго подъ вопросомъ понятія.

„Эта связь обѣихъ реальностей имѣетъ свое собственное основаніе въ *Единствѣ Всего, къ которому мы сами принадлежимъ*. Указаніе на эту связь здѣсь имѣетъ въ виду цѣль вывести отсюда одно, какъ мнѣ кажется, весьма важное для Математики слѣдствіе; а именно, что она должна принимать во вниманіе въ развитіи своихъ идей *единственно* и *исключительно имманентную* реальность и *вовсе* не обязана заниматься изслѣдованіемъ ихъ *трансіентной* реальности. За это исключительное положеніе, отличающее ее отъ всѣхъ другихъ наукъ и объясняющее соотвѣтственно легкій и непринужденный способъ работы въ ней, она вполнѣ заслуживаетъ особаго названія *Свободной Математики*. Этому названію я отдалъ бы предпочтеніе, если бы имѣлъ право выбора предъ ставшимъ употребительнымъ названіемъ „Чистой“ Математики.

„Математика, вполнѣ свободная въ своемъ развитіи, связана очевидно только въ томъ отношеніи, что ея понятія являются настолько свободными отъ противорѣчія, насколько они стоятъ въ твердо установленныхъ при посредствѣ опредѣленій отношеніяхъ къ прежде образованнымъ, уже существующимъ и готовымъ понятіямъ. Въ особенности же при введеніи новыхъ чиселъ вся ея обязанность заключается только въ томъ чтобы дать имъ опредѣленіе, которое сообщило бы имъ такую опредѣленность и при соотвѣтствующихъ обстоятельствахъ такое отношеніе къ прежнимъ числамъ, чтобы въ каждомъ данномъ случаѣ они могли бы между собой точно различаться. Лишь только число удовлетворяетъ всѣмъ этимъ условіямъ, оно можетъ и должно быть разсматриваемо въ Математикѣ какъ существующее и реальное. Въ этомъ я усматриваю

то основаніе, по которому ирраціональныя и комплексныя числа должны непремѣнно разсматриваться существующими такъ же какъ и конечно-положительныя цѣлыя числа.

„И я увѣренъ что нѣтъ никакой нужды усматривать въ этомъ основоположеніи какую нибудь опасность для Науки, какъ это бываетъ со многими. Означенныя условія, при которыхъ исключительно возможна свобода образованія чиселъ, являются таковыми, что допускаютъ произволъ въ весьма незначительной степени. Кромѣ того всякое математическое понятіе въ себѣ самомъ носитъ необходимый корективъ; если оно оказывается неплодотворнымъ и нецѣлесообразнымъ, то это очень скоро обнаружится въ его неупотребляемости и оно будетъ тогда оставлено какъ не имѣющее достаточнаго успѣха. Но напротивъ всякое излишнее стѣсненіе математическаго изслѣдованія, мнѣ кажется, влечетъ за собой большую опасность и эта послѣдняя тѣмъ больше, что въ сущности дѣйствительной Науки ей нельзя найти никакого оправданія; итакъ *сущность Математики* лежитъ прямо въ ея *свободѣ*.

„Если бы изъ упомянутыхъ основаній нельзя было вывести этого свойства Математики, то насъ должно было бы привести къ тому же самому взгляду само развитіе науки, какъ мы его замѣчаемъ въ нашемъ столѣтіи.

„Если бы Гаусъ, Коши, Абель, Якоби, Диришле, Вейерштрасъ, Эрмитъ, Риманъ были связаны и ихъ новыя идеи постоянно подвергались бы метафизическому контролю, мы навѣрно не имѣли бы возможности любоваться величественнымъ зданіемъ новой теоріи функцій, которое вырисовывалось и воздвигалось хоть и вполнѣ свободно и безъ всякой трансіентной цѣли, но теперь сдѣлалось очевиднымъ ея трансіентное значеніе въ примѣненіи къ Механикѣ, Астрономіи и Математической Физикѣ. Мы не увидѣли бы великаго развитія въ теоріи диференціальныхъ уравненій, совершеннаго при посредствѣ Фукса, Пуанкаре и другихъ, если бы эти замѣчательныя силы были остановлены и парализованы благодаря постороннему вмѣшательству; и если бы Куммеръ не проявилъ значительной свободы своимъ введеніемъ въ теорію чиселъ такъ называемыхъ „идеальныхъ“ чиселъ, мы не могли бы теперь удивляться ариѳметическимъ и алгебраическимъ работамъ Кронекера и Дедекинда“.

Итакъ свобода математическаго творчества не мѣшаетъ реальности тѣхъ положеній, которыя являются его продуктомъ. При этомъ творче-

ствѣ по словамъ Кантора вполнѣ достаточно имѣть въ виду лишь одну иманентную реальность, трансіентная же необходимо приходитъ со временемъ благодаря развитію какой-нибудь другой науки. Здѣсь выражается вѣра въ Единство Всего, къ которому мы сами принадлежимъ, или вѣра въ Единую Истину. Ближайшимъ же для Математики выраженіемъ этой вѣры является вѣрованіе въ реальность безконечности. Это необходимое вѣрованіе сообщаетъ математическимъ сужденіямъ ту обязательную силу, на которую указывалъ еще Кантъ, приписывавшій математическимъ сужденіямъ характеръ *необходимости* и *всеобщности*. „Необходимость и всеобщность суть вѣрные признаки познанія a priori и нераздѣльны одна отъ другой“ [1].

„Математическія положенія суть сужденія a priori, а вовсе не опытныя; ибо имѣютъ характеръ необходимости, котораго опытъ дать не можетъ“ [2].

Но Кантъ ограничился лишь указаніемъ одной формальной стороны математическихъ сужденій. Онъ призналъ ихъ синтетическими, обладающими всеобщностью и необходимостью, и не выставилъ на видъ—въ чемъ же лежитъ глубочайшая сущность апріорности и творческаго процеса развитія математической мысли. Возражая противъ аналитиковъ, которые приписывали очевидность математическихъ сужденій исключительно закону противорѣчія, онъ говоритъ: „Синтетическое сужденіе можетъ основываться на законѣ противорѣчія, но только при этомъ всегда предполагается другое синтетическое положеніе, изъ котораго первое вытекаетъ какъ слѣдствіе; само же по себѣ оно не можетъ быть очевиднымъ“ [2]. Такимъ образомъ все зданіе математической науки можетъ быть построено помощью примѣненія закона противорѣчія къ нѣкоторому числу основныхъ синтетическихъ сужденій a priori, которыя называются математическими аксіомами. Но признать это, какъ замѣчаетъ Пуанкаре [3], это—не значитъ рѣшить вопросъ поставленный сущностью Математики; это значитъ только его отдалить. Въ самомъ дѣлѣ, во-первыхъ для насъ остается тайной апріорность въ аксіомахъ, какъ бы ихъ мало ни было, во-вторыхъ непонятно, откуда въ Математикѣ съ каждой

---

[1] Кантъ. Критика Чистаго Разума. Перев. Владиславлева, стр. 3.

[2] Тамъ же, стр. 12.

[3] Пуанкаре. Наука и Гипотеза. Перев. А. Бачинскаго, Н. Соловьева и Р. Соловьева, стр. 8 и 9.

теоремой является нѣчто новое. Раскрывая каждую математическую книгу мы находимъ, что авторъ на каждой страницѣ стремится обобщить уже извѣстную теорему. „Математическое разсужденіе само въ себѣ—говоритъ Пуанкаре—заключаетъ родъ творческой силы и потому отличается отъ силогизма“ [1]. Всеобщность и необходимость находятся во внутренней связи съ творческой силой этого сужденія. Эта связь—въ утвержденіи реальной безконечности. Математическія положенія не могутъ быть не общими, ибо они утверждаются съ реальностью безконечности; они не могутъ перестать быть необходимыми, такъ какъ вѣрованіе въ реальность безконечности необходимо.

Это вѣрованіе проявляется двоякимъ путемъ; а именно, не только въ скрытой формѣ въ математическомъ творчествѣ всеобщихъ и необходимыхъ теоремъ и положеній, но и въ формѣ явной—въ математическихъ понятіяхъ, которыя создаются подъ вліяніемъ этого вѣрованія и представляютъ собой выраженіе идеи такъ называемой актуальной безконечности.

II

„Посмотримъ на математика за его дѣломъ—говоритъ Пуанкаре—и постараемся объяснить успѣшность его пріемовъ. Задача эта не лишена трудностей; недостаточно открыть случайно попавшееся сочиненіе и проанализировать тамъ какое-нибудь доказательство.

„Мы должны прежде всего исключить Геометрію, гдѣ вопросъ усложняется трудными задачами относящимися къ роли постулатовъ, къ природѣ и происхожденію понятія пространства. По аналогичнымъ основаніямъ мы не можемъ обращаться и къ Анализу Безконечно Малыхъ. Намъ надо искать математическую мысль тамъ гдѣ она осталась чистой, т. е. въ Ариѳметикѣ.

„Надо еще продолжить выборъ; въ высшихъ отдѣлахъ теоріи чиселъ первоначальныя математическія понятія подверглись столь глубокой разработкѣ, что дѣлается трудно ихъ анализировать.

„Слѣдовательно именно въ началахъ Ариѳметики мы должны надѣяться найти искомое объясненіе“ [2].

Мы здѣсь остановимся на положеніяхъ относящихся исключительно

---

[1] Тамъ же, стр. 9.

[2] Тамъ же, стр. 11 и 12.

къ сложенію и разсмотримъ ихъ какъ со стороны содержанія, такъ и со стороны образованія.

Самымъ простымъ актомъ математической мысли можно признать операцію $x+1$, гдѣ къ данному числу x прибавляется 1. Положимъ что эта операція опредѣлена. Каково будетъ это опредѣленіе, для насъ въ настоящій моментъ не важно, ибо задача наша состоитъ въ томъ, чтобы вскрыть внутреннюю природу творческаго процеса развитія математической мысли, предполагая, что исходнымъ пунктомъ ея является эта операція.

Слѣдующій пунктъ въ этомъ процесѣ есть опредѣленіе операціи $x+a$, состоящей въ прибавленіи къ данному числу числа a.

Если намъ будетъ извѣстна операція $x+(a-1)$, то подъ символомъ $[x+(a-1)]$ мы можемъ разумѣть число получившееся какъ результатъ этой операціи; на основаніи извѣстной намъ операціи $x+1$ можно прибавить къ этому числу число 1 и получить выраженіе: $[x+(a-1)]+1$, которое можно назвать чрезъ $x+a$. Тогда мы будемъ имѣть условное и формальное равенство:

$$x+a=[x+(a-1)]+1. \tag{1}$$

Посмотримъ теперь, какъ этому формальному и условному равенству дается содержаніе.

Намъ по предположенію извѣстна операція $x+1$, тогда по равенству (1) окажется возможнымъ опредѣлить $x+2$, какъ $[x+1]+1$, уже не формально и условно, а по существу. Зная $x+2$, мы можемъ узнать по равенству (1) $x+3$ и т. д. Мы говоримъ „и такъ далѣе“, ибо не можемъ закончить опредѣленій, такъ какъ мы не можемъ закончить процесъ прибавленія 1. Мы утверждаемъ, что этотъ актъ можетъ быть повторенъ безконечное множество разъ и это утвержденіе дѣлаетъ равенство-опредѣленіе (1) изъ формальнаго и условнаго существеннымъ, придавая этому опредѣленію въ то же время характеръ общности и необходимости. Какія бы ни были числа x и a, всегда можно опредѣлить $x+a$ при помощи равенства (1). Утвержденіе равенства-опредѣленія (1) становится утвержденіемъ безчисленнаго множества равенствъ-опредѣленій:

$$\begin{aligned} x+2&=(x+1)+1\\ x+3&=(x+2)+1\\ x+4&=(x+3)+1\\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

„Это опредѣленіе—говоритъ Пуанкаре—заслуживаетъ минуты вниманія, такъ какъ оно имѣетъ особую природу, отличающую его отъ чисто логическаго; въ самомъ дѣлѣ равенство (1) содержитъ безчисленное множество различныхъ опредѣленій и каждое изъ нихъ имѣетъ смыслъ только тогда, когда извѣстно другое, ему предшествовавшее".

Выраженіемъ ассоціативности сложенія можетъ служить равенство:

(2) $$a+(b+c)=(a+b)+c.$$

Мы утверждаемъ сначала это положеніе въ одномъ только случаѣ, именно когда $c=1$.

$$a+(b+1)=(a+b)+1$$

Это равенство не представляетъ собой чего-нибудь новаго, оно есть лишь повтореніе равенства (1) только при другихъ обозначеніяхъ (вмѣсто x взято a, а вмѣсто a взято $b+1$). Заключая въ себѣ общность лишь въ смыслѣ опредѣленія сложенія, оно по отношенію къ ассоціативности сложенія представляетъ собой единичный случай и является новымъ исходнымъ пунктомъ для дальнѣйшаго развитія математической мысли, такъ же какъ по отношенію къ нему была исходнымъ пунктомъ операція $x-1$. Посмотримъ, какимъ образомъ изъ него мысль создаетъ общее положеніе объ ассоціативности.

Если бы это положеніе было справедливо для какого-нибудь $c=\gamma$, то мы могли бы написать равенство:

$$(a+b)+\gamma=a+(b+\gamma)$$

Слѣдовательно зная операцію $x+1$, мы могли бы заключить, что

A) $$[(a+b)+\gamma]+1=[a+(b+\gamma)]+1,$$

но по опредѣленію (1) мы можемъ получить еще 3 слѣдующихъ равенства:

$(a+b)+(\gamma+1)=[(a+b)+\gamma]+1$ (замѣняя въ равенствѣ (1) x чрезъ $a+b$ и a чрезъ $\gamma+1$),

$a+[(b+\gamma)+1]=[a+(b+\gamma)]+1$ (замѣняя въ равенствѣ (1) x чрезъ a и a чрезъ $(b+\gamma)+1$),

$b+(\gamma+1)=(b+\gamma)+1$ (замѣняя въ равенствѣ (1) x чрезъ b и a чрезъ $\gamma+1$).

Всѣ эти равенства могутъ быть написаны въ одну строку:

$$(a+b)+(\gamma+1)=[(a+b)+\gamma]+1=[a+(b+\gamma)]+1=a+[(b+\gamma)+1]=$$
$$=a+[b+(\gamma+1)].$$

Пропустивъ въ этой строкѣ среднія выраженія, получимъ равенство:

$$B) \qquad (a+b)+(\gamma+1)=a+[b+(\gamma+1)].$$

Итакъ если бы положеніе объ асоціативности сложенія было справедливо для случая $c=\gamma$, то путемъ чисто аналитическихъ выводовъ мы могли бы доказать его справедливость и для случая $c=\gamma+1$. Полученное равенство B) такъ же условно какъ и равенство A). Можно сказать, что подготовлена форма для созданія общаго математическаго положенія, но его еще нѣтъ. Оно является, когда въ эту форму вводится вѣрованіе въ реальность безконечности.

Намъ извѣстно, что теорема справедлива для $c=1$, слѣдовательно равенство A) получаетъ реальный смыслъ для этого случая, а вмѣстѣ съ нимъ и равенство B), т. е. теорема становится справедливой для $c+2$. Доказавъ теорему для $c=2$, мы докажемъ ее по B) для $c=3$ и т. д.

Мы говоримъ „и такъ далѣе“ ибо мы не можемъ закончить рядъ этихъ утвержденій, такъ какъ мы не можемъ закончить процесъ прибавленія 1. Утверждается, что этотъ актъ можетъ быть повторенъ безконечное множество разъ, и это утвержденіе дѣлаетъ равенство (2) изъ частнаго и условнаго общимъ и необходимымъ. Утвержденіе равенства (2) становится утвержденіемъ безконечнаго множества равенствъ:

$$\begin{aligned}(a+b)+1&=a+(b+1)\\(a+b)+2&=a+(b+2)\\(a+b)+3&=a+(b+3)\\&\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

Выраженіемъ комутативности сложенія можетъ служить равенство:

$$(3) \qquad a+b=b+a.$$

При доказательствѣ этого общаго и необходимаго положенія мы дважды прибѣгаемъ къ утвержденію реальности безконечнаго.

Мы доказываемъ сначала равенство:

$$a+1=1+a,$$

гдѣ a—какое угодно цѣлое число, и потомъ переходимъ къ доказательству равенства (3) вообще.

Равенство: $a+1=1+a$ очевидно справедливо для $a=1$. Если бы это равенство: $a+1=1+a$ было справедливо для $a=\gamma$, то можно

было бы аналитически вывести его справедливость для $a=\gamma+1$. Въ самомъ дѣлѣ по равенству (1) можно написать:

$(+1\gamma+1)=[1+\gamma]+1$ (замѣняя въ рав. (1) x чрезъ 1 и a чрезъ $\gamma+1$)

и если $\gamma+1=1+\gamma$, то полученное равенство приметъ видъ:

$1+(\gamma+1)=(\gamma+1)+1$, т. е. теорема будетъ справедлива для $a=\gamma+1$ при условіи ея справедливости для $a=\gamma$. Но равенство: $a+1=1+a$ справедливо для $a=1$, слѣдов. оно будетъ справедливо и для $a=2$, $a=3$ и т. д. Равенство: $a+1=1+a$ пріобрѣтаетъ общность и необходимость благодаря утвержденію реально безконечнаго множества цѣлыхъ чиселъ.

Доказательство равенства (3) вообще требуетъ утвержденія единичнаго случая его справедливости, именно когда $b=1$; этотъ случай дается предыдущимъ.

Если предположить, что это равенство справедливо для $b=\beta$, то аналитически можно доказать его справедливость для $b=\beta+1$. Въ самомъ дѣлѣ мы получаемъ:

$a+(\beta+1)=(a+\beta)+1$ (замѣняя въ рав. (1) x чрезъ a и a чрезъ $\beta+1$)
$(a+\beta)+1=(\beta+a)+1$ (примѣняя условное равенство: $a+\beta=\beta+a$)
$\beta+(a+1)=(\beta+a)+1$ (замѣняя въ рав. (1) x чрезъ β и a чрезъ $a+1$)
$\beta+(a+1)=\beta+(1+a)$ (по доказанному равенству $a+1=1+a$)
$\beta+(1+a)=(\beta+1)+a$ (по доказанной асоціативности).

Соединяя всѣ эти равенства въ одну строку найдемъ:

$a+(\beta+1)=(a+\beta)+1=(\beta+a)+1=\beta+(a+1)=\beta+(1+a)=$
$=(\beta+1)+a$, или пропустивъ среднія выраженія въ этой строкѣ найдемъ:

$a+(\beta+1)=(\beta+1)+a$, т. е. теорема будетъ справедлива для $b=\beta+1$, если она справедлива для $b=\beta$. Но равенство (3) справедливо для $b=1$, слѣдов. оно справедливо для $b=2$, $b=3$ и т. д. Такимъ образомъ равенство $a+b=b+a$ пріобрѣтаетъ свою общность и необходимость опять въ утвержденіи дѣйствительно безконечнаго множества чиселъ.

Мы ограничимся примѣромъ трехъ выведенныхъ здѣсь равенствъ, относящихся къ сложенію, изъ которыхъ (1) представляетъ собой опредѣленіе сложенія, а (2) и (3) служатъ выраженіемъ теоремъ объ асоціативности и комутативности сложенія, и остановимся теперь на разсмо-

трѣніи ихъ доказательства и ихъ природы вообще. Доказательство ведется путемъ редукціи. Исходнымъ пунктомъ развитія мысли служитъ обоснованіе извѣстнаго положенія для $n=1$, которое или непосредственно дается предыдущимъ или выводится изъ него аналитическимъ путемъ; затѣмъ аналитическимъ же путемъ доказывается условное положеніе, что если теорема вѣрна для $n=1$, то она вѣрна и для n. Здѣсь можно сказать кончается аналитическій методъ разсужденія, который какъ бы подготовляетъ форму для воплощенія нашего вѣрованія въ реальность безконечности. Дальше мы заключаемъ о справедливости теоремы для *всего* множества цѣлыхъ чиселъ.

Утвержденіе безконечнаго множества всѣхъ чиселъ даетъ намъ возможность въ условномъ положеніи: „если теорема вѣрна для $n-1$, то она вѣрна для n“ при посредствѣ одного случая $n=1$ усмотрѣть безконечное множество силогизмовъ, которые можно было бы расположить такъ:

«Теорема вѣрна для числа 1.
Если же она справедлива для 1, она справедлива для 2.
Слѣдовательно она справедлива для 2.
Если же она вѣрна для 2, то она вѣрна для 3.
Слѣдоват. она справедлива для 3 и т. д.» [1].

„Очевидно—говоритъ Пуанкаре—что въ разсужденіи путемъ редукціи ограничиваются выраженіемъ меньшей посылки перваго силогизма и общей формулы, которая въ видѣ частныхъ случаевъ содержитъ въ себѣ всѣ большія посылки.

„Этотъ никогда не оканчивающійся рядъ силогизмовъ оказывается сведеннымъ къ одной фразѣ въ нѣсколько строкъ“ [2].

„Если вмѣсто того чтобы доказывать справедливость нашей теоремы для *всѣхъ* чиселъ, мы желаемъ обнаружить ея справедливость напримѣръ только для числа 6, для насъ будетъ достаточно обосновать 5 первыхъ силогизмовъ нашего послѣдняго ряда; если бы мы пожелали доказать теорему для числа 10, надо было бы взять ихъ 9...

„Однако какъ бы далеко мы ни шли, мы никогда не могли бы дойти до *общей* теоремы, примѣнимой ко *всѣмъ* числамъ, которая одна толь-

[1] Пуанкаре. Наука и Гипотеза, стр. 17.
[2] Тамъ же, стр. 18.

ко можетъ быть предметомъ Науки. Чтобы ея достигнуть, нужно *безконечно* большое число силогизмовъ, нужно перескочить бездну, которую никогда не въ состояніи будетъ заполнить терпѣніе аналитика" [1].

„Идея математической безконечности играетъ здѣсь важную роль и безъ нея не было бы Науки, такъ какъ не было бы ничего *общаго*" [2].

Необходимое вѣрованіе въ реальность безконечности обусловливаетъ истинность доказательства путемъ редукціи, дѣлая его „истиннымъ образцомъ синтетическаго апріорнаго сужденія" [3], оно надѣляетъ его непреодолимой очевидностью и создаетъ „могущество разума, который оказывается способнымъ постичь безконечное повтореніе одного и того же акта, разъ этотъ актъ является возможнымъ однажды" [3].

„Математическая индукція представляется съ необходимостью, ибо она есть только утвержденіе свойства нашего ума" [3]. Здѣсь лежитъ объясненіе той всеобщности и необходимости, о которой говорилъ Кантъ.

Какія бы мы числа ни брали, выведенныя нами для примѣра равенства необходимо оказываются справедливыми. Въ этомъ *утвержденіи* мы лицомъ къ лицу стоимъ съ неограниченной свободой съ нашей стороны выбирать числа, предполагающей ихъ *безконечное множество*. Нашъ выборъ чиселъ былъ бы ограниченъ и подлежалъ бы сомнѣнію, если бы за нимъ не стояло вѣрованіе въ ихъ безконечную наличность. И поскольку мы отвлекаемся отъ субъективнаго выбора чиселъ и стремимся придать этому положенію объективность, постольку мы имѣемъ дѣло со своимъ вѣрованіемъ въ реальность безконечности, выражающейся именно въ признаніи *той ихъ наличности*, которая дѣлаетъ возможнымъ ихъ неограниченное взятіе. Такимъ образомъ *общность* и *необходимость* выведенныхъ нами въ частности равенствъ говорятъ объ имѣющемся въ дѣйствительности *всѣмъ* множествѣ частныхъ равенствъ.

III

Вѣрованіе въ реальность безконечности находитъ свое выраженіе, какъ мы говорили раньше, еще въ математическихъ понятіяхъ. Здѣсь

---

[1] Тамъ же.
[2] Тамъ же, стр. 19.
[3] Тамъ же, стр. 21.

оно бываетъ опять двоякимъ. Во-первыхъ оно проявляется въ формѣ такъ называемой потенціальной или несобственной безконечности и во-вторыхъ въ формѣ актуальной или собственной безконечности.

Потенціальная или несобственная безконечность (Indefinitum) есть, какъ говоритъ Канторъ, лишь *понятіе отношенія*, *вспомогательное понятіе* нашего мышленія, и не заключаетъ въ себѣ никакой *идеи;* она впрочемъ имѣетъ въ Математикѣ свое великое значеніе; благодаря открытымъ Лейбницемъ и Ньютономъ диференціальному и интегральному исчисленіямъ, оно является испытаннымъ и вѣрнымъ орудіемъ нашего разума; но большихъ претензій оно предъявлять не можетъ [1]. Ея проявленіе въ этой формѣ есть конечное перемѣнное, возрастающее сверхъ всякихъ предѣловъ или убывающее до произвольной малости, но всегда остающееся конечной величиной. Эта форма явленія математической безконечности представляется столь великой и существенной для Математики, что даже такой великій математикъ какъ Гаусъ нашелъ возможнымъ признать ее за единственную и исключительную для выраженія всего содержанія идеи математической безконечности. Безконечность—говоритъ Гаусъ въ письмѣ къ Шумахеру [2]—есть лишь „façon de parler", такъ какъ собственно говорятъ только о границахъ, что эти послѣднія могутъ быть произвольно сближены или безпредѣльно расширены. Но несмотря на авторитетъ Гауса и многихъ другихъ знаменитыхъ математиковъ и философовъ въ математической наукѣ новаго времени все яснѣе и яснѣе вырисовывается вторая форма математической безконечности.

„Въ новѣйшее время какъ въ Геометріи, такъ равно и въ Теоріи Функцій выдѣлился другой столь же законный видъ понятія безконечности" [3]. Это—безконечность опредѣленная (Infinitum), актуальная.

Такъ называемые безконечно далекіе элементы Геометріи (безконечно далекая точка, прямая, плоскость), будучи введены въ Геометрію, оказались въ высшей степени полезными для сообщенія ей единства и гармоніи. Для описанія этихъ элементовъ мы позволимъ себѣ обратиться къ одному изъ основателей Проективной Геометріи Штаудту.

---

[1] G. Cantor. Über die verschiedenen Standpunkte in Bezug auf das actuale Unendliche, Zeitschrift f. Philos. u. philos. Kritik, 88. Bd.

[2] Vom 12. Juli 1831.

[3] G. Cantor. Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre.

„Двѣ прямыя лежащія въ одной плоскости имѣютъ или одну общую точку или одно и то же направленіе. Двѣ плоскости имѣютъ или одну общую прямую или одно и то же положеніе. Плоскость содержитъ или одну точку прямой или одно только направленіе прямой. Не будетъ безполезно ввести для *направленія* и *положенія* другія выраженія, которыя напоминаютъ о томъ, что они замѣщаютъ, такъ, что предложенія, которыя суть только особыя видоизмѣненія другихъ предложеній, будутъ выражаться такимъ образомъ какъ эти послѣднія“ [1].

Авторъ разсматриваетъ затѣмъ вращеніе подвижной прямой около опредѣленной точки, внѣшней къ этой опредѣленной прямой, которую она вообще пересѣкаетъ; онъ показываетъ какъ „можно сказать о двухъ паралельныхъ прямыхъ, что онѣ встрѣчаются въ одной безконечно далекой точкѣ“ и прибавляетъ: „прямая является такимъ образомъ, когда ее надѣляютъ безконечно далекой точкой, какъ замкнутая линія“.

Авторъ даетъ слѣдующее опредѣленіе *безконечно удаленной прямой* и *безконечно далекой плоскости*.

„Всѣ безконечно далекія точки плоскости расположены на безконечно далекой линіи, и такъ какъ всякая прямая плоскости пересѣкаетъ ее въ одной точкѣ, то ее называютъ *прямой*“.

„Всѣ безконечно далекія точки и прямыя въ пространствѣ расположены на одной безконечно далекой поверхности, и такъ какъ всякая прямая пересѣкаетъ ее въ одной точкѣ и всякая плоскость пересѣкаетъ ее по прямой, то ее называютъ *плоскостью*“.

Благодаря употребленію выраженій: безконечно далекая точка, прямая, плоскость—предложенія, въ которыхъ идетъ рѣчь объ общихъ направленіяхъ и положеніяхъ, т. е. о прямыхъ и плоскостяхъ паралельныхъ, входятъ какъ частные случаи въ тѣ, гдѣ фигурируютъ обыкновенныя точки, прямыя или плоскости, т. е. гдѣ прямыя или плоскости разсматриваются пересѣкающимися на конечномъ разстояніи. За недостаткомъ мѣста мы не можемъ здѣсь подробно останавливаться на разсмотрѣніи роли безконечно далекихъ элементовъ въ Геометріи. Ограничимся здѣсь приведеніемъ одного примѣра, гдѣ безконечно далекимъ элементомъ (прямой) пользуются въ Проективной Геометріи какъ обыкновенной прямой. При класификаціи кривыхъ второго порядка общее по-

[1] Staudt. Geometrie der Lage.

ложеніе: всякая кривая второго порядка не можетъ пересѣкать прямую больше чѣмъ въ двухъ точкахъ — примѣняется къ безконечно далекой прямой. Въ силу этого положенія говорятъ, что такая кривая можетъ съ безконечно далекой прямой въ ея плоскости или вовсе не имѣть общихъ точекъ, или имѣть только одну, или же наконецъ имѣть двѣ общихъ точки. Въ первомъ случаѣ кривая называется „элипсъ", во второмъ—„парабола" и въ третьемъ—„гипербола" [1]. Эти „элипсъ", „парабола" и „гипербола" оказываются точно совпадающими съ элипсомъ, параболой и гиперболой какъ коническими сѣченіями. Такимъ образомъ оказывается, что безконечно далекій элементъ, положенный въ основаніе класификаціи, создалъ совершенно реальное различіе видовъ этихъ кривыхъ. Здѣсь уже невозможно видѣть одно только метафорическое и символическое значеніе за вводимыми въ Геометрію безконечно далекими элементами.

Итакъ идея актуальной безконечности воплощается въ понятіи безконечно далекихъ элементовъ въ Геометріи. Творческая мощь ея обнаруживается въ той общности, стройности и гармоніи, которыя входятъ въ Геометрію съ этимъ введеніемъ. Неужели же это не есть признакъ научной реальности? Почему же безконечно далекіе элементы въ Геометріи должны быть признаны менѣе реальными чѣмъ всякій другой элементъ, если ихъ участіе въ постройкѣ научнаго зданія оказывается нисколько не менѣе, а даже болѣе ощутительнымъ чѣмъ участіе всякаго другого элемента. Почему конечная точка, линія и т. д., которыхъ мы не можемъ ни ощупать, ни увидѣть, ни даже представить — ибо представляемъ мы ихъ всегда съ нѣкоторыми измѣреніями — почему они болѣе реальны чѣмъ таковые же безконечно далекіе элементы? Ихъ истинная реальность—въ жизни и развитіи Науки, такова же реальность и безконечно далекихъ элементовъ. Намъ кажется, что реальность послѣднихъ даже ощутительнѣе, ибо она не есть только обычная реальность элементовъ научной постройки, но по самому существу своему она является родственной той мощи, которая производитъ эту постройку. Но кто же можетъ усомниться въ существованіи этой мощи, пока живетъ и развивается Наука и пока кирпичи первоначальныхъ научныхъ понятій складываются въ красивое зданіе Науки? Цитируя въ предыдущемъ Кантора, мы видѣли, что по его словамъ реальность безконечныхъ чи-

[1] См. напр. Reye, Die Geometrie der Lage, стр. 88.

селъ оказывается таковой же какъ и реальность цѣлыхъ конечныхъ чиселъ. То же самое можно было бы сказать и о безконечно далекихъ элементахъ. Ихъ реальность нисколько не меньше чѣмъ реальность таковыхъ же конечныхъ элементовъ.

„Въ теоріи комплекснаго перемѣннаго мы также встрѣчаемъ этотъ видъ безконечности. Напримѣръ при изслѣдованіи аналитической функціи комплекснаго перемѣннаго сдѣлалось необходимымъ и общеупотребительнымъ представлять себѣ въ плоскости изображающей комплексное перемѣнное одну-единственную безконечно удаленную, но вполнѣ опредѣленную точку и разсматривать поведеніе этой функціи вблизи этой точки, какъ бы вблизи всякой другой; при этомъ оказывается, что функціи вблизи безконечно далекой точки представляютъ тѣ же самые случаи, какъ и въ конечной точкѣ; отсюда является полное основаніе мыслить въ этомъ случаѣ безконечность перенесенной въ одну вполнѣ опредѣленную точку“ [1].

Та же самая актуальная безконечность встрѣчается и во введенныхъ Канторомъ безконечныхъ или трансфинитныхъ дѣйствительныхъ, цѣлыхъ числахъ. Введеніе этихъ чиселъ является у Кантора не произвольно, но какъ необходимое развитіе его ученія о множествахъ.

„Изложеніе моихъ изслѣдованій въ ученіи о множествахъ — говоритъ онъ—достигло того пункта, гдѣ его продолженіе становится зависимымъ отъ расширенія понятія цѣлыхъ дѣйствительныхъ чиселъ надъ прежними границами, но это расширеніе касается того направленія, въ которомъ до меня его никто не отыскивалъ.

„Зависимость, въ которую я вижу себя поставленнымъ отъ этого расширенія понятія числа, столь велика, что для меня безъ него едва ли окажется возможнымъ даже малѣйшій шагъ впередъ въ ученіи о множествахъ. Такъ какъ дѣло идетъ о расширеніи и продолженіи ряда цѣлыхъ дѣйствительныхъ чиселъ за безконечность, то это можетъ сначала показаться рискованнымъ, но я могу высказать не только надежду, но и твердую увѣренность въ томъ, что это расширеніе со временемъ будетъ разсматриваться какъ вполнѣ простое и естественное“ [2].

„*Множествомъ* (Menge, ensemble) мы называемъ всякое соединеніе

---

[1] G. Cantor. Grundlagen e. allgem. Mannigfaltigkeitslehre, стр. 2.

[2] Тамъ же стр. 1.

M опредѣленныхъ и отличныхъ между собой предметовъ нашего воспріятія m, называемыхъ *элементами* множества M

$$M = \{m\}\text{“ }[1].$$

Чрезвычайно большое значеніе въ теоріи множествъ имѣетъ понятіе *мощности* или *кардинальнаго числа* (Mächtigkeit, puissance). Каждому данному множеству M соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленная мощность.

„Мы называемъ мощностью множества M общее понятіе, которое мы выводимъ изъ M благодаря нашей способности мыслить, отвлекаясь отъ природы различныхъ элементовъ и ихъ порядка“ [2].

Для опредѣленія мощности множества вводится понятіе эквивалентности.

„Мы говоримъ, что два множества M и N эквивалентны и пишемъ

$$M \backsim N \text{ или } N \backsim M,$$

когда ихъ возможно такъ связать, что каждому элементу одного изъ нихъ соотвѣтствуетъ одинъ и только одинъ элементъ другого“ [2].

Мощность множества M благодаря этому представляетъ собой общее понятіе, подъ которое подпадаютъ всѣ множества эквивалентныя множеству M и только они (и конечно само множество M). Эквивалентныя множества принадлежатъ къ одному класу множествъ имѣющихъ одну и ту же мощность; класъ множества M есть слѣдовательно ничто иное какъ объемъ принадлежащаго M общаго понятія, которое было названо мощностью множества M.

„Мощность—говоритъ Гутберлетъ—есть repraesentatio generalis для всѣхъ множествъ того же класа какъ M, и является потому первоначальнымъ, какъ психологически такъ и методологически простымъ родовымъ понятіемъ, происходящимъ благодаря отвлеченію отъ всѣхъ особенностей, которыя можетъ представить множество опредѣленнаго класа какъ относительно свойствъ ихъ элементовъ такъ и ихъ отношенія и расположенія, въ которомъ элементы могутъ стоять между собой или ко внѣ ихъ лежащимъ вещамъ. Принимая во вниманіе лишь то, что обще всѣмъ принадлежащимъ одному и тому же класу множествамъ, получаютъ понятіе мощности этого множества“ [3].

---

[1] G. Cantor. Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis, стр. 3.

[2] Тамъ же стр. 4.

[3] Gutberlet. Das Problem des Unendlichen. Zeitschrift f. Philos. u. philos. Krit. 88 Bd. стр. 138.

Во введеніи общаго понятія мощности—понятія независимаго ни отъ природы элементовъ множества ни отъ ихъ порядка—превосходно выражается утвержденіе реальности безконечнаго. Въ понятіи мощности мы выражаемъ то, что присуще такъ сказать множеству въ себѣ, независимо отъ нашего счета или перечисленія его элементовъ. Это понятіе вмѣщаетъ въ себѣ безконечное такъ же какъ и конечное. По мощностямъ различаются въ этомъ смыслѣ даже сами множества. Канторъ говоритъ:

„Множества, которыхъ мощность конечна, называются конечными множествами; всѣ другія множества, мощности которыхъ трансфинитны, мы называемъ трансфинитными множествами.

„Множество *всѣхъ конечныхъ мощностей* ν даетъ непосредственный примѣръ трансфинитнаго множества: мы называемъ соотвѣтствующую мощность чрезъ алефъ-нуль и пишемъ:

$$\aleph_0 = \{\nu\}^{\text{“}}\ ^1.$$

Канторъ обнаруживаетъ, что изъ $\aleph_0$ по опредѣленному закону выходитъ *непосредственно высшая* мощность $\aleph_1$, за ней $\aleph_2$ и т. д.

Такимъ образомъ находится неограниченный рядъ мощностей

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2 \ldots, \aleph_\nu \ldots,$$

который однако не исчерпываетъ понятіе трансфинитной мощности. „Мы докажемъ существованіе—говоритъ онъ—мощности, которую означимъ чрезъ $\aleph_\omega$ и которая представитъ собой *мощность непосредственно высшую всѣхъ мощностей* $\aleph_\nu$; изъ этой мощности происходитъ, какъ изъ $\aleph_0$ происходитъ $\aleph_1$, непосредственно высшая мощность $\aleph_{\omega+1}$ и т. д. до безконечности.

Просто расположенное множество (Einfach geordnete Menge) есть множество, всѣ элементы котораго или отъ природы или благодаря условнымъ закономѣрнымъ отношеніямъ расположены одинъ къ другому въ опредѣленный порядокъ, по которому:

1) изъ двухъ какихъ нибудь элементовъ m_1 и m_2 одинъ m_1 занимаетъ низшее мѣсто, а другой m_2—высшее;

2) если изъ трехъ элементовъ m_1, m_2, m_3 элементъ m_1 занимаетъ низшее мѣсто чѣмъ m_2, и m_2—низшее мѣсто чѣмъ m_3, то мѣсто m_1 ниже m_3.

---

[1] G. Cantor. Sur les fond. de la théorie des ensembles transfinis, стр. 18.

[2] Тамъ же стр. 22.

Два просто расположенныхъ множества называются *подобными* одно другому, если между ихъ элементами можно установить взаимно однозначное соотвѣтствіе такого рода, что отношеніе порядка двухъ элементовъ одного расположеннаго множества было бы то же самое, что и отношеніе двухъ соотвѣтствующихъ элементовъ другого расположеннаго множества.

Каждое расположенное множество имѣетъ только одинъ опредѣленный *порядковый типъ* (Ordnungstypus) или просто *типъ* (Typus), т. е. одно общее понятіе, подъ которое всѣ расположенныя множества подобныя данному, и только эти (и также само данное) подходятъ.

Изъ высказанныхъ опредѣленій слѣдуетъ, что два расположенныхъ множества одного и того же типа имѣютъ одинаковую мощность; напротивъ того два просто расположенныхъ множества, имѣющихъ одну и ту же мощность, вообще имѣютъ различные типы. Типы конечныхъ просто расположенныхъ множествъ, которые совпадаютъ съ конечными числами 1, 2, 3, 4... образуютъ первый класъ типовъ, типы просто расположенныхъ множествъ первой мощности ($\aleph_0$) составляютъ второй класъ типовъ, типы второй мощности ($\aleph_1$)—третій класъ типовъ и т. д.

„Среди просто расположенныхъ множествъ слѣдуетъ дать особое мѣсто множествамъ *хорошо расположеннымъ* (Wohl geordnete Menge); ихъ типы, которые мы назовемъ *порядковыми числами* (Ordnungszahl) даютъ естественный элементъ точнаго опредѣленія высшихъ трансфинитныхъ мощностей. Это опредѣленіе совершенно сходно съ тѣмъ, какъ система всѣхъ цѣлыхъ чиселъ ν даетъ намъ наименьшую трансфинитную мощность $\aleph_0$.

Мы говоримъ, что множество просто расположенное F— хорошо расположено, когда его элементы f слѣдуютъ удаляясь отъ f_1 въ опредѣленной послѣдовательности такъ, что выполняются 2 условія:

1) есть въ F одинъ элементъ начальный или низшій по мѣсту f_1.

2) если F' есть часть F и если F обладаетъ однимъ или нѣсколькими элементами высшими по мѣсту, чѣмъ всѣ элементы F', то существуетъ одинъ элементъ f' отъ F, который непосредственно слѣдуетъ за множествомъ F', такъ что въ F нѣтъ никакого элемента, котораго мѣсто было бы между F' и f'“ [1].

[1] G. Cantor. Sur les fond. de la théorie... Стр. 45.

„Всѣ просто расположенныя множества конечной мощности имѣютъ одинъ и тотъ же типъ ν".

„Всякое просто расположенное множество конечной мощности есть хорошо расположенное".

„Слѣдовательно типы просто расположенныхъ конечныхъ множествъ суть ничто иное какъ конечныя порядковыя числа".

„Конечныя порядковыя числа совпадаютъ въ своихъ свойствахъ съ конечными мощностями. Но совсѣмъ не то бываетъ съ *трансфинитными порядковыми числами*; одной и той же мощности a соотвѣтствуетъ безконечное число порядковыхъ чиселъ, образующихъ систему, которую мы называемъ числовымъ классомъ $Z(a)$. Это часть класа типовъ $[a]$."

„Числовой класъ $Z(\aleph_0)$ мы назовемъ вторымъ числовымъ класомъ"[1].

„Мощность второго числового класа—вторая мощность $\aleph_1$"[2].

Трансфинитныя порядковыя числа второго класа суть типы хорошо расположенныхъ множествъ первой мощности, трансфинитныя порядковыя числа третьяго класа будутъ образованы типами хорошо расположенныхъ множествъ второй мощности и т. д.

Такимъ образомъ трансфинитныя порядковыя числа даютъ возможность опредѣлять высшія мощности и вмѣстѣ съ тѣмъ получаются различные класы чиселъ.

Понятія порядковаго числа и типа хотя и не являются столь общими какъ понятіе мощности, но и по отношенію къ нимъ еще можетъ быть сдѣлано то замѣчаніе, которое было сдѣлано относительно мощности, а именно—они такъ же какъ и понятіе мощности служатъ выраженіемъ утверждаемой реальности безконечнаго.

Существенное различіе между конечнымъ и безконечнымъ множествомъ оказывается въ томъ, что конечное множество въ каждой послѣдовательности, которую можно сообщить ея элементамъ, даетъ одинъ и тотъ же типъ и одно и то же порядковое число; напротивъ того изъ одного множества, состоящаго изъ безконечно многихъ элементовъ, выходятъ различныя порядковыя числа смотря по послѣдовательности, которую сообщаютъ элементамъ. Мощность множества есть независимый отъ порядка элементовъ его атрибутъ; а типъ и порядковое число понимаются вообще какъ зависимые отъ данной послѣдовательности элемен-

---

[1] G. Cantor. Sur les fond. de la théorie des ens. transf. Стр. 62.

[2] Тамъ же стр. 70.

товъ, лишь только имѣютъ дѣло съ безконечными множествами. Существуетъ извѣстная связь между мощностью и порядковымъ числомъ, опредѣленнымъ данной послѣдовательностью элементовъ. Связь эта можетъ быть выражена такъ: каждое хорошо расположенное множество первой мощности можетъ быть сосчитано чрезъ порядковыя числа второго класа и только чрезъ нихъ. Каждое хорошо опредѣленное множество второго класа можетъ быть сосчитано чрезъ порядковыя числа третьяго класа и только чрезъ нихъ.

IV

Много всевозможныхъ возраженій было сдѣлано какъ со стороны философовъ такъ и со стороны математиковъ противъ введенія актуальной безконечности. Сколько нибудь подробное изложеніе этихъ возраженій не входитъ въ цѣли настоящей статьи и мы позволяемъ себѣ ограничиться здѣсь лишь немногими примѣрами ихъ. Приведемъ одно характерное метафизическое возраженіе, сдѣланное въ указанномъ направленіи Гербартовой школой. Оно можетъ быть высказано такъ: „Вопросъ, о которомъ здѣсь идетъ рѣчь, состоитъ въ слѣдующемъ: можно ли мыслить и полагать безконечно многое какъ строго опредѣленную и замкнутую величину. На этотъ вопросъ должно отвѣтить отрицательно, потому что въ случаѣ его утвердительнаго рѣшенія какъ разъ и происходитъ уклоненіе отъ понятія безконечности. Извѣстно, что оно зависитъ, какъ это выражаетъ напр. и Гербартъ, отъ измѣнчивой границы, которая можетъ быть въ каждый моментъ отодвинута далѣе. Отрѣшиться отъ этой измѣнчивости границы значитъ уничтожить понятіе безконечности и мыслить вмѣсто безконечнаго конечное. Но эту-то измѣнчивость границы и постоянную возможность передвиженія какъ разъ и оставляютъ безъ вниманія, какъ только полагаютъ безконечность завершенной или реально существующей, и тогда больше уже не полагаютъ безконечность, а лишь конечное множество. При этомъ дѣло идетъ совсѣмъ не о субъективной неспособности притти когда либо къ концу въ дѣлѣ счета или собиранія, но о понятіи самой безконечности, существеннымъ и неустранимымъ признакомъ котораго именно и является та измѣнчивая граница, по ту сторону которой всегда можно нѣчто найти. Относительно счета можно сказать слѣдующее: въ каждомъ конечномъ множествѣ вещей, сколь велико бы оно ни было, сейчасъ же предста-

вляется возможность объективнаго счета и именно потому, что конечное множество является завершеннымъ, замкнутымъ. Напротивъ того въ безконечномъ множествѣ возможность счета является *просто* исключенной, потому что истинная безконечность только и можетъ быть понимаема какъ неопредѣленная и незавершенная" [1].

Отвѣтомъ на это возраженіе могутъ служить слѣдующія слова Кантора: „Гербартъ, какъ извѣстно, даетъ такое опредѣленіе безконечнаго, подъ которое можетъ подходить лишь *потенціальная безконечность* и обосновываетъ на немъ такъ называемое доказательство того, что актуальная безконечность въ себѣ противорѣчива. Онъ *съ такимъ же правомъ* могъ бы опредѣлить коническое сѣченіе какъ кривую, всѣ точки которой на равное разстояніе удалены отъ центра, и опираясь на это отстаивать противъ Аполонія такое положеніе: нѣтъ никакого коническаго сѣченія кромѣ круга, а то что ты называешь элипсомъ, гиперболой и параболой суть вполнѣ противорѣчивыя понятія" [2].

Изъ математическихъ возраженій, сдѣланныхъ противъ актуальной безконечности, мы позволимъ себѣ привести для примѣра возраженіе Муаньо. Онъ говоритъ, что всякое число, получившееся отъ послѣдовательнаго прибавленія единицъ, является совершенно отчетливо для ума четнымъ или нечетнымъ, первымъ или непервымъ. Если это число четное, оно не содержитъ въ себѣ нечетныхъ—если оно нечетное, то оно не будетъ содержать въ себѣ четныхъ чиселъ, которыя могли бы произойти отъ новыхъ прибавленій; если оно первое, то оно не будетъ послѣднимъ изъ нихъ, потому что доказано, что рядъ первыхъ чиселъ безграниченъ; что если дано какъ угодно большое первое число, то всегда можно взять еще большее. Во всѣхъ случаяхъ, каково бы ни было оно—четное или нечетное, первое или непервое—это число, происшедшее отъ сложенія, не будетъ содержать своего квадрата, куба, четвертой степени и т. д., слѣдовательно невозможно чтобы оно было безконечно [3].

Въ отвѣтъ на подобныя возраженія Канторъ говоритъ: „Очевидно здѣсь молчаливо допускается, что признаки, которые для обыкновенныхъ чиселъ являются несоединимыми, должны находиться въ такомъ же отношеніи между собою и для новыхъ чиселъ, а отсюда уже дѣлается за-

[1] Gutberlet. Das Problem des Unendlichen. Zeitschrift f. Philos. u. philos. Krit. 88 Bd. Стр. 194.

[2] G. Cantor. Üb. d. versch. Standp... Zeitschrift f. Philos. u. philos. Kritik. 88 Bd. Стр. 232.

[3] Moigno. Impossibilité du nombre actuellement infini. Стр. 6.

ключеніе о невозможности безконечныхъ чиселъ. Но кому же здѣсь не бросится въ глаза паралогизмъ? Развѣ не связано всякое обобщеніе и расширеніе понятія съ оставленіемъ его частныхъ особенностей, безъ чего не мыслимо никакое обобщеніе? Развѣ въ новѣйшее время не признали столь важной для развитія Анализа, способствующей величайшему прогресу идею введенія комплексныхъ величинъ, не усматривая препятствія въ томъ, что ихъ нельзя назвать ни положительными ни отрицательными? Я отваживаюсь здѣсь лишь на одинъ подобный шагъ впередъ; и можетъ быть даже всѣми будетъ признано то, что для меня будетъ много легче совершить шагъ впередъ, чѣмъ это оказалось возможнымъ при переходѣ отъ дѣйствительныхъ чиселъ къ комплекснымъ, ибо новыя цѣлыя числа, хотя и отличаются отъ обыкновенныхъ болѣе значительной существенной опредѣленностью, они какъ порядковыя числа имѣютъ непремѣнно общую съ ними однородную реальность".

Въ дальнѣйшемъ изложеніи своихъ мыслей Канторъ показываетъ, какъ несовмѣстимыя для конечныхъ чиселъ признаки четности и нечетности оказываются для трансфинитныхъ чиселъ совмѣстно существующими безъ всякаго противорѣчія [1].

Во всѣхъ возраженіяхъ дѣлаемыхъ противъ актуальной безконечности Канторъ находитъ petitiones principii.

„Всѣ такъ называемыя доказательства—говоритъ онъ—невозможности актуально безконечныхъ чиселъ, какъ это можно доказать въ каждомъ случаѣ особенно, а также можно вывести и изъ общихъ основаній, главнымъ образомъ потому невѣрны и въ томъ заключается ихъ πρῶτον ψεῦδος, что они отъ находящихся подъ вопросомъ чиселъ наперед ожидаютъ свойствъ конечныхъ чиселъ—или лучше сказать принуждаютъ ихъ къ нимъ, тогда какъ съ другой стороны безконечныя числа, если они вообще должны быть въ какой-нибудь формѣ мыслимы, въ своей противоположности къ конечнымъ числамъ должны создать совсѣмъ новый родъ чиселъ; его свойство конечно стоитъ въ зависимости отъ природы вещей и составляетъ предметъ изслѣдованія, а не нашего произвола и предубѣжденія" [2].

Въ заключеніе мы позволимъ себѣ сдѣлать одно замѣчаніе по поводу потенціальной безконечности. Не требуетъ ли сама потенціальная

[1] G. Cantor. Grundlagen einer allg. Mannigf. Стр. 15.

[2] G. Cantor. Uber die verschied. Standpunkte... Zeitschrift f. Philos. u philos. Krit. 88 Bd. стр. 226.

безконечность признанія актуальной? Вѣдь нельзя итти впередъ, непрестанно подвигаясь все дальше и дальше, если не утверждать въ каждый моментъ актуальной безконечности по крайней мѣрѣ въ формѣ той безпредѣльной среды, въ которой это движеніе осуществляется.

„Уклоненіе отъ актуальной безконечности — говоритъ Канторъ — представляется мнѣ отнюдь не маловажнымъ проступкомъ противъ природы вещей, которыя надо принимать такъ какъ онѣ есть, и можно понять такое отношеніе какъ особаго рода близорукость, которая лишаетъ возможности видѣть актуальную безконечность, хотя эта послѣдняя въ своемъ Высшемъ Абсолютномъ Носителѣ насъ создала и сохраняетъ и въ своихъ второстепенныхъ, трансфинитныхъ формахъ повсюду насъ окружаетъ и даже проникаетъ внутрь нашего духа“ [1].

---

[1] G. Cantor. Zeitschrift f. Philos. u. philos. Kritik. 88 Bd. Стр. 230.

ТИПО-ЛИТ. Т-ВА И. Н. КУШНЕРЕВЪ и К° МОСКВА.