Экз. 1952

ВѢРА, ЗНАНІЕ И ОПЫТЪ.

Основной методъ общественныхъ и естественныхъ наукъ.

(Гносеологическій и номографическій очеркъ).

ВВЕДЕНІЕ.

Роковая ошибка «Критики чистаго разума» Канта. Антиноміи Канта.

Со временъ Лапласа, Гаусса и Коши математическая теорія вѣроятностей, имѣя дѣло съ міромъ идей и ожиданій и съ программными опытами, вступила въ связь съ аналитическою теоріей производящихъ функцій, т. е. со всею математикой, включая сюда раціональную механику и математическую физику, и стала точною основною наукою, зацѣпляющею въ своемъ апріорномъ и апостеріорномъ сужденіи и въ программахъ опыта и отчета всѣ вообще области не только раціональнаго знанія, но и сомнѣнія, гаданія и увѣренности или ирраціональнаго знанія.

Эта удивительная философская наука беретъ въ свое обсужденіе главнымъ образомъ номографическое мышленіе или открытіе общихъ законовъ природы и общественности; а въ общественности не только знаніе и опытъ, но и вѣра есть необходимый элементъ. Оперативная логика математической теоріи вѣроятностей сполна обнимаетъ логику тождества «$A = A$» или логику извѣстныхъ «трехъ законовъ» мышленія (законъ противорѣчія, законъ исключеннаго третьяго и законъ тождества) и продолжаетъ ее въ ту сторону отъ этихъ законовъ, гдѣ приходится познавать неизвѣстное и обсуждать діалектическія противорѣчія или спорные вопросы, названные въ «Критикѣ чистаго разума» Канта антиноміями.

Допустимъ, что Кантъ въ самомъ дѣлѣ правъ, утверждая, что чистый разсудокъ предписываетъ природѣ нѣкоторыя безусловныя достовѣрности или законы à priori. Но такихъ достовѣрностей слишкомъ мало; ихъ не хватило бы для жизни мысли, и притомъ всѣ онѣ суть преддверія второго сорта къ знанію.

Многія необходимѣйшія достовѣрности вырабатываются, недешево добываются чистымъ разумомъ (т. е. à priori), апріорными «законами большихъ чиселъ» (см. ниже гл. III и IV), изъ обсужденія вѣроятностей, какъ возможностей или условныхъ достовѣрностей. Вотъ почему надо признать роковою судебную ошибку въ «Критикѣ» и въ «Пролегоменахъ» Канта, который приговорилъ къ незаслуженной казни вѣроятностную теорію познанія.

Достовѣрности суть предѣльныя ступени вѣроятности, какъ перемѣнной величины, имѣющей свою графическую скалу или координату. Иначе говоря, понятіе и графикъ вѣроятности захватываютъ въ своемъ содержаніи и обозначеніи понятіе достовѣрности; послѣднее же понятіе есть лишь маленькая дорогая частица перваго понятія.

Математическая теорія вѣроятностей помогла мнѣ установить формулы и графики испытанія природы и человѣческаго общества, бросающіе свѣтъ въ спорныя противоположенія или антиноміи Канта,—особенно же въ антиномію: «существуютъ ли свободныя причины или, напротивъ, существуетъ только необходимость, т. е. природа?» Въ «Запискахъ о всемірной исторіи» А. С. Хомякова тезису этой антиноміи соотвѣтствуетъ терминъ «иранство», а антитезису—«кушитство». Тезисъ и антитезисъ этой антиноміи полнѣе формулированы ниже, въ § 7.

Впервые связь этой антиноміи съ числовыми и графическими закономѣрностями теоріи вѣроятностей была трактуема мною въ статьѣ: «Философія и логика науки о массовыхъ проявленіяхъ человѣческой дѣятельности» (Математическій Сборникъ, т. XXIII. Москва, 1902). Теперь мы развиваемъ ту же номографическую идею *) и показываемъ, что если допускать мистику свободъ или свободныхъ причинъ, то это попущеніе должно быть неразлучно: 1) съ приложеніемъ къ обществу испытующихъ мѣръ и графическихъ методовъ вѣроятности, т. е. условной достовѣрности, 2) съ основательнымъ народнымъ просвѣщеніемъ и 3) съ организаціей прочныхъ учрежденій правомѣрія, запасающихъ на всѣхъ путяхъ историческаго процесса достаточныя основанія и средства (кассы силъ), способныя искупать погрѣшности свободъ за счетъ ихъ творческой полезности и повертывать колесницу исторіи въ данномъ положительномъ направленіи.

Мистика частныхъ свободъ, безъ осмотрительныхъ искупающихъ и оберегающихъ учрежденій, ведетъ общество не только къ безуправицѣ, но и къ пародоксальнымъ и катастрофальнымъ положеніямъ. Эту истину, противорѣчащую обыденнымъ взглядамъ на свободу и ея философію, я поясню ниже съ помощію примѣровъ и на основаніи теоремы Чебышева о среднихъ величинахъ, дозволяющей установить измѣрительную скалу

*) Настоящая книжка есть сокращеніе большой нашей книги: «Теорія вѣроятностей» (изданіе 2-е. С.-Петербургъ, 1912), гдѣ читатель найдетъ болѣе подробное развитіе математической стороны затронутыхъ вопросовъ Номографіи.

устойчивости и неустойчивости явленія благъ въ результатѣ массовой человѣческой дѣятельности, послѣдовательно развивающейся въ ходѣ историческаго процесса. На этой скалѣ можно отмѣчать тѣ пародоксальныя положенія, за которыми слѣдуютъ и на самомъ дѣлѣ надрывы общественнаго и частнаго благосостоянія, если не принимать отечественныхъ покровительственныхъ мѣръ права, т. е. исправленія погрѣшностей мистики свободъ. Законъ Чебышева, поэтому, есть важный членъ Номографіи, онъ даетъ понять достаточное основаніе, нерушимую стѣну.

Мистическое авторство принадлежитъ, какъ извѣстно, языку, органу рѣчи, способному, какъ сказалъ одинъ мудрецъ, источать «горькую и сладкую воду», прикрашивать неправду, т. е. способному на колоссальные подлоги и извращеніе понятій. Это авторство, органически стремящееся овладѣвать плебсомъ, рисуя ему заманчивыя иллюзіи, необходимо сдѣлать подсуднымъ строгой всесторонней критикѣ, получающей свое питаніе изъ наиболѣе чистыхъ источниковъ вѣры, знанія и трудолюбія. Подъ свободами необходимъ фундаментъ закона, испытанія и правомѣрія.

Касаясь методовъ вѣроятности, мы не могли пропустить вопроса о вѣроятностной или ирраціональной познаваемости ноумена или «вещи въ себѣ», въ своей неощутимой или неприступной сути. Каррикатурный, но за то легчайшій пояснительный примѣръ познаванія неприступной гипотетической причины приведенъ нами въ § 26.

Стѣна, воздвигнутая кантіанской философіей между ноуменомъ и феноменомъ, между чувственнымъ знаніемъ и вѣрою, все болѣе и болѣе рушится и замѣняется тонкою переборкой, нужной главнымъ образомъ для программнаго раздѣленія функцій между факультетами, а въ практикѣ между корпораціями, служащими единому дѣлу человѣческой культуры, внутренней и внѣшней.

У каждой жизненной идеи есть своя отмежеванная, земная какъ бы церковь, т. е. союзъ послѣдователей, гарантирующихъ укладъ идеи въ дѣйствительности, въ обыденномъ порядкѣ вещей.

Философы чистой мистики, какъ г. Бердяевъ, не понимаютъ этого порядка гарантій, покрововъ, черезъ чуръ «дерзновенно» утверждая, что требованіе отъ вѣры гарантій, даваемыхъ знаніемъ (и, прибавимъ отъ себя, вещественными и личными залогами), «представляется похожимъ на желаніе пойти ва-банкъ въ азартной игрѣ, предварительно подсмотрѣвъ карту» (см. Н. Бердяевъ: «Философія свободы», стр. 45). Но скажемъ мы, если не собралось вокругъ идеи хотя бы малочисленной ея земной церковки, храмины, то ученики этой идеи разбѣгаются, и даже пламенные Петры отрекаются отъ идеала, пока поютъ пѣтухи. Поэтому хорошая положительная теорія познанія присоединяетъ къ опытамъ и интуиціямъ вѣры въ ту или другую геніальную идею (искру Божію) элементы «міра

сего», т. е. элементы чувственнаго знанія, земли, земщины, земскихъ какъ бы церквей и земскихъ верховныхъ гарантій того, что идея прочно зацѣпилась корнями за нашу планету въ нѣкоторыхъ матеріальныхъ точкахъ и получила на ней территоріальное жительство въ учрежденіяхъ и людяхъ.

При разсмотрѣніи плодовъ мы учитываемъ двоякій по качеству жизненный реализмъ: низшій (земскій, матеріальный) и высшій (идейный, спиритуалистическій). Этому раздвоенію соотвѣтствуютъ два покрывающихъ свода, два неба: физическое (космическій порядокъ) и спиритуалистическое (нравственный міропорядокъ). Христіанскій Логосъ соединилъ эти два неба, заключилъ союзъ между двумя мірами. Реальную мысль Логоса выскажемъ Его словами: «Я есмь истинная виноградная Лоза, а Отецъ Мой—Виноградарь; всякую у Меня вѣтвь, не приносящую плода, Онъ отсѣкаетъ; и всякую, приносящую плодъ, очищаетъ, чтобы болѣе приносила плода» (Іоаннъ, XV, 1—2).

Не могли мы не коснуться четвертой антиноміи «Критики» Канта, въ которой споръ идетъ уже не о научной «эврикѣ», а о религіозномъ озареніи вѣрою. Позади тезиса этой антиноміи разумѣется необходимое Верховное Существо; позади же антитезиса, по нашему разумѣнію, мыслится въ историческомъ процессѣ вселенская, магическая власть вздутаго (бумагами и спекулятивными фикціями) символическаго золотого тельца (всемірнаго капитализма).

Возможно ли математику и математическую вѣроятность считать основнымъ формирующимъ и критическимъ методомъ познанія?

На этотъ вопросъ настоящая книга отвѣчаетъ утвердительно.

Основная методологическая наука рисуется какъ единый стволъ со многими развѣтвленіями. Въ этомъ соединеніи можно различать слѣдующіе три главныхъ метода собиранія и раздаванія знанія и созидающаго умѣнія:

1) наука классифицированныхъ чиселъ, конкретныхъ и идеальныхъ, символическихъ, — аритмологія *) (царица математики, по выраженію Гаусса; а математика есть царица наукъ);

2) наука упорядоченныхъ и измѣримыхъ внѣшними чувствами воспріятій предметовъ видимаго міра — геометрическій анализъ съ оптикой и номографическимъ исчисленіемъ;

3) наука утонченной связи (союза) познающихъ одного «я» и многихъ «я» («мы», соборъ) съ познаваемымъ, именно: а) съ ощущаемымъ внѣшнимъ міромъ и б) съ неощутимымъ (внѣшними чувствами) Абсолютомъ, Необходимымъ Существомъ,—вѣроятностная синоптика, синтетическая критика раціональнаго и ирраціональнаго познанія.

---

*) Терминъ «аритмологія», близкій къ термину «ариѳметика», берется изъ статьи проф. Н. В. Бугаева: «Математика и научно-философское міросозерцаніе».

ГЛАВА I.

Элементы математической теоріи вѣроятностей.

§ 1. Случайныя явленія. Вѣроятности случайныхъ явленій.

Прежде чѣмъ наблюдать и исчислять повторяющіяся явленія въ связи съ ихъ происхожденіемъ, мы должны формально опредѣлять обсуждаемыя явленія въ порядкѣ ограниченія пространствомъ, временемъ и признаками, болѣе или менѣе ясными. Даже смутно представляющіяся явленія должны быть очерчены формально нѣсколькими ясными достовѣрными признаками.

Всякое явленіе имѣетъ свои причины или основанія и нѣтъ дѣйствія безъ основаній; это положеніе есть основное правило нашего мышленія. Но часто мы не въ состояніи открыть причинъ какого-либо явленія и ошибаемся въ опредѣленіи ихъ.

Съ такого рода неопредѣленностью въ изысканіи причинъ явленій мы встрѣчаемся на каждомъ шагу, и если явленія произошли или имѣютъ произойти въ будущемъ подъ дѣйствіемъ причинъ, носящихъ характеръ неопредѣленности, то такія явленія называются въ теоріи вѣроятностей *случайными*. Случайное явленіе можетъ иногда произойти, иногда не произойти. Если случайное явленіе не было наблюдаемо, а только ожидается, то оно называется *вѣроятнымъ*.

Вѣроятное явленіе можетъ быть вѣроятнымъ въ большей или меньшей степени, а также два событія могутъ быть равновѣроятными.

Вообразимъ урну, содержащую три черныхъ и десять бѣлыхъ шаровъ одинаковой величины. Шары эти тщательно перемѣшаны, и изъ урны наудачу извлекается одинъ шаръ; возможно появленіе какъ чернаго, такъ и бѣлаго шара. При этихъ условіяхъ вѣроятнѣе ожидать появленія бѣлаго шара, чѣмъ чернаго. Если бы число бѣлыхъ шаровъ было равно числу черныхъ, то появленіе бѣлаго и появленіе чернаго шара были бы въ данномъ опытѣ событіями равновѣроятными. Итакъ, можно различать степени вѣроятія, или, иначе, вѣроятности явленій. Слѣдовательно, вѣ-

роятность явленія можно разсматривать, какъ величину, и выражать ее числомъ.

Посмотримъ, что нужно знать, чтобы выразить математическую вѣроятность ожидаемаго событія E числомъ. Будемъ называть обстоятельства, осуществленіе которыхъ неизбѣжно ведетъ къ осуществленію даннаго событія E, *статочностями*, *благопріятствующими* этому событію;—обстоятельства же, осуществленіе которыхъ ведетъ къ неосуществленію даннаго событія E, *статочностями*, *неблагопріятствующими* этому событію. Чтобы выразить числомъ вѣроятность даннаго событія E, нужно опредѣлить статочности, какъ благопріятствующія, такъ и неблагопріятствующія этому событію; причемъ необходимо, чтобы всѣ эти статочности удовлетворили слѣдующимъ тремъ условіямъ;

1) чтобы онѣ были *равновѣроятны*, или, какъ принято выражаться, равновозможны;

2) чтобы статочности эти были *несовмѣстимы*, т. е. чтобы при осуществленіи одной статочности было невозможно осуществленіе въ томъ же испытаніи какой либо изъ остальныхъ статочностей;

3) чтобы статочности эти были *всевозможны* въ томъ смыслѣ, что при данномъ опытѣ одна изъ этихъ статочностей непремѣнно должна осуществиться.

Пусть n будетъ число всѣхъ возможныхъ, удовлетворяющихъ тремъ вышеуказаннымъ требованіямъ, статочностей, а m пусть будетъ число статочностей, благопріятствующихъ данному событію; при этихъ условіяхъ вѣроятность даннаго явленія принято опредѣлять числомъ:

$$p = \frac{m}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Итакъ: *вѣроятность явленія есть отношеніе числа статочностей, благопріятствующихъ данному событію, къ числу всѣхъ статочностей,* причемъ статочности эти должны быть выбраны такъ, чтобы онѣ были равновозможными, несовмѣстимыми и всевозможными.

Числовая величина вѣроятности есть, по самому своему опредѣленію, правильная дробь и лишь въ предѣлѣ обращается въ 1 или 0.

Если $m = n$, т. е. всѣ статочности благопріятствуютъ событію, то вѣроятность его будетъ $p = 1$, причемъ событіе должно *достовѣрно* произойти. Слѣдовательно, единица есть символъ достовѣрности того, что событіе совершится. Если $m = 0$, т. е. всѣ статочности не благопріятствуютъ событію, то вѣроятность его выразится числомъ $p = 0$, причемъ событіе достовѣрно не произойдетъ. Слѣдовательно, нуль есть символъ достовѣрности того, что событіе не произойдетъ.

§ 2. Номографическое различіе учетно-смѣтнаго порядка отъ контрольно-ревизіоннаго порядка при изслѣдованій явленій.

Не смотря на то, что теорія вѣроятностей, глядя въ будущее и въ скрытое отъ сознанія, занимается явленіями, осуществленіе которыхъ носитъ въ ея глазахъ случайный неопредѣленный характеръ, она приводитъ къ достовѣрнымъ выводамъ относительно совокупностей такихъ явленій,—къ выводамъ, имѣющимъ весьма важное значеніе для Номогнафіи, какъ теоретическое, такъ и практическое.

Таковъ оперативный законъ, извѣстный въ теоріи вѣроятностей и статистикѣ подъ именемъ *закона большихъ чиселъ*, важнаго въ апріорномъ учетно-смѣтномъ ассигнованіи и подмѣчиваемаго также à posteriori изъ массовыхъ наблюденій дѣйствительности научными методами изслѣдованія.

Исчисленіе явленій *заднимъ числомъ* соотвѣтствуетъ контрольному *ревизіонному порядку*, разсматривающему уже совершившіеся факты и сличающему по уставамъ и записямъ теоретическое ожиданіе фактовъ съ оказавшеюся дѣйствительностью, учитывая *отклоненіе* отъ даннаго положенія на дѣлѣ, предвидимое теоретически въ болѣе или менѣе узкихъ предѣлахъ. Это отклоненіе называютъ статистическимъ техническимъ балансомъ. Будучи то ниже, то выше даннаго уровня, эти фактическіе итоги въ рядѣ лѣтъ повторяющейся *исторіи* имѣютъ тенденцію уравновѣшиваться относительно историко-статистическаго средняго. Рядъ техническихъ балансовъ, взятый въ исторической послѣдовательности, представляетъ интересъ въ управленіи, въ историко-статистическомъ методѣ, въ *урокахъ исторіи* или наведеніяхъ на будущее время и въ выработкѣ правилъ оцѣнки, обмѣна, наслѣдованія, завѣщанія, долгосрочной аренды и пр.

§ 3. Курсы довѣрія къ обязательствамъ. Паритетъ и отклоненіе отъ паритета.

Права однихъ въ обществѣ суть долги или обязательства другихъ и наоборотъ. Въ обществѣ правовыя лица связаны другъ съ другомъ, какъ кредиторы и дебиторы; причемъ слову «кредитъ» мы даемъ широкій смыслъ, относящійся къ духовнымъ и матеріальнымъ цѣнностямъ.

Колебанія довѣрія измѣряются *курсомъ*, который есть въ сущности вѣроятность, перемѣнная въ нашемъ воззрѣніи, судя по фактамъ. Поясникъ это понятіе на финансовомъ кредитѣ, о которомъ Д. И. Мендѣлѣевъ сказалъ: «капиталъ есть не золото, а довѣріе».

Если группа лицъ A владѣетъ возложенными на среду (на множество) лицъ B обязательствами уплатить по золотому рублю за каждое отдѣльное обязательство, то числовую вѣроятность p исполненія наудачу

взятаго обязательства назовемъ *курсомъ* p довѣрія къ обсуждаемой совокупности обязательствъ и къ фактической власти лицъ A надъ мысленными, по обязательствамъ, золотыми рублями, взыскиваемыми съ лицъ B.

Подобные курсы учитываетъ рынокъ (биржа), покупающій и продающій цѣнныя бумажныя обязательства однихъ лицъ передъ другими лицами, когда обязательства возникаютъ на почвѣ размѣна за деньги предметовъ народнаго хозяйства, считая не только товары и частныя имущества, но и наемный трудъ въ числѣ таковыхъ предметовъ.

Единицу, какъ предѣлъ курса p довѣрія къ обязательствамъ, назовемъ *паритетомъ*, т. е. равенствомъ между выгодой или ожиданіемъ (возможнымъ владѣніемъ), вытекающемъ изъ обязательствъ, и осуществленіемъ обязательствъ при наступленіи обозначенныхъ въ обязательствѣ обстоятельствъ. Разность же $1 - p$ назовемъ отклоненіемъ курса p довѣрія отъ паритета 1.

Если въ силу обязательствъ разность $1 - p$ увеличивается, то это числовое явленіе будетъ соотвѣтствовать ухудшенію видовъ на исполненіе обязательствъ и паденію курса p довѣрія къ обязательствамъ.

Нормальныя колебанія курсовъ должны зависѣть отъ объективныхъ, неподдѣльныхъ обстоятельствъ промышленнаго движенія. Если, напримѣръ, дебиторы B суть хлѣбопроизводители, то сами они зависятъ, съ одной стороны, отъ случайностей климата и урожая хлѣбовъ, а, съ другой стороны, отъ капризовъ мѣстнаго и міроваго рынка, устанавливающаго цѣны на продуктъ ихъ творчества. Поэтому, курсы ихъ обязательствъ могутъ падать и подниматься отъ естественныхъ обстоятельствъ времени, отъ объективныхъ, закономѣрно проявленныхъ причинъ и открытыхъ цѣлей промышленнаго творчества и товарообмѣна.

Научное изслѣдованіе оцѣниваетъ въ массѣ курсы довѣрія къ судебнымъ показаніямъ, свидѣтельствамъ, мѣрамъ для цѣли. Тутъ дѣйствуютъ уже испытанія общественной психологіи и идея *правомѣрія*, направленная противъ погрѣшностей и лукавыхъ спекуляцій.

§ 4. Теорема сложенія.

Если явленіе E можетъ осуществиться въ нѣсколькихъ несовмѣстимыхъ видахъ E_1, E_2, E_3 . . ., то вѣроятность явленія E равна суммѣ вѣроятностей всѣхъ такихъ видовъ.

Второе выраженіе теоремы сложенія: *вѣроятность того, что осуществится одно изъ несовмѣстимыхъ событій E_1, E_2, . . ., равна суммѣ вѣроятностей этихъ событій.* Событія E_1, E_2, . . ., очевидно, можно принять за виды событія E.

Третье выраженіе теоремы сложенія: *если событію E благопріят-*

ствуютъ несовмѣстимыя статочности $E_1, E_2, \ldots$, *то вѣроятность событія* E *равна суммѣ вѣроятностей всѣхъ такихъ статочностей.*

Это выраженіе показываетъ, какъ вычислить вѣроятность въ томъ случаѣ, если удалось получить группу неравновозможныхъ статочностей.

§ 5. Противоположныя явленія. Группа всевозможныхъ несовмѣстимыхъ явленій.

Два несовмѣстимыхъ явленія A и B, изъ которыхъ одно непремѣнно должно случиться, называются *противоположными.*

Осуществленіе одного изъ противоположныхъ явленій равносильно неосуществленію другого. Если случится событіе A, то это значитъ, что не случится B; если не случится событіе A, то это значитъ, что случится B. Утвержденіе событія A есть отрицаніе событія B и отрицаніе событія A есть утвержденіе событія B. Не—A есть событіе B и не—B есть событіе A. Примѣромъ противоположныхъ явленій могутъ служить вскрытіе орла и вскрытіе рѣшетки при бросаніи монеты.

Имѣемъ два противоположныя явленія A и B. Пусть p вѣроятность событія A и q вѣроятность событія B. Вѣроятности эти обладаютъ слѣдующимъ свойствомъ:

$$p + q = 1$$

Въ самомъ дѣлѣ, по второму выраженію теоремы сложенія вѣроятностей, вѣроятность того, что случится одно изъ явленій A и B есть $p + q$. Съ другой стороны по самому опредѣленію противоположныхъ событій та же вѣроятность есть достовѣрность, т. е. выражается числомъ 1. Поэтому $p + q = 1$, т. е. *сумма вѣроятностей двухъ противоположныхъ явленій равна единицѣ.*

Обобщимъ это заключеніе. Вообразимъ рядъ несовмѣстимыхъ явленій $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$. Пусть событія эти выбраны такъ, что одно изъ нихъ непремѣнно должна осуществиться. Такой рядъ событій будемъ называть *полной группой несовмѣстимыхъ событій или группой всевозможныхъ несовмѣстимыхъ событій.* Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_k$ будутъ вѣроятности этихъ событій. Вѣроятности эти обладаютъ слѣдующимъ свойствомъ:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1.$$

Въ самомъ дѣлѣ, по второму выраженію теоремы сложенія вѣроятностей, вѣроятность того, что случится одно изъ этихъ событій, есть $p_1 + p + \ldots + p_k$; съ другой стороны одно изъ нихъ непремѣнно случится. Слѣдовательно,

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1.$$

§ 6. Сложное событіе. Понятіе объ условной вѣроятности. Теорема умноженія.

Событіе, состоящее въ совпаденіи при данномъ испытаніи двухъ или нѣсколькихъ совмѣстимыхъ событій, называется *сложнымъ событіемъ*, причемъ совпадающія событія, составляющія это сложное событіе, называются *простыми*.

Теорема умноженія вѣроятностей: *вѣроятность сложнаго событія, состоящаго въ совпаденіи двухъ простыхъ событій E_1 и E_2, равна произведенію абсолютной вѣроятности одного изъ этихъ событій на условную вѣроятность другого события, найденную въ предположеніи, что первое событіе имѣло мѣсто.*

Теорему умноженія легко обобщить. Въ обобщенномъ видѣ она выразится такъ: *вѣроятность сложнаго событія, состоящаго въ совпаденіи нѣсколькихъ простыхъ событій, равна произведенію абсолютной вѣроятности одного изъ этихъ событій на условную вѣроятность другого, найденную въ предположеніи, что первое событіе состоялось, далѣе на условную вѣроятность третьяго событія, найденную въ предположенія, что первыя два событія состоялись, и т. д., и наконецъ, на условную вѣроятность послѣдняго событія, найденную въ предположеніи, что всѣ остальныя событія состоялись.*

§ 7. Независимыя событія. Вѣроятностная мѣра зависимости. Теорема умноженія въ случаѣ независимыхъ событій. Свободная причинность.

Два совмѣстимыхъ событія A и A_1 называются *независимыми*, если безусловная вѣроятность одного изъ нихъ равна вѣроятности его, вычисленной въ предположеніи, что другое событіе имѣло мѣсто. Говоря иначе, два событія A и A_1 называются независимыми тогда, когда вѣроятность одного изъ нихъ не измѣняется отъ того, имѣло ли мѣсто другое событіе, или нѣтъ.

Въ противоположномъ случаѣ явленія A и A_1 называются *зависимыми*, и зависимость эта имѣетъ различныя степени.

Если взять въ разсчетъ эту зависимость A отъ явленія A_1, то будемъ имѣть для вѣроятности p явленія A, совмѣстимаго съ A_1, варіацію $\delta p = p' - p$, гдѣ p' есть *переучтенная* вѣроятность явленія A, взятая по наступленіи явленія A_1. Условимся при этомъ въ слѣдующемъ пониманіи двухъ терминовъ: крѣпостная зависимость и свободная зависимость. При *крѣпостной* или *неразрывной* (полной) зависимости явленія A отъ A_1 имѣемъ: либо $p' = 1$ и $\delta p = 1 - p$ (это случай положительной крѣпостной зависимости); либо $p' = 0$ и $\delta p = 0 - p$ (это случай отрицательной

крѣпостной зависимости); при *свободной* зависимости либо $0 < \delta p < 1 - p$, либо $0 > \delta p > 0 - p$. При независимости совмѣстимыхъ фактовъ A и A_1 варіація δp вѣроятности p явленія A, возникающая подъ впечатлѣніемъ явленія A_1, есть *абсолютный* нуль; а при зависимости, наоборотъ, варіація δp не есть нуль. Приблизительная (относительная) независимость совмѣстимыхъ явленій A и A_1 характеризуется тѣмъ, что δp хотя и не есть нуль, но оказывается ничтожною, пренебрегаемою (безъ чувствительности, безъ патологіи въ чувствахъ) величиною.

Варіацію δp можно принять за графическую мѣру величины или степени зависимости связанныхъ явленій.

Теорема умноженія для сложныхъ событій, состоящихъ изъ совпаденія независимыхъ событій, обладаетъ болѣе простымъ выраженіемъ, чѣмъ для сложныхъ событій, состоящихъ въ совпаденіи событій зависимыхъ. Такое упрощеніе имѣетъ огромное значеніе для Номографіи.

Теорема. *Вѣроятность сложнаго событія, состоящаго изъ совпаденія нѣсколькихъ простыхъ независимыхъ событій, равна произведенію абсолютныхъ вѣроятностей этихъ простыхъ событій.*

Свободная причинность или только необходимость?

Понятіе о независимости и о мѣрахъ зависимости и устойчивости массовыхъ явленій историческаго процесса тѣсно связана съ разрѣшеніемъ кантіанской *антиноміи*: свобода или необходимость. Эта антиномія (третья) въ «Критикѣ» Канта (см. переводъ Н. Лосскаго, стр. 276) выражена такъ.

Тезисъ.

Причинность согласно законамъ природы есть не единственная причинность, изъ которой могутъ быть выведены всѣ явленія въ мірѣ. Для объясненія явленій необходимо еще допустить свободную причинность (Causalitat durch Freiheit).

Антитезисъ.

Не существуетъ никакой свободы, но все совершается въ мірѣ только согласно законамъ природы.

Въ нашей статьѣ: «Философія и логика науки о массовыхъ проявленіяхъ человѣческой дѣятельности» (Матем. Сборникъ, т. XXIII. Москва 1902) мы впервые разрѣшили антиномію: «свободная причинность или только необходимость» въ духѣ тезиса, показавъ, что разрѣшающая формула дается графиками, формулами и исчисленіями вѣроятностей, ограничивающими мистику частныхъ свободъ общими нормами права.

Независимость явленій A и A_1 обусловливается въ самомъ бытьи независимостью (свободою) причинныхъ факторовъ O и O_1, производящихъ эти явленія, выбирая по своей волѣ средства изъ ряда: a, b, ...

ГЛАВА II.

О вѣроятностяхъ сложныхъ событій при многократномъ повтореніи простого опыта.

§ 8. Повторяемость событій. Случаи, когда вѣроятности противоположныхъ событій E и F при повтореніи опыта не измѣняются.

I. Многое интересное подъ солнцемъ и луною повторяется, правда не въ точной копіи, а съ большими или меньшими модификаціями аналогическаго опыта.

О повтореніяхъ интереса, измѣряемаго болѣе сложными формулами, какъ символическими мѣрами, рѣчь будетъ идти на протяженіи главы III. Первыя же понятія составляются на повтореніяхъ, требующихъ наиболѣе простого ариѳметическаго счета явленій. На этихъ простѣйшихъ повтореніяхъ остановимъ вниманіе въ настоящей главѣ.

II. Пусть данному опыту свойственны два противоположныхъ явленія E и F. Вѣроятности ихъ пусть будутъ p и q. Этотъ опытъ, какъ *практическое дѣйствіе* даннаго *субъекта*, преслѣдующаго данный интересъ, *чисто научный* (познавательный) или же *промышленный*, назовемъ *операціей*. Это простѣйшая изъ операцій, кои мы ниже будемъ изслѣдовать.

Опытъ этотъ предполагается воспроизвести s разъ при одинаковыхъ условіяхъ, вслѣдствіе чего вѣроятности явленій E и F остаются при повтореніяхъ этого опыта неизмѣнными. Въ такомъ сложномъ опытѣ, состоящемъ изъ s отдѣльныхъ испытаній, возможны различныя совпаденія простыхъ событій, т. е. различныя сложныя событія. Опредѣленіемъ вѣроятностей ихъ мы и займемся, но сначала условимся въ нѣкоторыхъ обозначеніяхъ.

Условимся явленія E и F въ опытѣ подъ нумеромъ k обозначать полнѣе черезъ E_k и F_k. При этихъ нумераціяхъ символъ E будетъ общимъ обозначеніемъ частныхъ символовъ E_1, E_2, ..., E_s, а символъ F будетъ общимъ обозначеніемъ частныхъ символовъ F_1, F_2, ..., F_s. Далѣе предполагая, что

$$a + b + c + \ldots = s,$$

будемъ обозначать символомъ

$$(E_1 E_2 \ldots E_a F_{a+1} \ldots F_{a+b} E_{a+b+1} \ldots E_{a+b+c} \ldots)$$

сложное событіе, состоящее въ томъ, что при s предполагаемыхъ испытаніяхъ сначала a разъ состоится событіе E, потомъ b разъ событіе F, далѣе c разъ событіе E и т. д.

Переходя къ разсмотрѣнію ряда основныхъ вопросовъ, относящихся къ разсматриваемому ряду s независимыхъ испытаній, замѣтимъ еще, что событія E и F въ одномъ изъ опытовъ должны считаться независимыми по отношенію къ таковымъ же событіямъ въ другомъ опытѣ.

Задача 1. *Опредѣлить вѣроятность того, что при s предполагаемыхъ испытаніяхъ, которымъ свойственны противоположныя явленія E и F, событія эти, слѣдуя другъ за другомъ въ данномъ порядкѣ, состоятся первое α разъ и второе $s-\alpha$ разъ.*

Предположимъ, что данный порядокъ, въ которомъ при s предполагаемыхъ испытаніяхъ могутъ состояться явленія E и F, есть слѣдующій: сначала a разъ состоится событіе E, потомъ b разъ событіе F, затѣмъ c разъ событіе E и т. д., причемъ:

$$a + c + \ldots = \alpha,$$
$$b + d + \ldots = s - \alpha.$$

Придерживаясь вышеуказаннаго обозначенія, замѣчаемъ, что разсматриваемое сложное событіе, вѣроятность котораго ищется, можно представить символомъ:

$$(E_1 E_2 \ldots E_a F_{a+1} F_{a+2} \ldots E_{a+b+1} \ldots E_{a+b+c} \ldots).$$

Такъ какъ простыя явленія, изъ которыхъ слагается это событіе, суть, какъ сказано выше, независимыя, то здѣсь примѣнима теорема о вѣроятностяхъ сложныхъ событій, выведенная въ § 7. Итакъ, искомая вѣроятность P представится слѣдующимъ образомъ:

$$P = pp \ldots pqq \ldots qpp \ldots p \ldots = p^{a+c+\cdots} q^{b+d+\cdots};$$

короче, будемъ имѣть:

$$P = p^{\alpha} q^{s-\alpha}.$$

Задача 2. *Опредѣлить вѣроятность того, что при s предполагаемыхъ испытаніяхъ, противоположныя событія E и F состоятся соотвѣтственно α и $s-\alpha$ разъ, слѣдуя другъ за другомъ въ какомъ бы то ни было порядкѣ.*

Для рѣшенія этой задачи прибѣгаемъ къ теоремѣ сложенія и умноженія. Событіе, вѣроятность котораго ищется, можетъ осуществиться въ нѣсколькихъ несовмѣстимыхъ видахъ; поэтому, для рѣшенія нашего вопроса, надо опредѣлить всѣ эти виды, найти ихъ вѣроятности и сложить ихъ.

Для опредѣленія всѣхъ видовъ разсматриваемаго событія, возьмемъ рядъ чиселъ:

$$1, 2, \ldots, s$$

и сдѣлаемъ изъ этихъ чиселъ всевозможныя сочетанія по α чиселъ въ каждомъ. Всѣхъ такихъ сочетаній будетъ C_s^α. Входящія въ каждое изъ такихъ сочетаній числа припишемъ индексами при буквахъ E, а $s - \alpha$ чиселъ ряда 1, 2, ..., s, которыя не вошли въ соотвѣтственное сочетаніе, припишемъ индексами при буквахъ F. Затѣмъ изъ буквъ E и F съ приписанными къ нимъ указаннымъ способомъ индексами, соотвѣтственно каждому сочетанію, составимъ символы вида:

$$(E_1 E_2 \ldots E_a F_{a+1} F_{a+2} \ldots F_{a+b} E_{a+b+1} \ldots E_{a+b+c} \ldots).$$

Символовъ этихъ будетъ C_s^α; каждый такой символъ выразитъ, согласно установленнымъ ранѣе обозначеніямъ, сложное событіе и представитъ въ то же время видъ событія, вѣроятность котораго ищется. Эти виды несовмѣстимые и всевозможные. Вѣроятность каждаго вида опредѣляется по предшествующей задачѣ, т. е. вѣроятность каждаго вида есть $p^\alpha q^{s-\alpha}$.

Складывая вѣроятности всѣхъ этихъ видовъ, находимъ, что искомая вѣроятность $\Delta P_{s,\alpha}$ представится такъ:

$$\Delta P_{s,\alpha} = C_s^\alpha p^\alpha q^{s-\alpha}.$$

Эта формула сохраняетъ силу и при $\alpha = 0$, если полагать $C_s^0 = 1$.

Имѣемъ:

$$(q + px)^s = \sum_{m=0}^{m=s} C_s^m p^m q^{s-m} x^m.$$

Поэтому можемъ сказать, что найденная вѣроятность $\Delta P_{s,\alpha}$ есть ничто иное, какъ коэффиціентъ при x^α въ разложеніи бинома $(q+px)^s$ по степенямъ x. Биномъ этотъ, по терминологіи, установленной Лапласомъ, есть производящая функція вѣроятностей $\Delta P_{s,\alpha}$ или ихъ женератриса.

Будемъ полагать:

$$P_{s,\alpha} = \Delta P_{s,0} + \Delta P_{s,1} + \ldots + \Delta P_{s,\alpha-1} \text{ и } P_{s,0} = 0.$$

Задача 3. *Опредѣлить вѣроятность того, что при s предполагаемыхъ испытаніяхъ событіе E состоится не менѣе α разъ и не болѣе β разъ* ($\alpha < \beta$).

Искомая вѣроятность есть вѣроятность того, что при s испытаніяхъ событіе E появится либо α разъ, либо $\alpha + 1$ разъ, либо $\alpha + 2$ разъ, ..., либо β разъ.

Вѣроятность m — кратнаго проявленія событія E при s испытаніяхъ выражается, какъ мы нашли, формулой

$$C_s^m p^m q^{s-m}.$$

По теоремѣ сложенія искомая вѣроятность P представится суммой такихъ формулъ для всѣхъ цѣлыхъ значеній m отъ α до β, т. е.

$$P = \sum_{m=\alpha}^{m=\beta} C_s^m p^m q^{s-m}.$$

Задача 4. *Найти наивѣроятнѣйшія числа появленій E и F при s испытаніяхъ.*

Пусть искомыя наивѣроятнѣйшія числа появленій E и F при s предполагаемыхъ испытаніяхъ будутъ α_σ и $s - \alpha_\sigma$. Вѣроятность того, что числа появленій событій E и F будутъ α и $s - \alpha$, представится коэффиціентомъ при x^α въ разложеніи бинома $(q+px)^s$ по степенямъ x, причемъ коэффиціентъ этотъ, соотвѣтствуя наивѣроятнѣйшимъ числамъ появленій E и F при s испытаніяхъ, долженъ быть наибольшимъ. Имѣемъ:

$$(q + px)^s = \sum_{m=0}^{m=s} C_s^m p^m q^{s-m} x^m.$$

Наибольшій коэффиціентъ $C_s^\alpha p^\alpha q^{s-\alpha}$ долженъ быть не меньше коэффиціентовъ смежныхъ съ нимъ членовъ, т. е. должны имѣть силу неравенства:

$$C_s^\alpha p^\alpha q^{s-\alpha} \geqq C_s^{\alpha-1} p^{\alpha-1} q^{s-\alpha+1},$$
$$C_s^\alpha p^\alpha q^{s-\alpha} \geqq C_s^{\alpha+1} p^{\alpha+1} q^{s-\alpha-1}.$$

Упростивъ эти неравенства, получимъ:

$$\frac{(s - \alpha + 1)\, p}{\alpha} \geqq q \quad \text{и} \quad q \geqq \frac{(s-\alpha)\, p}{\alpha + 1}.$$

Рѣшивъ каждое изъ этихъ неравенствъ относительно α, найдемъ:

$$sp - q \leqq \alpha \leqq sp + p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Такъ какъ разность предѣловъ $sp - q$ и $sp + p$, въ которыхъ должно заключаться число α, равна $p + q = 1$, то, при дробномъ значеніи числа $sp - q$, между предѣлами $ps - p$ и $sp + p$ непремѣнно должно быть единственное цѣлое число, которое и должно выражать искомое число α_σ. Если же число $sp - q$ окажется цѣлымъ, то искомое число α можно принимать равнымъ по произволу какъ $ps - q$, такъ и $ps + p$.

Во всякомъ случаѣ α_σ опредѣляется слѣдующимъ образомъ:

$$\alpha_\sigma = sp + \theta, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

гдѣ θ есть дробь, дополняющая число sp до цѣлаго числа и удовлетворяющая условіямъ:

$$-q \leqq \theta \leqq +p.$$

Если воспользоваться символомъ $E_a(x)$, обозначающимъ «круглое» цѣлое число, удоввлетворяющее условіемъ:

$$a < x - E_a(x) < 1+a, \text{ гдѣ } -1<a<0,$$

то можемъ положить:

$$\alpha_s = E_{-p}(sp) \quad \text{и} \quad \theta = E_{-p}(sp) - sp \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2')$$

Далѣе находимъ:

$$s - \alpha_s = s\,(1-p) - \theta = sq - \theta = s - E_{-p}(sp). \quad . \quad . \quad (3)$$

Изъ равенствъ (2) и (3) находимъ:

$$\frac{\alpha_s}{s-\alpha_s} = \frac{p + \dfrac{\theta}{s}}{q - \dfrac{\theta}{s}}.$$

Если число s значительное, то $\frac{\theta}{s}$ весьма малая дробь, такъ что приблизительно

$$\frac{\alpha_s}{s-\alpha_s} = \frac{p}{q}.$$

Результатъ этотъ можно формулировать какъ *теорему*: наивѣроятнѣйшія числа появленій E и F при большомъ числѣ s испытаній приблизительно пропорціональны вѣроятностямъ этихъ событій.

Для безконечно большаго числа испытаній, т. е. для $s=\infty$, указанная пропорціональность становится вполнѣ строгою.

§ 9. Случаи, когда вѣроятности событій E и F измѣняются при переходѣ отъ одного опыта къ другому.

Вообразимъ, что опытъ, которому свойственны явленія E и F, предполагается воспроизвести s разъ; кромѣ того, пусть вѣроятности событій E и F, при переходѣ отъ одного опыта къ другому, измѣняются, причемъ вѣроятности этихъ событій въ опытѣ k условимся обозначать черезъ p_k и q_k. Остальныя обозначенія предыдущаго параграфа сохранимъ здѣсь въ силѣ.

Вѣроятности событій E и F при каждомъ опытѣ пусть зависятъ только отъ порядка нумераціи опытовъ и для даннаго нумера опыта имѣютъ вполнѣ опредѣленныя значенія. При этихъ условіяхъ событія E и F одного опыта будутъ независимыми по отношенію къ таковымъ же событіямъ въ другомъ опытѣ.

Задача 1. *Опредѣлить вѣроятность того, что при s предполагаемыхъ испытаніяхъ событія E и F состоятся α и s — α разъ, слѣдуя другъ за другомъ въ данномъ порядкѣ.*

Предположимъ, что данный порядокъ, въ которомъ могутъ состояться событія E и F, есть слѣдующій: сначала a разъ состоится событіе E, потомъ b разъ событіе F, затѣмъ c разъ событіе E и т. д.

Слѣдуя установленнымъ выше обозначеніямъ, замѣчаемъ, что событіе, вѣроятность котораго ищется, выражается символомъ

$$(E_1E_2 \ldots E_aF_{a+1} \ldots F_{a+b}E_{a+b+1} \ldots E_{a+b+c} \ldots).$$

Вѣроятность P этого сложнаго событія по теоремѣ умноженія вѣроятностей въ случаѣ независимыхъ событій представится такъ:

$$P = p_1p_2 \ldots p_aq_{a+1} \ldots q_{a+b}p_{a+b+1} \ldots p_{a+b+c} \ldots$$

Задача 2. *Опредѣлить вѣроятность того, что при s предполагаемыхъ испытаніяхъ событія E и F состоятся соотвѣтственно α разъ и s—α, слѣдуя другъ за другомъ въ какомъ бы то ни было порядкѣ.*

Разсмотримъ коэффиціентъ при x^α въ разложеніи производящей функціи $(q_1 + p_1x)\ (q_2 + p_2x) \ldots (q_s + p_sx)$ по степенямъ x, т. е. въ разложеніи

$$(q_1 + p_1x)\ (q_2 + p_2x) \ldots (q_s + p_sx) = \Delta P_{s,0} + \Delta P_{s,1}x + \ldots$$
$$\ldots + \Delta P_{s,\alpha}x^\alpha + \ldots + \Delta P_{s,s}x^s, \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

гдѣ $\Delta P_{s,0}$, $\Delta P_{s,1}$, ... суть коэффиціенты. Опредѣляемый коэффиціентъ есть $\Delta P_{s,\alpha}$.

Слѣдуя правилу умноженія многочленовъ, легко убѣдиться, что коэффиціентъ $\Delta P_{s,\alpha}$ представляется суммой вида:

$$\Delta P_{s,\alpha} = \Sigma p_{\lambda_1}p_{\lambda_2} \ldots p_{\lambda_\alpha}\, q_{\mu_1}q_{\mu_2} \ldots q_{\mu_{s-\alpha}},$$

гдѣ суммованіе распространяется на всевозможныя величины вида p_{λ_1}, $p_{\lambda_2}, \ldots, p_{\lambda_\alpha}$, q_{μ_1}, q_{μ_2}, $q_{\mu_{s-\alpha}}$, въ которыхъ индексы $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\alpha$, μ_1, $\mu_2, \ldots \mu_{s-\alpha}$ берутся изъ ряда чиселъ: 1, 2, ..., s и вмѣстѣ представляютъ собою весь этотъ рядъ чиселъ, написанныхъ только въ другомъ порядкѣ. Очевидно, сумма эта представляетъ собою сумму вѣроятностей всѣхъ несовмѣстимыхъ видовъ, въ которыхъ можетъ состояться событіе, вѣроятность котораго ищется. Поэтому указанная сумма, а вмѣстѣ съ нею и коэффиціентъ $\Delta P_{s,\alpha}$, представитъ намъ искомую вѣроятность.

Задача эта есть обобщеніе 2-й задачи § 8, въ которую она и обращается, если принять:

$$p_1 = p_2 = p_3 \ldots = p_s, \quad q_1 = q_2 = q_3 \ldots = q_{s-\alpha}.$$

Будемъ полагать:

$$P_{s,\alpha} = \Delta P_{s,0} + \Delta P_{s,1} + \ldots + \Delta P_{s,\alpha-1} \quad \text{и} \quad P_{s,0} = 0$$

§ 10. Пунктирная діаграмма связи между вѣроятностью $\Delta P_{s,\alpha}$ и перемѣннымъ α. Деформація этой діаграммы при неограниченномъ возрастаніи числа s. Мѣра устойчивости итога α.

Обозначивъ вышеуказанную вѣроятность $\Delta P_{s,\alpha}$ буквой β, будемъ имѣть уравненіе:

$$\beta = \Delta P_{s,\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Для иллюстрированія связи между перемѣнными α и β можемъ построить Декартовскую діаграмму на плоскости прямоугольныхъ координатъ. Для этой цѣли перемѣнныя α и β нанесемъна скалы Ox и Oy, полагая:

$$x = L \cdot \alpha \text{ и } y = L_1 \cdot \beta, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

гдѣ L и L_1 суть линейные модули скалъ.

Скала x будетъ имѣть штрихи съ помѣтками 0, 1, 2, ..., s. Чтобы при весьма большомъ s рисунокъ не вышелъ изъ предѣловъ чертежа. нужно брать модуль L весьма малымъ. При этомъ весьма длинную скалу приходится дѣлить на скалярные интервалы. Если для измѣненій x возьмемъ скалярный интервалъ $(n,\ n+l)$, полагая $n = \alpha' L$, $\alpha' > 0$ и $n+l = \alpha'' L$, $\alpha' < \alpha'' < s$, то можемъ положить въ этомъ интервалѣ:

$$L = \frac{L_0}{\alpha'' - \alpha'},$$

гдѣ L_0 есть размѣръ всей скалы, соотвѣтствующій цыфровому интервалу $(\alpha',\ \alpha'')$ измѣненій цѣлаго числа α и долженствующій умѣщаться на данномъ кускѣ бумаги. При большомъ числѣ $\alpha'' - \alpha'$ модуль L малъ.

Напротивъ, модуль L_1 при весьма большомъ s нужно брать весьма большимъ, чтобы скала функціи $\Delta P_{s,\alpha}$ не оказалась микроскопическою. Ибо даже наибольшее значеніе $\Delta P_{s,\alpha_\sigma}$ числа β стремится къ нулю при возрастаніи s до ∞.

Очевидно, въ интервалѣ $(n,\ n+l)$, соотвѣтствующемъ даже этому наибольшему значенію $\Delta P_{s,\alpha}$, можно полагать:

$$L_1 = \frac{L_1^0}{\Delta P_{s,\alpha_\sigma}},$$

гдѣ L_1^0 есть соотвѣтствующій конечный размѣръ части скалы Oy, долженствующій умѣщаться въ предѣлахъ чертежа.

При этомъ у статистиковъ установился совершенно вѣрный обычай разсматривать прежде всего *серединный* интервалъ $(\alpha',\ \alpha'')$, въ которомъ центральное положеніе занимаетъ цѣлое число α_σ, ближайшее къ числу $s \cdot p = p_1 + p_2 + \ldots + p_s$. Въ этомъ интервалѣ, какъ покажетъ § 14, пунктирная діаграмма приблизительно переходитъ въ аналитическую кривую.

Величину L_1 будемъ, напримѣръ, въ дециметрахъ опредѣлять такъ:

$$L_1 = \frac{1^{dm}}{\Delta P_{s,\alpha_\sigma}}, \quad \alpha_\sigma = E_{-p}(p_1 + p_2 + \ldots + p_s), \quad \ldots \quad (6)$$

гдѣ p есть среднее ариѳметическое отъ $p_1, p_2, \ldots, p_s$, а $E_{-p}(x)$ есть символъ. установленный въ § 8.

Математики—статистики (Лексисъ, Борткевичъ, А. А. Чупровъ) изучаютъ зависящую отъ возрастанія числа s *деформацію* пунктирной линіи (5) и приближеннаго къ ней аналитическаго геометрическаго образа, разсматривая эти геометрическія мѣста какъ при большомъ конечномъ s, такъ и въ предѣлѣ, когда s дѣлается безконечно большимъ. Предѣлъ численнаго выраженія $L_1 : \sqrt{s}$ при $s = \infty$ обозначимъ чрезъ k, и при конечномъ s положимъ:

$$M = \frac{k}{\sqrt{s}} \quad \ldots \quad (7)$$

Количество M называютъ *статистическимъ модулемъ устойчивости итога* α явленій E (см. *А. А. Чупровъ*: «Очерки по теоріи статистики», изд. 2, стр. 252). Терминъ этотъ сдѣлается вполнѣ понятнымъ послѣ вывода «закона большихъ чиселъ». Забѣгая впередъ, замѣтимъ, что число M выражается такъ:

$$M = \sqrt{\frac{2}{s}[p_1(1-p_1) + p_2(1-p_2) + \ldots + p_s(1-p_s)]} \quad \ldots \quad (8)$$

Дѣйствительная устойчивость итога α *убываетъ* при возрастаніи M: *абсолютно твердая устойчивость* бываетъ при $M = 0$, когда всѣ величины $p_1, p_2, \ldots, p_s$ частію единицы, частію нули, т. е. когда достовѣрны въ однихъ испытаніяхъ явленія E, въ другихъ—явленія не—E, или F; тутъ процессъ рѣшительно *детерминированъ*, подчиняясь машинѣ логическаго закона *исключеннаго третьяго*. Наимельшая устойчивость бываетъ при наибольшемъ M, т. е. при

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_s = \frac{1}{2}.$$

Мѣры этого рода оправдываются исчисленіемъ вѣроятностей и распространяются на болѣе сложные процессы, въ отношеніи которыхъ разсматриваемыя операціи являются лишь однимъ изъ множества различныхъ совмѣстныхъ оперативныхъ элементовъ (классовъ).

Замѣтимъ предѣльную связь между уравненіями (6) и (7), т. е. между графическимъ модулемъ L_1 діаграммы и статистическимъ модулемъ M.

ГЛАВА III.

Простой законъ большихъ чиселъ. Вопросы, рѣшаемые при помощи приблизительной достовѣрности.

§ 11. Элементарный выводъ теоремы Якова Бернулли.

Опредѣлимъ сначала сумму:

$$\sum_{m=0}^{m=s} C_s^m \, (m - sp)^2 \, p^m q^{s-m},$$

которую короче обозначимъ черезъ J.

Выведемъ эту сумму, исходя изъ формулы бинома:

$$(q + px)^s = \sum_{m=0}^{m=s} C_s^m p^m q^{s-m} x^m.$$

Помножимъ обѣ части этого равенства на x^{-sp} и результатъ продеффференцируемъ. Найдемъ:

$$\frac{d}{dx} \{(q + px)^s \, x^{-sp}\} = \sum_{m=0}^{m=s} C_s^m p^m \, . \, q^{s-m} \, (m - sp) \, x^{m-sp-1}.$$

Умножимъ обѣ части этого равенства на x и опять продифференцируемъ результатъ. Получимъ:

$$\frac{d}{dx}\left[x \, \frac{d}{dx} \{(q + px)^s \, x^{-sp}\}\right] = \sum_{m=0}^{m=s} C_s^m p^m q^{s-m} \, (m - sp)^2 \, x^{m-sp-1}.$$

Положивъ $x = 1$, найдемъ:

$$J = \left(\frac{d}{dx}\left\{x \, \frac{d}{dx}\left[(q + px)^s \, x^{-sp}\right]\right\}\right)_{x=1}.$$

По этой формулѣ легко вычислить сумму J. Выполнимъ эти вычисленія въ предположеніи, что $p + q = 1$. Имѣемъ:

$$log \, [x^{-sp} \, (q + px)^s] = - sp \, log \, x + s \, log \, (q + px),$$

откуда:

$$\frac{d}{dx} [x^{-sp} \, (q + px)^s] = x^{-sp} \, (q + px)^s \left\{- \frac{sp}{x} + \frac{sp}{q + px}\right\}.$$

Далѣе находимъ:

$$\frac{d}{dx}\left\{x \, \frac{d}{dx} [x^{-sp} \, (q + px)^s]\right\} =$$

$$= \frac{d}{dx}\left\{x^{-sp}\ (q + px)^s \left[\frac{spx}{q + px} - sp\right]\right\} =$$

$$\left(\frac{sp}{q + px} - \frac{sp}{x}\right)^2 x^{1-sp}\ (q + px)^s + x^{-sp}\ (q + px)^s\ \frac{spq}{(q + px)^2}.$$

При $x = 1$ и $p + q = 1$, будемъ имѣть:

$$J = spq,$$

или

$$\sum_{m=0}^{m=s} C_s^m\ (m - sp)^2\ p^m q^{s-m} = s\ .\ p\ .\ q\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (A)$$

Тождество это послужитъ намъ, какъ вспомогательное средство для вывода теоремы Бернулли.

Перейдемъ теперь къ выводу теоремы Бернулли.

Пусть E и F будутъ противоположныя явленія, свойственныя данному опыту, а p и q ихъ вѣроятности. Опытъ предполагается воспроизвести s разъ при одинаковыхъ условіяхъ; пусть m есть ожидаемое число появленій событія E при этихъ s предполагаемыхъ испытаніяхъ. Съ нѣкоторою вѣроятностью можемъ ожидать, что число m при произвольномъ положительномъ числѣ t удовлетворитъ неравенству:

$$\left(\frac{m}{s} - p\right)^2 \leqq t^2\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

Вѣроятность того, что неравенство (1) будетъ удовлетворено, пусть будетъ P. Вѣроятность противоположнаго событія, т. е. того, что m не удовлетворитъ неравенству (1) и, слѣдовательно, удовлетворитъ неравенству

$$\left(\frac{m}{s} - p\right)^2 > t^2,\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2)$$

будетъ $1 - P$.

Вѣроятность $1 - P$ неравенства (2) можемъ представить въ другой формѣ.

Сообразимъ, въ какихъ видахъ можетъ осуществиться неравенство (2) для этого отыщемъ, какія изъ чиселъ ряда 0, 1, 2, . . ., s будутъ удовлетворять неравенству (2). Пусть всѣ эти числа будутъ:

$$m = \alpha',\ \alpha'', \ldots, \alpha^{(k)}.$$

Видовъ, въ которыхъ можетъ осуществиться неравенство (2), очевидно, столько, сколько всѣхъ вышеуказанныхъ чиселъ α. Виды эти несовмѣстимы. Вѣроятность каждаго изъ этихъ видовъ будетъ:

$$C_s^m p^m q^{s-m},$$

гдѣ $m = \alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^{(k)}$.

Слѣдовательно, искомая полная вѣроятность неравенства (2), по теоремѣ сложенія, представится такъ:

$$1 - P = \overline{\sum} C_s^m p^m q^{s-m}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

гдѣ $\overline{\Sigma}$ обозначаетъ, что суммованіе распространяется на числа $m = \alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^{(k)}$.

Помня, что числа эти удовлетворяютъ неравенству (2), которое приводится къ виду:

$$\left(\frac{m - sp}{st}\right)^2 > 1,$$

нарушимъ равенство (A) умноживъ общій членъ суммы, стоящей во второй части этого равенства, на

$$\left(\frac{m - sp}{st}\right)^2.$$

Получимъ:

$$1 - P < \overline{\sum} C_s^m \frac{(m - sp)^2}{s^2 t^2} \cdot p^m q^{s-m}.$$

Усилимъ еще это неравенство, замѣнивъ сумму $\overline{\Sigma}$, которая распространяется только на нѣкоторыя изъ чиселъ $m = 0, 1, 3, \ldots, s$, суммой, распространенной на всѣ эти числа. Получимъ:

$$1 - P < \frac{1}{s^2 t^2} \sum_{m=0}^{m=s} C_s^m (m - sp)^2 p^m \cdot q^{s-m}.$$

Принимая во вниманіе выведенное выше вспомогательное тождество (A), получимъ:

$$1 - P < \frac{pq}{st^2}.$$

Слѣдовательно:

$$1 > P > 1 - \frac{pq}{st^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Напишемъ теперь неравенство (1) иначе, именно:

$$-t \leqq \frac{m}{s} - p \leqq +t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Вѣроятность P того, что это неравенство будетъ имѣть силу, удовлетворяетъ условіямъ (3).

Предположимъ, что число s испытаній увеличивается до безконечности. Вообразимъ, что t весьма малая величина, именно: $t = s^{-\nu}$, $0 < \nu < {}^1/_2$. Какъ бы ни было мало t, число st^2 будетъ весьма большимъ, а тогда $\frac{pq}{st^2}$ будетъ весьма мало и $1 - \frac{pq}{st^2}$ будетъ весьма близко къ единицѣ, а, слѣдовательно, и вѣроятность P будетъ весьма мало отлична отъ единицы. Такимъ образомъ въ предѣлѣ при $s = \infty$ вѣроятность P

неравенствъ (4) неограниченно приближается къ единицѣ (символу достовѣрности), причемъ t стремится къ нулю.

Это и есть теорема Бернулли, которую окончательно формулируемъ слѣдующимъ образомъ:

Вѣроятность P того, что разность между отношеніемъ ожидаемаго числа появленій событія E къ числу предполагаемыхъ испытаній и вѣроятностью p этого событія по абсолютной величинѣ не превзойдетъ даннаго сколь угодно малаго числа, при большомъ числѣ s предполагаемыхъ независимыхъ испытаній близка къ единицѣ (достовѣрности) и стремится къ единицѣ по мѣрѣ возрастанія s до безконечности.

Изъ теоремы Бернулли слѣдуетъ, что *отношеніе ожидаемаго числа m появленій событія E къ числу s всѣхъ предполагаемыхъ испытаній при возрастаніи s до ∞ стремится съ относительною достовѣрностью къ вѣроятности p событія E.*

Если, напримѣръ, бросать монету значительное число разъ, то отношеніе числа появленій орла къ числу всѣхъ бросаній, по теоремѣ Бернулли, должно съ достовѣрностью стремиться къ $\frac{1}{2}$.

Пока условія теоремы Я. Бернулли выполняются, до тѣхъ поръ она является важнымъ критеріемъ основательнаго *увѣрованія* въ ея предсказаніе и *предвидѣнія*; она служитъ закономъ надежнаго мышленія, говорящимъ, что съ приблизительною достовѣрностью число m ожидаемыхъ явленій при неограниченно ростущемъ числѣ s *независимыхъ* опытовъ тяготѣетъ къ величинѣ sp и отклоняется отъ нея на незначительное число процентовъ. Нѣкоторая неполнота достовѣрности восполняется запасными основаніями и легкимъ выкупомъ ошибки.

Законъ этотъ есть частный случай закона большихъ чиселъ, болѣе общее выраженіе котораго дано Пуассономъ. Чебышеву мы обязаны элементарнымъ выводомъ этого закона и еще болѣе общимъ его выраженіемъ, относящимся къ совпаденіямъ независимыхъ явленій въ *независимыхъ* испытаніяхъ. Числовыя закономѣрности этого рода устанавливаютъ относительныя достовѣрности сложныхъ явленій, кажущихся поверхностному взгляду *неустойчивыми* и *безпорядочными*.

§ 12. Теорема Пуассона. Значеніе ея въ вопросахъ индивидуализаціи и общественности.

Для вывода этой теоремы требуется одно вспомогательное равенство, полученіемъ котораго мы и займемся. Пусть, согласно обозначеніямъ § 9,

$$f(x) = (q_1 + p_1 x)\,(q_2 + p_2 x) \ldots (q_s + p_s x) = \Delta P_{s,0} + \Delta P_{s,1} x + \ldots +$$

$$+ \Delta P_{s,s} x^s = \sum_{m=0}^{m=s} \Delta P_{m,s} x^m.$$

Держась этихъ обозначеній, опредѣлимъ сумму:

$$J = \sum_{m=0}^{m=s} \Delta P_{s,m} (m - sp)^2,$$

гдѣ p есть среднее ариѳметическое изъ $p_1, p_2, \ldots, p_s$, т. е.

$$p = \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_s}{s}.$$

При этомъ

$$p_1 + q_1 = p_2 + q_2 = \ldots = p_s + q_s = 1.$$

Сумму J можемъ опредѣлить при помощи пріема, аналогичнаго тому, которымъ мы пользовались при выводѣ вспомогательнаго тождества, употребленнаго для доказательства теоремы Бернулли.

Съ помощію женератрисы $f(x)$ находимъ:

$$\frac{d}{dx}\left\{x \frac{d}{dx} [x^{-sp} f(x)]\right\} = \sum_{m=0}^{m=s} \Delta P_{s,m} (m - ps)^2 x^{m-ps-1}.$$

Отсюда видно, что выраженіе

$$\frac{d}{dx}\left\{x \frac{d}{dx} [x^{-sp} f(x)]\right\}$$

при $x = 1$ обращается въ искомую сумму J, т. е.

$$J = \frac{d}{dx}\left\{x \frac{d}{dx} [x^{-sp} f(x)]\right\}_{x=1}.$$

Имѣемъ:

$$log [x^{-sp} f(x)] = - sp \, log \, x + \sum_{k=1}^{k=s} log (q_k + p_k x).$$

Дифференцируя это равенство, получимъ:

$$\frac{d}{dx} [x^{-sp} f(x)] = x^{-sp} f(x) \left\{- \frac{sp}{x} + \sum_{k=1}^{k=s} \frac{p_k}{q_k + p_k x}\right\}.$$

Помноживъ это равенство на x и дифференцируя еще разъ, найдемъ:

$$\frac{d}{dx}\left\{x \frac{d}{dx} [x^{-sp} f(x)]\right\} =$$

$$= x^{-sp} f(x) \left\{\left(- \frac{sp}{x} + \sum_{k=1}^{k=s} \frac{p_k}{q_k + p_k x}\right)^2 x + \sum_{k=1}^{k=s} \frac{p_k q_k}{(q_k + p_k x)^2}\right\}.$$

Полагая здѣсь $x = 1$ и замѣчая, что $f(1) = 1$, находимъ:

$$J = p_1q_1 + p_2q_2 + \ldots + p_sq_s. \quad \ldots\ldots (A)$$

Очевидно, $2J = s \,.\, M^2$, гдѣ M есть модуль устойчивости (см. § 10).

Замѣтивъ, что maximum выраженія p_kq_k, при условіи $p_k + q_k = 1$, есть $\frac{1}{4}$, находимъ: $p_kq_k \leqq \frac{1}{4}$. Давая здѣсь числу k значенія $1, 2, \ldots, s$ и складывая полученныя неравенства, найдемъ:

$$0 \leqq J \leqq \frac{s}{4}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$J = \frac{s\theta}{4}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (A')$$

гдѣ $0 \leqq \theta \leqq 1$.

Перейдемъ теперь къ выводу *теоремы Poisson'a*.

Вообразимъ два противоположныхъ явленія E и F, свойственныхъ данному опыту. Пусть опытъ этотъ предполагается воспроизвести s разъ, но не при одинаковыхъ условіяхъ, такъ что вѣроятности событій E и F при повтореніяхъ опыта различны. Вѣроятности эти въ опытѣ k будемъ обозначать черезъ p_k и q_k. Далѣе подъ m будемъ разумѣть ожидаемое число появленій событія E при s предполагаемыхъ испытаніяхъ.

Съ нѣкоторою вѣроятностью P можемъ ожидать, что это число m удовлетворитъ неравенству:

$$\left(\frac{m}{s} - p\right)^2 \leqq t^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Вѣроятность противоположнаго событія, т. е. того, что число m при произвольномъ положительномъ числѣ t удовлетворитъ неравенству:

$$\left(\frac{m}{s} - p\right)^2 > t^2, \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

будетъ $1 - P$.

Опредѣлимъ эту послѣднюю вѣроятность другимъ способомъ.

Въ ряду чиселъ $0, 1, 2, \ldots, s$ отмѣтимъ всѣ числа, удовлетворяющія неравенству (2). Пусть числа эти будутъ: $m = \alpha', \alpha'', \ldots$

Каждому изъ этихъ чиселъ соотвѣтствуетъ видъ, въ которомъ можетъ осуществиться неравенство (2). Вѣроятность каждаго вида будетъ представляться коэффиціентомъ $\Delta P_{s,m}$ при x^m въ разложеніи производящей функціи:

$$f(x) = (q_1 + p_1x)\ (q_2 + p_2x) \ldots (q_s + p_sx)$$

по степенямъ x. По теоремѣ сложенія, вѣроятность неравенства (2) выразится такъ:

$$1 - P = \overline{\Sigma}\, \Delta P_{s,m}, \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

гдѣ $\overline{\Sigma}$ есть знакъ суммы, распространяемой на значенія $m = \alpha', \alpha'', \ldots$

Помня, что для этихъ значеній m имѣетъ силу неравенство (2), т. е.

$$\left(\frac{m - sp}{st}\right)^2 > 1,$$

нарушимъ равенство (3), умноживъ общій членъ второй его части на $\left(\frac{m-sp}{st}\right)^2$. Получимъ:

$$1 - P < \overline{\sum} \Delta P_{s,m} \left(\frac{m - sp}{st}\right)^2.$$

Неравенство это еще усилимъ, распространяя сумму, стоящую во второй части, на весь рядъ чиселъ $m = 0, 1, 2, \ldots, s$. Будемъ имѣть:

$$1 - P < \frac{1}{s^2 t^2} \sum_{m=0}^{m=s} \Delta P_{s,m} (m - sp)^2.$$

Принимая во вниманіе выведенное выше вспомогательное тождество (A) и его слѣдствіе (A'), получимъ:

$$1 - P < \frac{J}{s^2 t^2} = \frac{\theta}{4st^2},$$

гдѣ $0 < \theta < 1$. Слѣдовательно:

$$1 > P > 1 - \frac{J}{s^2 t^2} = 1 - \frac{\theta}{4st^2} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Напишемъ теперь неравенство (1) иначе, именно:

$$-t \leqq \frac{m}{s} - p \leqq +t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Вѣроятность P этихъ неравенствъ удовлетворяетъ неравенствамъ (4).

Пусть число s испытаній увеличивается до безконечности. Положимъ, что t имѣетъ весьма малое значеніе: $t = s^{-\nu}$, $0 < \nu < {}^1/_2$. Какъ бы ни было мало t, число st^2 будетъ весьма большимъ; а тогда $\frac{\theta}{4st^2}$ будетъ весьма малымъ и величина $1 - \frac{\theta}{4st^2}$ будетъ весьма близка къ 1, причемъ и P будетъ весьма мало отличаться отъ единицы. Въ предѣлѣ при возрастаніи s до ∞ вѣроятность P неравенства (5) обратится въ единицу, а t въ безконечно малое число. Результатъ этотъ представляетъ теорему Пуассона, которая формулируется такъ:

Вѣроятность P того, что разность между отношеніемъ ожидаемаго числа появленій событія E къ числу всѣхъ предполагаемыхъ испытаній и среднимъ ариѳметическимъ изъ вѣроятностей событія E при тѣхъ же испытаніяхъ не превзойдетъ по абсолютной величинѣ даннаго сколь угодно малаго числа, при большомъ числѣ s испытаній близка къ единицѣ (достовѣрности) и стремится къ 1 по мѣрѣ возрастанія s до ∞.

Изъ теоремы Пауссона слѣдуетъ, что отношеніе $\frac{m}{s}$ при неограниченномъ возрастаніи s стремится (съ нравственной достовѣрностью) къ среднему ариѳметическому p вѣроятностей $p_1, p_2, \ldots, p_s$.

Пока условія теоремы Пуассона выполняются, до тѣхъ поръ она является важнымъ критеріемъ основательнаго увѣрованія въ ея выводъ и предвидѣнія. Она, обобщая теорему Я. Бернулли, служитъ закономъ расширеннаго по кругозору надежнаго мышленія, говорящимъ о рядѣ испытаній или операцій и о томъ, что съ приблизительною достовѣрностью число m ожидаемыхъ явленій при неограниченно растущемъ числѣ s опытовъ тяготѣетъ къ итогу $p_1 + p_2 + \ldots + p_s$ и отклоняется отъ этого итога на незначительное число процентовъ.

Теорема Пуассона извѣстна подъ именемъ закона большихъ чиселъ и обнимаетъ теорему Якова Бернулли, какъ частный случай. Предшествующее доказательство теоремы Пуассона и всѣ другія извѣстныя доказательства ея ограничены условіемъ независимости разсматриваемыхъ совмѣстимыхъ явленій. Эта независимость имѣетъ причину въ *индивидуальности*; тѣмъ не менѣе она далеко не всегда осуществляется. Поэтому явленія, происходящія лишь подъ флагомъ независимости (а не по ея существу), могутъ уклоняться отъ теоремы Пуассона болѣе или менѣе, смотря по характеру нарушенія условія независимости совмѣстимыхъ явленій. Существуютъ обстоятельства, когда наоборотъ законы зависимости бываютъ велики и ниспровергаютъ законы независимости, ставя на ихъ мѣсто другія закономѣрности и другіе разсчеты. Эпидеміи, политическія и экономическія войны, паника биржъ, вліяніе общественныхъ волненій и страстей, вліяніе мыслей изобрѣтателей и законодателей, соглашенія вмѣсто конкурренціи и т. д.,—всѣ эти обстоятельства часто оказываютъ могущественное слитное дѣйствіе, нарушающее условіе независимости совмѣстимыхъ явленій, подлежащихъ счету.

Однако же за исключеніемъ всѣхъ этихъ вліяній сказывается самостоятельная природа *индивидуальностей*, какъ несливающихся единицъ (частныхъ «я») общественной дѣятельной среды («мы»), обезпечивая осуществленіе условій теоремы Пуассона въ вопросахъ частнаго права, частной экономіи и частнаго знанія и умѣнія.

То же самое (но въ служебномъ смыслѣ, ограниченномъ удобствами представленій) нужно сказать объ отдѣльныхъ частицахъ, молекулахъ и частичныхъ силахъ неорганическаго вещества, а также о единицахъ труда, товара, денегъ и о недѣлимыхъ организмахъ въ царствахъ растеній и животныхъ.

Важно замѣтить, что здѣсь, благодаря независимости испытаній и явленій, мы встрѣчаемся съ примѣромъ свободной причинности. Тѣмъ не менѣе надъ независимыми индивидуальностями и надъ атомизмомъ при-

роды à priori возводятся общественныя закономѣрности, числовыя (въ формѣ теоремъ Пуассона и Бернулли съ ихъ нижеуказаннымъ обобщеніемъ) и графическія (въ формѣ діаграммы вѣроятности $\Delta P_{s,n}$). О сближеніи этихъ номографическихъ элементовъ à posteriori съ дѣйствительностію и необходимостію рѣчь будетъ ниже (§ 26). Пока же разъяснился первый шагъ въ примиреніи индивидуализма и общественности.

Факты и вѣроятностныя теоріи взаимно контролируютъ другъ друга въ нѣдрахъ среды, къ которой прилагаются эти методы и принципы. Этотъ взаимный контроль *сличеніемъ* (сравнительнымъ методомъ ожиданія съ дѣйствительностью) устанавливаетъ цѣльную (синтетическую) достовѣрность, какъ цѣнный результатъ, выведенный изъ закона большихъ чиселъ.

§ 13. Значеніе простой номографіи въ вопросахъ о построеніи общественной сѣти оберегающихъ банковъ въ странѣ и о стоимости отпусковъ краткосрочнаго кредита индивидуумамъ въ мелкія промышленныя дѣла. Резервы для укрѣпленія прочности банкирскихъ предпріятій по краткосрочнымъ операціямъ, исчисляемые при помощи приблизительныхъ достовѣрностей.

Пока не будемъ принимать въ соображеніе, кромѣ теоремы Пуассона, другіе виды закона большихъ чиселъ, кои ниже приведены.

Вообразимъ, что при индивидуализаціи хозяйствъ на стражѣ общихъ интересовъ стоитъ въ данной странѣ сѣть банковъ, систематически содѣйствующая народной экономіи и народному труду.

Теорема Пауссона устанавливаетъ надежную теоретическую почву для сужденій по вопросу о множествѣ отдѣльныхъ отпусковъ изъ сѣти банковъ кредита въ размѣрѣ каждый разъ суммы N на данный срокъ въ большую среду отдѣльныхъ дебиторовъ, занятыхъ мелкимъ (кустарнымъ) промышленнымъ творчествомъ; — кредита, погашеніе котораго индивидуумами названной среды вѣроятно, но не абсолютно достовѣрно. Теорема Пуассона устанавливаетъ математическій способъ исчислять стоимость этого кредита, обезпечивая, на почвѣ относительной (приблизительной) достовѣрности, прочное существованіе банка и соразмѣряя эту стоимость съ среднею исправностью погашеній дебиторами своихъ обязательствъ.

Эта стоимость берется банкомъ въ видѣ $^0/_0{}^0/_0$ на кредитуемый капиталъ одинаково со всѣхъ индивидуумовъ, пользующихся кредитомъ. Въ эту стоимость включаются ожидаемый средній недоборъ погашенія и резервъ, какъ защитная мѣра, укрѣпляющая прочность положенія или устойчивость банка, отстаивающаго и общее благо, и свое существованіе.

Въ банкахъ по сбереженію и страхованію противъ кризисовъ задача нѣсколько видоизмѣняется. Для накопленія соотвѣтствующихъ средствъ частныя хозяйства могутъ объединяться въ кооперативные союзы, учреждающіе банкъ на страховыхъ началахъ взаимности, чтобы отстаивать самихъ себя; такъ какъ «одинъ въ полѣ не воинъ». Какъ земледѣльцы, бросающіе въ землю трудъ и сѣмена въ надеждѣ, что расходуемое покроется съ прибылью, такъ и люди, измышляющіе наилучшій способъ отпустить капиталъ въ работу и выгодный производительный оборотъ, рискуютъ, что отпущенныя въ дѣло издержки могутъ, при неблагопріятномъ стеченіи обстоятельствъ, не вернуться и поставить дѣло въ положеніе несостоятельности. Противъ такого неблагопріятнаго оборота дѣлъ законъ дозволяетъ учреждать кооперативные и торговые союзы съ банками, стоящими на стражѣ общихъ интересовъ.

Банкирскій способъ опредѣлять умѣренные резервы и средній недоборъ погашенія ссудъ или же, наоборотъ, среднюю исправность погашенія находится въ связи съ условнымъ опредѣленіемъ *приблизительной достовѣрности.*

Будемъ принимать числовую вѣроятность P за приблизительную достовѣрность, если имѣетъ силу *условное* неравенство:

$$1 > P \geqq 0{,}99 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Условіе это дирижеръ можетъ, конечно, измѣнить, взявъ вмѣсто дроби 0,99 другую правильную дробь, болѣе или менѣе близкую къ 1; но мы хотимъ здѣсь для наглядности держаться примѣрнаго опредѣленія приблизительной достовѣрности при помощи неравенства (6), имѣя въ виду выяснить идею.

Условившись въ терминѣ: «приблизительная достовѣрность», можемъ свести къ теоремѣ Пуассона и къ ея обобщеніямъ (см. ниже теорему Чебышева) рѣшеніе множества вопросовъ объ умѣренныхъ резервахъ прочности банкирскихъ предпріятій. Возьмемъ упрощенные примѣры, умалчивая пока о пертурбаціяхъ и считая эти примѣры *самоопредѣленія по взаимному довѣрію* наиболѣе элементарными яркими схемами дѣла.

Примѣръ 1. Пусть въ составъ кооперації входятъ s отдѣльныхъ сельскихъ хозяйствъ, почти одинаковыхъ по количеству обработываемой земли, по способамъ обработки, по климату и почвѣ. Пусть нормальная средняя урожайность покрываетъ всѣ издержки и прибыль этихъ хозяйствъ; но такъ какъ урожай бываетъ иногда ниже *себѣстоимости* и создаетъ для отдѣльнаго хозяйства затруднительное, критическое положеніе, то пусть кооперативный банкъ за умѣренный страховой взносъ b обязывается выдавать потерпѣвшимъ хозяйствамъ субсидію опредѣленнаго размѣра a. Если p есть средняя вѣроятность нормальнаго урожая для разсматри-

ваемой группы s хозяйствъ, то возможно вычислить справедливый размѣръ b страховаго взноса въ банкъ съ умѣреннымъ резервомъ для подкрѣпленія прочности банка, какъ сберегательно-страховаго общественнаго предпріятія. Въ самомъ дѣлѣ, валовая годовая сумма $s \,.\, b$, накопляемая въ банкѣ изъ страховыхъ взносовъ всѣхъ хозяйствъ, должна съ приблизительною достовѣрностію покрывать въ концѣ года всѣ страховыя выдачи, валовой итогъ которыхъ будетъ $(s - n) \,.\, a$, при чемъ $s - n$ есть общее ожидаемое число такихъ хозяйствъ, урожай которыхъ окажется ниже данной нормы. Остатокъ (прибыль) S, послѣ покрытія страховыхъ выдачъ, будетъ:

$$S = na + s \,.\, (b - a) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Обозначимъ чрезъ $P\,(l)$ вѣроятность, что число n хозяйствъ съ нормальнымъ урожаемъ удовлетворитъ неравенствамъ:

$$-l < n - sp < +l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Выберемъ числовую грань l такъ, чтобы имѣло силу приблизительное уравненіе:

$$P\,(l) = 0{,}99 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Эту величину l назовемъ «корнемъ» приблизительнаго уравненія (9).

Наименьшее значеніе n, удовлетворяющее неравенствамъ (8), приблизительно будетъ $n = sp - l$; оно будетъ соотвѣтствовать *неурожайному форсмажеру*. Резервъ, заключенный въ страховомъ взносѣ b, приносимомъ въ жертву банку, будетъ по надежности достаточенъ, если даже при $n = sp - l$ прибыль S банка не будетъ отрицательною величиною,

$$(sp - l) \,.\, a + s \,.\, (b - a) \geqq 0.$$

Отсюда наименьшее значеніе b опредѣлится такъ:

$$b = a\left(1 - p + \frac{l}{s}\right) = a\left(q + \frac{l}{s}\right), \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

гдѣ l есть «корень» числового уравненія (9). Это уравненіе назовемъ *уравненіемъ надежныхъ резервовъ*, сводящихся къ величинѣ $al : s$.

Точнѣйшія рѣшенія числового уравненія (9) основаны на хорошемъ приближенномъ вычисленіи вѣроятности $P\,(l)$; о подобныхъ исчисленіяхъ трактуетъ наша книга «Теорія вѣроятностей».

Довольствуясь грубымъ приближеннымъ рѣшеніемъ, положимъ въ неравенствахъ (4) и (5) § 12:

$$t = \frac{5}{\sqrt{s}}.$$

Тогда изъ неравенствъ (4) находимъ: $P > 0{,}99$. Слѣдовательно,

$$\frac{l}{s} < t \text{ или } \frac{l}{s} < \frac{5}{\sqrt{s}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Изъ этихъ слѣдствій теоремы Пуассона и изъ равенства (10) находимъ:

$$a \,.\, q < b < a \,.\, \left(q + \frac{5}{\sqrt{s}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

Вторая часть второго неравенства, которую обозначимъ чрезъ b', представить нѣсколько форсированный, но все еще умѣренный размѣръ страховаго взноса b' съ *весьма малымъ* резервомъ $5a : \sqrt{s}$, обезпечивающимъ прочность банка:

$$b' = a \,.\, \left(q + \frac{5}{\sqrt{s}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Въ этой *малости резерва* при большомъ s заключается *благодѣтельность* подобныхъ учрежденій для мелкой кустарной промышленности.

Очевидно, отношеніе $\frac{l}{s}$ стремится къ нулю при неограниченномъ возрастаніи s, а премія b убываетъ до предѣла $a \,.\, q$. Умѣренный налогъ $b—aq$ на кліентовъ банка, слѣдовательно, тѣмъ менѣе, чѣмъ болѣе ихъ число s.

Отсюда видно, что большіе кооперативы могутъ дать больше льготы своимъ кліентамъ.

Нѣсколько форсированный налогъ $\frac{5a}{\sqrt{s}}$, содержащійся во взносѣ b', долженъ въ рядѣ лѣтъ накоплять форсированный запасъ банка, служащій отчасти на покрытіе его собственныхъ необходимыхъ издержекъ дѣлопроизводства и *на борьбу съ пертурбаціями*, а затѣмъ на образованіе *обратнаго* теченія пользы (изъ банка къ членамъ союза) подъ видомъ дивиденда и подъ видомъ такихъ прочныхъ общихъ хозяйственныхъ меліорацій, кои радикально подрываютъ общія стихійныя причины хозяйственныхъ кризисовъ, кроющіяся въ почвѣ, климатѣ, подборѣ сѣмянъ и племенныхъ породъ, подборѣ машинъ и въ ремесленномъ народномъ образованіи.

Примѣръ 2. Пусть среда s мелочныхъ предпринимателей нуждается въ кредитѣ по N рублей на предстоящую промышленную компанію. Пусть индивидуумы этой среды исправно погашаютъ ссуду при нормальномъ размѣрѣ предстоящей промышленной выручки; если же выручка нѣкоторыхъ индивидуумовъ окажется ниже низшей нормы, то они являются несостоятельными въ погашеніи ссуды. Черезъ p обозначимъ вѣроятность для отдѣльнаго индивидуума заработать выручку не ниже нормы и погасить ссуду. Банкъ, дающій ссуду средѣ въ количествѣ

$N \cdot s$ рублей, защищается отъ убытковъ, обусловленныхъ частичными несостоятельностями среды, особымъ процентомъ i, обезпечивающимъ умѣренные резервы, подкрѣпляющіе устойчивость самого банка. Каковъ долженъ быть этотъ процентъ i, соразмѣряемый съ доступностью кредита для среды и съ возможностью неблагопріятнаго поступленія погашеній по истеченіи данной краткосрочной торговой компаніи?

Вопросъ этотъ опять рѣшается на основаніи приблизительной достовѣрности и при помощи теоремы Пуассона. Пусть n есть ожидаемое число погашеній и $s - n$ соотвѣтствующее ожидаемое число непогашенныхъ кредитовъ, покрываемое за счетъ особыхъ процентныхъ удержаній, представляемыхъ, при данныхъ условіяхъ вопроса, итогомъ $\frac{s \cdot N \cdot i}{100}$. Остатокъ (прибыль) M банка по покрытіи непогашенныхъ ссудъ ожидается

$$M = \frac{s \cdot Ni}{100} - (s - n) \cdot N = n \cdot N - sN\left(1 - \frac{i}{100}\right).$$

Обозначимъ чрезъ $P(l)$ вѣроятность, что ожидаемое число n удовлетворитъ неравенствамъ: $-l \leqq n - sp \leqq +l$, гдѣ l приблизительно удовлетворяетъ уравненію: $P(l) = 0{,}99$. Наименьшее значеніе n, удовлетворяющее указаннымъ сейчасъ неравенствамъ, приблизительно будетъ: $n = sp - l$; оно будетъ соотвѣтствовать неблагопріятному для промышленной среды форсмажеру. Прибыль M банка даже и при этомъ пусть не будетъ отрицательною;

$$(sp - l) \cdot N - s \cdot N \cdot \left(1 - \frac{i}{100}\right) \geqq 0.$$

Наименьшее значеніе числа i, удовлетворяющее этому условію, будетъ:

$$i = 100\left(1 - p + \frac{l}{s}\right) = 100\left(q + \frac{l}{s}\right).$$

При помощи этого равенства и теоремы Пуассона, дающей неравенство, аналогичное неравенству (11), убѣждаемся, что

$$\frac{l}{s} < \frac{5}{\sqrt{s}}.$$

Точнѣйшее опредѣленіе величины i опять связано съ точнѣйшимъ рѣшеніемъ уравненія (9). Нѣсколько форсированый процентъ i' можно опредѣлить такъ:

$$i' = 100\left(1 - p + \frac{5}{\sqrt{s}}\right).$$

Въ предѣлѣ при $s = \infty$ величины i' и i стремятся къ *наименьшей* величинѣ $100\,(1 - p)$; чѣмъ болѣе s тѣмъ льготнѣе процентъ i, совмѣстимый съ устойчивостью банка.

§ 14. Формула Стирлинга и доказательство теоремы Бернулли по способу Лапласа. Аналитическая діаграмма явленія.

Вышеприведенныя формулы и теоремы (§§ 8 — 13) имѣютъ болѣе полное выраженіе, изслѣдующее эволюцію числа α отъ его средняго значенія α_0 и величину вѣроятности $\Delta P_{s,\alpha}$ (см. § 10). Проще всего этотъ анализъ выполняется для опытовъ теоремы Я. Бернулли. Этотъ анализъ опирается на формулу Стирлинга.

Прямое вычисленіе произведенія

$$1 . 2 . 3 \ldots n$$

при n большомъ представляетъ много затрудненій. Формула Стирлинга даетъ приближенное значеніе этого произведенія. Она показываетъ, что

$$1 . 2 . 3 \ldots n = \sqrt{2\pi} . n^{n+\frac{1}{2}} . e^{-n+\frac{\theta}{12n}}, \quad 0 < \theta < 1, \ldots . \quad (A)$$

гдѣ e есть основаніе Неперовыхъ логариѳмовъ.

Доказательство теоремы Бернулли по способу Лапласа даетъ приближенное выраженіе вѣроятности $\Delta P_{s,\alpha}$ (§ 8) и той вѣроятности P, которая играетъ роль въ § 11, въ сужденіяхъ этой теоремы.

Пусть p есть вѣроятность событія E, q — вѣроятность противоположнаго событія F, такъ что

$$p + q = 1.$$

Пусть далѣе, предполагается произвести s испытаній, причемъ s есть число весьма большое, въ предѣлѣ обращающееся въ ∞. Разумѣя подъ n ожидаемое число появленій событія E при s испытаніяхъ, обозначимъ черезъ P вѣроятность того, что число n удовлетворитъ неравенствамъ:

$$-l \leqq n - ps \leqq +l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Выше мы получили слѣдующія выраженія для наивѣроятнѣйшихъ чиселъ α и β появленій событій E и F при s испытаніяхъ (см. § 8, задача 4):

$$\alpha = E_{-p}(ps) = ps + \theta; \quad \beta = s - \alpha = qs - \theta, \ldots . \quad (2)$$

гдѣ $\theta = -ps + E_{-p}(ps)$,

$$-q \leqq \theta \leqq +p.$$

Очевидно α и β суть оба весьма большія числа одного порядка съ s всегда, кромѣ случая абсолютно твердой устойчивости одного изъ явленій E и F (см. § 10), причемъ p есть либо 1, либо 0.

Неравенства (1) могутъ быть представлены такъ:

$$-l - \theta \leqq n - \alpha \leqq +l - \theta,$$

причемъ вѣроятность P этихъ неравенствъ, на основаніи задачи 3 въ § 8, представится такъ:

$$P = \sum_{i=-\lambda}^{i=+\mu} \Delta P_{s,\,\alpha+i}, \quad \text{гдѣ } \Delta P_{s,\,\alpha+i} = \frac{s!}{(\alpha+i)\,!\,(\beta-i)!}\, p^{\alpha+i} q^{\beta-i}, \quad . \quad (3)$$

λ есть цѣлая часть числа $l + \theta$ и μ есть цѣлая часть числа $l - \theta$.

Примѣнительно къ обозначенію $E_a(x)$, установленному въ § 8, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= E_0(l+\theta) = E_0(l - ps + E_{-p}(sp)), \\ \mu &= E_0(l-\theta) = E_0(l + ps - E_{-p}(sp)) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (3')$$

Будемъ считать l большимъ, но порядка σ низшаго, чѣмъ s, такъ что

$$l = ks^{\sigma},$$

гдѣ k есть число, сохраняющее конечное значеніе при $s = \infty$, а σ правильная положительная дробь. Очевидно, λ и μ суть большія числа одного порядка σ съ l.

При указанномъ выборѣ l, числа α и β, опредѣляемыя равенствами (2), будутъ высшаго порядка, чѣмъ число l, и слѣдовательно отношенія $\frac{l}{\alpha}$ и $\frac{l}{\beta}$, а также отношенія $\frac{\lambda}{\alpha}$, $\frac{\lambda}{\beta}$, $\frac{\mu}{\alpha}$ и $\frac{\mu}{\beta}$ будутъ при значительномъ s малыми числами, стремящимися къ нулю при возрастаніи s до ∞.

Вмѣстѣ съ тѣмъ для значеній i въ предѣлахъ суммированія, указаннаго во второй части перваго равенства (3), отношенія

$$\frac{i}{\alpha}, \quad \frac{i}{\beta}$$

также должны быть весьма малыми величинами, стремящимися къ нулю при возрастаніи s до ∞.

При всѣхъ сдѣланныхъ нами ограниченіяхъ, къ произведеніямъ

$$s!, \quad (\alpha+i)!, \quad (\beta-i)!$$

можно приложить формулу (A) Стирлинга, которая даетъ:

$$\begin{aligned} s! &= \sqrt{2\pi s}\,.\,e^{-s} s^s e^{\omega}, \\ (\alpha+i)! &= \sqrt{2\pi(\alpha+i)}\,.\,e^{-\alpha-i}\,(\alpha+i)^{\alpha+i} e^{\omega_1}, \\ (\beta-i)! &= \sqrt{2\pi(\beta-i)}\,.\,e^{-\beta+i}\,(\beta-i)^{\beta-i} e^{\omega_2}, \end{aligned}$$

гдѣ ω, ω_1, ω_2 суть весьма малыя величины, стремящіяся къ нулю при возрастаніи s до ∞.

Далѣе находимъ:

$$\frac{s!}{(\alpha+i)!(\beta-i)!} = \sqrt{\frac{s}{2\pi(\alpha+i)(\beta-i)}} \left(\frac{s}{\alpha+i}\right)^{\alpha+i} \cdot \left(\frac{s}{\beta-i}\right)^{\beta-i} e^{\Omega}, \quad . \quad (3'')$$

гдѣ $\Omega = \omega - \omega_1 - \omega_2$.

Подставивъ выраженіе (3″) во второе изъ равенствъ (3) и замѣтивъ, что, какъ показываютъ равенства (2),

$$p = \frac{\alpha}{s} + \frac{\theta}{s} = \frac{\alpha}{s}\left(1 + \frac{\theta}{\alpha}\right),$$

$$q = \frac{\beta}{s} - \frac{\theta}{s} = \frac{\beta}{s}\left(1 - \frac{\theta}{\beta}\right),$$

находимъ:

$$\Delta P_{s,\,\alpha+i} = T(\alpha+i) \cdot M = \left(\frac{\alpha}{\alpha+i}\right)^{\alpha+i}\left(\frac{\beta}{\beta-i}\right)^{\beta-i}\sqrt{\frac{s}{2\pi\alpha\beta}} \cdot M, \quad . \quad (4)$$

гдѣ

$$M = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{(\alpha+i)(\beta-i)}}\left(1+\frac{\theta}{\alpha}\right)^{\alpha+i}\left(1-\frac{\theta}{\beta}\right)^{\beta-i} e^{\Omega}.$$

Опредѣлимъ предѣлъ, къ которому стремится это выраженіе вѣроятности $\Delta P_{s,\,\alpha+i}$ при возрастаніи s до ∞.

Такъ какъ

$$lg\left(\frac{\alpha}{\alpha+i}\right)^{\alpha+i} = lg\left(\frac{1}{1+\frac{i}{\alpha}}\right)^{\alpha+i} = -(\alpha+i)\,lg\left(1+\frac{i}{\alpha}\right) =$$

$$= -(\alpha+i)\left[\frac{i}{\alpha} - \frac{i^2}{2\alpha^2} + \ldots\right] = i\left(-1 - \frac{i}{2\alpha} + \frac{i^2}{6\alpha^2} - \ldots\right),$$

$$lg\left(\frac{\beta}{\beta-i}\right)^{\beta-i} = lg\left(\frac{1}{1-\frac{i}{\beta}}\right)^{\beta-i} = -(\beta-i)\,lg\left(1-\frac{i}{\beta}\right) =$$

$$= +(\beta-i)\left(\frac{i}{\beta} + \frac{i^2}{2\beta^2} + \ldots\right) = +i\left(1 - \frac{i}{2\beta} - \frac{i^2}{6\beta^2} + \ldots\right),$$

то

$$lg\left[\left(\frac{\alpha}{\alpha+i}\right)^{\alpha+i}\left(\frac{\beta}{\beta-i}\right)^{\beta-i}\right] = -\frac{i^2}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right) - i\left[-\frac{i^2}{6\alpha^2} + \frac{i^2}{6\beta^2} - \ldots\right].$$

Выберемъ l такъ, чтобы сумма

$$-i\left[-\frac{i^2}{6\alpha^2} + \frac{i^2}{6\beta^2} - \ldots\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4')$$

была при значительномъ s весьма мала. Для этого достаточно, чтобы члены низшаго порядка, т. е. $-\frac{i^3}{6\alpha^2}$ и $\frac{i^3}{6\beta^2}$, были малы даже для наибольшихъ по абсолютной величинѣ значеній i, близкихъ къ $\pm l$. Если σ есть порядокъ величины l относительно s, т. е. $l = ks^{\sigma}$, гдѣ k сохраняетъ конечное значеніе при $s = \infty$, то, замѣчая, что α и β суть весьма большія числа одного порядка съ s, имѣемъ:

$$\frac{l^3}{\alpha^2} = Ks^{3\sigma-2},$$

$$\frac{l^3}{\beta^2} = Ls^{3\sigma-2},$$

гдѣ K и L суть конечные факторы.

Выбравъ σ такъ, что $3\sigma-2<0$, т. е.

$$\sigma < \frac{2}{3}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

мы найдемъ, что количества $\frac{l^3}{\alpha^2}$, $\frac{l^3}{\beta^2}$, $\frac{i^3}{\alpha^2}$ и $\frac{i^3}{\beta^2}$ должны быть, при значительномъ s, малыми величинами, и всѣ члены разсматриваемой суммы $(4')$ при такомъ выборѣ порядка σ числа l будутъ малыми количествами, образующими быстро сходящійся рядъ. Слѣдовательно, и вся сумма будетъ мала.

Означивъ эту сумму черезъ δ, будемъ имѣть:

$$lg\left\{\left(\frac{\alpha}{\alpha+i}\right)^{\alpha+i}\left(\frac{\beta}{\beta-i}\right)^{\beta-i}\right\} = -\frac{i^2}{2}\cdot\frac{s}{\alpha\beta}+\delta.$$

Отсюда

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha+i}\right)^{\alpha+i}\left(\frac{\beta}{\beta-i}\right)^{\beta-i} = e^{-\frac{i^2}{2}\cdot\frac{s}{\alpha\beta}}\cdot e^{\delta}, \quad \ldots\ldots \quad (5')$$

причемъ $Lim\ (\delta)_{s=\infty} = 0$.

Представивъ множитель

$$\sqrt{\frac{\alpha\beta}{(\alpha+i)(\beta-i)}}$$

въ видѣ

$$\sqrt{\frac{1}{\left(1+\frac{i}{\alpha}\right)\left(1-\frac{i}{\beta}\right)}},$$

мы заключаемъ, что при возрастаніи s онъ стремится къ единицѣ. Поэтому можно положить:

$$\sqrt{\frac{\alpha\beta}{(\alpha+i)(\beta-i)}} = e^{\delta'},$$

причемъ $Lim\ (\delta')_{s=\infty} = 0$.

Найдемъ, наконецъ, предѣлъ, къ которому стремится произведеніе

$$\left(1+\frac{\theta}{\beta}\right)^{\alpha+i}\left(1-\frac{\theta}{\beta}\right)^{\beta-i}$$

при возрастаніи s до ∞.

Такъ какъ

$$lg\left(1+\frac{\theta}{\alpha}\right)^{\alpha+i} = (\alpha+i)\left[\frac{\theta}{\alpha}-\frac{\theta^2}{2\alpha^2}+\frac{\theta^3}{3\alpha^3}-\ldots\right] = \theta+h,$$

$$lg\left(1-\frac{\theta}{\beta}\right)^{\beta-i} = (\beta-i)\left[-\frac{\theta}{\beta}-\frac{\theta^2}{2\beta^2}-\frac{\theta^3}{3\beta^3}-\ldots\right] = -\theta+h',$$

гдѣ h и h' суть величины, стремящіяся, при выполненіи условія (5), къ нулю по мѣрѣ возрастанія s до ∞, то

$$lg\left[\left(1+\frac{\theta}{\alpha}\right)^{\alpha+i}\left(1-\frac{\theta}{\beta}\right)^{\beta-i}\right]=h'+h'.$$

Положивъ

$$h+h'=\delta'',$$

будемъ имѣть:

$$\left(1+\frac{\theta}{\alpha}\right)^{\alpha+i}\left(1-\frac{\theta}{\beta}\right)^{\beta-i}=e^{\delta''},$$

причемъ $Lim\ (\delta'')_{s=\infty}=0$. Вмѣстѣ съ тѣмъ находимъ: $M=e^{\delta'+\delta''}$.

Отсюда и изъ равенствъ (4) и (5′) получаемъ:

$$\Delta P_{s,\,\alpha+i}=\varphi(i)\,e^{\delta+\delta'+\delta''+\Omega}=\sqrt{\frac{s}{2\pi\alpha\beta}}\cdot e^{-\frac{i^2s}{2\alpha\beta}+\delta+\delta'+\delta''+\Omega},\quad\ldots\quad(6)$$

гдѣ при весьма большомъ s величины δ, δ', δ'' и Ω могутъ быть отброшены какъ весьма малыя, пренебрегаемыя погрѣшности. Діаграмма аналитической функціи $\varphi(i)$ называется «кривою вѣроятности», въ Лапласовской формѣ.

При помощи формулъ (3) и (6) мы получаемъ слѣдующее выраженіе:

$$P=\sum_{i=-\lambda}^{i=+\mu}e^{-\frac{i^2s}{2\alpha\beta}}\sqrt{\frac{s}{2\pi\alpha\beta}}\,e^{\varepsilon_i},$$

гдѣ $\varepsilon_i=\delta+\delta'+\delta''+\Omega$ и $Lim\ (\varepsilon_i)_{s=\infty}=0$.

Пусть ζ и ζ_1 будутъ наименьшая и наибольшая изъ величинъ ε_i. Будемъ имѣть:

$$e^{\zeta}\leqq e^{\varepsilon_i}\leqq e^{\zeta_1},$$

и слѣдовательно

$$e^{\zeta}\sum_{i=-\lambda}^{i=+\mu}e^{-\frac{i^2s}{2\alpha\beta}}\sqrt{\frac{s}{2\pi\alpha\beta}}<P<e^{\zeta_1}\sum_{i=-\lambda}^{i=+\mu}e^{-\frac{i^2s}{2\alpha\beta}}\sqrt{\frac{s}{2\pi\alpha\beta}},$$

причемъ $Lim\ (\zeta)_{s=\infty}=Lim\ (\zeta_1)_{s=\infty}=0$.

Поэтому

$$Lim\,(P)_{s=\infty}=Lim\,(Q)_{s=\infty},\quad\ldots\ldots\quad(6')$$

гдѣ

$$Q=\sum_{i=-\lambda}^{i=+\mu}e^{-\frac{i^2s}{2\alpha\beta}}\sqrt{\frac{s}{2\pi\alpha\beta}}\quad\ldots\ldots\quad(7)$$

Положивъ

$$i\sqrt{\frac{s}{2\alpha\beta}}=x_i\quad\ldots\ldots\quad(7')$$

и замѣтивъ, что при этомъ обозначеніи

$$\sqrt{\frac{s}{2\alpha\beta}} = x_{i+1} - x_i = \Delta x_i ,$$

получимъ для Q слѣдующее выраженіе:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=-\lambda}^{i=+\mu} e^{-x_i^2} \Delta x_i .$$

Такъ какъ эта сумма въ предѣлѣ при $s = \infty$ совпадаетъ съ интеграломъ

$$\frac{1}{\pi} \int_{x_{-\lambda}}^{x_\mu} e^{-x^2} dx$$

(ибо Δx_i при возрастаніи s стремится къ нулю), то будемъ имѣть *):

$$Lim\,(Q)_{s=\infty} = Lim \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x_{-\lambda}}^{x_\mu} e^{-x^2} dx \right\}_{s=\infty} .$$

Это равенство и равенство (6′) показываютъ, что

$$Lim\,(P)_{s=\infty} = Lim \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x_{-\lambda}}^{x_\mu} e^{-x^2} dx \right\}_{s=\infty}$$

Изъ равенствъ (7′), (2) и (3′) и изъ обозначенія x_i слѣдуетъ:

$$Lim\, x_\mu = - Lim\,(x_{-\lambda}) = \frac{l}{\sqrt{2pqs}} .$$

Положивъ для краткости

$$\frac{l}{\sqrt{2pqs}} = g, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

будемъ имѣть:

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-g}^{+g} e^{-x^2} dx + h = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^g e^{-x^2} dx + h, \quad . \quad . \quad . \quad (9$$

гдѣ h есть отбрасываемая въ приближенномъ счетѣ малая величина, стремящаяся къ нулю, при возрастаніи s до ∞. По величинѣ интеграла

$$\Theta(g) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^g e^{-x^2} dx$$

---

*) Формула Эйлера, какъ извѣстно, можетъ служить для перехода отъ суммы (7) къ интегралу, опредѣляя погрѣшность этого перехода или замѣны одного другимъ при весьма большомъ, но конечномъ числѣ s.

приближенно можно судить о величинѣ P и рѣшать уравненія типа (9) § 13. Существуетъ таблица функціи $\Theta(x)$.

Величина интеграла $\Theta(g)$ при возрастаніи g весьма быстро стремится къ единицѣ, предѣльному значенію этого интеграла для $g = \infty$. Приведемъ значенія $\Theta(g)$ для нѣсколькихъ частныхъ значеній аргумента g.

$$\Theta(0) = 0;\ \Theta(1) = 0{,}8385;\ \Theta(2) = 0{,}9953;\ \Theta(3) = 0{,}99997;\ \Theta(\infty) = 1.$$

Взявъ графическіе модули L и L_1, принявъ $L \,.\, N$ за ординату y и $L_1 g$ за абсциссу x и построивъ діаграмму уравненія:

$$N = 1000\,\Theta(g),$$

мы получимъ изъ этой діаграммы наглядное представленіе о той быстротѣ, съ которой ордината y стремится къ $1000\,L$, а $\Theta(g)$ стремится къ единицѣ при возрастаніи g. Прямая

$$y = 1000\,L,$$

параллельная оси x, служитъ асимптотой этой кривой.

Разсмотримъ, какія значенія можетъ имѣть величина g, если ее опредѣлять при помощи равенства (8) съ соблюденіемъ ранѣе указанныхъ условій относительно l, т. е. полагая

$$l = ks^{\sigma}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9')$$

гдѣ k есть конечный факторъ, $\sigma < \frac{2}{3}$, а s есть число весьма большое. Будемъ имѣть:

$$g = \frac{k}{\sqrt{2pq}}\, s^{\sigma - \frac{1}{2}}.$$

Для σ, заключеннаго между предѣлами $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}$, g представляетъ весьма большую величину.

Такимъ образомъ, не смотря на тѣ ограниченія, которыя мы наложили на l, мы можемъ l выбрать такъ, чтобы g было весьма большой величиной и, слѣдовательно, чтобы выведенное для P выраженіе было весьма близко къ единицѣ. Эта величина P есть вѣроятность того, что ожидаемое число n появленій событія E удовлетворитъ неравенствамъ: (1), а слѣдовательно и неравенствамъ:

$$-\frac{l}{s} \leqq \frac{n}{s} - p \leqq +\frac{l}{s} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Иначе говоря, P есть вѣроятность того, что абсолютная величина разности $\frac{n}{s} - p$ не превзойдетъ числа $\frac{l}{s}$. Это послѣднее число при $^1/_2 < \sigma < {}^2/_3$ весьма мало и при возрастаніи s стремится къ нулю,

причемъ вѣроятность P весьма близка къ 1 и стремится къ 1 или достовѣрности.

Результатъ этотъ и составляетъ теорему Якова Бернулли.

Изложенный выводъ теоремы Бернулли имѣетъ то преимущество, что онъ даетъ приближенныя выраженія вѣроятности $\Delta P_{s,\ \alpha+i}$ и вѣроятности P того, что n удовлетворитъ неравенствамъ (10), которыя при помощи равенства (8) приводятся къ виду:

$$-g\sqrt{\frac{2pq}{s}} \leqq \frac{n}{s} - p \leqq +g\sqrt{\frac{2pq}{s}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Приближенное выраженіе вѣроятности P будетъ:

$$P = \Theta(g) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^g e^{-x^2}\, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Ш. *Оцѣнка эволюціи итога явленій съ помощію аналитической діаграммы.* По § 8 величина $\Delta P_{s,\ \alpha+i}$, опредѣляемая вторымъ равенствомъ (3), есть вѣроятность, что при s испытаніяхъ явленіе E повторится $\alpha+i$ разъ. Вышеизложенное доказательство важно по тому, что оно приводитъ къ аналитическимъ приближеннымъ выраженіямъ $T(\alpha+i)$ и $\varphi(i)$ вѣроятности $\Delta P_{s,\ \alpha+i}$ съ помощію формулъ (4) и (6).

Безъ приближеній этого рода, вычисленіе вѣроятности $\Delta P_{s,\ \alpha+i}$ съ помощію абсолютно точнаго выраженія по формулѣ (23), при весьма большихъ значеніяхъ s, $\alpha+i$ и $s-\alpha-i$, не возможно по неприступности этого выраженія для практическаго вычисленія. Приближенная же вѣроятность $T(\alpha+i)$ или $\varphi(i)$ выводитъ изъ этого затрудненія.

Подобная приближенная оцѣнка вѣроятности $\Delta P_{s,\ \alpha+i}$, какъ функціи гадательнаго итога $\alpha+i$ явленій E. взвѣшиваетъ возможныя колебанія итога явленій и приносимыхъ ими предметовъ владѣнія и интереса. Эти колебанія назовемъ эволюціей итога явленій.

Оцѣнка эволюціи итога явленій имѣетъ значеніе потому, что законъ большихъ чиселъ въ формѣ теоремы Я. Бернулли имѣетъ извѣстную ничтожную *неустойчивость*, и притомъ теорема эта открываетъ лишь приблизительныя достовѣрности. Порокъ или изъянъ этихъ исчисленій необходимо запомнить вообще, ибо теорема Я. Бернулли, какъ увидимъ, имѣетъ безчисленныя примѣненія, и ничтожныя ея пороки суммируются въ опасные валовые итоги погрѣшности и неустойчивости.

Эволюцію, какъ измѣнчивость и неустойчивость, нужно изучать: 1) по ея матеріальной скалѣ $n=\alpha+i$ и 2) въ ея отношеніи къ устойчивости, какъ приблизительной достовѣрности, что колебаніе числа n не уйдетъ изъ данныхъ тѣсныхъ границъ, опредѣляемыхъ неравенствами типа (10).

Опредѣляемый неравенствами (10) такой кусокъ скалы $n = \alpha + i$, на которомъ формула $\varphi(i)$ годна въ качествѣ приближенной къ вѣроятности $\Delta P_{s,\ \alpha+i}$, отсѣкается равенствомъ (9′) и неравенствомъ (5); внѣ этого куска формула $\varphi(i)$ бываетъ подозрительною и негодною. Этотъ кусокъ тѣснѣе того, въ которомъ бываетъ годною формула $T(\alpha + i)$ и который отсѣкается равенствомъ (9′) и неравенствомъ: $\sigma < 1$.

Укажемъ еще особенный случай непригодности формулъ $\varphi(i)$ и $T(\alpha + i)$. Этотъ изъянъ бываетъ тогда, когда вѣроятность p явленія E есть либо 1, либо 0, т. е. когда число $\alpha + i$ получаетъ абсолютно непоколебимое значеніе, равное либо s, либо 0; въ этихъ случаяхъ самая эволюція числа $\alpha + i$ не существуетъ, и функціи $T(\alpha + i)$ и $\varphi(i)$ перемѣннаго i теряютъ смыслъ. Формулы $\varphi(i)$ и $T(\alpha + i)$ неопредѣленны и неточны также вблизи этого особеннаго случая, когда вѣроятность p весьма близка либо къ 1, либо къ 0, а число s хотя и весьма большое, но не безконечное.

ГЛАВА IV.

Математическое ожиданіе и его приложеніе къ вопросамъ о дѣятельности, приносящей плоды, и объ оборотахъ выгоды въ равныхъ играхъ. Индукція. Сличеніе ожиданій и дѣйствительности. Оцѣнка цѣнностей въ обмѣнѣ и равномъ рискѣ.

§ 15. Опредѣленіе и статистическія свойства математическаго ожиданія. Индуктивныя уравненія и методъ исторіи. Ассоціація идей и фактовъ. Двоякій реализмъ.

Вообразимъ операцію или опытъ O, которому свойственны несовмѣстимыя и всевозможныя дѣйствія $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Вѣроятности этихъ явленій обозначимъ соотвѣтственно черезъ $p_1, p_2, \ldots, p_n$. При данномъ испытаніи одно изъ указанныхъ явленій непремѣнно осуществится, такъ что

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

Пусть x есть перемѣнная въ апріорномъ сужденіи вещественная величина, способная принимать въ концѣ опыта только слѣдующія значенія:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

причемъ пусть x принимаетъ то или другое изъ этихъ значеній, смотря по тому, какое изъ дѣйствій $E_1, E_2, \ldots, E_n$ осуществляется при ис-

пытаніи,—именно, если при опытѣ состоится событіе E_k, то пусть x принимаетъ значеніе x_k. При этихъ условіяхъ вѣроятность того, что x получитъ значеніе x_k, очевидно, равняется вѣроятности p_k событія E_k. Поэтому p_k называется, иначе, вѣроятностью значенія x_k перемѣннаго x, приносимаго операціей O.

Выраженіе

$$a = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n$$

называется *математическимъ ожиданіемъ перемѣннаго* x. Согласно этому опредѣленію, *математическое ожиданіе перемѣннаго* x *есть сумма произведеній всѣхъ возможныхъ частныхъ значеній перемѣннаго* x *на вѣроятности этихъ значеній.*

Это опредѣленіе распространяется и на тотъ случай, когда перемѣнное измѣняется непрерывно, причемъ сумма, выражающая математическое ожиданіе этого перемѣннаго, представится опредѣленнымъ интеграломъ.

Выраженіе

$$b = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \ldots + p_n x_n^2$$

называется математическимъ ожиданіемъ квадрата перемѣннаго x, т. е. *математическое ожиданіе квадрата перемѣннаго* x *есть сумма произведеній квадратовъ всѣхъ возможныхъ частныхъ значеній* x *на вѣроятности этихъ значеній.*

Подобнымъ образомъ опредѣляются математическія ожиданія всѣхъ степеней перемѣннаго x и всѣхъ его функцій.

Математическое ожиданіе a перемѣннаго x будемъ называть также *вѣроятностнымъ* (кредитнымъ) *среднимъ значеніемъ* его, отличая этотъ терминъ отъ «ариѳметическаго средняго» фактическихъ значеній того же перемѣннаго, наблюдаемыхъ *статистикой* при многократномъ повтореніи обсуждаемаго опыта O.

Математическое ожиданіе a перемѣннаго x занимаетъ среднее положеніе въ промежуткѣ между *наименьшимъ* x' и *наибольшимъ* x'' изъ значеній $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$x' < a < x''.$$

Разсмотримъ здѣсь одно важное свойство математическихъ ожиданій, которое находится въ связи съ простымъ закономъ большихъ чиселъ и которое приведетъ насъ къ другому опредѣленію математическаго ожиданія, а именно по *статистическому способу предѣловъ*.

Пусть вышеуказанный опытъ O, теченіемъ котораго опредѣляется то или другое значеніе перемѣннаго x, предполагается воспроизвести s разъ. Каждый разъ опытъ приведетъ въ концѣ къ опредѣленному значенію перемѣннаго x. Сумму всѣхъ этихъ *фактическихъ* значеній x назовемъ *ста-*

тистической суммой и обозначимъ черезъ Σx, причемъ среднее ариѳметическое изъ этихъ значеній будетъ $\frac{\Sigma x}{s}$.

Представимъ статистическую сумму Σx въ другой формѣ.

Можно ожидать, что при s предполагаемыхъ испытаніяхъ O перемѣнное x нѣсколько разъ (m_k разъ) приметъ значеніе x_k, иначе говоря, m_k разъ осуществится событіе E_k. Будемъ имѣть:

$$\Sigma x = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n,$$

откуда

$$\frac{\Sigma x}{s} = \frac{m_1}{s} x_1 + \frac{m_2}{s} x_2 + \ldots + \frac{m_n}{s} x_n.$$

Отношенія

$$\frac{m_1}{s}, \frac{m_2}{s}, \ldots, \frac{m_n}{s}$$

называются въ статистикѣ *частостями* явленія соотвѣтственныхъ значеній $x_1, x_2, \ldots, x_n$ перемѣннаго x при s повтореніяхъ опыта.

Предполагая теперь, что число s стремится къ ∞, на основаніи теоремы Я. Бернулли, будемъ имѣть съ нравственною достовѣрностью:

$$Lim \frac{m_1}{s} = p_1, \; Lim \frac{m_2}{s} = p_2, \ldots, \; Lim \frac{m_n}{s} = p_n.$$

Иначе говоря, при *независимости* испытаній вышеупомянутыя частости въ *предѣлѣ* сливаются съ вѣроятностями соотвѣтственныхъ явленій.

Слѣдовательно

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n, \quad Lim \frac{\Sigma x}{s},$$

т. е. *математическое ожиданіе перемѣнной x есть предѣлъ средняго ариѳметическаго изъ частныхъ значеній этого перемѣннаго, соотвѣтствующихъ s независимымъ повтореніямъ даннаго опыта, при возрастаніи s до ∞*. Это правило распространяется на функціи отъ x.

Понятно, что на практикѣ число s наблюденій, получаемое «индуктивнымъ собираніемъ фактовъ», можетъ быть весьма большимъ, но не безконечнымъ. При этомъ условіи найденныя частости и ариѳметическія середины перемѣнныхъ лишь *приблизительно* представятъ вѣроятности и математическія ожиданія, являющіяся независимо отъ фактовъ математическими конценціями родовыхъ понятій и общихъ именъ.

Приблизительныя уравненія

$$p_k = \frac{m_k}{s} \quad \text{и} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n = \frac{\Sigma x}{s} \; . \; . \; . \; (A)$$

назовемъ *индуктивными*.

Лѣвыя части этихъ уравненій получаются *дедуктивнымъ* апріорнымъ разсужденіемъ, исходя изъ данныхъ *несовмѣстимыхъ* видовъ или формъ дѣятельности E въ операціи O; правыя части уравненій исчисляются индуктивно послѣ s-кратнаго повторенія операціи O. Если при этомъ фактическую частость $\frac{m_k}{s}$ событія E_k для краткости обозначимъ чрезъ Δv_{x_k}, то будемъ имѣть слѣдующую сличительную таблицу, замѣщающую вышеуказанную индуктивную систему (A) уравненій.

Сличительная таблица.

№ строки.	Несовм. виды дѣйствія E.	Плодъ x.	Теорет.	Опытн.
			p.	$\frac{m}{s} = \Delta v_x$.
1	E_1	x_1	p_1	Δv_{x_1}
2	E_2	x_2	p_2	Δv_{x_2}
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
n	E_n	x_n	p_n	Δv_{x_n}

Индуктивная система уравненій (A) связываетъ прошедшее съ будущимъ, ибо лѣвыя части ихъ, т. е. вѣроятности и ожиданіе, *смотрятъ въ будущее*, а правыя части выведены изъ учета состоявшихся фактовъ E_k, т. е. *смотрятъ въ прошедшее*. Въ уравненіяхъ (A) содержится элементъ философіи исторіи.

Частости и, съ другой стороны, вѣроятности въ ихъ сближеніи съ помощію теоремы Я. Бернулли сличаютъ теорію съ опытною дѣйствительностію и *образуютъ ассоціацію двухъ міровъ*: міра фактовъ и міра мысли съ ея отвлеченными идеями, повторными вопросами и вѣчными проблемами возрождающейся жизни. Собиранію же фактовъ соотвѣтствуетъ міръ ощущеній факта (третій міръ, эмпирическій), образующій отчетливыя непосредственныя представленія о фактахъ, регистрируемыя въ памяти и въ журналѣ.

Математическое ожиданіе какой либо возможной *реальности* есть *концепція* или *умозрительное значеніе* реальности. Реализмъ утилитарный есть матеріализмъ; реализмъ творческій во имя идеи есть спиритуализмъ, насыщающій умъ и сердце (органъ вѣры) культурными понятіями, ибо «не однимъ только хлѣбомъ живъ человѣкъ».

Реализмъ, слѣдовательно, бываетъ по качеству въ однихъ случаяхъ матеріалистическимъ, въ другихъ спиритуалистическимъ.

Графическій сличительный методъ, открывающій законы природы и общественности.

Индуктивная система уравненій (*А*) есть основной *эвристическій* элементъ познанія естественныхъ и общественныхъ закономѣрностей, критически согласующаго теоретическія понятія съ конкретною дѣйствительностью. Разъединяя правыя и лѣвыя части индуктивныхъ уравненій (*А*), имѣющія различное происхожденіе (теоретическое и опытное), вообразимъ двѣ декартовскія діаграммы:

$$1)\ y = p_k \qquad \text{и} \quad 2)\ y = \Delta v_{x_k} = \frac{m_k}{s} \cdot \quad . \ . \ . \ . \ . \ (Б)$$

Первый изъ этихъ графиковъ чисто теоретическій; второй чисто опытный, вычерпанный изъ непосредственнаго планомѣрнаго разсмотрѣнія фактовъ. Это — два какъ бы графическихъ зеркала, отражающихъ два міра; оба они имѣютъ подъ собою общую истинную опору, оформленную какъ приблизительная достовѣрность въ теоремѣ Я. Бернулли; ихъ однакоже нужно согласовать вторично и болѣе точно въ виду извѣстныхъ изъяновъ теоремъ Я. Бернулли и Пуассона.

Въ этомъ эвристическомъ методѣ играетъ роль сличеніе графиковъ, т. е. наложеніе одного графика на другой, причемъ стараются замѣтить, имѣетъ ли мѣсто «сходимость» (т. е. приблизительное совпаденіе) или же, наоборотъ, «расходимость» (т. е. значительное расхожденіе) частей той и другой фигуры.

Въ пунктахъ сходимости діаграммъ искомая объективная закономѣрность считается существующей въ самомъ бытьи, и соотвѣтствующіе графики *достойны санкціи* ореоломъ науки.

Въ пунктахъ расходимости діаграммъ закономѣрность считается ненайденной; тутъ либо первый графикъ, либо второй, либо оба вмѣстѣ признаются *сомнительными* по недостатку наблюденій.

Какъ сходимость, такъ и расходимость можетъ быть результатомъ какой-либо субъективной поддѣлки (лжи); но тутъ необходима предварительная особая критика и выводовъ, и цыфровыхъ фактическихъ матеріаловъ.

Изложенный эвристическій методъ приложимъ къ познанію какъ природы, такъ и общественной психологіи, спрашивая планомѣрно отдѣльныя индивидуальныя души, способныя къ вѣроподобному показанію.

Очевидно, индуктивныя уравненія (*А*) и сличеніе между собою двухъ графиковъ (*Б*) способны: 1) укрѣплять въ знаніи хорошій реализмъ и хорошую культурно-общественную идеологію, 2) гнать прочь гнилой товаръ реализма и идеологіи.

Выпускъ дѣйствующей наличности, окупаемый за счетъ будущихъ плодовъ. Обороты исторіи, машинообразный и немашинообразный. Необходимость гармоніи, распорядка.

Въ эвристическомъ методѣ играетъ роль, кромѣ графика вѣроятности, историческая скала и преемственность. При послѣдовательномъ исчисленіи выпуска дѣятельностей типа E, домогающихся выхода плодовъ типа x, долгосрочные процессы исторіи анализомъ разсѣкаются на кратчайшіе элементарные интервалы $(\tau\,,\ \tau + \Delta\tau)$ времени τ, считая отъ начальнаго момента τ до момента $\tau + \Delta\tau$ выхода плодовъ ближайшаго срока. Плоды реализуются въ концахъ послѣдовательнаго ряда интерваловъ:

$$(\tau, \tau + \Delta\tau),\ (\tau + \Delta\tau, \tau + 2\Delta\tau),\ (\tau + 2\Delta\tau, \tau + 3\Delta\tau), \ldots \quad . \ . \ (1)$$

Историческая развертка событій, ихъ расклубленіе по этой скалѣ, есть вопросъ исторической динамики и кинематики, разрѣшаемый опытами съ помощію двухъ готовыхъ схемъ: по схемѣ раціональной механики (при чемъ и общество трактуется какъ механическая система одушевленныхъ точекъ) и по схемѣ изъяновъ механики, исправляемыхъ разумомъ и искусствомъ самаго отвѣтственнаго механика (тутъ властвуютъ уже законы духа и его интеллекта).

Надлежитъ замѣтить, что источникъ дѣятельности типа E обычно истощался бы, если бы ряды ея выпусковъ не возстановлялись за счетъ плодовъ. Это возстановленіе устанавливаетъ понятіе объ историческомъ *оборотѣ* или *выкупѣ* выпусковъ.

Дѣятельность типа E раздѣлимъ въ умѣ на двѣ части: одна часть E_0 представляетъ *достовѣрный* выпускъ наличной силы, другая же часть ΔE_0 представляетъ альтернативный выпускъ наличной силы, соотвѣтствующій частью игрѣ природы, частью хитрости людей и раскрывающійся окончательно уже въ процессѣ, въ концѣ соотвѣтствующаго изъ интерваловъ строки (1), когда ожидаемый загаданный плодъ x является (матеріализуется) въ наличности. Слѣдовательно, будемъ имѣть символическое тождество:

$$E = E_0 + \Delta E_0 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Альтернативная сила ΔE_0 имѣетъ столько же возможныхъ несовмѣстимыхъ видовъ, сколько соотвѣтствующихъ видовъ имѣетъ дѣятельность E, каковые виды $E_1, \ldots, E_n$ вмѣстѣ съ вѣроятностями ихъ внесены въ вышеприведенную сличительную таблицу. Эти виды силы ΔE_0 обозначимъ соотвѣтственно символами: $\Delta E'_0$, $\Delta E''_0$, $\ldots$, $\Delta E_0^{(n)}$, полагая тождественно:

$$E_k = E_0 + \Delta E_0^{(k)},\ k = 1,\ 2, \ldots,\ n, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

при чемъ p_k есть вѣроятность вида $\Delta E_0^{(k)}$ силы ΔE_0.

Міръ наблюдаемыхъ операцій O_1, O_2, ..., O_s, вырабатывающихъ плоды типа x повторяемою дѣятельностью типа E, выпускаетъ итожную дѣятельность ΣE; каждая изъ операцій O приноситъ въ концѣ срока свой плодъ x, а въ итогѣ получится количество обозначаемое формулой Σx. Между ΣE и Σx должно быть историческое соотвѣтствіе, распорядокъ или гармонія. Итогъ ΣE дѣятельностей типа E посредствомъ символическихъ уравненій вида (2) представится такъ:

$$\Sigma E = \Sigma E_0 + \Sigma \Delta E_0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Члену ΣE_0 второй части равенства (4) соотвѣтствуетъ достовѣрность выпуска наличной силы ΣE_0. Если притомъ и возстановленіе выпущенной силы ΣE_0 за счетъ части Σa плодовъ Σx достовѣрно, то этому члену будетъ соотвѣтствовать *машинообразный* оборотъ исторіи, а въ логикѣ ему будетъ соотвѣтствовать логическая машина Джевонса (см. ниже) или логика «трехъ законовъ» Аристотеля, воспроизведенныхъ въ философіяхъ Канта, Милля и другихъ. (Эти законы суть: законъ противорѣчія, законъ исключеннаго третьяго и законъ тождества.

Закону машинообразнаго оборота не подчиняется членъ $\Sigma \Delta E_0$ второй части символическаго равенства (4). Этому члену соотвѣтствуетъ возможная затрата силы $\Sigma \Delta E_0$, колеблющаяся не только въ апріорномъ сужденіи, но и въ самомъ дѣлѣ. Покрытіе этой затраты требуетъ серьезнаго обсужденія. Въ противномъ случаѣ источникъ или сокровищница дѣйствующихъ силъ изсякнетъ, историческая гармонія жизни нарушится и машина жизни остановится, замретъ. Покроетъ ли часть $\Sigma(x—a)$ плодовъ Σx не искупленную силу $\Sigma \Delta E_0$,—вотъ вопросъ живознанія и историческаго соотвѣтствія или гармоніи (Лейбницъ). Онъ рѣшается графиками вѣроятности и послѣдовательною работою исторіи, враждебною Хаосу и Ночи.

Замѣтимъ еще слѣдующее осложненіе. Въ операціи O обычно мыслится не только хозяйствующій субъектъ, но и соучастники. Субъектъ, какъ сторона, долженъ опредѣлять свои права и обязанности относительно другихъ соучаствующихъ сторонъ. Соотвѣтственно этому раздѣленію и обособленію функцій, выпускаемая наличная сила дѣятельности E, искупаемая плодами, представляется такъ:

$$E = E^i + E^e, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

гдѣ E^i есть доля силъ дѣятельности хозяйствующаго **Я**, а E^e есть доля силъ соучастниковъ, т. е. не—**Я**. Въ вопросахъ правомѣрія и управленія символическое уравненіе (5) должно играть роль для того, чтобы взыскивать обезпеченія поправки, направляемыя противъ накопленія угрожающей погрѣшности однихъ субъектовъ противъ другихъ, однихъ экономическихъ классовъ противъ другихъ.

Типы индукціи.

Индуктивная работа, обслуживающая добываніе графическихъ закономѣрностей по всѣмъ этимъ вопросамъ и жизнедѣятельнымъ функціямъ, огромная по числу задачъ и по спросу на цыфровой статистическій матеріалъ; назовемъ ее *великой*. Эта работа важна даже для простѣйшихъ, но безчисленныхъ случаевъ, когда въ сличительной таблицѣ бываетъ лишь двѣ строки, т. е. $n = 2$; соотвѣтствующая операція разсматривается въ теоремѣ Я. Бернулли (безъ указанія на плодъ x дѣятельности), при чемъ дѣятельности E_1 и E_2 совпадаютъ съ противоположными событіями E и F, или не—E. Подъ эту великую работу, для ея облегченія, нужно подвести научно-философскій планъ; онъ уже существуетъ.

Малою индукціей назовемъ такую, въ которой искомый неизвѣстный графикъ вполнѣ открывается уму ограниченнымъ числомъ наблюденій. Такъ, изъ трехъ только наблюденій уже можно вывести достаточно точный графикъ движенія вновь замѣченной кометы.

Эвристическій методъ игралъ и вѣчно будетъ играть огромную роль въ областяхъ, изслѣдуемыхъ основными номографическими методами теоріи вѣроятностей. Законъ большихъ чиселъ, соединяющій графиками множество обособленныхъ «я» въ собирательное «мы», и симолическая передача субстанціональныхъ понятій языкомъ, чертежомъ и живыми личными символами, отправляющими дѣло общественнаго значенія, представляютъ одно изъ необходимыхъ основаній общественности. При этомъ эвристическій методъ исчисленія вѣроятностей, спрашивающій не только природу, но и души людскія, есть по истинѣ crux physicorum et metaphysicorum, соединяющій видимое и невидимое, постижимое и то непостижимое *), что существуетъ въ неприступности чужого я, способнаго однакоже къ соучастію, къ соболѣзнованію, къ исповѣди и къ объединенію въ семью и другіе коренные союзы.

Если накопленіемъ графиковъ предшествующихъ опытовъ и свойствами природы вещей почва открытія хорошо подготовлена, то рѣшающая индукція иногда можетъ быть быстрою, почти *мгновенною*, т. е. мысль, открывающая законъ, сразу озаряется наводящимъ фактомъ («эврика» Архимеда, «яблоко» Ньютона и пр.).

*) Легкій примѣръ проникновенія увѣрованіемъ въ неприступную гипотетическую причину при возможности испытаній приведенъ ниже въ § 26. В. С. Соловьевъ, а за нимъ Н Лосскій въ «Основаніи интуитивизма» и Н. Бердяевъ въ «Философіи свободы» ставятъ вопросъ о религіозной «эврикѣ» (таково озареніе св. ап. Павла). Но, конечно, философія не въ силахъ выработать соотвѣтствующей теоріи, ибо такое озареніе зависитъ не отъ мудрости человѣка, а отъ воли Божіей при наличности вѣры человѣка въ Верховное Существо.

Учрежденія средоточій.

Во всѣхъ случаяхъ органическихъ гарантій нужно опредѣлять ихъ количество съ достаточнымъ *сосредоточеннымъ запасомъ*. Эти средоточія назовемъ *учрежденіями;* они запасаются *подвижными* силами дѣйствія, или *кассами гарантій*, придавая слову касса не узкій финансовый смыслъ, а болѣе широкій, матеріальный и личный, считая, напримѣръ, какъ бы за кассу *живую корпорацію*, земскую какъ бы церковь, одухотворенную одинаковыми идеями. Финансовыя кассы тутъ будемъ брать лишь въ качествѣ легчайшаго пояснительнаго аллегорическаго и аналогическаго примѣра.

Теорію оборотовъ въ кассахъ гарантій будемъ разсматривать по правиламъ математическаго ожиданія, но предполагая, что покровительственная кривизна, соотвѣтствующая нравственному ожиданію (§ 22), вводится потомъ въ качествѣ важнѣйшей поправки, когда слѣдуетъ.

Верховнымъ покрывающимъ страховымъ Обществомъ будемъ считать государство съ его достояніемъ, гарантированномъ жизнью и имуществомъ подданныхъ.

Матеріальная наличность закладовъ и постоянныхъ источниковъ возрожденія и дохода есть существенное условіе связи міра мысли и міра матеріи.

§ 16. Конкретныя и идеальныя числа. Таксологическая проблема статистики и политической экономіи. О цѣнѣ суммъ и выгодъ, подверженныхъ случайностямъ. Аксіома.

I. Куча разнородныхъ предметовъ ε_1, ε_2, ..., ε_m можетъ быть приведена въ извѣстность описательнымъ методомъ. Она есть своего рода итогъ $x = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_m$, но не количественный, а описательный или символическій.

Если же элементы разнородной кучи по ихъ смыслу являются цѣлесообразными разнородными цѣнностями, на кои имѣются потребители, то эту кучу можно разсматривать какъ количественный экономическій итогъ, но не простой, а составной (комплексный), разнородныя слагаемыя котораго имѣютъ общее *символическое* мѣрило, сообразующееся съ вкусомъ потребителей-цѣнителей.

Символическое мѣрило (цѣнные мѣновые знаки) является вспомогательнымъ средствомъ для выкупа благъ; магическій смыслъ этого мѣрила лежитъ не только въ немъ самомъ, но и *внѣ* его, въ той *цѣли*, для которой пригодно это вспомогательное средство. Оно помогаетъ размѣну благами по формулѣ: «избытки охотно вымѣниваются на то, въ чемъ ощущается недостатокъ».

Усложненный способъ обмѣна—посредственный обмѣнъ—необходимъ

при слѣдующихъ обстоятельствахъ. Если A желаетъ обмѣнять свое благо на благо B, а послѣдній, не нуждаясь въ благѣ A, отказывается его принять въ обмѣнъ за свое, то A можетъ отдать свое благо третьему лицу C, нуждающемуся въ немъ и желающему обмѣнять его на свое (третье) благо, которое нужно лицу B и которое A возьметъ не для собственнаго потребленія, но въ виду того, что B согласится принять его въ обмѣнъ за то, которое A желаетъ пріобрѣсти отъ B. При такомъ обмѣнѣ цѣнностей, блага A и B *измѣряются* цѣнностью блага C.

Если благо C служитъ общепринятымъ посредствующимъ мѣриломъ цѣнности или средствомъ обмѣна, то его называютъ *деньгами въ широкомъ смыслѣ*. Оно (мѣрило) является *деньгами въ узкомъ смыслѣ*, если признается государствомъ какъ платежное средство при взиманіи односторонникъ платежей (налоговъ, пошлинъ, штрафовъ) и средствомъ сбереженія цѣнностей въ государственныхъ кредитныхъ учрежденіяхъ. Мѣновая цѣнность всѣхъ прочихъ благъ количественно можетъ выражаться въ этомъ благѣ въ зависимости отъ цѣны ω единицы блага на деньги, каковая цѣна или стоимость покрываетъ издержки производства блага и даетъ производству *устойчивость*, а потребителю *дешевизну* (пока не вмѣшалась спекуляція).

Итогъ $x = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_m$, составленный изъ элементовъ вышеуказанной кучи, можетъ представлять либо простое (однородное) вещественное количество, либо составное (разнородное) вещественное количество, полученное въ результатѣ измѣренія всеобщимъ мѣриломъ экономической цѣнности.

Въ послѣднемъ случаѣ слагаемыя $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ будутъ представлять финансовыя стоимости разнородныхъ предметовъ, напримѣръ, стоимость сырыхъ продуктовъ земли, стоимость машинъ, обработанныхъ предметовъ потребленія и пр. Пусть эти разнородные предметы, соотвѣтствующіе анализируемымъ слагаемымъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$, измѣряются еще каждая *собственною* единицею и, по измѣреніи, представляются соотвѣтственно числами $y_1, y_2, \ldots, y_m$; финансовыя стоимости соотвѣтственныхъ единицъ пусть будутъ: $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$; тогда будемъ имѣть экономическое составное количество:

$$x = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_m = y_1\omega_1 + y_2\omega_2 + \ldots + y_m\omega_m. \quad . \quad . \quad (1)$$

Итоги этого рода, опредѣляемые въ зависимости отъ спроса, предложенія, субъективнаго вкуса, нужды и пр., подвержены колебаніямъ по причинѣ неустойчивости цѣнъ ω, обусловленной не только торговыми спекуляціями, а также то частостью, то, наоборотъ, рѣдкостью и недоступностью искомаго блага.

Задача политической экономіи и статистики—по возможности установить объективныя значенія цѣнъ $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ и цѣны $i\,^0/_0$ денежнаго

капитала (см. § 13), въ согласіи съ истинными требованіями природы земли, труда, капитала, продовольствія и здоровой жизнеспособности.

Ученіе о конкретныхъ и идеальныхъ составныхъ числахъ, излагаемое въ математикѣ *), формулой (1) раздвигается въ сторону таксологической проблемы политической экономіи, приводя исчисленіе движимыхъ капиталовъ и продовольственныхъ рентъ къ общему многомѣрному перемѣнному количеству x и къ многомѣрному графическому пространству.

Въ таксологической проблемѣ легко дѣлается ошибка подъ названіемъ circulus vitiosus (ложный кругъ). Такъ, въ «изолированномъ государствѣ» фонъ-Тюнена поднятіе цѣнъ въ интересахъ производителей благъ, повидимому, улучшаетъ ихъ положеніе; но оно на дѣлѣ поднимаетъ потребительскія цѣны, и кажущаяся выгода производителей теряется ими при потребленіи. Выгоду отъ ложныхъ цѣнъ получаетъ лишь лукавая спекуляція всемірнаго капитализма.

Понятіе денегъ въ широкомъ смыслѣ ограничиваетъ магическую власть золота въ «мірѣ» экономическихъ цѣнностей. Хлѣбъ, трудъ и орудія нужнѣе золота. Важна потребительская цѣна денегъ въ хлѣбныхъ единицахъ; ее нужно держать въ устойчивомъ положеніи (Курно).

Ученіе о градаціяхъ устойчивости цѣнныхъ альтернативныхъ явленій, ниже предлагаемое, играетъ важную роль въ опредѣленіи нормальныхъ цѣнъ, со включеніемъ въ нихъ умѣреннаго резерва, какъ необходимой и достаточной гарантіи устойчивости. Понятія стоимости и правдивой цѣны надлежитъ связывать съ понятіемъ и мѣрами всеобщей и частной устойчивости производства благъ, удовлетворяющихъ нуждамъ жизни, начиная съ самыхъ неотложныхъ, какъ хлѣбъ насущный.

Математическое ожиданіе блага, производимаго операціей O, называютъ *выгодой*; эта выгода, согласованная съ удостовѣреніемъ всеобщей устойчивости, является мѣриломъ стоимости при оборотѣ средствъ.

II. Проблема стоимости производной цѣнности есть одна изъ центральныхъ задачъ политической экономіи **). Проблема стоимости предполагаетъ возвратъ издержекъ производства и сверхъ того налогъ или резервъ для выключенія неустойчивости выходовъ цѣннаго плода, получаемаго какъ итогъ массовыхъ явленій, производимыхъ дѣятельностію множества зависимыхъ и независимыхъ причинъ. Мѣрила устойчивости и неустойчивости ниже получаются съ помощію теоремы Чебышева.

Если въ процессѣ хозяйственной жизни данной страны относительная устойчивость ежегоднаго выхода цѣнныхъ плодовъ обезпечена об-

---

*) *А. В. Васильевъ.* Введеніе въ анализъ. Часть II.

**) *H. Laurent:* Statistique Mathématique, *nn°* 55—87. — *П. А. Некрасовъ:* «Математическая статистика, хозяйственное право и финансовые обороты», гл. V и VI.

щимъ покровомъ, то таксологическая проблема рѣшается уже съ помощію легкихъ резервовъ и простѣйшихъ формъ закона большихъ чиселъ.

Теорема Я. Бернулли съ ея дедукціей и индуктивными уравненіями бросаетъ свѣтъ не только въ задачу о резервахъ прочности массива независимыхъ предпріятій, но и въ эту таксологическую проблему, которая сводится къ слѣдующимъ элементарнымъ задачамъ, предполагающимъ приблизительно равные риски покупающихъ и продающихъ и конкуренцію спроса, какъ и предложенія.

Задача 1. *Нѣкто обладаетъ слѣдующими правами на сумму въ a рублей: если произойдетъ свойственное данному опыту событіе E, то онъ получитъ сполна указанную сумму; въ противномъ случаѣ, т. е. если произойдетъ событіе не—E, онъ ничего не получаетъ изъ этой суммы. Пусть владѣлецъ этихъ правъ хочетъ продать ихъ другому лицу. Спрашивается, какова будетъ равная по риску, безобидная для обѣихъ сторонъ, цѣна за передачуэтихъ правъ.*

Указанную въ задачѣ сумму въ a рублей, будемъ иначе называть *гадательною суммою*. Оцѣнка этого рода суммъ можетъ быть произведена на основаніи закона большихъ чиселъ. Опираясь на этотъ законъ докажемъ, что искомая въ предложенной задачѣ цѣна продаваемыхъ правъ, т. е. цѣна гадательной суммы a, есть pa, гдѣ p есть вѣроятность событія E.

Необходимо наперед предположить, что въ продажѣ имѣется большое число s такихъ гадательныхъ суммъ, какова сумма a, указанная въ задачѣ. Лишь при подобныхъ условіяхъ, т. е. при существованіи указаннаго рынка цѣнностей этого рода, можетъ быть правильно опредѣлена цѣна гадательной суммы a.

Положимъ, что стоимость каждой такой суммы есть $pa + \delta$, и докажемъ, что такая оцѣнка не будетъ безобидна либо для класса продавцовъ, либо для класса покупателей, если только величина δ не есть нуль.

Покупатели при указанной оцѣнкѣ уплачиваютъ $(pa + \delta) . s$ рублей. Этимъ s суммамъ соотвѣтствуютъ s опытовъ, изъ которыхъ каждому свойственно событіе E, причемъ осуществленіе или неосуществленіе этого событія ведетъ къ полученію или неполученію покупателемъ соотвѣтственной суммы a. Пусть m есть число осуществленій событія E при указанныхъ s опытахъ, такъ что покупатели, затратившіе сумму $s(pa + \delta)$, сами пріобрѣтутъ сумму ma. Слѣдовательно потеря покупателей будетъ $\Delta = (pa + \delta)\ s - ma$. Но по теоремѣ Бернулли

$$m = ps + s\omega = s(p + \omega),$$

гдѣ ω есть величина, стремящаяся къ нулю при возрастаніи s до ∞. Слѣдовательно вышеуказанная потеря покупателей будетъ:

$$\Delta = (pa + \delta)\ s - (p + \omega)\ sa = s(\delta - \omega a).$$

Если величина δ отлична отъ нуля, то вышеуказанная величина Δ при достаточно большомъ s будетъ отлична отъ нуля и будетъ имѣть знакъ величины δ (ибо ωa стремится къ нулю). Если $\delta > 0$, то покупатели понесутъ положительную потерю, близкую къ $s\delta$, и это для нихъ не будетъ безобиднымъ; если же $\delta < 0$, то покупатели понесутъ отрицательную потерю, близкую къ $s\delta$, и будутъ имѣть выгоду на счетъ торговцевъ, что̀ не безобидно для этихъ послѣднихъ. Такимъ образомъ при безобидной для обѣихъ сторонъ цѣнѣ случайной суммы a величина δ не можетъ быть отличною отъ нуля и слѣдовательно $\delta = 0$, причемъ искомая цѣна будетъ pa.

На дѣлѣ обычная нехватка теоретическихъ данныхъ, опредѣляющихъ значенія вѣроятностей p въ разныхъ коллизіяхъ жизни, заставляетъ прибѣгать къ статистикѣ, къ индуктивному собиранію фактовъ и къ замѣнѣ вѣроятности въ таксологической проблемѣ частостью.

Теорія спроса и предложенія выдвигаетъ свой самостоятельный таксологическій методъ: ярморочный и базарный торгъ. Онъ не противорѣчитъ вышеуказанному таксологическому принципу, пока на базарѣ существуетъ множество независимыхъ другъ отъ друга конкуррентовъ какъ спроса, такъ и предложенія. Но торгъ на аукціонѣ или тѣсномъ рынкѣ, гдѣ всѣ перешептались и лишь для проформы возглашаютъ свои цѣны отъ имени будто бы независимыхъ отдѣльныхъ конкуррентовъ, искажаетъ результатъ измѣренія цѣны спросомъ и предложеніемъ. Тутъ умѣстна другая регламентація цѣнъ.

Требуемая независимость чаще осуществляется внѣ тѣсныхъ (по пространству и времени) торговъ, внѣ слишкомъ замкнутыхъ рынковъ и биржъ, гдѣ профессіоналы перешептались полюбовно.

Поэтому независимо отъ полюбовныхъ и покровительственныхъ системъ тѣснаго рынка купли-продажи, гражданское правомѣріе должно, разрѣшая классовые споры объ оцѣнкѣ массовыхъ независимыхъ правъ въ публичномъ размѣнѣ и сравнивая мысленное владѣніе съ наличнымъ матеріальнымъ обладаніемъ, принимать таксологическую аксіому:

Аксіома. *Мысленное владѣніе, по праву, приходо-расходною вещью A, имѣющею поступить въ распоряженіе субъекта съ вѣроятностью p, обмѣнивается на наличность въ размѣрѣ $B = A.\,p$.*

Нужно помнить, что аксіома эта относится не къ жертвамъ покровительственной или иной системы, а наоборотъ къ безсистемнымъ *независимымъ* вѣроятнымъ явленіямъ и притомъ къ такому ихъ соединенію, когда въ большихъ итогахъ ихъ гарантирована относительная устойчивость, т. е. относительная (приблизительная) достовѣрность, что итогъ этотъ можетъ колебаться лишь *въ тѣсныхъ предѣлахъ*, какъ учатъ теоремы Я. Бернулли и Пуассона.

Къ основамъ таксологической проблемы мы еще вернемся ниже (въ § 22) при обсужденіи *покровительственной* формулы въ случаѣ гнетущихъ кризисовъ, соотвѣтствующихъ парадоксальнымъ положеніямъ.

Задача 2. *Вообразимъ предпріятіе, которому свойственны несовмѣстимыя и всевозможныя событія* $E_1, E_2, \ldots, E_n$. *Пусть лицо* A *получаетъ отъ этого предпріятія одну изъ суммъ:* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, *смотря по тому, какое изъ событій* $E_1, E_2, \ldots, E_n$ *состоится (т. е. получаетъ сумму* a_k, *если состоится событіе* E_k). *Требуется опредѣлить стоимость правъ на это предпріятіе для лица* A, *т. е. безобидную для сторонъ сумму, за которую лицо класса* A *можетъ продавать подобныя свои права на выгоды отъ предпріятія лицу класса* B.

Пусть вѣроятности событій $E_1, E_2, \ldots, E_n$ будутъ $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Вообразимъ, что права лица A на каждую изъ случайныхъ суммъ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ продаются отдѣльно. На основаніи результата, полученнаго при рѣшеніи предшествующей задачи, стоимости этихъ случайныхъ суммъ соотвѣтственно будутъ: $p_1a_1, p_2a_2, p_3a_3, \ldots, p_na_n$. Слѣдовательно, полная искомая стоимость предпріятія будетъ:

$$p_1a_1 + p_2a_2 + \ldots + p_na_n.$$

Это есть ни что иное, такъ математическое ожиданіе приносимой предпріятіемъ вѣроятной перемѣнной величины $x = a, \ldots, a_n$, на полученіе которой можетъ разсчитывать лицо класса A.

§ 17. Объ оборотахъ выгоды въ равныхъ или безобидныхъ играхъ.

Игра есть своего рода оборотъ, въ которомъ тотъ или другой игрокъ, смотря по условіямъ и дѣйствіямъ игры, пускаетъ въ ходъ свой капиталъ того или другого рода и либо выигрываетъ, либо проигрываетъ, т. е. получаетъ положительныя или отрицательныя выгоды.

Въ процессѣ, гдѣ дѣйствуетъ множественность причинъ и происходитъ смѣшеніе дѣйствій, интересовъ и правъ, равная игра по риску бываетъ необходимою мѣрою для ликвидацій или развязокъ нѣкоторыхъ гордіевыхъ жизненыхъ узловъ, неразвязываемыхъ съ помощію другихъ безспорныхъ основаній. Въ обычномъ правѣ этому способу рѣшенія соотвѣтствуетъ жребій.

Иногда изъ ставокъ игры образуютъ преміи, поощряющія побѣдителей состязанія въ общеполезномъ спортѣ.

Очевидно, равная по риску, или безобидная игра есть такой оборотъ интересовъ между игроками, выгода котораго для каждаго игрока должна бытьравною нулю. Слѣдовательно, *безобидная игра должна обладать слѣдующимъ свойствомъ: для каждаго игрока математическое ожиданіе всевозможныхъ (какъ положительныхъ, такъ и отрицательныхъ) несовмѣстимыхъ прибылей отъ игры должно равняться нулю.*

Разсмотримъ здѣсь нѣсколько задачъ объ играхъ.

Задача 1. *Предъ началомъ партіи игроки* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *вносятъ свои частныя ставки* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, *изъ которыхъ составляется общая ставка* $M = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. *Затѣмъ производится опытъ, которому свойственны несовмѣстимыя всевозможныя событія* $E_1, E_2, \ldots, E_n, E_{n+1}$. *Если при этомъ опытѣ произойдетъ событіе* E_k, *гдѣ* $k \leqq n$, *то всю общую ставку* M *получаетъ игрокъ* A_k; *если же при опытѣ произойдетъ событіе* E_{n+1}, *то происходитъ розыгрышъ, т. е. каждый игрокъ получаетъ обратно свою ставку. Найти условія, при которыхъ эта игра безобидная или равная.*

Обозначивъ черезъ $p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}$ вѣроятности событій $E_1, E_2, \ldots, E_n, E_{n+1}$, разсмотримъ всевозможныя (положительныя, нулевыя и отрицательныя) несовмѣстимыя выгоды игрока A_1. Если произойдетъ событіе E_1, то игрокъ A_1 получитъ прибыль $M - a_1$; если произойдетъ одно изъ событій $E_2, E_3, \ldots, E_n$, то игрокъ A получитъ отрицательную выгоду—a_1; наконецъ, если произойдетъ событіе E_{n+1}, то прибыль игрока A_1 будетъ равна нулю. Математическое ожиданіе всѣхъ этихъ выгодъ будетъ:

$$(M - a_1)\, p_1 - a_1\, (p_2 + p_3 + \ldots + p_n).$$

При соблюденіи начала безобидности будемъ имѣть:

$$(M - a_1)\, p_1 - a_1\, (p_2 + p_3 + \ldots + p_n) = 0,$$

откуда

$$a_1 = \frac{Mp_1}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} = \frac{Mp_1}{1 - p_{n+1}}.$$

Примѣняя изложенныя разсужденія къ выгодамъ игрока A_k, найдемъ вообще:

$$a_k = \frac{Mp_k}{1 - p_{n+1}}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$a_1 : a_2 : \ldots : a_n = p_1 : p_2 : \ldots : p_n,$$

т. е. разсматриваемая игра безобидна, если частныя ставки игроковъ пропорціональны вѣроятностямъ для этихъ игроковъ выиграть общую ставку.

Задача 2. *Предъ началомъ игры игрокъ* A *платитъ игроку* B *ставку* a, *затѣмъ игрокъ* B *производитъ опытъ, которому свойственны несовмѣстимыя и всевозможныя событія* $E_1, E_2, \ldots, E_n$, *причемъ по окончаніи опыта игрокъ* B *платитъ игроку* A *одну изъ суммъ* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, *смотря по тому, какое изъ событій* $E_1, E_2, \ldots, E_n$ *при опытѣ осуществится. При какихъ условіяхъ игра эта безобидная или равная?*

Математическое ожиданіе всевозможныхъ (положительныхъ ио трицательныхъ) прибылей для игрока B будетъ:

$$(a - a_1)\, p_1 + (a - a_2)\, p_2 + \ldots + (a - a_n)\, p_n,$$

гдѣ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ суть вѣроятности событій $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Это математическое ожиданіе для безобидности игры должно равняться нулю, т. е. должно имѣть силу условіе:

$$(a - a_1)\, p_1 + (a - a_2)\, p_2 + \ldots (a - a_n)\, p_n = 0;$$

отсюда слѣдуетъ, что

$$a = a_1 p_1 + a_2 p_2 + \ldots + a_n p_n.$$

Къ роду игръ, разсмотрѣнныхъ въ задачѣ 2, принадлежатъ лотерейныя игры и игры въ штоссъ.

Кромѣ игръ, необходимыхъ какъ уравнительная мѣра для ликвидаціи, и игръ, спортивно полезныхъ, бываютъ игры азартныя, тлетворныя. Возьмемъ слѣдующій примѣръ азарта.

Задача 3. *Два игрока A и B, имѣя соотвѣтственно состоянія, цѣнимыя въ M и m рублей, условились играть въ равныя игры до тѣхъ поръ, пока одинъ изъ нихъ не выиграетъ состоянія другого. Опредѣлить вѣроятность p того, что игрокъ A выиграетъ состояніе игрока B.*

Указанныя въ задачѣ игры можно разсматривать какъ одну сложную игру, въ результатѣ которой игрокъ A получаетъ либо положительную прибыль m (если выиграетъ все состояніе игрока B), либо отрицательную прибыль $— M$ (если проиграетъ все свое состояніе игроку B). Математическое ожиданіе всѣхъ этихъ прибылей игрока A представится такъ:

$$mp - M\,(1 - p),$$

причемъ на основаніи начала равенства игры будемъ имѣть:

$$mp - M\,(1 - p) = 0.$$

Отсюда искомая вѣроятность того, что игрокъ A побѣдитъ игрока B, представится такъ:

$$p = \frac{M}{M + m}.$$

Подобнымъ образомъ вѣроятность противоположнаго событія, т. е. того, что игрокъ B побѣдитъ игрока A, представится такъ:

$$q = \frac{m}{M + m}.$$

Если сумма M велика сравнительно съ m, то вѣроятность p близка къ единицѣ, т. е почти достовѣрно, что богатый игрокъ обыграетъ въ указанной игрѣ бѣднаго.

Очевидно, азартный игрокъ, т. е. алчно и при всякомъ удобномъ случаѣ играющій на большія для его состоянія суммы, подобенъ вышеуказанному бѣдному игроку, такъ какъ онъ имѣетъ своимъ противникомъ въ игрѣ несравненно болѣе богатое коллективное лицо (всѣхъ остальныхъ игроковъ, съ которыми онъ вступаетъ въ борьбу). Поэтому азартному игроку почти съ достовѣрностью можно предсказать гибель. Результатъ этотъ, указывающій на неблагоразуміе азартныхъ игръ, совпадаетъ и съ тѣми правилами морали, которыя осуждаютъ страсть игры, какъ разжигающую алчность и другія низкія страсти.

ГЛАВА V.

Ученіе о графикахъ вѣроятностей суммъ и среднихъ величинъ. Обобщеніе простого закона большихъ чиселъ. Діагнозъ устойчивости и катастрофальности. Антиномія: свободная причинность или только необходимость? Покровительственная такеологія. Панлогика. Пангеометрія.

§ 18. Теорема Чебышева о среднихъ величинахъ.

Основной методъ производящихъ функцій Лапласа и Коши сдѣлалъ исчисленіе вѣроятностей точною наукой, правильно подходящей къ вопросу объ условіяхъ устойчивости такого міропорядка, гдѣ дѣйствуетъ множество бытовыхъ независимыхъ причинныхъ факторовъ, производящихъ плоды и ихъ издерживающихъ. Но приступиться къ этой наукѣ для непосвященныхъ было совершенно невозможно; даже и посвященные затруднялись градуировать *скалу относительной устойчивости* альтернативныхъ итоговъ перемѣнныхъ величинъ и отмѣчать на ней надежныя куски и, наоборотъ, пункты ненадежности и обрыва устойчивости.

Изслѣдованія Чебышева упростили дѣло по главному вопросу, а именно по вопросу о скалѣ устойчивости и объ обрывѣ устойчивости; они дали возможность отдѣлить случай обрыва устойчивости отъ случаевъ когда относительная устойчивость и регулярность (закономѣрность) берутъ силу, какъ это, напримѣръ, имѣетъ мѣсто для альтернативныхъ итоговъ явленій, разсматриваемыхъ закономъ большихъ чиселъ Пуассона. Основное элементарное ученіе предложено въ геніальномъ мемуарѣ Чебышева: «О среднихъ величинахъ».

Чебышевъ основалъ выводъ своей теоремы на нѣкоторыхъ элементарныхъ формулахъ, находящихся въ связи съ понятіемъ о математическихъ ожиданіяхъ, съ индуктивными уравненіями § 15 и съ слѣдующими ка-

ническими обозначеніями. Пусть предполагается произвести m опытовъ $O_1, O_2, O_3, \ldots, O_m$, которые въ результатахъ даютъ соотвѣтственно m независимыхъ перемѣнныхъ $x, y, z, \ldots, u$. Пусть будутъ

$$\begin{array}{l} x_1, x_2, \ldots, x_\alpha \\ y_1, y_2, \ldots, y_\beta \\ z_1, z_2, \ldots, z_\gamma \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_1, u_2, \ldots, u_\varepsilon \end{array}$$

частныя значенія указанныхъ перемѣнныхъ. Обозначимъ соотвѣтственно чрезъ

$$\begin{array}{l} p_1, p_2, \ldots, p_\alpha \\ q_1, q_2, \ldots\ldots q_\beta \\ r_1, r_2, \ldots, r_\gamma \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_1, t_2, \ldots, t_\varepsilon \end{array}$$

вѣроятности этихъ значеній.

Вышеупомянутые m опытовъ назовемъ Чебышевскими операціями $O_1, O_2, \ldots, O_m$, предполагая, что эти операціи составляютъ часть неограниченнаго ряда операцій:

$$O_1, O_2, \ldots, O_k, \ldots.$$

Тогда число m можетъ по велѣнію какихъ либо судебъ измѣняться и неограниченно возрастать. Иначе говоря, можетъ разсматриваться такъ называемый *устанавливающійся* процессъ (феноменъ), которому въ предѣлѣ при $m = \infty$ будетъ соотвѣтствовать *установившійся* процессъ (ноуменъ).

Совокупность простыхъ Чебышевскихъ операцій $O_1, O_2, \ldots, O_m$ назовемъ *очагомъ*, или *кооперацією* Ω, или *фермой* этихъ операцій. Очагъ Ω можетъ въ пространствѣ данной территоріи опять повторяться, размножаться, образуя рядъ $\Omega', \Omega'', \ldots, \Omega^{(s)}, \ldots$ Если явленія большого числа s этихъ очаговъ подвергаются статистическому наблюденію, то вышеуказанныя вѣроятности независимыхъ перемѣнныхъ $x, y, \ldots, u$ могутъ опредѣляться эмпирически, какъ оправдываемыя à priori теоремами Я. Бернулли и Пуассона статистическія *частости* явленій ихъ различныхъ значеній. Замѣтивъ эту *великую* (по количеству наблюденій) индуктивную связь частостей и вѣроятностей явленія значеній перемѣнныхъ $x, y, \ldots, u$, продолжимъ обозначенія, необходимыя для формулированія теоремы Чебышева.

Будемъ предполагать, что частныя значенія каждаго изъ указанныхъ перемѣнныхъ, свойственнаго данному опыту, суть несовмѣстимыя и всевозможныя, такъ что

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\alpha} p_\lambda = 1, \quad \sum_{\mu=1}^{\mu=\beta} q_\mu = 1, \quad \sum_{\nu=1}^{\nu=\gamma} r_\nu = 1, \ldots, \quad \sum_{\omega=1}^{\omega=\varepsilon} t_\omega = 1 \quad . \quad . \quad (1)$$

Кромѣ того будемъ предполагать, что событія, которыми обусловливаются частныя значенія одного перемѣннаго, не зависятъ отъ событій, обусловливающихъ частныя значенія всѣхъ остальныхъ перемѣнныхъ. При такихъ условіяхъ перемѣнныя $x, y, z, \ldots$ называются *независимыми*; операціи или испытанія $O_1, O_2, O_3, \ldots$ также называются независимыми.

Математическія ожиданія каждой изъ перемѣнныхъ величинъ

$$x, y, z, \ldots, u$$

и математическія ожиданія квадратовъ этихъ перемѣнныхъ представятся соотвѣтственно такъ:

$$a_1 = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\alpha} p_\lambda x_\lambda, \; a_2 = \sum_{\mu=1}^{\mu=\beta} q_\mu y_\mu, \; a_3 = \sum_{\nu=1}^{\nu=\gamma} r_\nu z_\nu, \ldots, a_m = \sum_{\omega=1}^{\omega=\varepsilon} t_\omega u_\omega, \quad (2)$$

$$b_1 = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\alpha} p_\lambda x^2{}_\lambda, \; b_2 = \sum_{\mu=1}^{\mu=\beta} q_\mu y^2{}_\mu, \; b_3 = \sum_{\nu=1}^{\nu=\gamma} r_\nu z^2{}_\nu, \ldots, b_m = \sum_{\omega=1}^{\omega=\varepsilon} t_\omega u^2{}_\omega. \quad (3)$$

Пусть $F\ (\lambda, \mu, \nu, \ldots, \omega)$ обозначаетъ функцію величинъ

$$x_\lambda, y_\mu, z_\nu, \ldots, u_\omega, p_\lambda, q_\mu, r_\nu, \ldots, t_\omega.$$

Условимся разумѣть подъ символомъ

$$\mathrm{S}F\ (\lambda, \mu, \nu, \ldots, \omega)$$

многократную сумму, распространенную на всѣ цѣлыя значенія λ отъ 1 до α, на всѣ цѣлыя значенія μ отъ 1 до β, на всѣ цѣлыя значенія ν отъ 1 до γ, и т. д. и наконецъ на всѣ цѣлыя значенія ω отъ 1 до ε. Слѣдовательно

$$\mathrm{S}F\ (\lambda, \mu, \nu, \ldots, \omega) = \sum_{\omega=1}^{\omega=\varepsilon} \ldots \sum_{\nu=1}^{\nu=\gamma} \sum_{\mu=1}^{\mu=\beta} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\alpha} F\ (\lambda, \mu, \nu, \ldots, \omega),$$

причемъ порядокъ суммированія здѣсь можно измѣнять по желанію, ибо предѣлы суммъ постоянны.

Лемма. Если функція $F\ (\lambda, \mu, \nu, \ldots, \omega)$ имѣетъ видъ:

$$F\ (\lambda, \mu, \nu, \ldots, \omega) = \varphi\ (\lambda)\ \psi\ (\mu)\ \theta\ (\nu) \ldots \chi\ (\omega),$$

то вышеуказанная многократная сумма можетъ быть представлена какъ произведеніе простыхъ суммъ:

$$\mathrm{S}\varphi\ (\lambda)\ \psi\ (\mu)\ \theta\ (\nu) \ldots \chi\ (\omega) =$$

$$= \Big[\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\alpha} \varphi\ (\lambda)\Big] \cdot \Big[\sum_{\mu=1}^{\mu=\beta} \varphi\ (\mu)\Big] \cdot \Big[\sum_{\nu=1}^{\nu=\gamma} \theta\ (\nu)\Big] \ldots \Big[\sum_{\omega=1}^{\omega=\varepsilon} \chi\ (\omega)\Big]. \quad (4)$$

Справедливость этой леммы легко обнаружить при помощи правила умноженія многочленовъ, представляемыхъ суммами, стоящими во второй

части этого равенства Въ самомъ дѣлѣ, перемноживъ по извѣстному правилу эти многочлены, получимъ сумму, общій членъ которой будетъ:

$$\varphi\ (\lambda)\ \psi\ (\mu)\ \theta\ (\nu) \ldots \chi\ (\omega)$$

и въ которой суммованія по перемѣннымъ λ, μ, ν, ..., ω распространяются въ предѣлахъ 1 и α, 1 и β, 1 и γ, ..., 1 и ε, т. е. получимъ сумму, стоящую въ первой части равенства (4). Лемма доказана.

Исходя изъ общей формулы (4) и прибѣгая къ равенствамъ (1), (2) и (3), убѣждаемся въ вѣрности слѣдующихъ тождествъ:

$$\mathrm{S} p_\lambda q_\mu r_\nu \ldots t_\omega = 1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{S} x_\lambda p_\lambda q_\mu \ldots t_\omega &= a_1, \\ \mathrm{S} y_\mu p_\lambda q_\mu \ldots t_\omega &= a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \mathrm{S} u_\omega p_\lambda q_\mu \ldots t_\omega &= a_m, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{S} x_\lambda^{\,2} p_\lambda q_\mu \ldots t_\omega &= b_1, \\ \mathrm{S} y_\mu^{\,2} p_\lambda q_\mu \ldots t_\omega &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \mathrm{S} u^2_{\,\omega} p_\lambda p_\mu \ldots t_\omega &= b_m, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{S} x_\lambda y_\mu p_\lambda q_\mu r_\nu \ldots t_\omega &= a_1 a_2, \\ \mathrm{S} x_\lambda z_\nu p_\lambda q_\mu r_\nu \ldots l_\omega &= a_1 a_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \mathrm{S} y_\mu z_\lambda p_\lambda q_\mu r_\nu \ldots t_\omega &= a_2 a_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

Число равенствъ (8), очевидно, равно числу сочетаній изъ m элементовъ по два.

Разсмотримъ затѣмъ сумму:

$$\mathrm{S}\ (x_\lambda + y_\mu + z_\nu + \ldots + u_\omega - a_1 - a_2 - \ldots - a_m)^2\ p_\lambda\ q_\mu\ r_\nu \ldots t_\omega.$$

Обозначивъ сумму $a_1 + a_2 + \ldots + a_m$ черезъ Σa, найдемъ:

$$\begin{aligned} &\mathrm{S}\ (x_\lambda + y_\mu + z_\nu + \ldots + u_\omega - \Sigma a)^2 p_\lambda q_\mu \ldots t_\omega = \\ &\mathrm{S}\ [x^2_\lambda + y^2_\mu + z^2_\nu + \ldots + u^2_\omega + (\Sigma a)^2 \\ &\quad + 2x_\lambda y_\mu + 2x_\lambda z_\nu + \ldots + 2x_\lambda u_\omega - 2x_\lambda \Sigma a \\ &\quad\quad + 2y_\mu z_\nu + \ldots + 2y_\mu u_\omega - 2y_\mu \Sigma a \\ &\quad\quad\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad\quad\quad\quad + \ldots\ldots\ldots \\ &\quad\quad\quad\quad\quad - 2u_\omega \Sigma a]\, p_\lambda q_\mu \ldots t_\omega. \end{aligned}$$

Пользуясь равенствами (5), (6), (7) и (8), мы найдемъ:

$$\mathrm{S}\,(x_\lambda + y_\mu + z_\nu + \ldots + u_\omega - \Sigma a)^2\, p_\lambda\, q_\mu \ldots t_\omega = b_1 + b_2 + \ldots + b_m + (\Sigma a)^2 - 2a_1\,\Sigma a - 2a_2\,\Sigma a - \ldots - 2a_m\,\Sigma a + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \ldots =$$
$$= \Sigma b - (\Sigma a)^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \ldots,$$

гдѣ Σb означаетъ сумму $b_1 + b_2 + \ldots b_m$.

Замѣтивъ, что

$$(\Sigma a)^2 = a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2} + \ldots + a^2_m + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \ldots,$$

будемъ имѣть тождество:

$$\mathrm{S}\,(x_2 + y_\mu + z_\nu + \ldots + u_\omega - \Sigma a)^2\, p_\lambda\, q_\mu \ldots t_\omega = \Sigma b - \Sigma a^2, \quad . \quad (9)$$

гдѣ $\Sigma a^2 = a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + \ldots + a^2_m$.

Очевидно, лѣвая часть тождества (9) положительна; слѣдовательно

$$\Sigma b - \Sigma a^2 > 0.$$

Перейдемъ теперь къ выводу *теоремы Чебышева.*

Раздѣливъ обѣ части тождества (9) на $B^2\,(\Sigma b - \Sigma a^2)$, получимъ:

$$\mathrm{S}\,\frac{(x_\lambda + y_\mu + z_\nu + \ldots + u_\omega - \Sigma a)^2}{B^2\,(\Sigma b - \Sigma a^2)}\, p_\lambda\, q_\mu \ldots t_\omega = \frac{1}{B^2}. \quad . \quad (10)$$

Члены первой части этого равенства раздѣлимъ на двѣ группы: къ первой отнесемъ члены, для которыхъ удовлетворяется неравенство:

$$\frac{(x_\lambda + y_\mu + z_\nu + \ldots + u_\omega - \Sigma a)^2}{B^2\,(\Sigma b - \Sigma a^2)} \leqq 1; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

ко второй отнесемъ члены, удовлетворяющіе неравенству:

$$\frac{(x_\lambda + y_\mu + z_\nu + \ldots + u_\omega - \Sigma a)^2}{B^2\,(\Sigma b - \Sigma a^2)} > 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Отбросивъ въ первой части тождества (10) всѣ члены 1-й группы, мы получимъ слѣдующее неравенство:

$$\bar{\mathrm{S}}\,\frac{(x_\lambda + y_\mu + \ldots + u_\omega - \Sigma a)^2}{B^2\,(\Sigma b - \Sigma a^2)}\, p_\lambda\, q_\mu \ldots t_\omega < \frac{1}{B^2},$$

гдѣ подъ $\bar{\mathrm{S}}$ разумѣется сумма, распространенная, только на члены второй группы. Замѣнивъ въ каждомъ изъ членовъ этой суммы единицей величину

$$\frac{(x_\lambda + y_\mu + \ldots + u_\omega - \Sigma a)^2}{B^2\,(\Sigma b - \Sigma a^2)},$$

удовлетворяющую неравенству (12), найдемъ:

$$\bar{\mathrm{S}}\, p_\lambda\, q_\mu \ldots t_\omega < \frac{1}{B^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Произведеніе $p_\lambda q_\mu \ldots t_\omega$ есть вѣроятность сложнаго событія, состоящаго изъ совпаденія слѣдующихъ простыхъ событій: перемѣнныя $x, y, \ldots, t$ при m предполагаемыхъ испытаніяхъ получатъ соотвѣтственныя значенія x_λ, $y_\mu, \ldots, u_\omega$. Короче, произведеніе $p_\lambda q_\mu \ldots t_\omega$ можно назвать вѣроятностью системы значеній $x_\lambda, y_\mu, \ldots, u_\omega$ разсматриваемыхъ перемѣнныхъ. Сумма же $\overline{\mathrm{S}}\, p_\lambda q_\mu \ldots t_\omega$ есть вѣроятность того, что осуществится такая система значеній $x_\lambda, y_\mu, \ldots, u_\omega$, которая удовлетворитъ неравенству (12). Обозначивъ эту вѣроятность черезъ Q, будемъ имѣть:

$$Q = \overline{\mathrm{S}}\, p_\lambda q_\mu \ldots t_\omega.$$

Если P выражаетъ вѣроятность противоположнаго событія, т. е. того, что будетъ имѣть мѣсто система величинъ $x_\lambda, y_\mu, \ldots, u_\omega$. удовлетворяющихъ неравенству (11), то предыдущее равенство получитъ видъ:

$$1 - P = \overline{\mathrm{S}}\, p_\lambda q_\mu \ldots t_\omega,$$

пречемъ неравенство (13) представится такъ:

$$1 - P < \frac{1}{B^2}.$$

Слѣдовательно, вѣроятность P осуществленія неравенства (11) заключается въ предѣлахъ:

$$1 > P > 1 - \frac{1}{B^2}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Обратимся къ неравенству (11). Замѣчая, что корень квадратный изъ первой части этого неравенства по абсолютной величинѣ не превосходитъ единицы, можемъ замѣнить это неравенство слѣдующими неравенствами: $B > 0$ и

$$-1 \leqq \frac{x_\lambda + y_\mu + \ldots + u_\omega - \Sigma a}{B\sqrt{\Sigma b - \Sigma a^2}} \leqq +1,$$

или

$$-\frac{B}{\sqrt{m}}\sqrt{\frac{\Sigma b - \Sigma a^2}{m}} \leqq \frac{x_\lambda + x_\mu + \ldots + u_\omega}{m} - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m} \leqq$$
$$+\frac{B}{\sqrt{m}}\sqrt{\frac{\Sigma b - \Sigma a^2}{m}}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Повторимъ, что P есть вѣроятность того, что система величинъ $x_\lambda, y_\mu, \ldots, u_\omega$ удовлетворитъ этимъ неравенствамъ, равносильнымъ неравенству (11).

Положивъ $\tau > 0$ и $B = \tau\sqrt{m}$, неравенства (15) и (14) можетъ представить въ такой формѣ:

$$-\tau\sqrt{\frac{\Sigma b - \Sigma a^2}{m}} \leqq \frac{x_\lambda + y_\mu + \ldots + u_\omega}{m} - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m} \leqq$$

$$+\tau\sqrt{\frac{\Sigma b-\Sigma a^2}{m}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

$$1>P>1-\frac{1}{m\tau^2}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (16')$$

Неравенствами (16) и (16′), данными въ мемуарѣ Чебышева «О среднихъ величинахъ», обосновывается теорема Чебышева, въ которой фигурируютъ среднія величины.

Теорема I (Чебышева). *Пусть операціи* O_1, $O_2, \ldots$, O_m *соотвѣтственно производятъ независимыя перемѣнныя величины* $x, y, z, \ldots$, u. *Вѣроятность* P, *что величины эти удовлетворяютъ неравенствамъ* (16), *всегда должна удовлетворять неравенствамъ* (16′).

Обобщеніе простого закона большихъ чиселъ.

Пусть число m вышеупомянутыхъ операцій O_1, $O_2, \ldots$, O_m, наблюдаемыхъ въ природѣ или обществѣ, можетъ по данной программѣ возрастать неограниченно.

Установимъ слѣдующіе термины.

Перемѣннымъ среднимъ ξ назовемъ среднее ариѳметическое отъ независимыхъ перемѣнныхъ $x, y, \ldots, u$; оно представится такъ:

$$\xi=\frac{x+y+\ldots+u}{m}=\frac{n}{m};$$

иначе:

$$\xi=\frac{x_\lambda+y_\mu+\ldots+u_\omega}{m}. \quad \ldots\ldots\ldots (17)$$

Постояннымъ среднимъ, а также *центральнымъ* или *начальнымъ среднимъ* a назовемъ среднее отъ математическихъ ожиданій перемѣнныхъ $x, y, \ldots, u$, иначе отъ вѣроятностныхъ среднихъ $a_1, a_2, \ldots, a_m$; оно выразится такъ:

$$a=\frac{\Sigma a}{m}=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_m}{m}. \quad \ldots\ldots\ldots (18)$$

Среднее ариѳметическое отъ m разностей между независимыми перемѣнными $x, y, \ldots, u$ и соотвѣтственными математическими ожиданіями $a_1, a_2, \ldots, a_m$ назовемъ *перемѣннымъ среднимъ отклоненіемъ* отъ нуля; оно выразится такъ:

$$\xi-a=\frac{(x-a_1)+(y-a_2)+\ldots+(u-a_m)}{m}. \quad \ldots (19)$$

Какъ случайное количество, отклоненіе $\xi-a$ отъ нуля можетъ быть и ниже, и выше нуля.

Среднее ариѳметическое отъ m математическихъ ожиданій перемѣнныхъ количествъ $(x-a_1)^2$, $(y-a_2)^2 \ldots$, $(u-a_m)^2$ назовемъ *среднею квадратическою силою* g отклоненія величины $\xi - a$ отъ нуля; эта сила представится такъ:

$$g = \frac{(b_1 - a_1^2) + (b_2 - a_2)^2 + \ldots + (b_m - a_m^2)}{m} = \frac{\Sigma(b-a^2)}{m} \quad \ldots (20)$$

Вліяніе этой силы сказывается въ неравенствахъ (16) и (16′), приводимыхъ къ виду:

$$\left.\begin{aligned} -\tau\sqrt{g} < \xi - a < +\tau\sqrt{g}\,, \\ 1 > P > 1 - \frac{1}{m\tau^2}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (21)$$

Чтобы получить съ помощію теоремы Чебышева *обобщенный* законъ большихъ чиселъ, нужно условиться считать за основной признакъ числовой закономѣрности явленія $\xi - a$ относительную (приблизительную) достовѣрность весьма малаго отклоненія разности $\xi - a$ отъ нуля и достовѣрное неограниченное приближеніе этой разности къ нулю при неограниченномъ возрастаніи числа m.

Сила g отклоненія разности $\xi - a$ отъ нуля будетъ совмѣстима съ указаннымъ сейчасъ основнымъ признакомъ закона большихъ чиселъ, если возможно выбрать, включенное въ неравенство (21) число τ такъ, чтобы величины

$$\tau\sqrt{g} \text{ и } 1 : (m \cdot \tau^2)$$

совмѣстно были весьма малы и стремились къ нулю при возрастаніи m до ∞. Отсюда при вышеуказанныхъ обозначеніяхъ слѣдуетъ:

Теорема II (обобщенный оперативный законъ большихъ чиселъ). *Если величину* τ, *входящую въ неравенства* (21), *возможно выбрать такъ, чтобы количества* $\tau\sqrt{g}$ *и* $\frac{1}{m\cdot\tau^2}$ *были весьма малы и стремились къ нулю при возрастаніи* m *до* ∞, *то вѣроятность* P *того, что абсолютная величина средняго отклоненія* $\xi - a$ *отъ нуля окажется весьма малымъ количествомъ, не превосходящимъ предѣла* $\tau\cdot\sqrt{g}$, *будетъ болѣе* $1 - \frac{1}{m\tau^2}$ *и будетъ стремиться къ* 1 (*къ относительной достовѣрности*) *при возрастаніи* m *до* ∞.

Выраженный теоремою II числовой законъ назовемъ *оперативнымъ*, такъ какъ въ ней подразумѣваются операціи съ итожною дѣятельностію ΣE, результатомъ коей является перемѣнная средняя величина ξ (или плодъ, или способность, сила и пр., или экономическое благо).

Предположенія теоремы II при *конечномъ* большомъ m осуществимы въ *опытѣ*. Вообще они осуществимы тогда, когда при всѣхъ значеніяхъ неограниченно возрастающаго числа m имѣетъ силу условіе:

$$\sigma < \frac{1}{2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

гдѣ числовой порядокъ σ выводится изъ уравненія: $m^\sigma = \sqrt{g}$. Въ самомъ дѣлѣ при условіи (22) можемъ количество τ выбрать такъ:

$$\tau = m^{-\nu}, \qquad \sigma < \nu < \frac{1}{2}. \quad \ldots\ldots\ldots (23)$$

При этомъ осуществятся всѣ предположенія теоремы II, такъ какъ будемъ имѣть стремящіяся къ нулю количества:

$$\tau\sqrt{g} = m^{-(\nu-\sigma)} \quad \text{и} \quad \frac{1}{m\tau^2} = m^{-(1-2\nu)}.$$

Чтобы представить себѣ весьма распространенныя въ практикѣ обстоятельства, при которыхъ всѣ предположенія теоремы II сами собою выполняются, вообразимъ, что математическія ожиданія a_1, a_2, a_3,... перемѣнныхъ x, y, z, ... и математическія ожиданія b_1, b_2, b_3, ... квадратовъ тѣхъ же перемѣнныхъ конечныя (что осуществляется само собою, если всѣ значенія перемѣнныхъ x, y, z, ... конечныя). При этомъ, каково бы ни было число m, величины:

$$\frac{\Sigma a}{m}, \quad \frac{\Sigma a^2}{m}, \quad \frac{\Sigma b}{m} \text{ и } g \text{ или } \frac{\Sigma(b-a^2)}{m},$$

какъ среднія ариѳметическія отъ конечныхъ количествъ, также будутъ конечными величинами. Изъ этого мы заключаемъ, что число σ, выводимое изъ уравненія: $m^\sigma = \sqrt{g}$, будетъ весьма малымъ, стремящимся къ нулю при возрастаніи m, т. е. условія (23) и (22), при которыхъ оправдываются всѣ предположенія теоремы II, будутъ осуществляться для большого конечнаго m, а мысленно (т. е. внѣ опыта) и въ предѣлѣ при $m = \infty$.

При подобныхъ обстоятельствахъ и при опредѣленной программѣ развивающейся дѣятельности теорема Чебышева обосновываетъ, на почвѣ теоріи среднихъ и на почвѣ приблизительной достовѣрности, устойчивость перемѣннаго средняго явленія ξ и соотвѣтствующіе *устойчивые* бюджеты и достаточные резервы, біологическіе, хозяйственно производственные и банкирскіе, когда обсуждаемое дѣло касается большой совокупности дѣятельностей и независимыхъ перемѣнныхъ явленій. Рѣчь же о неустойчивости будетъ ниже.

§ 19. Пунктирная діаграмма вѣроятности итога, обсуждаемаго въ теоремѣ Чебышева. Особые случаи въ отношеніи къ итогамъ, имѣющимъ нормальную діаграмму. Отношеніе графической закономѣрности къ числовой закономѣрности.

Изслѣдуя явленіе, трактуемое въ теоремѣ Чебышева (§ 18), нужно разсматривать скалу итога n перемѣнныхъ x, y, ..., u и связь вѣроятности каждаго значенія итога n съ пунктами скалы. Эта связь характеризуется діаграммой, представляющей вѣроятность $\Delta P_{m,n}$ того, что сумма

$x + y + \ldots + u$ получить то или другое данное значеніе n. Эта вѣроятность, какъ функція перемѣннаго n, можетъ быть представлена на плоскости прямоугольныхъ координатъ n и β геометрическимъ мѣстомъ, опредѣляемымъ помощію уравненія:

$$\beta = \Delta P_{m,n}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Если эта фигура не умѣщается на чертежѣ или становится при весьма большомъ m не отчетливою, то ее можно проявлять при помощи подбора графическихъ модулей L и L_1 (см. нашу книгу: «Теорія вѣроятностей». Изд. 2).

Діаграмма вѣроятности $\Delta P_{m,n}$ цѣнится статистиками, ибо она, какъ теоретически обоснованная точная форма (графическая закономѣрность), сближается съ дѣйствительностію при помощи системы индуктивныхъ уравненій по плану, указанному въ § 15.

Эта діаграмма деформируется при возрастаніи m до ∞. Она большею частію представляетъ пунктирную линію. Но въ нормальныхъ обстоятельствахъ ее можно бываетъ интерполировать, т. е. замѣнять приближенною аналитическою кривою. Эту *аналитическую* кривую мы называемъ нормальною діаграммой сложнаго явленія.

Однако же иногда точная пунктирная діаграмма отклоняется далеко отъ упомянутой сейчасъ аналитической кривой, которая въ такомъ случаѣ перестаетъ приблизительно представлять функцію $\Delta P_{m,n}$. Если имѣемъ дѣло съ подобнымъ обстоятельствомъ, то этого рода случай будемъ вообще называть особымъ случаемъ въ отношеніи къ графикамъ вѣроятностей итоговъ, имѣющимъ нормальную діаграмму.

Эти особые случаи подраздѣляются на нѣсколько категорій.

Иногда послѣдовательныя точки пунктирной діаграммы, будучи соединены прямыми, образуютъ ломанную, осложненную зигзагами.

Къ такому пунктиру вовсе неудобно прилагать интерполированіе помощію аналитической нормальной формулы. Эту категорію графиковъ назовемъ особыми перваго рода. Эти случаи бываютъ въ смежности съ случаями, имѣющими нормальную діаграмму (напримѣръ, съ діаграммой явленій, разсматриваемыхъ въ теоремѣ Пуассона и ея частномъ случаѣ, трактуемомъ въ теоремѣ Я. Бернулли).

Діаграмма уравненія (24) даетъ возможность графически опредѣлять выгоду ΔM_n игрока класса A при обычной ставкѣ на выходъ разности $n - \Sigma a$, ибо эта выгода оцѣнивается такъ:

$$\Delta M_n = (n - \Sigma a)\, \Delta P_{m,n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24')$$

Выясняя отношеніе обозначенія $\Delta P_{m,n}$ къ теоремѣ Чебышева, предположимъ, что $P\,(A,\ B)$ означаетъ вѣроятность того, что будутъ имѣть силу неравенства:

$$A \leqq x_\lambda + y_\mu + z_\nu + \ldots u_\omega - a_1 - a_2 - \ldots - a_m \leqq B. \quad . \quad (25)$$

По теоремѣ сложенія будемъ имѣть:

$$P(A, B) = \sum \Delta P_{m,\, x_\lambda + y_\mu + \ldots + u_\omega}, \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

гдѣ сумма $\sum$ распространяется на всѣ значенія перемѣнныхъ $x, y, z, \ldots, u$, удовлетворяющія неравенствамъ (25). Эту сумму назовемъ *интегральною* вѣроятностью.

Если положимъ:

$$B = \tau \sqrt{\frac{b_1 - a_1^2 + b_2 - a_2^2 + \ldots + b_m - a^2_m}{m}}. \quad A = -B, \quad . \quad (27)$$

то будемъ имѣть:

$$P = P(A, B) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

гдѣ P есть та вѣроятность, которая трактуется въ теоремѣ Чебышева.

Теорема Чебышева характеризуетъ *интегральную* вѣроятность $P(A, B)$ и помогаетъ открывать числовыя закономѣрности; а *графическая закономѣрность*, представляемая діаграммой уравненія (24), опредѣляетъ *дифференціальную* вѣроятность $\Delta P_{m,\, n}$, какъ функцію альтернативнаго итога n, и оцѣниваетъ рискъ ставки на выходъ каждаго изъ возможныхъ значеній n. Термины: «числовая закономѣрность» и «графическая закономѣрность» дополняютъ другъ друга и обозначаютъ различныя понятія.

Если бы графическая закономѣрность была дана, то изъ нея интеграціей легко получилось бы выраженіе $P(A, B)$, потомъ подтвержденіе теоремъ I и II. Эта закономѣрность полнѣе измѣряетъ случайности, но получается болѣе сложною вычислительною работою.

§ 20. Парадоксальныя положенія и неустойчивость итога. Аналитическій діагнозъ; жертвы парадоксовъ. Модуль M устойчивости.

Обобщенный законъ большихъ чиселъ, даваемый теоремою II, § 18, имѣетъ лишь относительную прочность, которая иногда обрывается; при этомъ вышеуказанный основной признакъ числовой закономѣрности долженъ терять силу.

Случаи этого обрыва назовемъ *парадоксальными* и притомъ *сильными* въ отличіе отъ слабыхъ или тихихъ парадоксальныхъ случаевъ, обусловливаемыхъ отдѣльно незамѣтными, но безчисленными пертурбаціями и погрѣшностями, однакоже въ итогѣ опасными.

Сильные парадоксальные надрывы бываютъ тогда, когда указанная въ § 18 средняя квадратическая сила g отклоненія разности $\xi - a$ отъ нуля имѣетъ слишкомъ высокій числовой *порядокъ* 2σ, опредѣляемый изъ уравненія: $g = m^{2\sigma}$.

Крайніе парадоксальные казусы или ультрапарадоксы соотвѣтствуютъ предположенію, что выведенная изъ уравненія $m^\sigma = \sqrt{g}$ величина σ стремится къ ∞ при возрастаніи m до ∞.

Менѣе рѣзкіе парадоксальные случаи имѣютъ мѣсто тогда, когда этотъ числовой порядокъ σ при всѣхъ значеніяхъ неограниченно возрастающаго числа m удовлетворяетъ неравенству: $\sigma \geqq \frac{1}{2}$ и сохраняетъ кочечное значеніе. Учрежденія осмотрительности вызываются къ жизни парадоксами.

Всѣ парадоксальные случаи *) подраздѣлимъ на двѣ категоріи: 1-ую и 2-ую, смотря по тому, стремится ли итогъ Σa ожиданій $a_1, a_2, \ldots, a_m$ при неограниченномъ возрастаніи m къ безконечности или же нѣтъ.

Примѣръ парадоксовъ и катастрофальныхъ положеній разсмотримъ ниже (см. § 22), по распространеніи теоремы Чебышева на цѣпи испытаній съ зависимыми перемѣнными $x, y, \ldots, u$.

Аналитическій діагнозъ, проникающій *опросами* (анкетами) и *наблюденіями*, вообще эвристическимъ методомъ § 18, въ дѣятельность наиболѣе мелкихъ операцій съ цѣлями математическаго анализа устойчивости и, наоборотъ, возможности обрывовъ и катаклизмовъ, представляетъ важную часть изслѣдованія числовыхъ и графическихъ закономѣрностей природы и общественной культуры.

Парадоксальности иногда разрѣшаются при помощи именно мелкихъ операцій, т. е. съ помощію возможнаго аналитическаго расчлененія крупныхъ операцій на мелкія въ ихъ сосуществованіи. Такъ, отдѣльныя операціи $O_1, O_2, \ldots, O_m$ иногда сами могутъ быть осложненными, состоя изъ болѣе простыхъ (элементарныхъ) мелкихъ операцій $o_1, o_2, o_3, \ldots$ Пусть

$$O_k = (o_1 o_2 \ldots o_{s_k}), \quad k = 1, 2, \ldots, m \quad \ldots\ldots \quad (29)$$

Число m' мелкихъ (элементарныхъ) операцій, содержащихся въ составѣ крупныхъ операцій $O_1, O_2, \ldots, O_m$, будетъ:

$$m' = s_1 + s_2 + \ldots + s_m \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29')$$

При этомъ разложеніи каждое изъ перемѣнныхъ $x, y, \ldots, u$, производимыхъ операціями $O_1, O_2, \ldots, O_m$, явится итогомъ соотвѣтственныхъ перемѣнныхъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$, производимыхъ операціями $o_1, o_2, o_3, \ldots$, вошедшими въ соотвѣтствующую изъ крупныхъ операцій O.

При такомъ углубленномъ анализѣ операцій и ихъ продуктовъ вышеприведенныя теоремы I и II § 21 приложатся къ m' операціямъ, домогающимся явленія $n = x + \ldots + u$, и угроза парадоксальнаго курса, если онъ, казалось, имѣетъ мѣсто, можетъ разложиться съ помощію мелкихъ силъ.

---

*) Подобныхъ парадоксальностей не представляетъ обсужденіе итога явленій, разсматриваемыхъ въ теоремахъ Я. Бернулли и Пуассона; поэтому законъ большихъ чиселъ въ формахъ Я. Бернулли и Пуассона считается въ статистикѣ своего рода краеугольнымъ камнемъ. Но при этомъ не вырабатывается понятія о бурной неустойчивости итога въ менѣе элементарныхъ случаяхъ, которая слагается изъ легкихъ, но безчисленныхъ изъяновъ устойчивости помянутаго краеугольнаго камня статистиковъ.

Но если сами операціи $O_1, O_2, \ldots, O_m$ суть элементарныя, то это углубленіе уже не возможно. Если при этомъ имѣетъ мѣсто не закономѣрность, а парадоксальность, то она тутъ зависитъ уже отъ существенныхъ обстоятельствъ въ условіяхъ и корняхъ (естественныхъ причинахъ) процесса; она не разсѣется въ прахъ никакими истолкованіями; тутъ *наступаетъ конфузъ логики А «трехъ законовъ»* (см. § 15), которой до сихъ поръ мы строго подчиняли наши выводы.

Парадоксальные случаи этого рода надо распознавать и выключать или же парализовать въ ихъ корняхъ или естественныхъ причинахъ, вводя гарантіи (жертвы) противъ нихъ и сопротивленія, борьбою ослабляющія дѣйствіе отрицательныхъ причинъ.

Страховой резервъ противъ кризисовъ или парадоксальныхъ положеній, соображаемый съ помощію числа

$$Q = \sqrt{g} = m^{\sigma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

или числоваго порядка σ, при $\sigma > \frac{1}{2}$ дорогъ и тѣмъ дороже, чѣмъ болѣе σ. при $\sigma = +\infty$ (въ случаѣ ультрапарадокса) онъ безконечно дорогъ. Напротивъ, при $\sigma < \frac{1}{2}$ страховой резервъ, также полезный и даже нужный (въ виду относительности этой устойчивости), дешевъ и тѣмъ дешевле, чѣмъ менѣе σ. При $\sigma = -\infty$ страховой резервъ ничего не стоитъ, *тутъ устойчивость итожнаго явленія n абсолютно непоколебимая, совершенно прочная, твердая.*

Скала σ *градуируетъ* устойчивость итога n и опредѣляется скалою Q, а $Q^2 = g$. Благодаря неравенствамъ (23) и равенствамъ (31), скалы σ и ν, Q и τ подраздѣляются на части. Скалы σ и ν разсѣкаются каждая на двѣ части числомъ $\frac{1}{2}$; скалы Q и τ разсѣкаются каждая на двѣ части числами $\sqrt{m}$ и $\sqrt{m^{-1}}$; скала итога n дѣлится на двѣ части пунктомъ Σa. Скалы эти получаютъ значеніе важныхъ номографическихъ элементовъ, помогающихъ ориентироваться въ наличности либо относительной устойчивости средней величины ξ, или $n : m$, либо обрывовъ этой устойчивости и обсуждаемой оперативной числовой закономѣрности.

Устойчивость во многихъ случаяхъ дается дорогою цѣною, а не даромъ. Въ составъ сложной операціи приходится на практикѣ вводить *гарантіи* устойчивости, о чемъ рѣчь будетъ ниже. При недостаткѣ устойчивости нужна раскладка тяжести сопротивленія причинамъ неустойчивости и относительности. Исчисленіе вѣроятностей $\Delta P_{m,n}$ тутъ необходимо при правильной раскладкѣ этого сопротивленія. Тутъ же вступаетъ въ силу жертва, организованная взаимная поддержка и нормативные законы (нравственные и гражданскіе), опредѣляющіе частный долгъ.

Пограничный пунктъ области парадоксальныхъ положеній соотвѣт-

ствуетъ переходному случаю, когда $\sigma = \frac{1}{2}$ *); отнесемъ и этотъ случай къ сомнительнымъ, нуждающимся въ интерпретаціи и другихъ мѣрахъ.

Статистики пользуются мѣриломъ M устойчивости, которое называется статистическимъ модулемъ устойчивости итога массовыхъ явленій. Величину $M = Q\sqrt{2} : m = \sqrt{2g} : m$ будемъ считать статистическимъ модулемъ **) устойчивости итога n перемѣнныхъ $x, y, \ldots, u$ или же ихъ средней величины ξ.

Относительная устойчивость переходитъ въ абсолютную при $M = 0$; устойчивость дѣлается призрачною или парадоксальною при $M \geqq \sqrt{2}$.

§ 21. Интегральное выраженіе, представляющее вѣроятность $\Delta P_{m,n}$ перемѣннаго n. Ея производящая функція. Распространеніе теоремы Чебышева на итогъ перемѣнныхъ величинъ, частію зависимыхъ, частію независимыхъ другъ отъ друга.

I. Вернемся къ обозначеніямъ §§ 18 и 19 и обобщимъ ихъ. Предположимъ, что перемѣнныя $x, y, z, \ldots, u$ могутъ быть какъ независимыми такъ и зависимыми; обозначимъ чрезъ $\Delta P_{m,n}$ вѣроятность того, что будетъ имѣть силу равенство:

$$x + y + \ldots + u = n \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Обозначимъ чрезъ $F(v)$ женератрису (производящую функцію) вѣроятности $\Delta P_{m,n}$ перемѣннаго n, т. е. будемъ полагать:

$$F(v) = \sum_{n'}^{n''} \Delta P_{m,n} \cdot v^n, \ldots\ldots\ldots (2)$$

гдѣ сумма $\sum_{n'}^{n''}$ распространяется на всѣ возможныя значенія итога n перемѣнныхъ $x, y, \ldots, u$; n' и n'' суть наименьшее и наибольшее изъ всѣхъ значеній n. Эти значенія, записанныя въ строку (3) (и въ графу соотв. таблицы), въ возрастающемъ порядкѣ, пусть будутъ:

$$n_1, n_2, \ldots, n_l, \ldots, n_N; \ldots\ldots\ldots (3)$$

гдѣ

$$n_1 = n' \text{ и } n_N = n''.$$

Если h есть общая наибольшая мѣра всѣхъ возможныхъ разностей $n_k - n_l$, то, какъ доказывается съ помощію равенства (2), будемъ имѣть:

$$\Delta P_{m,n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(v \cdot e^{w\theta\sqrt{-1}}) \cdot (v \cdot e^{w\theta\sqrt{-1}})^{-n} \, d\theta, \ldots\ldots (4)$$

*) При классификаціи на основаніи сложныхъ признаковъ неизбѣжны двусмысленные переходные случаи. Такъ біологи становились въ затруднительное положеніе, когда въ Австраліи были найдены животныя, которыхъ по признакамъ можно было причислить и къ птицамъ и къ звѣрямъ.

**) Ср. выше, § 10, и ср. *А. А. Чупровъ*: Очерки по теоріи статистики. Изданіе 2-е, стр. 252. С.-Петербургъ, 1911 г.

гдѣ
$$w = \frac{1}{h} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4')$$

По поводу производящей функціи $F(v)$ слѣдуетъ замѣтить *лемму*:

Лемма I. *Положимъ:*
$$\Phi(v) = \varphi_1(v) \cdot \varphi_2(v) \ldots \varphi_m(v), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$
гдѣ $\varphi_1(v)$, $\varphi_2(v)$, ..., $\varphi_m(v)$ *суть женератрисы вѣроятностей значеній перемѣнныхъ* x, y, ..., u, *т. е.*
$$\varphi_1(v) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\alpha} p_\lambda v^{x_\lambda}, \quad \varphi_2(v) = \sum_{\mu=1}^{\mu=\beta} q_\mu v^{y_\mu}, \ldots, \varphi_m(v) = \sum_{\omega=1}^{\omega=\varepsilon} t_\omega v^{u_\omega} \quad . \quad . \quad (6)$$

Если x, y, ..., u *суть независимыя перемѣнныя величины, то будемъ имѣть тождественно:*
$$F(v) = \Phi(v); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$
въ противномъ случаѣ функціи $F(v)$ *и* $\Phi(v)$ *будутъ различными.*

Доказывая эту лемму, нужно разложить произведеніе
$$\varphi_1(v) \cdot \varphi_2(v) \ldots \varphi_m(v)$$
по восходящимъ степенямъ n параметра v, предполагая, что вторыя части равенствъ (6) также представляютъ разложенія по восходящимъ степенямъ v.

При этомъ съ помощью элементарнаго правила умноженія полиномовъ (6) и посредствомъ теоремъ умноженія и сложенія вѣроятностей убѣждаемся, что коэффиціенты этого разложенія представятся вѣроятностями $\Delta P_{m,n}$, т. е. разложеніе это совпадетъ со второю частью равенства (2), если только перемѣнныя x, y, ..., u независимыя; тождество (7) этимъ оправдано. Вторая же половина вышеприведенной леммы, отрицающая тождество (7), очевидна сама собою.

Доказанная лемма и формула (4) играютъ важную роль въ исчисленіи вѣроятности $\Delta P_{m,n}$ и въ построеніи ея діаграммы по плану § 19, а также въ составленіи системъ индуктивныхъ уравненій, затронутыхъ въ § 15.

II. Распространимъ теперь теорему Чебышева о среднихъ величинахъ (см. § 18) на случай итога n, представляющаго смѣсь зависимыхъ и независимыхъ перемѣнныхъ величинъ
$$x, y, z, \ldots, u.$$

Теорема Чебышева (§ 18) сохраняетъ полную силу для случая, когда $m = 1$, т. е. для случая одного только перемѣннаго n. При этомъ она можетъ быть продиктована въ видѣ слѣдующей леммы.

Лемма II. *Пусть* n_0 *и* G *представляютъ математическія ожиданія величинъ* n *и* $(n - n_0)^2$. *Вѣроятность* P *того, что будутъ имѣть силу неравенства:*
$$-t \cdot \sqrt{G} \leqq n - n_0 \leqq +t \cdot \sqrt{G},$$

должна при произвольномъ положительномъ числѣ t удовлетворять неравенствамъ:

$$1 \geqq P > 1 - \frac{1}{t^2}.$$

При этомъ съ помощью женератрисы $F(v)$ и ея разложенія (2) находимъ:

$$n_0 = F'(1) \text{ и } G = m \cdot g(1), \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

гдѣ

$$g(v) = \frac{v}{m}\frac{d}{dv}\left\{ v \quad \frac{F'(v)}{F(v)} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots (8')$$

Иначе ту же величину G можно опредѣлить такъ:

$$G = \left[\frac{d^2\{F(e^\rho)\, e^{-n_0\rho}\}}{d\rho^2} \right]_{\rho=0} \quad \ldots\ldots\ldots (8'')$$

Исходя изъ леммы II и принимая во вниманіе равенство (1), можемъ высказать слѣдующую теорему о среднихъ величинахъ.

Теорема I. *Пусть* τ *есть произвольное положительное число. Если* n_0 *есть математическое ожиданіе итога зависимыхъ и независимыхъ перемѣнныхъ величинъ* $x, y, z, \ldots, u$, *производимыхъ соотвѣтственно операціями:* $O'_1, O'_2, \ldots, O'_m$, *и если т.* g (1) *есть математическое ожиданіе величины*

$$(x + y + z + \ldots + u - n_0)^2,$$

то вѣроятность P *неравенствъ:*

$$-\tau\sqrt{g(1)} < \frac{x + y + z + \ldots + u}{m} - \frac{n^0}{m} < +\tau\sqrt{g(1)} \quad \ldots (9)$$

должна удовлетворять неравенствамъ:

$$1 > P > 1 - \frac{1}{m\tau^2} \quad \ldots\ldots\ldots (9')$$

Эта теорема представляетъ собою распространеніе доказанной въ § 18 теоремы Чебышева; ибо величины $x, y, \ldots, u$ могутъ быть въ разсматриваемомъ случаѣ не вполнѣ независимыми. Если же всѣ онѣ попарно независимы, то получается теорема Чебышева, выведенная въ § 18 для независимыхъ перемѣнныхъ.

Формула (4) и, съ другой стороны, вышеприведенная теорема показываютъ, что пріемы и теоремы исчисленія вѣроятностей итоговъ имѣютъ такую высокую общность, которая объединяетъ случаи какъ независимыхъ перемѣнныхъ, такъ и смѣси зависимыхъ и независимыхъ перемѣнныхъ $x, y, z, \ldots, u$.

Но случай независимыхъ перемѣнныхъ выдѣляется въ виду его принципіальнаго значенія (онъ разъясняетъ *антиномію* Канта: *свободная причин-*

ность или, напротивъ, только *необходимость*? см. § 7), а также и въ виду простоты констатированія естественныхъ условій независимости причинъ явленій и независимости величинъ, сопутствующихъ явленіямъ. Простота же соотвѣтствующей теоріи при этомъ обусловливается существованіемъ тождества (7).

Обобщенный законъ большихъ чиселъ при обсужденіи смѣси независимыхъ и зависимыхъ перемѣнныхъ величинъ. Парадоксальные случаи.

Предположимъ, что частію независимыя, частію зависимыя величины x, y, z, ..., u являются продуктомъ дѣятельности соотвѣтствующихъ операцій O'_1, O'_2, O'_3, ..., O'_m и что операціи эти могутъ черпаться изъ природы или изъ свойствъ человѣка въ неограниченномъ количествѣ, т. е. число m въ устанавливающейся сложной операціи $(O'_1 O'_2 \dots O'_m)$ можетъ возрастать неограниченно.

Полагая

$$\xi = \frac{n}{m} = \frac{x + y + z + \dots + u}{m} \text{ и } a = \frac{n_0}{m} = \frac{F'(1)}{m}, \quad \dots (10)$$

примемъ (какъ въ § 18) за *основной признакъ* закона большихъ чиселъ обоснованіе достовѣрности предположенія, что разность $\xi - a$ при большомъ m колеблется въ очень узкихъ предѣлахъ около нуля и стремится къ нулю въ предѣлѣ при возрастаніи m до ∞.

Если примемъ этотъ основной признакъ и будемъ исходить изъ теоремы I, то обобщенный законъ большихъ чиселъ, распространенный на случай смѣси независимыхъ и зависимыхъ перемѣнныхъ, можемъ продиктовать въ формѣ слѣдующей теоремы:

Теорема II. *Если величину* τ, *указанную въ теоремѣ I, возможно выбрать такъ, чтобы количества* $\tau \sqrt{g(1)}$ *и* $\frac{1}{m\tau^2}$ *были весьма малы и стремились къ нулю при возрастаніи* m *до* ∞, *то вѣроятность* P *того, что абсолютная величина разности* $\xi - a$ *окажется весьма малымъ количествомъ, не превосходящимъ предѣла* $\tau \sqrt{g(1)}$, *будетъ болѣе* $1 - \frac{1}{m\tau^2}$ *и будетъ стремиться къ* 1 (*къ достовѣрности*) *при возрастаніи* m *до* ∞.

Введемъ обозначенія:

$$Q = \sqrt{g(1)} = m^{\sigma}.$$

Порядокъ σ числа Q можетъ градуировать устойчивость средней величины ξ. Изъ разсмотрѣнія неравенствъ (9) и (9′) легко убѣдиться, что условія теоремы II осуществляются, если при всѣхъ значеніяхъ возрастающаго числа m имѣетъ силу неравенство:

$$\sigma < \frac{1}{2}.$$

Въ самомъ дѣлѣ при этомъ можемъ положить:

$$\tau = m^{-\nu},\ \sigma < \nu < \frac{1}{2},$$

и величины $\tau\sqrt{g(1)} = m^{-(\nu-\sigma)}$ и $1 : (m\tau^2) = m^{-(1-2\nu)}$ будутъ стремиться къ нулю при возрастаніи m до ∞. При этомъ устойчивость явленія ξ будетъ высока.

Напротивъ, если при всѣхъ значеніяхъ возрастающаго числа m будетъ имѣть силу неравенство:

$$\sigma \geqq \frac{1}{2},$$

то условія теоремы II опрокинутся, каковой случай, несовмѣстимый съ основнымъ признакомъ закона большихъ чиселъ, назовемъ парадоксальнымъ и при томъ сильнымъ. Устойчивость явленія ξ при этомъ окажется призрачною.

Ультрапарадоксальный случай пусть имѣетъ мѣсто тогда, когда порядокъ σ весьма великъ и стремится къ ∞ при возрастаніи m до ∞. Ультрапарадоксъ *первой* категоріи при этомъ пусть соотвѣтствуетъ предѣльному равенству $F'(1) = \infty$ при $m = \infty$; ультрапарадоксъ *второй* категоріи пусть соотвѣтствуетъ величинѣ $F'(1)$, не выходящей изъ конечныхъ предѣловъ при возрастаніи m до ∞.

Термины эти аналогичны тѣмъ, кои установлены въ § 20 для парадоксальныхъ надрывовъ въ случаѣ независимыхъ перемѣнныхъ; но при обсужденіи устойчивости итога n зависимыхъ перемѣнныхъ діагнозъ парадоксальныхъ случаевъ имѣетъ нѣкоторыя особенности.

Примѣры парадоксальныхъ и даже ультрапарадоксальныхъ заданій для случая зависимыхъ перемѣнныхъ извѣстны. Сюда принадлежитъ знаменитый Петербургскій парадоксъ, изслѣдованный Д. Бернулли и приводимый ниже.

При общей сложности явленій діагнозъ устойчивости ихъ итоговъ и, наоборотъ, діагнозъ ея обрыва или наличности катастрофальнаго положенія довершаются съ помощью наблюденія и статистики. Но нужно установить à priori мѣры, понятія, скалы, числовыя нормы и оперативные и матеріальные заклады устойчивости, методологію и классификацію.

Отношеніе свободной причинности къ необходимости.

Классификація парадоксовъ для случая зависимыхъ перемѣнныхъ представляетъ аналогическую параллель указанной въ § 20 классификаціи, соотвѣтствующей случаю независимыхъ перемѣнныхъ и имѣющей принципіальную важность въ качествѣ основной концепціи теоріи вѣроят-

ностей. Обѣ эти аналогически параллельныя классификаціи даже сливаются (образуютъ *инволюцію*), когда зависимыя послѣдовательныя операціи O'_1, O'_2, . . . ,O'_m какою-либо реформою преобразуются въ неза висимыя.

Если учитывать величины зависимости явленій другъ отъ друга съ помощію мѣры δp, указанной въ §§ 7 и 26, то можемъ разсматривать случаи болѣе и менѣе сильной или слабой зависимости перемѣнныхъ другъ отъ друга или отъ данной послѣдовательности испытаній O_1', O_2',..., O'_m. Всѣ случаи, трактуемые въ теоремахъ I и II, являются промежуточными относительно крайнихъ случаевъ: 1) полной зависимости послѣдовательныхъ испытаній и 2) независимости послѣдовательныхъ испытаній другъ отъ друга и независимости даваемыхъ ими перемѣнныхъ величинъ.

Поэтому въ смѣшанныхъ формулахъ практики и при открытіи эмпирическихъ законовъ естественно брать за точки опоры для мысли два крайнихъ порядка: съ одной стороны, порядокъ вполнѣ независимыхъ испытаній дающій въ результатѣ своего дѣйствія независимыя величины и вѣроятности ихъ итога, учитываемые по теоремѣ Чебышева (§ 18) и съ помощію ихъ діаграммы (§ 19), и, съ другой стороны, брать за опорную почву мышленія порядокъ полной (крѣпостной) зависимости (неразрывной причинной связи) послѣдовательныхъ испытаній, опять обусловливающій возможность получать достовѣрность. Это—крайніе полюсы кантіанской антиноміи: *свобода* или *необходимость?* Что же касается порядка, соотвѣтствующаго невполнѣ зависимымъ и невполнѣ независимымъ испытаніямъ, то его можно обсуждать какъ *равнодѣйствующую* и того, и другого крайняго порядка чистыхъ сужденій (т е. á priori) и испытаній. Она, какъ въ случаѣ параллелограмма силъ, можетъ быть ближе къ одному порядку и дальше отъ другаго порядка.

Выраженіе закона большихъ чиселъ совершенно преобразуется тогда, когда какою-либо реформою свободныя связи замѣняются связями неразрывными. Тогда послѣ реформы получается процессъ, *твердопредопредѣленный*, какъ движеніе планетъ въ Ньютоніанской механикѣ.

Законъ большихъ чиселъ въ классической формѣ теоремъ Я. Бернулли, Пуассона и Чебышева, напротивъ, трактуетъ рядъ или группу *независимыхъ* испытаній O_1, O_2, O_3, . . . , приводящихъ соотвѣтственно къ ряду и итогу независимыхъ величинъ x, y, z, . . .

Случаи послѣдовательныхъ не вполнѣ независимыхъ испытаній O_1', O_2', O_3', . . . , O_m' мыслимы для какого-либо очага дѣятельности лишь при существованіи группы независимыхъ операцій O_1, O_2, O_3, . . . , O_r въ другомъ разрѣзѣ той же самой разсматриваемой дѣятельности, — иначе говоря, при наличности въ данномъ очагѣ или кондомніумѣ множественности независимыхъ въ свои моменты (изолированныхъ въ себѣ, неприкосновенныхъ) дѣйствующихъ индивидуальныхъ причинъ.

Невозможно пересказать всѣхъ видовъ нерѣшительной зависимости въ рядахъ послѣдовательныхъ опытовъ. Въ турнирахъ, напримѣръ, шахматной игры мыслимы милліоны способовъ состязанія между двумя сторонами игроковъ; и многіе ходы, ведущіе къ побѣдамъ, совершаются игроками по обстоятельствамъ момента и вдохновенію во время самой игры. То же бываетъ на войнѣ, въ торговой битвѣ, въ судебномъ состязаніи, въ борьбѣ съ природой. Теорія въ подобныхъ случаяхъ можетъ либо съ помощью метода производящихъ функцій трактовать общіе метологическіе вопросы; либо она можетъ ставить такой вопросъ: при какихъ упрощенныхъ заданіяхъ нерѣшительной зависимости явленій въ рядѣ послѣдовательныхъ испытаній O_1', O_2', O_3',... возможно установить законъ большихъ чиселъ, аналогическій классической его формѣ.

Рѣшеніе второго вопроса разработано съ числовой стороны въ трудахъ *H. Bruns* *) и *А. А. Маркова* **); методологическая же ***) общая основная сторона того же вопроса разбирается въ моихъ трудахъ.

§ 22. Петербургскій парадоксъ. Нравственное ожиданіе, какъ покровительственная эвристическая таксологическая формула, соотвѣтствующая выходу изъ кризисовъ-парадоксовъ первой категоріи.

I. Изъ числа сильныхъ парадоксовъ, обнаруживающихъ недостатокъ логики A «трехъ законовъ», приведемъ классическій примѣръ, извѣстный подъ именемъ Петербургской задачи или Петербургскаго парадокса. Изслѣдованіе этого вопроса привело къ пересмотру и дополненію эвристическихъ формулъ, рѣшающихъ таксологическую проблему политической экономіи, уже затронутую въ § 16.

Изложимъ эту задачу словами академика *В. Я. Буняковскаго* (см. «Основанія математической теоріи вѣроятностей»), согласуя изложеніе съ вышеуказанными скалярными мѣрами устойчивости.

---

*) *H. Bruns*: 1) «Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmasslehre». Leipzig, 1906, 2) «Das Gruppenschema für zufällige Ereignisse» (Abhandlungen der mathematisch-physischen Klasse der Königlich Sachsischen Gesellschaft der Wissenschaften Band XXIX. Leipzig, 1906).

**) *А. А. Марковъ*: 1) Распространеніе закона большихъ чиселъ на величины, зависящія другъ отъ друга. (Извѣстія Физико-Матем Общества при Казанск. Университетѣ, 2-я сер., т. XV, № 4. 1907); 2) Изслѣдованіе замѣчательнаго случая зависимыхъ испытаній. (Извѣстія Имп. Академіи Наукъ. 1907); 3) О нѣкоторыхъ случаяхъ теоремы о предѣлѣ вѣроятности. (Извѣстія Имп. Акад. Наукъ. 1908); 4) Распространеніе предѣльныхъ теоремъ исчисленія вѣроятностей на сумму величинъ, связанныхъ въ цѣпь. (Записки Имп. Академіи Наукъ. Томъ XXII, № 9), 5) О связанныхъ величинахъ, не образующихъ настоящей цѣпи. (Извѣстія Имп. Акад. Наукъ за 1911 г. № 3).

***) *П. А. Некрасовъ*: 1) Философія и логика науки о массовыхъ проявленіяхъ человѣческой дѣятельности. Москва, 1902. 2) Общій основной методъ производящихъ функцій въ приложеніи къ исчисленію вѣроятностей. (Математ. Сборникъ, т. XXVIII).

Эта задача первоначально была предложена *Монморту* *) *Николаемъ Бернулли*, а *Даніилъ Бернулли*, по ея поводу, предложилъ ввести въ Анализъ Вѣроятностей новую мѣру выгоды, выражаемую нижеуказанною формулою (1). Онъ помѣстилъ свои изслѣдованія по этому предмету въ Запискахъ Петербургской Академіи Наукъ **), и вотъ вѣроятная причина, по которой упоминаемая задача получила наименованіе *Петербургской*. Вопросъ состоитъ въ слѣдующемъ:

Два игрока A и B играютъ въ извѣстную игру «орелъ или рѣшетка» *на слѣдующихъ условіяхъ: 1° игра продолжается до тѣхъ поръ, пока не вскроется орелъ, и 2° игрокъ B платитъ 2 червонца игроку A, если* орелъ *вскроется при первомъ бросаніи монеты, 4 червонца, если при второмъ, 8 червонцевъ, если при третьемъ, и такъ далѣе до m-го бросанія, удваивая платимую сумму при каждомъ бросаніи. Спрашивается, сколько игрокъ A, при вступленіи въ игру, обязанъ заплатить игроку B для обоюдной безобидности.*

Процессъ игры представляетъ связанную цѣпь m испытаній (бросаній монеты), опредѣляющихъ итогъ n величинъ $x, y, \ldots, u$, какъ возможное для игрока A въ соотвѣтственныхъ испытаніяхъ значеніе выигрыша. При этомъ величины $x, y, \ldots, u$ будутъ каждая имѣть по два значенія, изъ коихъ одно есть нуль, а другое опредѣляется мѣстомъ рѣшающаго испытанія въ ихъ цѣпи; для испытанія, занимающаго въ этой цѣпи мѣсто k, будемъ имѣть: $x_k + y_k + \ldots + u_k = n_k = 2^k$.

Вѣроятность выхода этого именно выигрыша есть $\frac{1}{2^k}$; женератриса $F(v)$ этой вѣроятности будетъ:

$$F(v) = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{1}{2^k} v^{2^k}.$$

Для опредѣленія математической выгоды игрока A замѣчаемъ, что вѣроятности, соотвѣтствующія его выигрышамъ:

$$2, 4, 8, \ldots, 2^m \text{ червонцевъ},$$

изобразятся по порядку дробями

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^m};$$

слѣдовательно, въ силу § 17, математическая выгода n_0 игрока A будетъ:

$$n_0 = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{8} + \ldots + 2^m \cdot \frac{1}{2^m} = m.$$

---

*) *Analyse des jeux de hasard*, стр. 402. Задача 5-я.

**) *Commentarii Academiae Petropolitanae, T. V.*

Изъ этого оказывается, что A, вступая въ игру, долженъ заплатить m червонецъ игроку B для безобидности игры. Но если не существуетъ никакого условія, ограничивающаго величины числа m. именно, числа бросаній монеты, то и слѣдуетъ положить m безконечнымъ; это самое приводитъ къ заключенію, что для математическаго равенства игры, ставка игрока A, равная n_0 червонцамъ, должна быть безконечно большая. Такое слѣдствіе вычисленія, основаннаго на началѣ математическаго равенства игры, очевидно, прямо противорѣчитъ указаніямъ здраваго разсудка. И дѣйствительно, найдется ли человѣкъ разсудительный, который согласился бы заступить мѣсто игрока A, и рисковалъ въ эту игру, не говоримъ уже сумму безконечную, что невозможно, но даже сумму нѣсколько значительную? Не предпочтетъ ли всякій поставить себя на мѣсто игрока B, довольствуясь при вступленіи въ игру, полученіемъ ставки даже посредственной величины. Откуда же происходитъ такое явное противорѣчіе между началомъ равенства или безобидности для обѣихъ сторонъ и здравымъ понятіемъ объ одномъ и томъ же вопросѣ?

Обсужденіе разсматриваемаго примѣра при помощи женеритрисы $F(v)$ обнаруживаетъ, что

$$g(1) = \frac{1}{m} G = \sum_{k=1}^{k=m} 2^k \cdot \left(1 - \frac{m}{2^k}\right)^2 .$$

Отсюда легко убѣдиться, что величина $g(1)$ весьма велика, а также весьма великъ и числовой порядокъ σ, выводимый изъ уравненія

$$m^\sigma = \sqrt{g(1)}.$$

Слѣдовательно, неустойчивость результата игры будетъ разительная. Чтобы игра имѣла оканчательный результатъ, нужно, разумѣется, весьма большое число m ограничить, фиксировать. При этомъ положеніе игрока B будетъ не лучше положенія A; счастье игрока B въ рядѣ подобныхъ игръ должно сильно колебаться: нынче онъ милліонеръ, а завтра нищій.

Очевидно, въ этомъ примѣрѣ законъ большихъ чиселъ опровидывается, и имѣетъ мѣсто парадоксальный случай, который по вышеустановленной классификаціи принадлежитъ къ ультрапарадоксамъ первой категоріи. При этомъ таксологическая проблема экономіи, намѣченная въ § 16, для подобныхъ случаевъ должна быть взята подъ сомнѣніе и дополнена.

II. Математики XVIII вѣка старались объяснить этотъ парадоксъ, по скольку онъ встрѣчается въ жизненныхъ испытаніяхъ, связанныхъ съ экономическими кризисами или патологическими состояніями, вызванными недостаткомъ предметовъ удовлетворенія насущныхъ человѣческихъ нуждъ. Для этихъ обстоятельствъ Даніилъ Бернулли принялъ во вниманіе тяготу парадоксальнаго положенія, эксцессы коего опасны для всей среды, и

предложилъ вмѣсто обыкновенной таксологической формулы физической выгоды особую *эвритическую* формулу «нравственной выгоды». Въ соотношеніи той и другой формулы ожиданія и взысканія существуетъ *кривизна*, направленная жертвой въ одну сторону и алгебраически подобная относительной кривизнѣ пространствъ Лобачевскаго и Эвклида. Формула нравственной выгоды предполагаетъ систематическія покровительственныя жертвы, необходимыя для жизни цѣлой среды.

Д. Бернулли предполагаетъ, что ожидаемое приращеніе *наличнаго* физическаго имущества x разложено по скалѣ x на дифференціальные элементы, и допускаетъ потомъ, что безконечно малое приращеніе нравственной выгоды, соотвѣтствующее какому ни есть элементу физическаго имущества, прямо пропорціонально абсолютной величинѣ этого элемента, и обратно пропорціонально первоначальному имуществу, увеличенному суммою всѣхъ элементовъ предшествовавшихъ тому, который принимается въ соображеніе. На такомъ основаніи, изобразивъ чрезъ dx безконечно малое приращеніе наличнаго физическаго имущества x, а чрезъ dy соотвѣтственное приращеніе нравственной выгоды, будемъ имѣть

$$dy = \frac{kdx}{x},$$

разумѣя подъ k постоянный положительный коеффиціентъ. Интегрируя это уравненіе, получимъ

$$y = \varphi(x) = k \log x + \log h, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

гдѣ h изображаетъ постоянное количество, которое опредѣлится по данному на скалѣ y частному значенію величины y, соотвѣтственно данному же на скалѣ x частному значенію x.

Исходя изъ этого опредѣленія, которое безъ сомнѣнія нужно *опытомъ* эвристически приспособить къ дѣйствительности, мы должны еще замѣтить, что величины x и y не допускаютъ значеній равныхъ нулю или отрицательныхъ; ибо это противорѣчило бы здравому понятію о вещахъ. Дѣйствительно, если примемъ даже, что существуетъ человѣкъ, въ строгомъ смыслѣ лишенный всякаго имущества, то и ему самое его существованіе доставляетъ уже нѣкоторое нравственное довольство, равное по крайней мѣрѣ цѣнности средствъ, необходимыхъ для поддержанія жизни. Этотъ самый человѣкъ, говоритъ Лапласъ, конечно не согласился бы взять единовременно незначительную сумму, напримѣръ, сто рублей, съ условіемъ, чтобы истративъ ее, рѣшительно отказаться отъ всякихъ средствъ къ пропитанію.

Формула (1) съ ея нижеуказаннымъ обобщеніемъ, выражающая мѣру нравственной выгоды, предложенную Даніиломъ Бернулли, до сихъ поръ допускается почти всѣми математиками. Благодаря приспособляемости неопредѣленныхъ постоянныхъ величинъ k и h, эта формула, въ прило-

женіяхъ своихъ къ различнымъ вопросамъ изъ Анализа Вѣроятностей, приводитъ къ результатамъ полезнымъ, согласующимся съ указаніями здраваго разсудка. Чтобы показать работу съ помощію этой формулы на примѣрѣ, приложимъ форму Бернулли къ *застрахованіямъ*.

Но, прежде, покажемъ какимъ образомъ опредѣляется нравственная выгода лица, ожидающаго нѣсколькихъ событій, съ появленіемъ которыхъ сопряжены для него барыши и убытки.

Пусть будетъ a физическое имущество лица, а $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ ожидаемыя имъ приращенія основного капитала a. Тѣ изъ величинъ $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, которыя соотвѣтствуютъ потерямъ, условимся принимать съ отрицательными знаками. Изобразимъ также чрезъ $p, q, r \ldots$ соотвѣтственныя вѣроятности приращеній $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, и положимъ $p + q + r + \ldots = 1$. По условіямъ вопроса, ожидаемыя или мысленныя имущества лица могутъ быть соотвѣтственно:

$$k \log (a + \alpha) + \log h,\ k \log (a + \beta) + \log h,\ k \log (a + \gamma) + \log h, \ldots$$

Помноживъ эти величины по порядку на $p, q, r \ldots$, получимъ частныя нравственныя ожиданія, сумма которыхъ будетъ равна полному нравственному ожиданію. Означивъ это послѣднее чрезъ Y, найдемъ:

$$Y = k\,[p \log (a + \alpha) + q \log (a + \beta) + r \log (a + \gamma) + \ldots] + \\ + (p + q + r + \ldots) \log h,$$

или

$$Y = k \log \{(a + \alpha)^p\ (a + \beta)^q\ (a + \gamma)^r \ldots\} + \log h.$$

Изобразимъ чрезъ X наличное физическое имущество, соотвѣтствующее нравственному Y; будемъ имѣть

$$Y = k \log X + \log h, \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

и слѣдовательно,

$$X = (a + \alpha)^p\ (a + \beta)^q\ (a + \gamma)^r \ldots\ldots\ldots\ldots (2')$$

Вычтя изъ второй части этого уравненія первоначальное имущество a, получимъ то приращеніе $X - a$ физическаго имущества, непосредственное обладаніе которымъ доставило бы лицу одинаковое нравственное довольство, какъ и надежда получить выгоды $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ Изъ сказаннаго же въ § 17 слѣдуетъ, что математическое ожиданіе приращенія физической выгоды, въ разсматриваемомъ случаѣ, выразится суммою

$$p\alpha + q\beta + r\gamma \ldots$$

При отрицательныхъ значеніяхъ нѣкоторыхъ выгодъ $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ формула (2) сохраняетъ смыслъ до тѣхъ поръ, пока $a + \alpha > 0$, $a + \beta > 0$, $a + \gamma > 0, \ldots$

Изъ формулы (2′) можно извлечь примѣчательныя слѣдствія, относящіяся къ невыгодѣ игоръ, лотерей, закладовъ и другихъ оборотовъ, за-

висящихъ отъ случайностей и предполагаемыхъ математически равными. Также, можно доказать, что менѣе невыгодно подвергать имущество свое по частямъ такимъ опасностямъ, которыя не зависятъ однѣ отъ другихъ, чѣмъ въ цѣлости одной опасности. Изъ той же формулы легко заключить объ обоюдной выгодѣ застрахованій, при извѣстной, опредѣленной вычисленіемъ преміи. Предложимъ здѣсь доказательство послѣдней истины.

Для большей ясности положимъ, что лицо A застраховываетъ отъ какой либо опасности, какъ-то отъ огня, града, кораблекрушенія и т. п. часть α полнаго своего имущества, которое изобразимъ $1 + \alpha$. Пусть будетъ p вѣроятность, что α уцѣлѣетъ отъ опасности, и слѣдовательно, $1 - p$ вѣроятность утраты α. Для математическаго равенства застрахованія, A долженъ заплатить Обществу премію, равную $(1 - p)\ \alpha$. Теперь мы покажемъ, что заплативъ даже болѣе $(1 - p)\ \alpha$, A можетъ еще имѣть выгоду нравственную, между тѣмъ какъ Страховое Общество получитъ тѣмъ болѣе вѣрную прибыль, чѣмъ кругъ его дѣйствій будетъ обширнѣе. Для этого замѣтимъ, что сумма

$$p\ [k\ log\ (1 + \alpha) + log\ h] + (1 - p)\ [k\ log\ 1 + log\ h] = \\ = pk\ log\ (1 + \alpha) + log\ h$$

изобразитъ нравственное ожиданіе лица A до застрахованія части α, а выраженіе

$$k\ log\ (1 + p\alpha) + log\ h$$

опредѣлитъ его нравственную выгоду въ случаѣ застрахованія. Но ясно, что

$$k\ log\ (1 + p\alpha) + log\ h > pk\ log\ (1 + \alpha) + log\ h,$$

ибо, по сокращеніи, получимъ неравенство

$$log\ (1 + p\alpha) > p\ log\ (1 + \alpha),$$

которое дѣлается очевиднымъ, если изобразимъ его въ видѣ

$$\int_0^a \frac{pd\alpha}{1 + p\alpha} > \int_0^a \frac{pd\alpha}{1 + \alpha};$$

и въ самомъ дѣлѣ каждое изъ значеній дроби $\frac{p}{1+p\alpha}$ будетъ болѣе соотвѣтственныхъ значеній другой дроби $\frac{p}{1+\alpha}$, по причинѣ $1 + \alpha > 1 + p\alpha$; слѣдовательно, и значеніе самаго интеграла $\int_0^a \frac{pd\alpha}{1+p\alpha}$, какъ состоящаго изъ элементовъ большихъ нежели въ интегралѣ $\int_0^a \frac{pd\alpha}{1+\alpha}$, превзойдетъ величину сего послѣдняго. Отсюда заключаемъ, что отдаваніе на страхъ по преміи, опредѣляемой правиломъ математическаго равенства игры,

выгодно для застрахователя, потому что оно увеличиваетъ его нравственное ожиданіе. Посмотримъ еще, сколько застрахователь, сверхъ безобидной преміи $(1 - p)\ \alpha$, можетъ заплатить Страховому Обществу при условіи, чтобъ застрахованіе не уменьшило и не увеличило нравственной его выгоды. Изобразимъ чрезъ z этотъ избытокъ. Въ такомъ случаѣ, первое изъ двухъ выраженій

$$kp\ log\ (1 + \alpha) + log\ h \quad \text{и} \quad k\ log\ (1 - z + p\alpha) + log\ h$$

изобразитъ нравственное ожиданіе лица A до застрахованія части α полнаго имущества $1 + \alpha$, а второе, напротивъ того, когда застрахуетъ α, заплативъ премію, равную $(1 - p)\ \alpha + z$. Чтобы нравственная выгода лица A не измѣнилась чрезъ отдаваніе на страхъ, предыдущія два вывыраженія должны быть равны между собою. Отсюда

$$p\ log\ (1 + \alpha) = log\ (1 - z + p\alpha),$$

или

$$z = 1 + p\alpha - (1 + \alpha)^p.$$

Вотъ предѣлъ прибавочной преміи къ той, которая опредѣляется безобидностью математическою. Если прибавочная премія, платимая Страховому Обществу, то есть величина z, будетъ менѣе найденнаго количества $1 + p\alpha - (1 + \alpha)^p$, то, при многочисленныхъ оборотахъ, Общество будетъ имѣть вѣрные барыши, и, вмѣстѣ съ тѣмъ, застрахователи выиграютъ со стороны нравственной выгоды. Эта истина обнаруживаетъ несомнѣнную пользу Страховыхъ Учрежденій.

III. Приведемъ опять изъ книги В. Я. Буняковскаго извлеченіе, относящееся къ обобщенію формулы Д. Бернулли.

Условимся принимать за мѣру нравственной выгоды произвольную функцію φ физическаго имущества x, ограничивая произвольность этой функціи $\varphi\ (x)$ тремя только условіями: 1°, чтобы эта функція $\varphi\ (x)$ была непрерывна между предѣлами, заключающими разсматриваемыя значенія физическаго имущества x; 2°, чтобы между тѣми же предѣлами, съ возрастаніемъ физическаго имущества x, нравственная выгода $\varphi\ (x)$ также получала приращеніе, и 3°, чтобы это приращеніе уменьшалось по мѣрѣ увеличенія физическаго имущества. Весьма естественно допустить непрерывность функціи $\varphi\ (x)$, когда примемъ въ соображеніе, что въ мірѣ нравственномъ, какъ и въ физическомъ, многое возможно подчинять закону постепенности. Что же касается до остальныхъ двухъ условій, то они согласуются съ обыденными понятіями объ разсматриваемомъ предметѣ, и подтверждаются ежедневнымъ опытомъ. Весьма простой примѣръ объяснитъ это съ возможною очевидностью. Положимъ, что человѣкъ, имущество котораго можетъ быть оцѣнено въ 10.000 руб., пріобрѣтаетъ сверхъ того одну тысячу; нѣтъ сомнѣнія, что нравственная его выгода

увеличится чрезъ это пріобрѣтеніе. Но если, впослѣдствіи, состояніе этого самого человѣка сдѣлается значительнѣе, и будетъ, напримѣръ, простираться до 100.000 руб., то вторичное пріобрѣтеніе одной тысячи хотя и увеличитъ его нравственное довольство, но уже не въ той степени какъ въ первый разъ, когда все имущество его состояло только изъ 10.000 руб.

На такомъ основаніи легко видѣть, что первая производная $\varphi'(x)$ нравственнаго ожиданія $\varphi(x)$ будетъ величина положительная, а вторая, $\varphi''(x)$, величина отрицательная. Дѣйствительно, означивъ чрезъ h приращеніе физическаго имущества x, получимъ, въ силу второго изъ приведенныхъ выше условій,

$$\varphi(x+h) > \varphi(x).$$

Но, по извѣстной теоремѣ,

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + h\varphi'(x+\lambda h),$$

гдѣ $\lambda > 0$ и < 1; слѣдовательно,

$$\varphi(x) + h\varphi'(x+\lambda h) > \varphi(x)$$

или

$$\varphi'(x+\lambda h) > 0.$$

Такъ какъ приращеніе h можетъ быть уменьшено по произволу, то найдется $\varphi'(x) > 0$. Съ другой стороны, написавъ вмѣсто $\varphi(x+h)$ разложеніе

$$\varphi(x) + h\varphi'(x) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(x+\theta h),$$

гдѣ $\theta > 0$ и < 1, замѣчаемъ, что увеличеніе нравственной выгоды, соотвѣтствующее приращенію h физическаго имущества, будетъ

$$h\varphi'(x) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(x+\theta h).$$

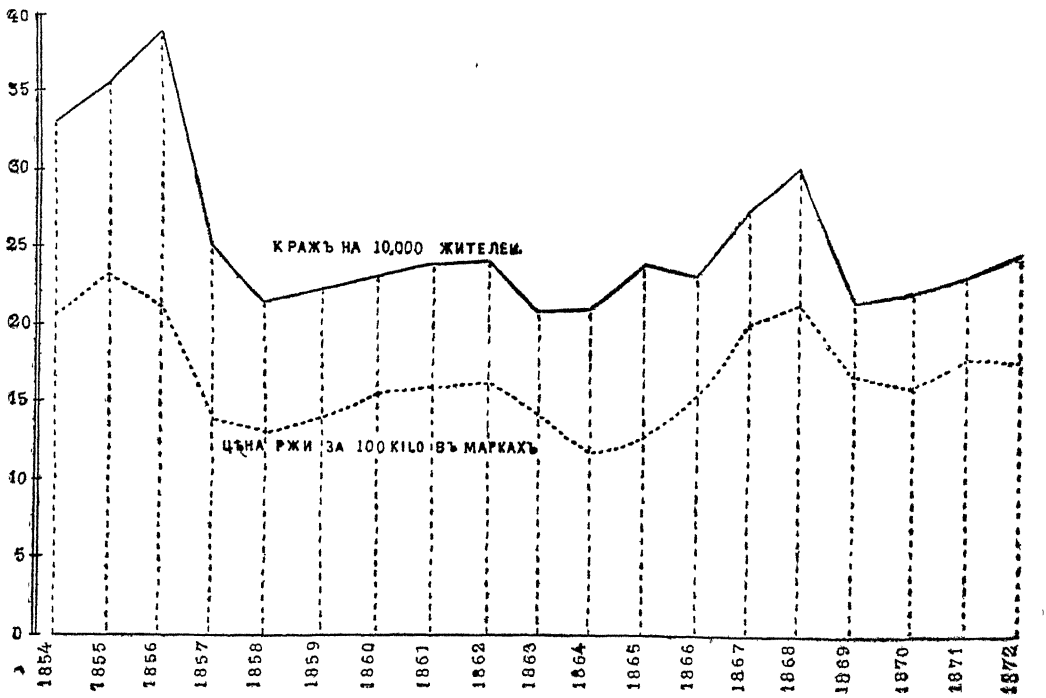
Но мы сказали, что это увеличеніе дѣлается менѣе и менѣе по мѣрѣ возрастанія имущества x; слѣдовательно, предыдущая сумма должна уменьшаться съ увеличеніемъ приращенія h, а для этого необходимо чтобы второй членъ $\frac{h^2}{1.2}\varphi''(x+\theta h)$ былъ отрицательный, ибо первый, именно $h\varphi'(x)$, какъ доказано выше, есть величина положительная. Поэтому $\frac{h^2}{1.2}\varphi''(x+\theta h) < 0$, или $\varphi''(x+\theta h) < 0$. Но уже замѣчено, что h есть количество, которое можно уменьшать по произволу; слѣдовательно $\varphi''(x) < 0$.

Итакъ, единственныя условія, которымъ подчинена разсматриваемая нами непрерывная функція $\varphi(x)$, изображающая мѣру нравственной выгоды, соотвѣтствующей физическому имуществу x, заключается въ томъ, чтобы $\varphi'(x) > 0$, а $\varphi''(x) < 0$. Эти два условія суть строгія математическія слѣдствія указанія здраваго разсудка.

Легко видѣть, что функція $k \log x + \log h$, принятая Даніиломъ Бернулли, удовлетворяетъ предписаннымъ выше требованіямъ. Дѣйствительно, первая ея производная $\frac{k}{x}$ есть величина положительная, а вторая, $-\frac{k}{x^2}$, величина отрицательная; сверхъ того, функція $k \, lxg \, x + \log h$ непрерывна для всѣхъ положительныхъ значеній физическаго имущества x.

Пангеометрическая кривизна покровительственной таксологической формулы. Субъективные потенціалы пользъ. Условность и гипотетичность закона Рикардо. Объективный потенціалъ пользъ, правящій интересы.

Нравственно-общественное значеніе основной оцѣночной задачи видно изъ сопостановленія діаграммъ цѣнъ ржи и числа кражъ; приводимъ для наглядности (см. фиг. 1) рисунокъ параллели цѣнъ и кражъ, заимствованный изъ сочиненій по статистикѣ. При развитіи гнетущихъ кризисовъ покровительство наиболѣе угнетенной сторонѣ есть задача, стоющая систематическихъ заботъ правительства.



Фиг. 1.

Полезно примѣтить, что эвристическія мѣры физической выгоды относятся къ эвристическимъ же мѣрамъ нравственной выгоды такъ, какъ

мѣры длины Эвклидовой геометріи относятся къ мѣрамъ длины геометріи Лобачевскаго, истолкованной по способу Кели (см. мою книгу «Приложеніе алгебры къ геометріи», изд. 2-е).

Иначе говоря, аксіомы порядка математической выгоды и аксіомы порядка нравственной выгоды *одинаковы при малыхъ колебаніяхъ имущества*, ибо отношенія другъ къ другу двухъ соотв. малыхъ приращеній имущества для того и для другого порядка исчисленія выражаются постояннымъ количествомъ, какъ видно изъ формулъ (2) и (2′); количество k, какъ скалярная величина, аналогично кривизнѣ неэвклидовскаго пространства и можетъ быть названо кривизною покровительственной таксологической формулы. При значительномъ же приращеніи имущества аксіомы того и другого порядка учетовъ существенно расходятся.

Тутъ играетъ роль и субъективность взгляда на малость и значительность колебанія *наличнаго* имущества: что богатому наличными благами обществу кажется ничтожнымъ, то бѣдняку кажется значительнымъ. Лепта вдовы цѣнится дороже большой жертвы купца.

Обобщеніемъ эвристической формулы Д. Бернулли можно пользоваться въ раскладкѣ тягости парадоксальнаго положенія какъ наиболѣе гибкою алгебраическою формулою, приспособляемою къ общему режиму и къ природѣ взыскиваемаго или, наоборотъ, выпускаемаго на рискъ физическаго имущества. Такъ поступаетъ, напримѣръ, Курно, опредѣляющій цѣну *наличной* единицы товара въ зависимости отъ общаго количества выпускаемой на рынокъ товарной массы, предполагая то режимъ монополіи ея сбыта, то режимъ свободной конкурренціи ея производства и сбыта *).

При изобиліи на рынкахъ наличнаго блага x, приращаемая къ нему новая физическая единица $\mathbf{a}$ стоитъ сравнительно (по чувству пользы) дешево; при недостаточномъ же наличномъ количествѣ блага x на рынкахъ ожидаемая физическая единица $\mathbf{a}$ цѣнится по чувству пользы дороже. Поэтому функція $\varphi(x)$ Д. Бернулли, какъ и ея вышеприведенное обобщеніе, могутъ быть приспособлены по своимъ свойствамъ къ элементарнымъ понятіямъ и вопросамъ таксологической проблемы, подгоняя форму $\varphi(x)$ и финансовую цѣну ω_x единицы $\mathbf{a}$ блага x (съ помощію статистики и интерполированія) къ тому, чтобы приблизительно имѣло силу дифференціальное уравненіе:

$$\varphi(x) - \varphi(x - \mathbf{a}) = \lambda\omega_x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

При малости выбранной единицы $\mathbf{a}$ можемъ замѣнить это уравненіе слѣдующимъ уравненіемъ:

$$\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x} = \lambda\omega_x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3')$$

*) *H. Laurent:* Stat. Mathém. *П. А. Некрасовъ*: Матем. статист.

Отсюда и изъ установленныхъ свойствъ функціи $\varphi(x)$ видно, что цѣна ω_x единицы **a** будетъ убывать (какъ слѣдуетъ и по чувству относительной полезности) при возрастаніи наличнаго блага x.

Наличность, конечно, измѣряется суммарнымъ запасомъ блага x на весь предстоящій потребительскій интервалъ времени τ, называемый иногда *продовольственной компаніей*.

Таксологическія уравненія въ политической экономикѣ распространяются на совокупности какъ движимыхъ капиталовъ разнаго рода x, такъ и труда y, оплачиваемаго какъ экономическая цѣнность, приходо-расходная біологически и въ смыслѣ переселеній.

Лоранъ *) вмѣстѣ съ Парето разсматриваетъ эвристическую формулу $V = f(x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots)$ экономическихъ цѣнностей двухъ родовъ: 1) въ видѣ производящихъ силъ $y_1, y_2 \ldots$ и 2) въ видѣ производныхъ благъ $x_1, x_2, \ldots$, выбранную à priori такъ, чтобы имѣли силу уравненія:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = \lambda\omega_{x_1}, \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = \lambda\omega_{x_2}, \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial y_1} = \lambda\omega_{y_1}, \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = \lambda\omega_{y_2}, \ldots, \; . \qquad (4)$$

гдѣ λ есть неопредѣленный коэффиціентъ.

Назовемъ эту функцію V потенціаломъ пользъ; Парето называетъ эту функцію непереводимымъ словомъ «l' ophélimité», считая ее *субъективною* мѣрою разсматриваемаго хозяйствующаго индивидуума, ведущаго торговлю экономическими благами.

Максимумъ функціи V, взятый при условіяхъ, ограничивающихъ торговый обмѣнъ благъ въ каждый короткій срокъ продовольствія ихъ *матеріальною наличностью*, опредѣляетъ съ помощію уравненій (4) всѣ цѣны по закону, извѣстному подъ именемъ закона Рикардо: *если осуществляется максимумъ потенціала пользъ, то стоимости производства благъ бываютъ равны цѣнѣ услугъ, предложенныхъ и употребленныхъ.*

Этотъ законъ однакоже содержитъ неустойчивое условіе относительно наличности. Онъ не учитываетъ хитроумной міровой спекуляціи, вмѣшивающей въ оборотъ подъ именемъ матеріальной наличности бумагу и другіе иногда вовсе ненужные фокусы биржи и торговли, спускаемые подъ именемъ полезныхъ услугъ, предложенныхъ и употребленныхъ. Поэтому законъ Рикардо и соотвѣтствующая ему соціальная механика, содержа не всегда вѣрную гипотезу, требуютъ постоянной и значительной опытной объективной таксологической поправки и введенія съ этой цѣлью графической скалы вѣроятностей и частостей для индуктивной повѣрки. И въ самомъ дѣлѣ обиженныя стороны апеллируютъ къ провомѣрію посредствомъ вмѣшательства третейскаго суда и государственной власти.

---

*) *H. Laurent*: Statistique mathém., стр. 176—181.

Связывая потенціалъ пользъ V съ правопорядкомъ цѣлаго государства, съ его резервомъ S и съ его освѣдомленностью во всѣхъ областяхъ, мы можемъ дать этому потенціалу уже не субъективный, а объективный смыслъ, правящій движеніе цѣнности и колесо исторіи противъ власти злого рока и привязывающій достовѣрныя сужденія эвритическимъ методомъ къ закону большихъ чиселъ и къ графическимъ закономѣрностямъ.

Если въ короткій срокъ считать коеффиціентъ λ постояннымъ. то можемъ потенціалъ V составить изъ функцій $\varphi_1(x_1)$, $\varphi_2(x_2), \ldots$, $f_1(y_1)$, $f_2(y_2)\ldots$, удовлетворяющихъ уравненіямъ типа (3′): а затѣмъ, ища максимумъ V, можемъ, при гарантіяхъ со стороны наличности S у объективнаго правомѣрія, рѣшить важнѣйшія проблемы политической экономіи въ духѣ системы, покровительственной культурѣ земли, труду и укрѣпленію достаточнаго жизненнаго основанія для всѣхъ трудящихся классовъ даннаго государства (см. мою книгу: «Математическая статистика», гл. VI—VII).

§ 23. Изслѣдованіе еще одного замѣчательнаго класса зависимыхъ испытаній, обнаруживающаго на своей границѣ изъянъ логическаго закона противорѣчія.

Обобщая теорему Я. Бернулли, А. А. Марковъ разсматриваетъ вопросъ о числѣ появленій нѣкотораго событія E при извѣстномъ числѣ послѣдовательныхъ испытаній, связанныхъ между собою такимъ образомъ, что выполняются слѣдующія условія:

1) вѣроятность событія E при каждомъ изъ этихъ испытаній O'_1, O'_2, O'_3, ... имѣетъ одну и ту же величину p, пока всѣ испытанія еще стоятъ впереди и результаты ихъ остаются всѣ вообще неопредѣленными;

2) вѣроятность E при каждомъ испытаніи O'_k имѣетъ вторую опредѣленную величину p_1, если результаты послѣдующихъ испытаній O'_{k+1}, O'_{k+2}, . . еще не наступили и остаются неизвѣстными, а непосредственно предшествующее испытаніе O'_{k-1} привело къ событію E, каковы бы ни были результаты прочихъ испытаній;

3) наконецъ, вѣроятность событія E при каждомъ испытаніи O'_k имѣетъ третью величину p_2, если результаты послѣдующихъ испытаній не наступили и остаются неопредѣленными, а непосредственно предшествующее испытаніе O'_{k-1} привело къ событію не—E или $\bar{E}$.

Какъ видно изъ этихъ предположеній, каждое испытаніе связано въ цѣпь съ непосредственно предшествующимъ ему испытаніемъ и оказывается независимымъ отъ остальныхъ предшествующихъ ему испытаній, коль скоро извѣстенъ результатъ непосредственно предшествующаго испытанія.

Для краткости введемъ обозначенія:

$$q = 1 - p,\ q_1 = 1 - p_1,\ q_2 = 1 - p_2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Разсматриваемый рядъ испытаній совпалъ бы съ рядомъ испытаній теоремы Я. Бернулли, если бы величины p_1 и p_2 совпали съ p.

Относительно чиселъ p_1, p_2, p важно замѣтить, что только два изъ нихъ можно задавать произвольно, а не всѣ три, такъ какъ они связаны соотношеніемъ

$$p = p \cdot p_1 + q \cdot p_2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

получаемымъ по теоремѣ о полныхъ вѣроятностяхъ. Если будемъ задавать произвольно величины p и

$$\delta = p_1 - p_2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

то для опредѣленія остальныхъ величинъ будемъ имѣть простыя формулы:

$$\left.\begin{array}{c} q = 1 - p,\quad p_1 = p + \delta \cdot q,\quad q_1 = q - \delta \cdot q, \\ p_2 = p - \delta \cdot p,\quad q_2 = q + \delta \cdot p. \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Очевидно, произвольная величина δ можетъ имѣть значенія въ промежуткѣ -1 и $+1$.

Перемѣнныя $x, y, z, \ldots$, соотвѣтствующія испытаніямъ $O'_1, O'_2, O'_3, \ldots$, имѣютъ каждое по два значенія: 1 и 0, смотря по тому, какое изъ событій E и F состоится въ соотвѣтствующемъ испытаніи. Сумма $x + y + z + \ldots + u$ представитъ ожидаемое число n появленій явленія E при m послѣдовательныхъ испытаніяхъ.

Займемся разысканіемъ производящей функціи $F(v)$ для вѣроятности появиться событію E то или другое число n разъ въ m разсматриваемыхъ испытаніяхъ $O'_1, O'_2, \ldots, O'_m$. Для достиженія этой цѣли введемъ еще слѣдующія обозначенія.

Пусть

$$\Delta P_{k,n}$$

означаетъ вѣроятность, что въ первыя k испытаній событіе E появится n разъ; пусть далѣе

$$\Delta P^0{}_{k,n} \quad \text{и} \quad \Delta P'_{k,n}$$

означаютъ такія же вѣроятности какъ $\Delta P_{k,n}$, но при добавочномъ условіи, которое для $\Delta P^0{}_{k,n}$ состоитъ въ томъ, что E не появится при $k^{\text{-мъ}}$ испытаніи, а для $\Delta P'_{k,n}$ состоитъ напротивъ въ томъ, что E имѣетъ мѣсто при $k^{\text{-мъ}}$ испытаніи. По теоремѣ сложенія будемъ имѣть:

$$\Delta P_{k,n} = \Delta P^0{}_{k,n} + \Delta P'_{k,n}.$$

Станемъ затѣмъ разсматривать три функціи:

$$\varphi_k = \sum \Delta P^0{}_{k,n} \cdot v^n,\ \psi_k = \sum \Delta P'_{n,k} \cdot v^n,\ \omega_k = \sum \Delta P_{k,n}\, v^n.$$

которыя въ силу предшествующаго имъ равенства связаны такъ:

$$\omega_k = \varphi_k + \psi_k.$$

Искомая же производящая функція $F(v)$ представится такъ:

$$F(v) = \omega_m = \sum \Delta P_{m,n} \cdot v^n. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

При помощи теоремы о полныхъ вѣроятностяхъ убѣждаемся, что

$$\Delta P^0{}_{k+1,n} = q_1 \Delta P'_{k,n} + q_2 \Delta P^0{}_{k,n},$$
$$\Delta P'_{k+1,n} = p_1 \Delta P'_{k,n-1} + p_2 \Delta P^0{}_{k,n-1}.$$

Слѣдовательно,

$$\varphi_{k+1} = q_1 \psi_k + q_2 \varphi_k,$$
$$\psi_{k+1} = p_1 v \psi_k + p_2 v \varphi_k.$$

Изъ этихъ уравненій посредствомъ исключенія то одной, то другой изъ функцій φ и ψ получаются два совершенно одинаковыя уравненія:

$$\varphi_{k+2} - (p_1 v + q_2) \cdot \varphi_{k+1} + (p_1 - p_2) \cdot v \cdot \varphi_k = 0,$$
$$\psi_{k+2} - (p_1 v + q_2) \cdot \psi_{k+1} + (p_1 - q_2) \cdot v \cdot \psi_k = 0.$$

Складывая ихъ, находимъ:

$$\omega_{k+2} - (p_1 v + q_2)\ \omega_{k+1} + (p_1 - p_2)\ v\ \omega_k = 0. \quad \ldots \quad (6)$$

При этомъ имѣемъ:

$$\omega_1 = pv + q,\ \omega_2 = pp_1 v^2 + (pq_1 + qp_2)v + qq_2. \quad \ldots \quad (7)$$

Затѣмъ вообразимъ функцію

$$\Omega(v,t) = \omega_0 + \omega_1 t + \omega_2 t^2 + \ldots + \omega_k t^k + \ldots, \quad \ldots \quad (8)$$

гдѣ t есть произвольное число и ω_0 выводится изъ уравненія (6) при $k = 0$.

Умноживъ уравненіе (6) на t^k, затѣмъ давая въ немъ числу k значенія: 0, 1, 2, 3, ..., и, наконецъ, складывая всѣ полученныя уравненія, получимъ соотношеніе, опредѣляющее функцію $\Omega(v,t)$, именно:

$$\Omega(v,t) = \frac{1 - \delta\ (qv + p)t}{1 - \{pv + q + \delta\ (qv + p)\}t + \delta v t^2}. \quad \ldots \quad (9)$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ

$$F(v) = \omega_m = \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots m} \left\{\frac{d^m\ \Omega(v\ ,\ t)}{dt^m}\right\}_{t=0}. \quad \ldots \quad (10)$$

Математическое ожиданіе величины n выразится такъ:

$$\sum n \cdot \Delta P_{m,n} = \left[\frac{dF(v)}{dv}\right]_{v=1} = \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots m} \left\{\frac{d^m}{dt^m}\ \frac{d}{dv}\ \Omega(v\ ,\ t)\right\}_{v=1,\ t=0}.$$

Замѣтивъ, что

$$\frac{d^i\ \Omega(v\ ,\ t)}{dv^i} = \frac{1 \cdot 2 \ldots i\ p \cdot t^i (1 - \delta t)^2\ (p + \delta q - \delta t)^{i-1}}{\{1 - (\delta p + q)t - (p + \delta q - \delta t)tv\}^{i+1}},$$

легко убѣдимся, что

$$\text{мат. ожид. } n = m \,.\, p \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Далѣе, матем. ожиданіе G величины $(n - mp)^2$ на основаніи формулы (5) представится такъ:

$$G = \sum (n - mp)^2 \,.\, \Delta P_{m,n} = \left[\frac{d^2\{F(e^\theta)\; e^{-mp\theta}\}}{d\theta^2}\right]_{\theta=0} =$$

$$= \frac{1}{1 \,.\, 2 \,.\, .\, .\, m}\left\{\frac{d^m}{dt^m}\;\frac{d^2}{d\theta^2}[\Omega(e^\theta, t) \,.\, e^{-mp\theta}]\right\}_{t=\theta=0}.$$

Отсюда найдемъ:

$$G = m \,.\, g(1) = mpq \,.\, \frac{1+\delta}{1-\delta} + \frac{q\delta}{1-\delta}\left(\frac{\delta^m}{1-\delta} - \frac{\delta}{1-\delta} - 2p\right). \quad . \quad (12)$$

Очевидно, задача представляетъ *ультрапарадоксъ* при $\delta = 1$; тутъ $p_1 = 1$, $p_2 = 0$, $G : m = g(1) = \infty$ и задача пріобрѣтаетъ особый смыслъ, обращающій результатомъ одного только перваго изъ испытаній O'_1, O'_2, ... вѣроятности дальнѣйшихъ явленій въ достовѣрность *впчнаго* утвержденія одного только изъ явленій E и F и отрицанія другаго.

Далѣе, при значеніяхъ величины δ, весьма близкихъ къ 1, величина $G : m$ будетъ весьма большая. Этотъ *парадоксальный* случай, имѣющій мѣсто тогда, когда p_1 есть почти 1, а p_2 есть почти нуль, дорого стоитъ, если его выкупить. Въ логикѣ эти парадоксы соотвѣтствуютъ изъяну закона противорѣчія, который торжествуетъ лишь при абсолютныхъ аподиктическихъ достовѣрностяхъ $p_1 = 1$ и $p_2 = 0$; такихъ аподиктическихъ достовѣрностей однакоже часто у логики «трехъ законовъ» (см. введеніе) не хватаетъ по самымъ существеннымъ вопросамъ науки, общественности и исторіи.

Изъ формулы (12) и изъ вышеприведенной общей теоремы I (§ 21) получается слѣдующій выводъ.

Пусть $-1 \leqq \delta < 1$. *Вѣроятность* P *неравенствъ*

$$-t < \frac{n}{m} - p < +t$$

должна удовлетворять неравенствамъ:

$$1 > P > 1 - \left\{pq \,.\, \frac{1+\delta}{1-\delta} + \frac{q\delta}{m(1-\delta)}\left(\frac{\delta^m - \delta}{1-\delta} - 2p\right)\right\}\frac{1}{mt^2},$$

и, слѣдовательно, при неограниченномъ возрастаніи m *разность* $\frac{n}{m} - p$ *должна съ относительною достовѣрностью содержаться въ весьма тѣсныхъ границахъ* $-t$ *и* $+t$, *сливающихся въ предѣлѣ съ нулемъ; ибо* t *можно опредѣлить такъ*:

$$t = m^{-\sigma}, \quad 0 < \sigma < \frac{1}{2}.$$

§ 24. Органическія гарантіи устойчивости и меліорацій въ процессахъ различнаго рода. Точка насыщенія. Денежное обращеніе. Кассы.

I. Въ глубинѣ стихійнаго процесса борьба съ причинами сильныхъ парадоксальныхъ случаевъ совершается включеніями (ассигнованіями) въ историческій оборотъ (см. § 15) отборныхъ частичныхъ силъ, гарантирующихъ общую устойчивость и разныя меліораціи.

Бываютъ ряды операцій, въ которыхъ сильные парадоксальные случаи совершенно невозможны. Такъ, приложеніе исчисленія вѣроятностей къ операціямъ теоремы Пуассона обнаруживаетъ, что сильные парадоксы несвойственны этому процессу, т. е. итогъ n явленій E, наблюдаемыхъ въ этомъ родѣ операцій, обнаруживаетъ наклонность къ хорошей устойчивости, если судить о ней при помощи скалы M (см. §§ 10 и 20).

Пуассоновскія операціи $O_1, O_2, \ldots, O_m$ во всѣхъ случаяхъ могутъ служить *оперативною гарантіей* устойчивости итоговъ явленія E, если эти операціи по отбору, по штату включать въ болѣе сложную стихійную кооперацію $\Omega = (O_1 O_2 \ldots O_s)$, которую назовемъ *смѣшанной* и которая пусть въ природѣ или обществѣ развивается естественно.

Существуетъ множество рядовъ Чебышевскихъ операцій, производящихъ альтернативные итоги величинъ, обладающіе всегда относительною устойчивостью явленій цѣнныхъ итоговъ $x + y + \ldots + u$, т. е. несовмѣстимые съ сильными парадоксальными случаями. Эти операціи, легко открываемые съ помощію теоремы Чебышева, также можно отбирать и включать въ стихійную кооперацію Ω, какъ группу гарантій на повышеніе степени ея устойчивости или на забалансированіе ея неустойчивости.

Если X есть сумма $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_s$ полезныхъ плодовъ или же сумма цѣнныхъ качествъ (дѣеспособностей), которую, какъ результатъ дѣятельности въ кооперації Ω, нужно повысить, то стараются отборомъ и искусственными включеніями новыхъ операцій достигнуть двухъ цѣлей: не только устойчивости, но и постепеннаго повышенія итоговъ типа X. Вторую цѣль назовемъ вообще *меліораціей*.

Эта двоякая цѣль достигается: 1) культурою отбираемыхъ операцій $O_1, O_2, \ldots, O_m$, повышающею ихъ совокупную дѣятельность ΣE и величину математическаго ожиданія n_0 итога $x + \ldots + u$ и 2) затѣмъ включеніемъ кооперації $(O_1 O_2 \ldots O_m)$ въ стихійную кооперацію Ω.

Желательный эффектъ λ, получаемый этимъ пріемомъ, есть функція отъ чиселъ m и s или, лучше сказать, функція отъ функціи $f(m, s) = m : (s + m)$. Эту функцію $f(m, s)$ назовемъ показателемъ гарантіи на полученіе искомаго эффекта λ; ея скала f сличается со скалою λ.

Если при данномъ значеніи q функціи $f(m, s)$ получается эффектъ λ_0, необходимый и достаточный для цѣли, то пунктъ q скалы $f(m, s)$ можно

назвать *точкой насыщенія*. Положеніе точки насыщенія зависитъ, конечно, отъ цѣли λ_0 и отъ природы разсматриваемой стихійной кооперации Ω, насыщаемой гарантіями. Капля дождевой воды недостаточна для опрѣсненія ведра морской воды, но немного дрожжей достаточно для полученія ведра пива. Если включаемыя операціи способны, какъ закваска или дрожжи, *прививать* свое творчество съ его идеей и ремесломъ «дикимъ» (стихійнымъ) операціямъ, то число q бываетъ весьма мало.

Чтобы въ стихійной смѣшанной операціи $\Omega = (O_1 O_2 \ldots O_s)$ обезпечивать меліорацію вмѣстѣ съ устойчивостью, нужно включать въ нее до насыщенія соотвѣтствующія отборныя операціи, обладающія желательными свойствами и прививающія ихъ къ «дикимъ» операціямъ.

Этотъ культурный матахимическій и химическій способъ эволюціи примѣняется практиками давно. Соотвѣтствующія отборныя способности культивируются или просто по достоинству берутся изъ природы при надлежащей осмотрительности избранія.

II. Кромѣ культурныхъ оперативныхъ гарантій, связанныхъ со способностями развивать плодотворную дѣятельность ΣE, будемъ различать еще матеріальныя гарантіи, т. е. матеріальные заклады и постоянные источники, обезпечивающіе погашеніе важнѣйшихъ матеріальныхъ обязательствъ и правильный ходъ производства, обмѣна и удовлетворенія жизненныхъ потребностей.

Кадастръ, т. е. нанесеніе предметовъ на карту или планъ, опредѣляетъ наличность недвижимыхъ закладовъ, какъ земля, дома и пр. Владѣніе же, укрѣпляемое графически, гарантируется *ломбардомъ*.

Бумажное денежное обращеніе гарантируется золотымъ закладомъ государства, поддерживающимъ курсъ λ довѣрія къ символическому бумажному рублю, по возможности, въ равномъ достоинствѣ съ настоящимъ золотымъ рублемъ.

Будемъ исходить изъ предположенія, что первичная чистая символическая форма денегъ есть печатный символъ въ видѣ бумажныхъ знаковъ; вторичная же форма денегъ, вызванная лукавствомъ, пусть представляется опять бумажными деньгами, но гарантированными золотомъ.

При этомъ перемѣнныя m и s въ показателѣ гарантіи $f(m, s)$ будутъ числами золотыхъ и бумажныхъ денегъ въ оборотѣ и закладѣ, при данныхъ единицахъ денежнаго счета.

Пусть точка q насыщенія соотвѣтствуетъ биржевому курсу $\lambda_0 = 0{,}99$ бумажнаго рубля на золото. Если q *выше* этой цыфровой нормы, т. е. наблюдается пересыщеніе денежной операціи золотою гарантіей ($\lambda > 0{,}99$), то, при обычной нехваткѣ оборотныхъ капиталовъ въ предпріятіяхъ частнаго хозяйства, соотвѣтствующая финансовая политика равносильна зарытію талантовъ золота въ землю. Если же q *ниже* нормы, т. е. замѣ-

чается недосыщеніе денежнаго дѣла золотою гарантіей ($\lambda < 0{,}99$), то опять плохо: съ паденіемъ курса λ бумажныхъ денегъ на золотую валюту начинается извѣстная биржевая игра (спекуляція) на разницу въ курсѣ.

Статистика золотого и бумажнаго обращенія денегъ представляетъ удобный примѣръ для поясненія, ибо ее можно найти за разные интервалы времени τ и въ разныхъ территоріяхъ и продѣлать вычисленіе показателя $f(m, s)$ и биржеваго курса λ бумажной денежной единицы на золотую валюту. Современныя государства, наиболѣе пользующіяся статистикой въ вопросахъ политической экономіи (какъ Бельгія, страна крупныхъ статистиковъ: Кетле, Мансьона), умѣютъ понижать точку q насыщенія безъ пониженія λ, т. е. умѣютъ увеличивать бумажное обращеніе денегъ не впадая въ circulus vitiosus и другія ошибки.

Къ этого рода странамъ можно примѣнить афоризмъ Д. И. Менделѣева: «Капиталъ есть не золото, а довѣріе». Если бы оправданіе довѣрія на дѣлѣ и умѣнье хорошо вѣрить и хорошо сомнѣваться передъ дѣломъ были высоки въ странѣ, то можно бы перейти къ чистой бумажной формѣ денегъ, когда $q = 0$, и къ власти понятій чистаго разума. Но на дѣлѣ лукавство страстей этому всегда мѣшаетъ.

По причинѣ лукавства люди безъ матеріальныхъ закладовъ не могутъ полагаться на слово во многихъ дѣлахъ, требующихъ, казалось бы, лишь честнаго отношенія къ своему слову и къ слову ближняго. Но всякому обыкновенному лукавству есть предѣлъ, который можетъ измѣрять научная статистика и опредѣлять запасъ гарантіи противъ его господства.

III. Достояніе государства, высшей страховой инстанціи, гарантированной жизнью и имуществомъ подданныхъ, будемъ считать неисчерпаемымъ. Земско-общественныя кассы гарантій, напротивъ, исчерпаемы, а потому покупаютъ у высшаго страховаго института страховые полисы на случай, когда будутъ прижаты къ стѣнѣ мѣстнымъ злымъ рокомъ, форсмажерными для нихъ кризисами. Вопросъ этотъ тѣсно связанъ съ вопромъ о сѣти національныхъ банковъ разнаго промышленнаго значенія.

Задача эта ставитъ на разсмотрѣніе вопросъ о вѣроятности несостоятельности кассы и о стоимости гарантированія исправнаго выполненія лежащихъ на кассѣ обязательствъ въ случаѣ ея несостоятельности. Эта задача представляетъ большой интересъ въ виду связи ея съ важнѣйшими вопросами финансовой и политической ариометики (ибо слову «касса» можно давать и прямой, и аллегорическій смыслъ).

Предполагается, что касса, обезпеченная наличнымъ фондомъ A_m и обязанная выдачею случайныхъ уплатъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$, можетъ оказаться несостоятельною, т. е. неспособною покрыть эти уплаты фондомъ A_m.

Эта несостоятельность, очевидно, будетъ имѣть мѣсто тогда, когда окажется, что

$$A_m < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

При этомъ условіи касса не въ состояніи покрыть всѣхъ обязательныхъ для нее уплатъ изъ фонда A_m, причемъ гарантирующій исправность кассы для удовлетворенія непокрытыхъ обязательствъ долженъ выдать сумму $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_m - A_m$. При этихъ условіяхъ разсматриваемая задача формулируется такъ:

Задача. *Касса обязана выдачею при извѣстныхъ независимыхъ обстоятельствахъ т соотвѣтственныхъ уплатъ* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$, *обезпечиваемыхъ къ началу оборота наличнымъ ея фондомъ* A_m, *который оказывается менѣе наибольшаго значенія* α'' *суммы* $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_m$. *Администрація кассы обязана пріобрѣсти гарантію, обезпечивающую выполненіе ея обязательствъ въ случаѣ несостоятельности. Какова вѣроятность* P *несостоятельности кассы и какова стоимость* C *гарантіи?*

Вѣроятность P несостоятельности кассы есть, очевидно, вѣроятность осуществленія неравенства (1). Придерживаясь установленныхъ въ § 19 правилъ, замѣчаемъ, что эта вѣроятность P совпадаетъ съ вѣроятностью $P(A_m, \alpha'')$, гдѣ α'' есть *наибольшее* значеніе суммы $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_m$. Отсюда слѣдуетъ, что искомая вѣроятность P представляется такъ:

$$P = \sum_{A_m}^{\alpha''} \Delta P_n, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

гдѣ ΔP_n есть вѣроятность равенства $n = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_m$.

Далѣе стоимость C гарантіи исправности кассы въ случаѣ ея несостоятельности опредѣляется на основаніи слѣдующихъ соображеній. Если случится несостоятельность кассы, то для удовлетворенія непокрываемыхъ фондомъ A_m обязательствъ кассы гарантирующій долженъ выдать денежную сумму $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_m - A_m$.

Математическое ожиданіеэтой суммы есть:

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_m - A_m) \cdot \Delta P_{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon^{m}}.$$

Сумма такихъ математическихъ ожиданій, распространенная на всѣ возможные случаи, при которыхъ будетъ имѣть мѣсто несостоятельность кассы, есть искомая стоимость C гарантіи исправности кассы. Эта стоимость, поэтому, представится такъ:

$$C = \sum_{A_m}^{\alpha''} (n - A_m) \cdot \Delta P_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Вычисленіе обоихъ количествъ P и C по формуламъ (1) и (3) связано, такимъ образомъ, съ графикомъ вѣроятности ΔP_n для всѣхъ значеній суммы $n = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_m$ отъ $n = A_m$ до $n = \alpha''$

Вообразимъ, что при неизмѣнныхъ прочихъ данныхъ задачи о гарантіяхъ измѣняется лишь наличность кассы, т. е. величина A_m. Съ этою величиною связана большая или меньшая *прочность* или *солидность* кассы. Устанавливая съ помощію теоремы I § 18 понятіе объ этомъ свойствѣ кассы, какъ о числовой величинѣ, условимся *солидность* или *прочность* кассы въ отношеніи возможности ея несостоятельности измѣрять величиною, обратною количеству $R = \sqrt{mg} \cdot (A_m - n_0)$, гдѣ n_0 и g суть мат. ож. n и $(n - n_0)^2 : m$ и $A_m > n_0$. Слѣдовательно, *чѣмъ мѣра R ближе къ нулю, тѣмъ прочнѣе или солиднѣе касса*, ибо вѣроятность $1 - P$ состоятельности тѣмъ ближе къ 1. Но худо, если солидность перейдетъ точку насыщенія, зарывая творческіе таланты въ землю.

Касса гарантій сама трактуетъ себя какъ *средняя* страховая инстанція, покровительствующая мелкой частной производительной промышленности, распредѣленной въ районѣ ея дѣйствія.

Формулируемъ здѣсь еще примѣръ, разсмотрѣніе котораго предоставляется читателю для уясненія предшествующаго.

Примѣръ. *Страховое общество взяло на страхъ большое число m предметовъ, стоимость которыхъ по оцѣнкѣ опредѣлена суммами $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_m'$. Эти суммы общество обязалось уплачивать по принадлежности въ случаѣ гибели того или другого застрахованнаго предмета въ данный срокъ. Вѣроятности гибели этихъ предметовъ представляются соотвѣтственно числами $p_1', p_2', \ldots, p_m'$. Страховая премія (не считая приплаты въ пользу общества и на содержаніе администраціи) взимается въ размѣрѣ $p_k'\varepsilon_k'$, соотвѣтствующемъ вѣроятности гибели и стоимости ε_k' застрахованнаго предмета. Касса A_m, предназначаемая на покрытіе стоимости застрахованныхъ погибшихъ предметовъ, слагается въ началѣ оборота изъ наличнаго у общества фонда A съ присоединеніемъ къ нему страховыхъ премій. Опредѣлить вѣроятность P несостоятельности кассы и стоимость C гарантированія исполненія ея обязательствъ въ случаѣ несостоятельности.*

Касса A_m въ этомъ примѣрѣ опредѣляется по формулѣ вида:

$$A_m = A + p_1'\varepsilon_1' + p_2'\varepsilon_2' + \ldots + p_m'\varepsilon_m'.$$

Возможность несостоятельности наступаетъ лишь тогда, когда будетъ имѣть силу неравенство: $A_m < \varepsilon_1' + \varepsilon_2' + \ldots + \varepsilon_m'$, при чемъ общество обязано заручиться гарантіей, если желаетъ развить свои операціи при данныхъ условіяхъ безъ риска оказаться неисправнымъ въ исполненіи своихъ обязательствъ. Производящія функціи $\varphi_1(v), \varphi_2(v), \ldots, \varphi_m(v)$ вѣроятностей перемѣнныхъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ опредѣляются по формулѣ вида: $\varphi_k(v) = p_k' \cdot v^{\varepsilon_k'} + p_k''$,

$$k = 1, 2, \ldots, m \quad \text{и} \quad p_k'' = 1 - p_k'.$$

Перемѣнное ε_k, слѣдовательно, имѣетъ лишь два значенія: ε_k' и 0. Примѣръ этотъ, обобщающій теорему Пуассона, имѣетъ практическое значеніе.

§ 25. Логическая машина и здравый смыслъ въ ихъ антиномичности и соприкосновеніи. Основная классификація числовыхъ и графическихъ закономѣрностей. Панлогика. Неумирающій соборный разумъ.

Если бы самостоятельность независимыхъ производящихъ (причинныхъ) факторовъ (свободная причинность) и вѣроятностная независимость производимыхъ ими явленій исчезли, то въ процессѣ исторіи осталась бы лишь необходимость или крѣпостная зависимость послѣдовательныхъ явленій, обсуждаемая по логикѣ A «трехъ законовъ» (см. § 15), въ которой умъ можетъ быть замѣненъ логической машиной Джевонса *). Но оперативная лигика $Б$ теоріи вѣроятностей противорѣчитъ этой машинообразности, дѣлая ссылку на изъяны логики Aп на фактъ множественности независимыхъ индивидуальностей и апеллируя къ здравому смыслу.

Эвристическій здравый смыслъ $Б$ теоріи вѣроятностей опредѣляется по отношенію къ логикѣ A вышеизложеннымъ *ученіемъ о градаціяхъ устойчивости* итоговъ массовыхъ независимыхъ явленій, которая зависитъ отъ величины g, входящей въ теорему Чебышева.

Абсолютная устойчивость итога n перемѣнныхъ x, y, ..., u бываетъ, какъ мы видѣли, тогда, когда въ теоремѣ Чебышева $g = g(1) = 0$. Женератриса $F(v)$ тутъ, какъ показываютъ равенства (2) и (8)—(8″) § 21, должна обратиться въ одночленъ v^{n_0}, которому соотвѣтствуетъ единственное *достовѣрное* значеніе n, равное n_0; при этомъ строка (3) въ § 21 должна свестись къ единственному члену n_0, общая наибольшая мѣра h разностей значеній перемѣннаго n тутъ сама собою отпадаетъ, дѣлается любопытнымъ абсурдомъ или мнимостью особаго рода, которая соотвѣтствуетъ уменьшенію числа измѣреній (скалъ) въ многообразіи $n + 1$ измѣреній на одно измѣреніе. Въ совокупности вопросовъ о совершенно устойчивыхъ итогахъ исторіи примѣняются законы логики A, гдѣ умъ замѣняется машиной. Соотвѣтствующія числовыя закономѣрности или единообразія назовемъ *фатальными* или *машинообразными*. Тамъ, гдѣ царятъ законы логики A и аподиктическія достовѣрности, а темнота вѣроятности отсутствуетъ,—тамъ процессъ исторіи предопредѣленъ и числовыя закономѣрности осуществляются съ точностью механизма.

Но эти закономѣрности имѣютъ продолженіе въ законахъ оператив-

*) *Джевонсъ:* «Основы науки». — *И. Слешинскій:* Логическая машина Джевонса (Вѣстникъ опытной физики и элементарной математики. Одесса, 1893).—*Л. Кутюра.* Алгебра логики. Переводъ И. Слешинскаго. Одесса, 1909.

ной логики $Б$, формулируемыхъ теоріей вѣроятностей для множествъ независимыхъ индивидуальностей, соединенныхъ въ кооперацію, и для тѣхъ случаевъ, когда вышеуказанная величина g (1) болѣе или менѣе отклоняется отъ нуля. Тутъ итоги n перемѣнныхъ, являющихся плодомъ дѣятельности ΣE независимыхъ операцій, возстановляемой *оборотомъ* за счетъ плодовъ, не бываютъ совершенно устойчивыми; въ этихъ процессахъ исторіи играютъ роль закономѣрности, кардинальныя формулы которыхъ суть: 1) діаграммы вѣроятности и Чебышевская теорема о предѣлахъ колебанія среднихъ величинъ для случая независимыхъ дѣятельностей E, приносящихъ плоды x (сравн. § 15 и § 18), и 2) нормативные законы, диктуемые для независимыхъ индивидуумовъ, какъ нравственныя и гражданскія велѣнія, и нужные для организованнаго сопротивленія обрывамъ устойчивости цѣнныхъ явленій, независимыхъ и зависимыхъ. Эти закономѣрности, направленныя противъ кризисовъ и лукавствъ, назовемъ *свободными* въ отличіе отъ фатальныхъ или машинообразныхъ.

Между двумя указанными сейчасъ кардинальными типами закономѣрностей (между машинообразными и свободными закономѣрностями), отвѣчающими на третью изъ кантіанскихъ антиномій (см. § 7 и см. «Пролегомены»), помѣщаются промежуточные производные типы *полусвободныхъ* закономѣрностей, соотвѣтствующіе смѣси независимыхъ и зависимыхъ перемѣнныхъ (§ 21) и образующіеся аналогично тому, какъ равнодѣйствующая возникаетъ изъ своихъ слагающихъ или составляющихъ.

Въ отношеніи времени и пространства всѣ названные типы закономѣрностей еще разъ подраздѣляются на двѣ категоріи: 1) *закономѣрности сосуществованія* и 2) *закономѣрности послѣдовательности*. Эти типы закономѣрностей, поскольку онѣ подчиняются формуламъ логики $А$, называются (у Канта, Милля, Минто и др.) аналогіями опыта и единообразіями природы. При этомъ логики, укрывающіе существенную недостаточность «трехъ законовъ», имѣютъ оптимистическій обычай: 1) затушевывать законы оперативной логики $Б$ и ея оцѣнку возможности обрывовъ и катаклизмовъ въ единообразіяхъ природы, кажущихся прочными, и 2) усыплять чувство заботы и духъ изслѣдованія.

Въ *динамикѣ* общественнаго процесса логической машинѣ $А$ соотвѣтствуетъ *общественная механика*, а здравому смыслу Б соотвѣтствуютъ творцы механизма и *средотдчія* (какъ бы *солнца*) резервовъ, дающія движенію механизма *направленіе* отъ худого конца ожиданій къ хорошему. Потенціалы S и V типа, указаннаго въ таксологической теоріи (§ 22), возможны въ опредѣленномъ *желательномъ* направленіи и въ долготу вѣковъ исторіи лишь тогда, когда построены *на всѣхъ историческихъ путяхъ* государства надлежащія солнца — учрежденія, кассы силъ, всасывающія и выпускающія лучи—кредитныя посылки какъ слѣ-

дуетъ, чтобы оплодотворять творчество населенія страны и выкупать безчисленныя, въ итогѣ смертельныя погрѣшности.

Соединеніе логическаго пространства А достовѣрныхъ сужденій съ металогическимъ пространствомъ Б вѣроятностныхъ сужденій есть, какъ мы уже говорили, истинный *crux physicorum et metaphysicorum*, примиряющій въ *цѣльномъ* познаніи и здравомъ смыслѣ (не простомъ, а научно-философскомъ) разсудокъ и сердце (органъ вѣры и опытнаго контроля).

Логика А + логика Б вмѣстѣ составляютъ *панлогику*, предугаданную Гегелемъ, но неудачно имъ выраженную, ибо онъ, увлеченный пантеизмомъ и парламентаризмомъ, не умѣлъ пользоваться концепціями, матеріалами и *эвристическими* методами теоріи вѣроятностей, какъ главной части теоріи познанія. Панлогикѣ соотвѣтствуетъ координирующая и конструирующая *пангеометрія*, какъ графическая и числовая эстетическая наглядная планомѣрность сосуществованія и послѣдовательности, имѣющая корни въ воззрѣніи, и *пансофія*, какъ цѣльный мудрый методъ чистаго и практическаго *неумирающаго* соборнаго разума, апріорный и апостеріорный (опытный).

Тутъ при дополненіи логики «трехъ законовъ» получается «включенное соборное четвертое» онтологіи А. С. Хомякова и М. Ф. Таубе *).

Логику А можно назвать сплющенной, такъ какъ ея графикъ не содержитъ скалы вѣроятности P. Такъ сплющивается пространство трехъ измѣреній, переходя въ пространство двухъ измѣреній. Логику А + Б можно назвать объемной, распространенной графически наглядными законами конкретныхъ и идеальныхъ чиселъ.

ГЛАВА VI.

Ученіе о вѣроятностяхъ à posteriori. Элементы вѣроятностной опытной теоріи познанія.

§ 26. Теорема Байе и ея слѣдствія. Обозначеніе варіаціи вѣроятій подъ впечатлѣніемъ факта.

Нужно заботливо формулировать отношеніе чистаго *апріоризма* къ чистому *апостеріоризму*, къ воззрѣнію въ опытѣ неумирающаго соборнаго разума, ибо апріорныя разсужденія и вѣрованія (безъ дѣлъ и испытаній) еще слѣпы, темны и могутъ впадать въ иллюзіи и обманы.

Вообразимъ опытъ, состоящій изъ двухъ частей, изъ которыхъ одна была наблюдаема, а другая осталась ненаблюденною. Пусть въ той части опыта, которая была наблюдаема, произошло событіе E; ненаблюденной же части опыта пусть свойственно нѣкоторое возможное событіе E_1. Вѣроятность этого событія E_1, послѣ того какъ событіе E было уже

*) *М. Ф. Таубе:* Сводъ основныхъ законовъ мышленія. Петроградъ. 1909.

наблюдено, называется вѣроятностью *à posteriori*. Въ числовомъ отношеніи вѣроятность *à posteriori* событія E_1 есть то же, что и условная вѣроятность событія E_1, найденная въ предположеніи, что событіе E состоялось.

Ученіе о вѣроятностяхъ *à posteriori* имѣетъ многочисленныя приложенія въ опытныхъ наукахъ и въ статистикѣ. Во многихъ вопросахъ мы à priori численныхъ значеній оперативныхъ вѣроятностей (въ сущности почти даже и не знаемъ, и основываемъ свои практическіе выводы лишь на общихъ понятіяхъ алгебры вѣроятій и на численныхъ выводахъ изъ наблюденій, т. е. à posteriori. Отсюда видна высокая важность опытнаго ученія о вѣроятностяхъ à posteriori, побуждающая дорожить выводами этого отдѣла теоріи вѣроятностей, лежащаго въ основѣ исторической теоріи и опытнаго исчисленія варіацій δp (см. выше, § 7) и *флюксій*

$$\frac{\delta p}{\delta \tau},$$

или *скоростей прироста вѣроятности* p въ единицу времени τ, считая, что приростъ δp (мѣра *сродства* E и E_1) совершается подъ дѣйствіемъ фактовъ за срокъ $(\tau, \tau + \delta\tau)$ отъ момента τ до момента $\tau + \delta\tau$.

Основною теоремою въ ученіи о вѣроятностяхъ à posteriori служитъ *теорема Байе*:

Теорема *A. Пусть* $C_1, C_2, \ldots, C_i$ *будутъ несовмѣстимыя и всевозможныя гипотезы, свойственныя данному опыту; пусть* $q_1, q_2, \ldots, q_i$, *будутъ вѣроятности этихъ гипотезъ до начала опыта;* $p_1, p_2, \ldots, p$ *пусть будутъ условныя вѣроятности событія* E *при допущеніи соотвѣтственныхъ гипотезъ. Вообразимъ затѣмъ, что событіе* E *состоялось. При этихъ данныхъ вѣроятность* ω_k *гипотезы* C_k *à posteriori (т. е. послѣ наблюденія событія* E*) выразится такъ:*

$$\omega_k = \frac{p_k q_k}{p_1 q_1 + p_2 q_2 + \ldots + p_i q_i}.$$

Доказательство. Разсмотримъ сложное событіе (EC_k), состоящее въ совпаденіи осуществленія при данномъ опытѣ гипотезы C_k и событія E. Вѣроятность H этого сложнаго событія по теоремѣ умноженія выразится двояко: съ одной стороны

$$H = P \cdot \omega_k,$$

гдѣ P есть апріорная вѣроятность событія E, а ω_k есть условная вѣроятность гипотезы C_k, найденная въ предположеніи, что событіе E состоялось; съ другой стороны $H = q_k p_k$. Поэтому $P\omega_k = q_k p_k$; отсюда

$$\omega_k = \frac{q_k p_k}{P}.$$

Далѣе, на основаніи теоремы о полныхъ вѣроятностяхъ, имѣемъ:

$$P = p_1 q_1 + p_2 q_2 + \ldots + p_i q_i.$$

Поэтому $$\omega_k = \frac{p_k q_k}{p_1 q_1 + p_2 q_2 + \ldots + p_s q_s},$$

что и требовалось доказать.

Опредѣленіе варіаціи вѣроятности гипотезы. *Пусть имѣютъ мѣсто условія и обозначенія теоремы A. Варіація δq_k вѣроятности q_k гипотезы C_k подъ впечатлѣніемъ факта E будетъ:*

$$\delta q_k = \omega_k - q_k = q_k \left(\frac{p_k}{P} - 1 \right)$$

Опредѣленіе это согласовано съ § 7.

Разсмотримъ частный случай теоремы A, когда гипотезы C_1, $C_2, \ldots, C_s$, до начала опыта, равновѣроятны, т. е. когда $q_1 = q_2 = q_3 = \ldots = q_s$. Въ этомъ случаѣ будемъ имѣть:

$$\omega_k = \frac{p_k}{p_1 + p_2 + \ldots + p_s},$$

откуда слѣдуетъ, что $\omega_1 : \omega_2 \ldots : \omega_s = p_1 : p_2 : \ldots : p_s$.

Иначе говоря, *если въ предшествующей теоремѣ A гипотезы C_1, C_2, $\ldots$, C_s до начала опыта равновѣроятны, то вѣроятности тѣхъ же гипотезъ à posteriori (послѣ наблюденія событія E) будутъ пропорціональны условнымъ вѣроятностямъ событія E при допущеніи соотвѣтственныхъ гипотезъ.*

Перейдемъ теперь къ теоремѣ, которая есть слѣдствіе теоремы *Байе* и теоремы о полныхъ вѣроятностяхъ.

Пусть q_1, $q_2, \ldots, q_s$ будутъ вѣроятности несовмѣстимыхъ и всевозможныхъ гипотезъ C_1, $C_2, \ldots, C_s$, свойственныхъ данному опыту; пусть p_1, $p_2, \ldots, p_s$ будутъ условныя вѣроятности событія E при допущеніи соотвѣтственныхъ гипотезъ. Вообразимъ затѣмъ другое событіе E' и пусть r_1, $r_2, \ldots, r_s$ будутъ условныя вѣроятности событія E' при допущеніи соотвѣтственныхъ гипотезъ C_1, $C_2, \ldots, C_s$. Предположимъ еще, что событіе E не вліяетъ на условныя вѣроятности r_1, $r_2, \ldots, r_s$ событія E' при допущеніи вышеуказанныхъ гипотезъ, т. е. эти условныя вѣроятности остаются такими же, какъ до наблюденія событія E, такъ и послѣ наблюденія этого событія. Полная вѣроятность событія E' à posteriori (послѣ наблюденія событія E) должна опредѣляться по формулѣ: $R' = r_1\omega_1 + r_2\omega_2 + \ldots + r_s\omega_s$.

Теорема эта вытекаетъ изъ теоремы о полныхъ вѣроятностяхъ, въ которой вѣроятности гипотезъ, при разсматриваемыхъ обстоятельствахъ, приходится разсматривать à posteriori, т. е. вмѣсто вѣроятностей $q_1, \ldots, q_s$ приходится брать $\omega_1, \ldots, \omega_s$.

Если апріорную вѣроятность событія E' обозначимъ чрезъ R, то будемъ имѣть ея варіацію δR подъ впечатлѣніемъ факта E:

$$\delta R = R' - R = r_1 \delta q_1 + r_2 \delta q_2 + \ldots + r_s \delta q_s.$$

Увѣрованіе въ гипотетическую причину, ноуменъ, пріобрѣтаемое опытомъ. Поясненіе на легчайшемъ примѣрѣ.

Задача. *Имѣются три группы урнъ: къ первой группѣ относится* n_1 *урнъ, изъ которыхъ каждая содержитъ* a_1 *бѣлыхъ и* b_1 *черныхъ шаровъ; ко второй группѣ принадлежатъ* n_2 *урнъ, изъ которыхъ каждая содержитъ* a_2 *бѣлыхъ и* b_2 *черныхъ шаровъ; къ третьей группѣ принадлежитъ* n_3 *урнъ, изъ которыхъ каждая содержитъ* a_3 *бѣлыхъ и* b_3 *черныхъ шаровъ. Всѣ эти урны одинаковаго вида и перемѣшаны между собою. Затѣмъ изъ числа этихъ урнъ наудачу вынута одна урна A принадлежащая къ неизвѣстной группѣ. Далѣе изъ урны A произведено было s разъ извлеченіе по одному шару, причемъ послѣ каждаго извлеченія вынутый шаръ возвращался въ урну. При этихъ s извлеченіяхъ наблюдалось слѣдующее явленіе: бѣлый и черный шары появились соотвѣтственно m и s — m разъ, слѣдуя одинъ за другимъ въ опредѣленномъ порядкѣ.*

Опредѣлить: *1) вѣроятности à posteriori того, что урна A принадлежитъ къ той или другой изъ вышеуказанныхъ группъ (либо къ первой, либо ко второй, либо къ третьей), и 2) вѣроятность à posteriori того, что при σ будущихъ извлеченіяхъ изъ урны A по одному шару бѣлый и черный шары появятся соотвѣтственно μ разъ и σ — μ разъ, слѣдуя другъ за другомъ въ какомъ бы то ни было порядкѣ.*

Рѣшеніе. Содержимое урны A аналогично невидимой вещи въ себѣ (ноумену). Здѣсь возможны три гипотезы: 1) урна A принадлежитъ къ первой группѣ, 2) урна A принадлежитъ ко второй группѣ и 3) урна A принадлежитъ къ третьей группѣ.

Назовемъ вѣроятности этихъ гипотезъ соотвѣтственно черезъ q_1, q_2 и q_3. Полагая $n = n_1 + n_2 + n_3$, будемъ имѣть:

$$q_1 = \frac{n_1}{n},\quad q_2 = \frac{n_2}{n},\quad q_3 = \frac{n_3}{n}.$$

Допуская каждую изъ трехъ вышеуказанныхъ гипотезъ, опредѣлимъ затѣмъ соотвѣтственныя условныя вѣроятности p_1, p_2 и p_3 того, что при s — кратномъ извлеченіи изъ урны A шара, бѣлый и черный шары появятся соотвѣтственно m разъ и $s - m$ разъ, слѣдуя другъ за другомъ въ опредѣленномъ порядкѣ. Вѣроятности эти будутъ:

$$p_1 = \left(\frac{a_1}{a_1 + b_1}\right)^m \left(\frac{b_1}{a_1 + b_1}\right)^{s-m},$$

$$p_2 = \left(\frac{a_2}{a_2 + b_2}\right)^m \left(\frac{b_2}{a_2 + b_2}\right)^{s-m},\quad p_3 = \left(\frac{a_3}{a_3 + b_3}\right)^m \left(\frac{b_3}{a_3 + b_3}\right)^{s-m}.$$

Отвѣчая теперь на первый изъ предложенныхъ въ задачѣ вопросовъ, замѣчаемъ, что упомянутыя въ этомъ вопросѣ вѣроятности суть вѣроятности ω_1, ω_2 и ω_3 à posteriori трехъ вышеуказанныхъ гипотезъ. На основаніи теоремы Байе вѣроятности эти представятся такъ:

$$\omega_1 = \frac{p_1 q_1}{p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3},$$

$$\omega_2 = \frac{p_2 q_2}{p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3}, \qquad \omega_3 = \frac{p_3 q_3}{p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3}.$$

При большомъ s числа m и $s-m$, по теоремѣ Я. Бернулли, будутъ почти пропорціональны числамъ a и b бѣлыхъ и черныхъ шаровъ урны A. Поэтому опытъ можетъ дать основаніе увѣровать въ устройство урны A; оно будетъ соотвѣтствовать наибольшему изъ чиселъ ω_1, ω_2, ω_3, которое будетъ стремиться къ 1 при неограниченномъ возрастаніи s. Но это познаніе—ирраціональное; оно будетъ только вѣрою. Курсъ вѣроподобной гипотезы въ опытѣ поднимается, а курсы остальныхъ гипотезъ роняются.

Приступимъ теперь ко второму вопросу задачи, гдѣ принимается во вниманіе тотъ же ноуменъ. Допуская каждую изъ трехъ вышепоказанныхъ гипотезъ, найдемъ условныя вѣроятности p_1' и p_2' и p_3' того, что при σ извлеченіяхъ изъ урны A шара бѣлый и черный шары появятся соотвѣтственно μ разъ и $\sigma - \mu$ разъ. Будемъ имѣть:

$$p_1' = C_\sigma^\mu \left(\frac{a_1}{a_1 + b_1}\right)^\mu \left(\frac{b_1}{a_1 + b_1}\right)^{\sigma-\mu},$$

$$p_2' = C_\sigma^\mu \left(\frac{a_2}{a_2 + b_2}\right)^\mu \left(\frac{b_2}{a_2 + b_2}\right)^{\sigma-\mu}, \quad p_3' = C_\sigma^\mu \left(\frac{a_3}{a_3 + b_3}\right)^\mu \left(\frac{b_3}{a_3 + b_3}\right)^{\sigma-\mu},$$

гдѣ C_σ^μ есть число сочетаній изъ σ элементовъ по μ. Эти условныя вѣроятности таковы, что сдѣланныя при s прошедшихъ испытаніяхъ наблюденія не вліяютъ на эти условныя вѣроятности. Слѣдовательно здѣсь примѣнима вышеуказанная теорема о полныхъ вѣроятностяхъ à posteriori. На основаніи этой теоремы требуемая вторымъ вопросомъ задачи вѣроятность выразится такъ: $P_{\sigma,\mu} = p_1'\omega_1 + p_2'\omega_2 + p_3'\omega_3$.

§ 27. Приложеніе теоремы Байе къ вѣроподобію свидѣтельствъ, примѣтъ, знаковъ, уликъ, совѣтовъ о средствахъ для цѣлей. Собираніе вѣроподобія посредствомъ опроса многихъ лицъ. Мірской судъ.

I. Положимъ, что обсуждаемъ нѣкоторое возможное событіе U, вѣроятность котораго обозначимъ чрезъ p. Вѣроятность противоположнаго событія не— U пусть будетъ q. Вообразимъ, что процессъ, которому свойственно обстоятельство U, совершился не при насъ самихъ, причемъ нѣкоторый свидѣтель A удостовѣряетъ, что событіе U состоялось. Допустимъ далѣе, что свидѣтель A въ своихъ показаніяхъ способенъ оши-

баться. Назовемъ черезъ P апріорную вѣроятность того, что A не ошибается въ своемъ показаніи E, а черезъ Q вѣроятность противоположнаго событія, т. е. того, что A ошибается въ своемъ показаніи E. Послѣ показанія E свидѣтеля A вѣроятность того, что событіе U произошло, очевидно измѣнится. Эту то вѣроятность à posteriori и надо найти.

Будемъ разсматривать двѣ гипотезы C_1 и C_2: 1) событіе U состоялось и 2) событіе U не состоялось. До наблюденія показанія свидѣтеля A вѣроятности этихъ гипотезъ будутъ:

$$q_1 = p \quad \text{и} \quad q_2 = q.$$

Роль наблюденнаго нами самими событія E въ разсматриваемой задачѣ играетъ показаніе свидѣтеля A, что событіе U состоялось. Прежде всякихъ наблюденій, условная вѣроятность p_1 осуществленія этого показанія при допущеніи первой гипотезы C_1 есть то же, что вѣроятность того, что свидѣтель A не ошибается въ своемъ показаніи, т. е. $p_1 = P$; условная же вѣроятность p_2 осуществленія вышеуказаннаго показанія при допущеніи второй гипотезы C_2 есть то же, что вѣроятность того, что свидѣтель A ошибается въ своемъ показаніи, т. е. $p_2 = Q$.

Послѣ показанія E свидѣтеля A, утверждающаго, что событіе U состоялось, вѣроятности ω_1 и ω_2 вышеуказанныхъ гипотезъ или, иначе говоря, событій U и не—U представятся на основаніи теоремы Байе въ слѣдующей формѣ:

$$\omega_1 = \frac{pP}{pP + qQ}, \quad \omega_2 = \frac{qQ}{pP + qQ}, \quad \delta p = \omega_1 - p. \quad \delta q = \omega_2 - q \quad . \quad . \quad \text{(I)}$$

Рѣшенная здѣсь задача есть основная въ приложеніяхъ теоріи вѣроятностей къ вопросамъ о свидѣтельскихъ показаніяхъ и о судебныхъ приговорахъ. Приложеніями этими занимались Кондорсе, Пуассонъ, Остроградскій, Курно и другіе.

Формула (I) говоритъ, что апостеріорная вѣроятность ω_1 изслѣдуемаго явленія U бываетъ либо болѣе первоначальной вѣроятности p ($\delta p > 0$), либо менѣе ея ($\delta p < 0$), смотря по тому, будетъ ли $P > \frac{1}{2}$ или $P < \frac{1}{2}$. При $P > \frac{1}{2}$ соотвѣтствующее показаніе (свидѣтельство, приговоръ) назовемъ *вѣроподобнымъ* или *правдоподобнымъ*.

Въ судебномъ дѣлѣ нуженъ подборъ вѣроподобныхъ показаній, если хотимъ имѣть порядочный судъ. Слѣдовательно, необходимы отводы отъ участія въ судѣ многихъ элементовъ, не обладающихъ вѣроподобіемъ.

Формула (I) вышеприведенной задачи можетъ быть перенесена на розныя аналогическія задачи, при надлежащемъ истолкованіи соотвѣтственности терминовъ данной задачи и аналогической задачи.

II. Вообразимъ, напримѣръ, естественную *примѣту* E явленія U, которая, совершившись, косвенно свидѣтельствуетъ и о совмѣстимомъ собы-

тіи U, положимъ, съ вѣроятностью P безошибочности этого свидѣтельства. Въ этой аналогической задачѣ, при наступленіи примѣты, примѣняются вышеприведенныя выраженія вѣроятности ω_1 и ω_2 явленій U и не—U. Примѣтами и вещественными уликами пользуются сельское хозяйство, медицина, метерологія, судъ и пр. и выводятъ этимъ способомъ множество основательныхъ заключеній, къ которымъ курсъ довѣрія поднимается выше и выше, если вѣроподобныхъ примѣтъ накопляется въ сосмѣтанномъ порядкѣ много. Наука пользуется символами—примѣтами идей.

Обобщая этотъ гносеологическій способъ, мы разсмотрѣли въ «Теоріи вѣроятностей» *варіацію* діаграммы вѣроятности $\Delta P_{m,n}$ перемѣннаго цѣннаго итога большого числа независимыхъ и зависимыхъ перемѣнныхъ (§§ 19 и 21); варіація эта зависитъ отъ констатированной дѣятельности людей и видимой природы, отъ накопленія показаній и естественныхъ примѣтъ въ соборномъ разумѣ, а въ промышленности отъ накопленія спросовъ, предложеній и услугъ, вырабатывающихъ экономическія цѣнности.

Гипотезы C_1 и C_2, соотвѣтствующія несовмѣстимымъ обстоятелъствамъ U и не — U, могутъ имѣть различный характеръ. гипотеза C_1 можетъ быть мысленно пріурочена къ идеѣ U немагеріальнаго, но цѣннаго дѣйствующаго характера, какъ познаніе, долгъ, понятія, заповѣди и пр.; она можетъ быть мысленно прикрѣплена и къ идеѣ U физическаго труда и матеріальной пользы или выгоды.

Идея того или другаго рода въ роли умысла или цѣли, индивидуальной или, наоборотъ, общественной, стремится къ соотвѣтственному воплощенію или бытію въ дѣйствительности. Понятіе гипотезы C, слѣдовательно, можетъ быть связано съ понятіемъ цѣли и пригодности средствъ ΣE или M движенія къ цѣли.

III. Разсмотримъ еще вопросъ о консультаціяхъ *свѣдущихъ лицъ*, рѣшающихъ вопросъ относительно *средствъ* для *цѣли*. Слѣдовательно, теперь изслѣдуемое явленіе U стоитъ *впереди*, а не *позади* настоящаго момента.

Средство M есть пригодная для умышленной цѣли U вещь; использованіе ея приближаетъ и прямо приноситъ благо (питаніе, имущество, увѣренность, вѣру, знаніе, правосудіе и пр.). Будущее благо и есть цѣль, для которой стоитъ запасать средства. Символическія учитываемыя мѣры, какъ книги, законы, честное слово, историческія записи жизненныхъ предпосылокъ и талантовъ у сословій и профессій, записи банковъ, деньги и пр., считаются за виды и роды средствъ M.

Пусть явленіе U есть цѣль будущаго времени; а мѣсто свидѣтеля A вышеприведенной аналогической задачи пусть заступаетъ свѣдующее лицо, выбирающее или совѣтующее средство M для цѣли U. Пусть совѣты или внушенія свѣдующаго лица оправдываются на дѣлѣ съ вѣроятностью P. Послѣ рѣшенія исполнить совѣтъ вѣроятности ω_1 и ω_2 будущихъ явленій U и не — U учитываются помощію формулъ (I).

Распространимъ эту задачу на множество свѣдущихъ лицъ, о мнѣніи которыхъ справляются. Пусть обращаются къ n экспертамъ $N_1, N_2, \ldots, N_n$ по вопросу о цѣлесообразности средства M для цѣли U, которая независимо отъ средства M пусть имѣетъ начальную вѣроятность p *). Отвѣты отдѣльныхъ членовъ коллегіи экспертовъ пусть независимы отъ давленія на нихъ и раздѣлились такъ: эксперты $N_1, N_2, \ldots, N_k$ своими голосами утверждаютъ цѣлесообразность средства M, а эксперты $N_{k+1}, \ldots, N_n$, напротивъ считаютъ это средство не цѣлесообразнымъ. Вѣроятности явленій U и не—U до производства справочной анкеты пусть были p и q; послѣ опроса экспертовъ вѣроятности тѣхъ же явленій пусть будутъ $\omega_{1,n}$ и $\omega_{2,n}$. Эти вѣроятности представятся такъ:

$$\omega_{1,n} = \frac{p \,.\, A}{p \,.\, A + q \,.\, B}, \quad \omega_{2,n} = \frac{q \,.\, B}{p \,.\, A + q \,.\, B}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(II)}$$

гдѣ
$$A = P_1 \,.\, P_2 \ldots P_k \,.\, (1 - P_{k+1}) \ldots (1 - P_n),$$
$$B = (1 - P_1) \,.\, (1 - P_2) \ldots (1 - P_k) \,.\, P_{k+1} \ldots P_n;$$

при чемъ $P_1, P_2, \ldots, P_n$ суть вѣроятности, что соотвѣтственные эксперты $N_1, N_2, \ldots, N_n$ не ошибаются въ своихъ утвержденіяхъ. Выраженія (II) легко получить при помощи полной математической индукціи (заключенія отъ n къ $n + 1$), основываясь на формулахъ (I).

Если число $\frac{q \,.\, B}{p \,.\, A}$ окажется весьма малымъ, то средство M окажется почти достовѣрнымъ. Малость же величины

$$\frac{q \,.\, B}{p \,.\, A}$$

зависитъ отъ того, насколько велико число и вѣроподобіе голосовъ, кои *сконцетрировались* на сторонѣ рѣшенія употребить средство M для цѣли U. Единогласіе поднимаетъ вѣроятность $\omega_{1,n}$. Но даже одинъ достовѣрный голосъ можетъ поднять ее до достовѣрности.

Полезно замѣтить, что эта концентрація правдоподобія или вѣроподобія распространяется Пуассономъ на гражанскіе и уголовные суды присяжныхъ.

Нужно имѣть въ виду, что эта концентрація достигается тогда, когда имѣемъ:

$$P_m > \frac{1}{2}, \; m = 1, 2, \ldots n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(III)}$$

Эти неравенства являются однимъ изъ условій вѣроподобія рѣшеній судебной и экспертизной организаціи и того общественнаго мнѣнія или

*) Для собиранія и подачи совѣтовъ свѣдующихъ лицъ учреждаются экспертныя палаты, административные совѣты и пр., а иногда дѣлается опросъ (анкета). Для вопросовъ законодательства учреждаются госуд. дума и госуд. совѣтъ, вырабатывающіе законы M, какъ средства для цѣлей хорошаго управленія страною.

мірского суда, къ которому можно и должно прислушиваться. Если же преобладаютъ противоположныя неравенства, именно:

$$P_m < \frac{1}{2},$$

то судебная организація, парламенты и общественное мнѣніе будутъ слишкомъ часто подносить лукавыя или невѣроподобныя рѣшенія. Таковъ судъ толпы, судъ площадной.

Высота вѣроятности $\omega_{1,n}$ приговора зависитъ отъ числа k; но она зависитъ не отъ одного только числа k обвиняющихъ голосовъ, но и отъ прозорливости и опытности этихъ голосовъ, отъ близости количествъ $P_1, P_2, \ldots, P_k$ и оппозиціонныхъ количествъ $P_{k+1}, P_{k+2}, \ldots, P_n$ къ 1.

Доктрина рѣшенія вопросовъ мірскимъ судомъ по большинству голосовъ поддерживается какъ будто бы всеобщая истина множествомъ софизмовъ. Эта доктрина не всегда вѣрна; она однако же вполнѣ вѣрна, напримѣръ, при одинаковомъ вѣроподобіи судей—экспертовъ, т. е. при $P_1 = P_2 = \ldots = P_n > \frac{1}{2}$

При условіяхъ (III) можно построить судъ, привлекая для разбора каждаго дѣла n присяжныхъ засѣдателей. Ошибки рѣшенія этой инстанціи исправляются, въ порядкѣ кассацій и апелляцій, высшею инстанціей съ повышенною компетентностью P судей.

Формула (II) не годится для зависимыхъ голосовъ $N_1, \ldots, N_n$.

Весь этотъ методъ не нуженъ и негоденъ тогда, когда рѣшенія строятся не *опытомъ опроса,* а готовымъ знаніемъ, гдѣ *данъ* исчерпывающій принципъ и методъ и гдѣ нѣтъ нужды брать въ соображеніе разныя версіи для перехода отъ *неизвѣстнаго къ извѣстному*, отъ *ноумена къ феномену.*

Тутъ рѣшенія строятся другимъ выводомъ, даваемымъ *логическою машиною* A (см. выше, § 25), связанною съ абсолютно твердыми законами физической и метафизической необходимости.

Во всякомъ случаѣ графикъ со скалою вѣроятности способенъ эвристическимъ методомъ и индуктивными уравненіями § 15, распространенными на показатели духовной культуры (ноумена), проникать въ духъ народа.

IV. Примѣнимъ равенства (I) къ выясненію слѣдующаго важнаго постулата, относящагося къ міру абсолютныхъ и приблизительныхъ достовѣрностей.

Постулатъ. *Если вещь U достовѣрна a priori* ($p = 1$), *то она достовѣрна и à posteriori* ($\omega_1 = 1$) *послѣ свидѣтельства.*

Постулатъ этотъ есть очевидная логическая и онтологическая *аксіома*, если апріорная достовѣрность вещи U абсолютная, полная, а не приблизительная. Но тотъ же постулатъ оказывается *не абсолютно твер-*

дымъ правиломъ, имѣющимъ *изъянъ* или *исключенія*, если достовѣрность p вещи U не абсолютная, а приблизительная. Равенство

$$\omega_1 = \frac{1}{1 + \frac{1-p}{p \,.\, P} \cdot (1 - P)} = \frac{1}{J+1},$$

совпадающее съ первымъ изъ уравненій (I), показываетъ, что эти исключенія бываютъ тогда, когда, при весьма маломъ $1 - p$, количество J оказывается не настолько малымъ, чтобы имъ пренебречь. Такое подозрительное обстоятельство или *изъянъ доказательства* (лакуна) бываетъ при весьма маломъ P, т. е. при невѣропобіи свидѣтеля. Если же P не весьма мало, то постулатъ сохраняетъ силу для приблизительной достовѣрности p; напримѣръ, при $P \geqq {}^1/_2$ число J мало, если p удовлетворяетъ неравенствамъ: $1 > p > 0{,}99$.

§ 28. Теорема, обратная теоремѣ Бернулли. Обратное дѣйствіе простѣйшаго закона большихъ чиселъ.

Въ теорему Я. Бернулли (см. § 11) входятъ три числа: s, m и p, изъ коихъ числа s и p считаются данными, а число m гадательное.

Если же число p неизвѣстно, а число m дано наблюденіемъ s испытаній, то является вопросъ объ «*обратной*» теоремѣ Я. Бернулли или объ «*обратномъ дѣйствіи*» этого простого закона большихъ чиселъ. Этому дѣйствію соотвѣтствуетъ то, что вѣроятность и частость сближаются, какъ два лица Януса, бога философіи исторіи, приводящаго къ системамъ индуктивныхъ уравненій (см. § 15).

Обратная теорема Я. Бернулли проще всего доказывается съ помощію постулата § 27, п. IV, исходя изъ «прямой» теоремы, дающей апріорную достовѣрность неравенствъ (4) § 11. Но такъ какъ эта достовѣрность только приблизительная, то тутъ надо имѣть въ виду небольшой изъянъ.

§ 29. Четвертая антиномія Канта (о необходимомъ Существѣ).

Люди, касаясь жизненныхъ субстанціональныхъ вопросовъ, злободневно заинтересованы въ установленіи разрѣшающихъ формулъ, резольвентъ, по третьей антиноміи «Критики» Канта и его «Пролегоменовъ» (свободная причинность или только необходимость?).

Но по плану «Пролегоменовъ» за третьею антиноміей должна слѣдовать четвертая — о невидимомъ Абсолютномъ Существѣ (въ ряду міровыхъ причинъ есть ли необходимое существо или же въ мірѣ все случайно?).

Легчайшій примѣръ § 26 показываетъ, что послѣдовательный опытъ при данной схемѣ можетъ привести къ познанію невидимой, но постоян-

ной гипотетической причины. Абсолютъ, какъ постоянная невидимая причина (субстанція), дѣйствующая въ міровой жизни, аналогически познаваема религіознымъ опытомъ, который есть послѣдовательный духовный подвигъ (см. «Мысли» Паскаля). Естественное богопознаніе, достигаемое въ духовномъ подвигѣ, не есть познаніе лицомъ къ лицу, но познаніе по *слѣдамъ,* дѣлая субстанціональную гипотезу, что Абсолютъ живетъ и въ «устойчивости міропорядка» и въ промыслѣ или «движеніи вещества» («Богъ» Державина; см. также проф. *С. Глаголева*: «Сверхестественное откровеніе и естественное богопознаніе внѣ истинной Церкви», стр. 20 и 239—342. Отдѣльные оттиски изъ журнала «Вѣра и разумъ» за 1906 годъ. Харьковъ). Противоположностью живому Абсолюту становится чисто формальная, но магически дѣйствующая, символическая мертвая сила вздутаго бумагою золотого тельца, т. е. сила *фикціи*, хитроумной спекуляціи, которой сподручны низшія религіи.

Цѣнность порядка въ познающемъ и познаваемомъ. Виды взаимныхъ притяженій и отталкиваній въ исторической динамикѣ и системы расопрядка (гармоніи). Нравственный міропорядокъ. Соотношеніе сознаній.

Порядокъ, гармонія въ познаваемомъ и познающемъ и въ словѣ, представляетъ для сознанія величайшую цѣнность, противополагаемую Хаосу и Ночи. Гдѣ вовсе не отстоялось этой субъективно-объективной соборной цѣнности, тамъ немыслимо говорить о ясномъ предвидѣніи, о свободѣ, о подвигѣ, о равномъ правѣ, о любви и другихъ цѣнностяхъ.

Перечислимъ важнѣйшія системы гармоніи и соотвѣтствующія силы притяженій и отталкиваній въ исторической динамикѣ.

а) Всемірное тяготѣніе; этой силѣ соотвѣтствуетъ ньютоніанская механика, какъ остоявшійся космическій порядокъ.

б) Электро-магнитныя притяженія и отталкиванія, развивающіяся въ невѣсомой и вѣсомой средѣ; этой противоположности силъ соотвѣтствуетъ электромагнитная механика съ теоріей лучеобразнаго распространенія свѣта, тепла, химическаго агента, электрическаго телеграфированія и пр.

в) Сродство и нейтральность частичныхъ химическихъ элементовъ; этой противоположности частичныхъ силъ соотвѣтствуетъ механика частичныхъ силъ, включающая законы химіи и молекулярной физики.

г) Экономическое тяготѣніе субъекта къ предметамъ имущественнаго недостатка и нейтральность къ предметамъ избытка; этимъ противоположнымъ силамъ соотвѣтствуетъ таксологически направляемый размѣнъ благъ, простой и усложненный при помощи денегъ, какъ общаго символическаго мѣрила, съ участіемъ учрежденій финансоваго правомѣрія.

д) Тяготѣніе къ истинѣ и добру и отталкиваніе лжи, тяготѣніе къ пра-

вильному порядку или гармоніи (она же красота формы) и отталкиваніе безпорядочности или хаоса; этимъ духовнымъ силамъ соотвѣтствуютъ вѣроятностное сродство событій и нравственный міропорядокъ, расчленяющійся, въ виду порочности человѣческой воли, на два порядка: 1) «божественный порядокъ», возникающій частію естественно (по требованію жизненной необходимости), частію добровольно, при знаніи предписаній закона и подъ впечатлѣніемъ идеаловъ правдолюбія или божеской объективности, и 2) порядокъ гражданскаго принужденія, если не хватаетъ тутъ или тамъ въ наличности доброй воли слѣдовать предписаніямъ закона.

Притягательныя силы нравственнаго міропорядка, дѣйствующія въ сторону Солнца этого небосвода (Солнца правды), образуютъ между притягиваемыми элементами метахимическія нормальныя органическія структуры. Притягиваемые въ эту сторону (+) элементы, ихъ центры, мыслятся распредѣленными въ звѣздной массѣ людскихъ одушевленныхъ сознаній ☼. Ложь же образуетъ антиномическое, противоположное притяженіе въ сторону (—) «внутренняго софиста», «отца лжи», «злого рока».

Въ душахъ людей поселяется извѣстная борьба двухъ началъ; но цѣнность нравственнаго міропорядка, которую лишь нужно умѣть выставить людямъ на показъ, щедро сѣять въ людскія души, заставляетъ вѣрить въ его побѣду.

Est Deus in nobis, agitante calescimus Illo:
Impetus hic sacrae semina mentis habet. (Ovidius, Fasti, VI, 5).

Субъективную форму сознанія, трактуемаго въ вѣроятностной теоріи познанія, М. Ф. Таубе (см. «Познаніевѣдѣніе») изображаетъ концентрическими темными кольцами; степень бѣлизны кольца означаетъ степень прояснённости мысли, чернота обозначаетъ темноту незнанія. Внѣшнее пространство всѣхъ колецъ наполнено густою черною краскою, обозначающею темноту незнанія субъектомъ A внѣшняго или трансубъективнаго (въ математикѣ—трансфинитнаго). Затѣмъ, по пути отъ этой черноты къ центру колецъ, кольцевыя полосы становятся болѣе и болѣе бѣлыми, соотвѣтствующими тренію субъекта съ субъектами; наиболѣе бѣлое кольцо соотвѣтствуетъ самосознанію. Въ центрѣ же этой системы ☼ стоитъ опять весьма темное пятнышко *), ему соотвѣтствуетъ незнаніе самого себя, ибо человѣкъ часто не можетъ дать самъ себѣ отчета, какъ онъ поступитъ въ будущемъ или какъ онъ совершилъ то или другое дѣйствіе вопреки самосознанію.

Человѣческія общества представляютъ сочетанія или созвѣздія:

☼☼☼. . .

Собирательное совѣстливое сознаніе, имѣя вѣрный канонъ и запасы силъ, способно выкупать ошибки незнанія; «свѣтъ во тьмѣ свѣтитъ», онъ

*) Это пятнышко *скептиковъ* превращается въ яркій руководящій Свѣтъ вѣры для тѣхъ „я“, кои увѣровали до прозрѣнія.

могъ бы водворить покровительство и миръ на землѣ, если бы невѣжество и лукавство не вносили въ канонъ революцію, отрицательный продуктъ свободы воли.

Школа съ ея искусствомъ народнаго просвѣщенія должна считаться съ формой субъективнаго сознанія, ибо реформа сознанія темныхъ людей есть одно изъ важнѣйшихъ условій движенія по пути отъ неизвѣстнаго къ извѣстному, отъ мрака къ истинному свѣту Абсолюта и къ торжеству тріединства правды, блага и красоты надъ ихъ противоположностями.

«Вѣрующее воспріятіе» и «вѣроятностное озареніе» нужно отличать отъ «мистическаго воспріятія» и «магіи». Это различіе отдѣляетъ *научную* философію свободы и необходимости отъ философіи мистическаго воспріятія (Н. Лосскій, Н. Бердяевъ). Органъ мистики, бумага и языкъ, есть орудіе игры и колоссальныхъ подмѣнъ понятій. Научная философія беретъ подъ судъ мистику свободы, игру, вбирая въ себя очищенное питаніе и отъ вѣры, и отъ науки, кои обѣ внушаются человѣчеству универсальнымъ разумомъ и входятъ своими функціями въ учрежденія.

Злободневности, примыкающія къ третьей антиноміи, и крайности солипсизма и жадности хозяйствующихъ субъектовъ исправляются лишь на почвѣ вѣры, какъ познанія живого Абсолюта. У религіозныхъ обществъ установились тысячелѣтнія схемы этого познанія, и работаютъ по этимъ схемамъ какъ священники, такъ и міряне. При добросовѣстномъ примѣненіи графиковъ вѣроятности и индуктивныхъ уравненій § 15 открытія («эврика») общественной науки и Откровенія религіи сходятся и дополняютъ другъ друга въ исторіи. Онтологическое и космологическое доказательства бытія Бога ирраціональны, но не такъ плохи, какъ думаетъ Кантъ.

§ 30. Конструктивные типы машинообразныхъ и немашинообразныхъ оборотовъ въ исторіи. Комбинаторныя тріангуляціи.

Будемъ опять обсуждать конструктивныя историческія задачи, теченія, графики и загадки.

Возвратимся къ указанной въ § 15 схемѣ, намѣчающей законами большихъ чиселъ суммарную предустановляемую гармонію (распорядокъ) оборотовъ въ историческомъ процессѣ, гдѣ при разумности хозяйства расходуемая дѣятельность ΣE послѣдовательно, хотя и съ колебаніями, возстановляется за счетъ плодовъ. Работа этихъ предустановляемыхъ оборотовъ (возстановленій) разлита широко въ интервалахъ $(\tau,\ \tau + \Delta\tau)$ исторіи. Неумирающіе собирательные организмы земного шара, государства, націи, коренныя культурныя общества, кои назовемъ отечествами, могутъ вѣчно ткать канву наблюденія этихъ оборотовъ по извѣстнымъ научнымъ схемамъ и точно устанавливать научнымъ опытомъ соразмѣренные запасы

противъ обрывовъ равновѣсія между расходомъ и приходомъ, съ достаточнымъ превышеніемъ прихода надъ расходомъ.

Назовемъ важнѣйшіе типы издержекъ и числовыхъ оборотовъ и генетическую связь между ними.—связь чрезъ вѣроятность, или «включенное третье» между да и нѣтъ, вызванное множествомъ *независимыхъ* случайностей и играющее роль не только въ формулахъ законовъ мышленія и сомнѣнія (поправляющихъ логику «трехъ законовъ» при рѣшеніи «открытыхъ вопросовъ» и міровыхъ задачъ), но и *въ формулахъ связи причинъ и слѣдствій.*

1°. Естественно-историческій оборотъ въ царствѣ растеній и животныхъ, совершающійся по слѣдующей кратко выраженной формулѣ связи: «издерживаемая культура (посѣвъ) предшествующаго періода — возстановленіе и приростъ — издерживаемая культура послѣдующаго періода».

2°. Человѣческій историческій біометрическій оборотъ, совершающійся по формулѣ связи. «вымирающее поколѣніе отцовъ — дѣти — поколѣніе послѣдующаго періода».

3°. Ежегодные обороты неорганическихъ стихій, повторяющіеся на земномъ шарѣ, именно: обороты тепловой, свѣтовой и электро-магнитный; оборотъ прѣсной воды на сушѣ и въ организмахъ; оборотъ кислорода, углерода, азота и другихъ элементовъ атмосферы и пр.

4°. Финансовый торговый и динамическій оборотъ. Его служебная историческая формула размѣна экономическихъ цѣнностей такова: «издержанныя за товаръ деньги (себѣстоимость)—товаръ—вырученныя съ покупателей деньги». Тутъ иногда мѣсто товара заступаетъ наемный трудъ, трактуемый какъ «товаръ» своего рода.—Въ указанной финансово-экономической формулѣ бываетъ необходима, при обсужденіи всеобщей связи явленій, логическая *перестановка*, разсматривающая тотъ же историческій оборотъ въ другомъ чередованіи причинъ и слѣдствій — именно, въ томъ чередованіи, которому соотвѣтствуетъ формула связи: «товаръ — деньги—товаръ слѣдующаго періода». Первая по очереди причина (деньги) прежней формулы становится въ новой формулѣ слѣдствіемъ, а прежнее слѣдствіе (товаръ) становится по очереди на первое мѣсто, т. е. становится причиною. Если «товаръ» второй формулы связи представляется трудомъ мысли или рукъ человѣка, то онъ бываетъ не только по формулѣ чередованія, но и существу долею первопричины въ новообразованіи богатства, параллельною творческимъ силамъ природы и денежнаго капитала. Деньги являются въ экономическомъ процессѣ какъ обычнымъ товаромъ, такъ и мѣрящею *символическою* движимою и *движущею* цѣнностью, служебно необходимою въ качествѣ знаменателя рыночной оцѣнки и для образованія одностороннихъ формулъ пени, налога и правооборота при установленіи судьбами государства, посредствомъ сѣти банковъ и обложеній, общей правомѣрной прогматической связи явленій, пратекающихъ въ экономическомъ историческомъ процессѣ.

5°. Историческій оборотъ личнаго состава смертныхъ носителей традиціоннаго знанія, традицій вѣры, оборотъ личной работоспособности и технической традиціи для общественнаго служенія и для различныхъ видовъ цѣнной, важной практики. Его формула связи такова: «мастера работы (духовной, внушающей творчество, и мускульно-нервной) — ученики — мастера послѣдующаго періода».

Благодаря оборотамъ, издерживаемое, перемѣнное, смертное возстановляется, если резервными факторами, гражданскими символами и институтами права укрѣплена достовѣрность возстановленія.

Безграничная повторяемость наблюдаемыхъ и испытываемыхъ цѣнныхъ издержекъ и оборотовъ въ неограниченномъ рядѣ послѣдовательныхъ періодовъ времени t дозволяетъ примѣнять къ этимъ повторнымъ испытаніямъ законы массовыхъ явленій, трактуемыхъ теоріей вѣроятностей и теоріей статистики, и массами исключать смертельныя и грубыя ошибки. Ибо на почвѣ повторнаго опыта и незыблемой теоріи можно устанавливать какъ среднія величины R_0 колеблющейся погрѣшности R, такъ вѣроятности ея шатаній и нетяжелые резервы противъ худшей шаткости, т. е. устанавливать *всю стоимость укрѣпленія* положенія, обезпечивающую достовѣрность амортизаціи среды цѣнныхъ элементовъ. Эта стоимость дѣлаетъ обоснованною достовѣрность оборота цѣнности въ пространствѣ законовъ случайностей и погрѣшностей.

Историческая генетическая скала соединяется со скалою географическою и съ скалами положительнаго закона, вводящими въ процессъ исторіи вещный оборотъ, наукооборотъ, разныя меліораціи и гражданскій правооборотъ противъ погрѣшностей. Географическая скала на единицахъ своей площади отмѣчаетъ послѣдовательно землевладѣніе и природу, развитіе, распространеніе явленій и отложеніе отжившихъ явленій, приложеніе ихъ къ «праотцамъ» и къ прежнимъ отложеніямъ.

Символизмъ. Юридически активныя вѣроятности и реальныя теченія. Элементы государственности. Жизненный строй. Земщина и отечественное верховенство.

Во всѣхъ родахъ формулъ историческаго оборота мы встрѣчаемъ *включенный промежуточный членъ*, промежуточное комбинаторное третье. Оно дѣлаетъ разрывъ ясности во взглядѣ на будущее и разрывъ опредѣленности сужденія.

Эти включенія, комбинаторныя *тріангуляціи* и разрывы опредѣленности сужденія вызываютъ къ жизни необходимость индуктивнаго метода и символическаго связыванія явленій; вызываютъ необходимость *символическаго мышленія* и параллельныхъ этому мышленію *матеріальныхъ символическихъ мнемоническихъ (напоминающихъ) средствъ* завязыванія и развязы-

ванія узловъ исторіи и установленія *исторической юридической ассоціаціи между мысленнымъ владѣніемъ и матеріальнымъ*, — *ассоціаціи посредствомъ символизованныхъ* (условныхъ) *достовѣрностей*, т. е. юридически активныхъ *вѣроятностей* *). Историческая генетическая и символическая тріангуляція стоитъ хлопотъ, какъ и геодезическая.

Матеріальные символы, какъ публичное истолковывающее средство, параллельное идеямъ символическаго мышленія, бываютъ мертвые и живые, личные.

Символическими мнемоническими мертвыми матеріальными средствами являются языкъ, арсеналъ силы закона и гражданскіе знаки различія и тождества, мемуары, памятники, вѣхи, вещественныя полноцѣнныя мѣры (въ томъ числѣ металлическія деньги—фетиши), бумажные гражданскіе акты, завѣщанія, идеи — діаграммы или просвѣтительные графическіе образы ожиданія и дѣйствительности, созидаемые по даннымъ статистики.

Символическими живыми личными средствами являются корона съ народомъ, посвященные, уполномоченные и аккредитованные люди, представляющіе ту или другую идею — силу, исполняющіе ту или другую должность или публичную функцію, по формуламъ закона. Изъ этихъ уполномоченныхъ лицъ образуются *коренные* личные составы (корпораціи) связыванія, развязыванія узловъ и общественныхъ тканей по скаламъ закона.

Во всѣхъ этихъ испытаніяхъ и оцѣнкахъ достоинства и символической стоимости оборота играютъ роль: 1) психологическія теченія вѣрныхъ понятій (традиціи), 2) теченія матеріальныя и имущественныя и 3) графическія *сличенія* ожиданій съ дѣйствительностію по рецептамъ и формуламъ историко-статистическаго метода, дающаго номографическіе образы связи явленій въ формѣ діаграммъ со скалою времени t (см., напримѣръ, діаграмму цѣнъ ржи и числа кражъ въ § 22).

Мнемоническими установленными (каноническими) символами, посвященіями, помазаніями передаются отъ интервала къ интервалу, отъ предыдущаго къ послѣдующему, отъ поколѣнія къ поколѣнію какъ идеи, такъ и матеріальныя права и обязательства.

Напримѣръ, финансовая валюта, власть экономическая, магически течетъ, какъ метафизическая «жидкость», по символамъ финансоваго правомѣрія отъ предыдущаго къ послѣдующему.

Подвижную наличность силы учрежденія, дисциплинированную до машинообразнаго повиновенія символическому дирижированію, мы называемъ кассой въ широкомъ смыслѣ, считая, напримѣръ, хорошо рекрутируемую армію кассой, монета которой, солдатъ, дисциплинируется,

*) См. *В. А. Юшкевичъ*: «Изслѣдованіе въ области ученія о владѣніи. Пріобрѣтеніе владѣнія по римскому праву» (Ученыя Записки Лицея въ память Цесаревича Николая. Вып. 4. Москва, 1910 г.).

сберегается и умно расходуется какъ достовѣрная защитная цѣнность отечества.

Обороты по формуламъ 2°, 4° и 5° лучше всего даютъ понять значеніе и цѣлесообразность отечества, его общихъ защитныхъ и вспомогательныхъ учрежденій и его ариѳметической и символической формулы

Символическія историческія лица, вбирающія въ себя отечественную мощность путями историческаго объединенія силъ людей,—эти лица въ качествѣ представителей и знаменателей отечественной идеи не умираютъ, хотя физическіе личные представители неумирающей идеи могутъ умирать одинъ за другимъ. Таково безсмертіе главы государства: le roi est mort—vive le roi! Эта жизненная формула примѣнима не только къ верховнымъ символическимъ лицамъ, но и къ низшимъ, поставленнымъ на должности, привязанныя къ опредѣленной идеѣ службы отечеству.

Мистика свободы воли на выборъ дѣйствій нарушаетъ машинообразный порядокъ историческаго крученія и расклубленія событій.

«Наука» безотвѣтственной свободы, портящей машину міропорядка, есть наука «отца лжи», или «внутренняго софиста»; она постепеннымъ накопленіемъ (исподтишка) или разительно, но, какъ мы видѣли, съ достовѣрностью подгототовляетъ парадоксальное и затѣмъ катастрофальное положеніе для данной человѣческой среды.

Напротивъ, наука отвѣтственной свободы, хорошо культивированной, есть человѣкоискупительная, спасительная наука Отца истиннаго Свѣта.

Свобода Верховной власти неограничиваема de jure по причинѣ предѣльности верха и ограничиваетъ отвѣтственностью подданныя свободы. По природѣ своей Верховная власть отвѣтственна лишь передъ Богомъ.

Верхнему основанію соотвѣтствуетъ общее благо и возможность подъема, прогресса для низовъ, возможность апелляціи въ случаѣ столкновеній частныхъ интересовъ. Частныя индивидуальныя права, огражденныя закономъ въ нижней инстанціи, подчиняются еще разъ верховному праву государства, въ сужденіи болѣе объективному, или болѣе безпристрастному *). Верхъ есть кровъ для низовъ. Выразитель идеи верха, носитель короны, Глава государства, завершаетъ общественность, какъ политическій организмъ.

Устой верха есть устой общаго крова.

---

*) Какъ извѣстно, терминъ «право» употребляется въ двоякомъ смыслѣ: въ объективномъ и субъективномъ. Право въ объективномъ смыслѣ есть совокупность основныхъ правовыхъ положеній, которыми оперируетъ государство, иначе говоря—узаконенный порядокъ общежитія; правомъ въ субъективномъ смыслѣ будетъ конкретное правомочіе извѣстной личности, получившееся изъ примѣненія отвлеченнаго правила къ данному конкретному случаю. И въ томъ, и въ другомъ направленіи право встрѣчаетъ препятствія, которыя ему приходится преодолѣвать и, такимъ образомъ, борьбою утверждать свое бытіе (*Рудольфъ Іерингъ:* Борьба за право).

Насколько правовой индивидуализмъ (право въ субъективномъ смыслѣ) находитъ себѣ частное мѣсто и идіографическую историческую развертку въ государственно-общественномъ номографическомъ созвѣздіи, настолько же самостоятельный, самодержавный государственно-національный индивидуализмъ находитъ себѣ мѣсто и историческую идіографическую развертку въ ряду государствъ земного шара.

Сплою вещей и договорами государственно-національныя единицы размежевываются въ сферахъ своего авторитета, сосуществуя подобно системамъ *вихрей — атомовъ* Декарта *), принятыхъ въ теоріи Томсона (лорда Кельвина) и Гельмгольтца. Единицы эти являются «изолированными государствами» фонъ-Тюнена (см. мою книгу «Математическая статистика»), или сложными монадами (многоединствами) Н. В. Бугаева. Однакоже между изолированными государствами странствуютъ «кометы», просачиваются различныя теченія и обороты, какъ этническія (въ формѣ переселеній), такъ и экономическія, а равно и познавательныя, идейныя.

Простѣйшимъ вихремъ—атомомъ среды изолированнаго государства является въ ученіи о національномъ государствѣ родъ съ его идеей продолженія въ исторіи и идеей національнаго отечества. Сохраненіе рода и народа есть одна изъ важнѣйшихъ задачъ государственнаго домостроя.

Населеніе отечества трудится въ потѣ лица и ведетъ торгъ плодами труда. Все, что вырабатываетъ пахарь, могутъ отнять чрезъ торговые фокусы и присоски и чрезъ широко открытые двери свободъ міровые короли зототого тельца, засѣвшіе въ извѣстныхъ недосягаемыхъ міровыхъ центрахъ (Лондонъ, Нью-Іоркъ, Парижъ, Берлинъ, Вѣна и пр.). Въ торговую же жизнь отечества, обороняемаго снизу и сверху государственно-національными учрежденіями (какъ банки, кооперативы и пр.), не могутъ проникнуть присоски мірового спрута.

Ячейка отечества — это *семья*. Эта единица членовная, антиномическая, соединяющая членовъ семьи утонченною жизненною нитью вѣры другъ другу и любви. Таблицы браковъ, рожденій, смертей, переселеній опредѣляютъ типы бюджета человѣческихъ жизней и прочіе бюджеты.

Безконечное (трансцедентное) обобщеніе идеи отечественной семьи есть личное божеское Тріединство; Оно, какъ предвѣчная Соборность, понимается *ирраціонально*, вѣрою.

Земское *раціональное* высшее обобщеніе идеи отечества—это государство. Съ этой идеей связана идея общаго для всѣхъ подданныхъ крова, общей верхней кровельной защиты для земскихъ низовъ, взаимность между

*) Ньютонъ отступилъ отъ теоріи Декарта; однако, нынѣ физики вернулись къ этой схемѣ (см. *Н. А. Любимовъ*: «Философія Декарта». С.-Петерб., 1886.—*Н. Н. Миклухо-Маклаевъ*: Ньютонъ, его жизнь и труды. Изд. 2-е), тѣмъ болѣе она полезна въ историко-гео-графическихъ конструкціяхъ политической космологіи.

верхомъ и земскимъ *низомъ;* иначе говоря, въ законы мышленія символически включается законъ *верхняго* достаточнаго основанія, присоединяемый къ закону *нижняго* достаточнаго основанія. Какъ въ пирамидѣ различаютъ два основанія, верхнее и нижнее, такъ и въ онтологическомъ законѣ достаточнаго основанія нужно различать двѣ необходимыхъ крайнихъ инстанціи или два необходимыхъ устойчивыхъ положенія: земщину и отечественное верховенство.

Работа и надежда земскихъ народныхъ низовъ требуютъ отечественной кровли, покровительства низамъ на всѣхъ практическихъ путяхъ исторической загадки. Иначе говоря, въ полной вышепартійной конституціи (въ полныхъ законахъ достаточнаго основанія) нужно соединять нѣсколько практическихъ пирамидъ, вершины которыхъ сходятся у Монарха—Главы государства, у кормчаго государственнаго корабля. Верхнее основаніе, такимъ образомъ, превращается въ жизненный узелъ земскаго политическаго организма, цѣльнаго и мудро развѣтвленнаго, въ центрѣ котораго сосредоточивается разгадка предустановленной въ общихъ чертахъ гармоніи, при возможности управлять рулемъ корабля цѣлесообразно.

Повторяемъ, культурная свобода предполагаетъ не только разумъ индивидуальной самодѣятельности и отвѣтственности («habeas corpus» act), но и необходимую общую многоединую кровлю, сверху обосновывающую надежды и достовѣрности посредствомъ государственныхъ учрежденій. Символически этому верху соотвѣтствуетъ куполъ св. Софіи.

Защитники же свободы безъ кровельныхъ могучихъ учрежденій хлопочутъ не о благѣ народа, а о томъ, чтобы достовѣрно верхъ упалъ на низы и лишилъ ихъ отечественнаго крова. Такая свобода пропагандируется ложною наукой. Еще Тургеневъ въ «Отцахъ и Дѣтяхъ» заклеймилъ эту лженауку, назвавъ нигилистами ея служителей.

Всѣ учрежденія съ ихъ личными силами должны быть построены изъ устойчивыхъ испытанныхъ элементовъ и сообразно съ требованіями истинной науки и религіозной природы отечества. Тогда сами учрежденія сдѣлаются драгоцѣнными школами, все государство сдѣлается жизненною школою, вѣра и наука сдѣлаются не роскошью, а свѣточами и совѣтниками по всѣмъ жизненнымъ задачамъ.

Независимо отъ культа символизующихъ людей («божественныхъ людей», по терминологіи Платона), необходимы еще школа и культъ людей простого нравственнаго склада, имѣющій цѣлію достигнуть того, чтобы по всѣмъ жизненнымъ предпосылкамъ чаще и чаще попадался въ демосѣ типъ просто честнаго, порядочнаго, трудолюбиваго человѣка, сознательнаго въ своемъ долгѣ, совѣстливаго въ своихъ обязательствахъ и ихъ выполненіи. Названные два культа обезпечатъ оправданіе изрѣченія Паскаля: «рядовой народъ и выдающіеся люди вертятъ колесо исторіи».

Государство, какъ совѣстливое правовое многоединство, слагается изъ трехъ элементарныхъ собирательностей· А) государство, какъ церковь; Б) государство, какъ школа и дума; В) государство, какъ щитъ и мечъ. Въ каждомъ типѣ нужны три власти. законодательная, административная и судебная. Притяженіе силъ А, Б и В другъ къ другу, хорошее сложеніе ихъ, есть результатъ тяготѣнія къ истинѣ нравственнаго міропорядка. Разложеніе ихъ есть результатъ работы «внутренняго софиста», «отца лжи».

Простыя государственныя структуры А, Б и В и попарныя метахимическія структуры АБ, АВ и БВ испытаны исторіей. Волны демоса ихъ смывали; онѣ неспособны спасать, искупать, оборонять. Каждое изъ двойственныхъ соединеній АБ, БВ, ВА, неомраченное примѣсью (—), по силѣ метахимическаго сродства тяготѣетъ къ недостающему третьему элементу. Въ результатѣ сродства получается структурная символическая формула тріединаго вихреатомнаго (недѣлимаго) нормативнаго государства

$$_{А}\overset{В}{\triangle}_{Б}.$$

Въ тріединомъ нормативномъ государствѣ борьба за право (см. у Іеринга) есть борьба противъ притяженій въ сторону (—) «злого рока».

§ 31. Погрѣшности предсказаній и наблюденій. Лапласовская теорія способа наименьшихъ квадратовъ, упрощенная при помощи теоремы Чебышева. Критика установки опытовъ, относящаяся къ выводамъ съ помощью этого способа.

I. Погрѣшности предсказаній и независимыя погрѣшности непосредственныхъ наблюденій (надъ группами и направленіями силъ, положеній и реальныхъ теченій, разносимыхъ тѣлами, лучами и символами) неизбѣжны. Но при програмныхъ массовыхъ независимыхъ наблюденіяхъ, коимъ дѣлается толковая научная сводка, искомое всетаки находится довольно точно; а безчисленныя погрѣшности оцѣниваются ихъ графиками и искупаются за счетъ запасовъ.

Способъ наименьшихъ квадратовъ служитъ для отысканія, на основаніи значительнаго числа m погрѣшительныхъ независимыхъ наблюденій, группы ν неизвѣстныхъ ($m > \nu$). Онъ имѣетъ троякое приложеніе соотвѣтственно тремъ точкамъ зрѣнія: Лежандра, Лапласа и Гаусса.

Точка зрѣнія Лежандра *интерполяціонная*, не имѣющая отношенія къ теоріи вѣроятностей, но имѣющая отношеніе къ остальнымъ частямъ математики. Она прилагается, напримѣръ, къ опредѣленію параметровъ $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ *интерполяціонной* функціи $F(x, \lambda, \mu, \nu, \ldots)$ перемѣннаго x при помощи данной группы значеній этой функціи. Она имѣетъ отношеніе къ математической формулировкѣ эмпирическихъ законовъ, выражаю-

щихъ *плавный* (безъ замѣтныхъ толчковъ и сотрясеній) постепенный процессъ, допускающій приложеніе аналитическихъ функцій къ его изслѣдованію.

Лапласъ же и Гауссъ, съ различныхъ точекъ зрѣнія, приложили способъ наименьшихъ квадратовъ къ вопросамъ, имѣющимъ тѣсную связь съ теоріей вѣроятностей. Различіе этихъ точекъ имѣетъ отношеніе къ послѣдовательности фактовъ во времени: Лапласъ обосновываетъ способъ для *предстоящихъ* наблюденій, т. е. учитъ какъ бы пророчествовать, судить въ смѣтномъ проективномъ порядкѣ; а Гауссъ обосновываетъ тотъ же способъ на почвѣ *сдѣланныхъ* наблюденій, имѣя возможность заднимъ числомъ ревизировать факты, сличать предположенія съ оказательствомъ на дѣлѣ и примѣнять синтетическое ученіе о вѣроятностяхъ à posteriori, сближающее теорію съ фактическою дѣйствительностію.

II. Лапласовская теорія способа наименьшихъ квадратовъ уже подверглась переработкѣ въ трудахъ Коши и затѣмъ Бьэнемэ, В. Я. Цингера, Лорана, Слешинскаго, Ярошенко, А. А. Маркова и другихъ *). Она ограничивается, какъ извѣстно, предположеніями, исключающими систематическія погрѣшности и, кромѣ того, разные парадоксы.

Упростить Лапласовское обоснованіе способа наименьшихъ квадратовъ и ярче отдѣлить сомнительное отъ несомнѣннаго возможно при помощи вышедоказанной (см. § 18) теоремы Чебышева.

Вотъ этотъ упрощенный выводъ.

Пусть рядъ m независимыхъ наблюденій приводитъ къ системѣ уравненій вида:

$$\left.\begin{array}{l} a_k x + b_k y + \ldots + p_k w - l_k = \delta_k, \\ k = 1, 2, \ldots, m, \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

гдѣ

$$a_k \,.\, x + b_k \,.\, y + \ldots + p_k \,.\, w$$

есть наблюдаемая линейная функція v неизвѣстныхъ x, y, ..., w, далѣе l_k есть ожидаемый результатъ наблюденія и δ_k есть ожидаемая погрѣшность наблюденія. Уравненія (1) называются начальными.

Отъ характера наблюденія зависитъ вѣроятность $\varphi_k(\delta_k)\, d\delta_k$ того, что погрѣшность δ_k получитъ опредѣленное значеніе δ_k. Видъ функціи $\varphi_k(\delta_k)$ остается въ способѣ Лапласа безъ окончательнаго опредѣленія. Пусть однако же наблюденія и наблюдаемыя формы функцій ставятся такъ, что математическія ожиданія независимыхъ погрѣшностей $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$ отдѣльно суть нули, т. е.

$$S\varphi_k(\delta_k) \,.\, \delta_k \,.\, d\delta_k = 0, \; k = 1, 2, \ldots, m, \quad \ldots \quad (2)$$

*) *H. Laurent*: «Statist. Mathém».—*В. Я. Цингеръ*: «Способъ наименьшихъ квадратовъ (Москва, 1862 г.).—*И. В Слешинскій*: «Къ теоріи способа наименьшихъ квадратовъ» (Одесса, 1892). *А. А. Марковъ*: «Законъ большихъ чиселъ и способъ наименьшихъ квадратовъ» (Извѣстія Казанскаго Физико-Матем. Общества, за 1899 годъ).

гдѣ интеграція S распространяется на всѣ возможныя значенія перемѣннаго δ_k, составляющія рядъ почти непрерывный. Условія (2) гарантируются тщательнымъ исключеніемъ систематическихъ погрѣшностей наблюденія.

Математическія ожиданія квадратовъ погрѣшностей $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$ пусть всегда остаются конечными не выше даннаго предѣла; этимъ исключается парадоксальный случай или обезпечивается возможность примѣненія теоремы II, § 18. Обозначимъ матем. ожиданіе δ_k^2 чрезъ M_k,

$$M_k = S\,\varphi_k(\delta_k) \cdot \delta_k^2 \cdot d\delta_k \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Замѣтимъ мимоходомъ, что численныя значенія погрѣшностей $\delta_1, \delta_2, \ldots$, а слѣд. и численныя значенія величинъ $M_1, M_2, \ldots$ зависятъ не только отъ функцій $\varphi_k(\delta_k)$, но и отъ *подбора мѣръ* (единицъ) тѣхъ конкретныхъ явленій, численныя величины коихъ обозначены символами $x, y, \ldots$ Крупныя по величинѣ мѣры убавляютъ численныя значенія $|\delta_k|$ и M_k; уменьшеніе мѣръ въ s разъ увеличиваетъ числа M_k въ s^2 разъ.

Умножая каждое изъ уравненій системы (1) на неопредѣленный множитель λ_k и складывая эти уравненія, получимъ уравненіе:

$$x \cdot \sum a_k\lambda_k + y \cdot \sum b_k\lambda_k + \ldots + w \cdot \sum p_k\lambda_k - \sum l_k\lambda_k = \sum \delta_k\lambda_k \quad . \quad (4)$$

Введемъ затѣмъ условія:

$$\sum a_k\lambda_k = m, \sum b_k\lambda_k = \sum c_k\lambda_k = \ldots = \sum p_k\lambda_k = 0 \quad . \quad (5)$$

Эти условія связываютъ лишь ν изъ неопредѣленныхъ количествъ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$; остальные $m - \nu$ остаются пока произвольными. Благодаря условіямъ (5), уравненіе (4) получаетъ видъ:

$$x = \frac{1}{m} \sum l_k \cdot \lambda_k + \frac{1}{m} \cdot \Delta \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

$$\Delta = \delta_1 \cdot \lambda_1 + \delta_2 \cdot \lambda_2 + \ldots + \delta_m \cdot \lambda_m \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Примѣняя теорему Чебышева, обозначимъ чрезъ P вѣроятность того, что будутъ имѣть силу неравенства:

$$-t < \frac{\Delta}{m} < +t \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Эта вѣроятность, по теоремѣ Чебышева, должна удовлетворять неравенствамъ:

$$1 > P > 1 - \frac{H}{mt^2}, \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

гдѣ

$$H = \frac{1}{m} \cdot [M_1\lambda_1^2 + M_2\lambda_2^2 + \ldots + M_m\lambda_m^2] \quad \ldots \quad (10)$$

Такъ какъ, по условію примѣнимаго здѣсь обобщеннаго закона большихъ чиселъ, t весьма мало, то величина $\frac{\Delta}{m}$, удовлетворяющая, по

предположенію, неравенствамъ (8), можетъ быть пренебрежена, при чемъ равенство (6) получитъ видъ:

$$x = \frac{1}{m}\sum l_k\lambda_k; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

а чтобы это рѣшеніе соотвѣствовало наиболѣе высокому значенію вѣроятности P, нужно, чтобы низшій ея предѣлъ, отмѣченный въ неравенствахъ (9) величиною

$$K = 1 - \frac{H}{mt^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

былъ *наибольшимъ* изъ всевозможныхъ значеній этой велины, какъ функціи перемѣнныхъ λ_1, λ_2, ..., λ_m, связанныхъ условіями (5). Этотъ условный максимумъ величины K соотвѣтствуетъ также условному *минимуму* функціи H, опредѣляемой равенствомъ (10).

Отыскивая условный минимумъ функціи H по извѣстному плану, будемъ сначала опредѣлять безусловный минимумъ функціи

$$H - X \cdot \left(\sum a_k \lambda_k - m\right) - Y \cdot \sum b_k\lambda_k - \ldots - W \cdot \sum p_k\lambda_k,$$

гдѣ X, Y, ..., W суть ν новыхъ неопредѣленныхъ пока количествъ, независящихъ отъ перемѣнныхъ λ_1, λ_2, ..., λ_m. Потомъ примемъ условія (5).

По этому способу находимъ, въ дополненіе къ системѣ (5), систему уравненій, опредѣляющихъ искомый минимумъ функціи H, именно:

$$\left.\begin{aligned} &2M_k \cdot \lambda_k = a_kX + b_k \cdot Y + \ldots + p_k \cdot W, \\ &k = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (13)$$

Системы (5) и (13) достаточны, вообще говоря, для опредѣленія $m + \nu$ величинъ λ_1, λ_2, ..., λ_m, X, Y, ... W. Величины λ_1, λ_2, ..., λ_m легко исключить, послѣ чего получимъ для опредѣленія вспомогательныхъ величинъ X, Y, ..., W систему слѣдующихъ ν уравненій:

$$\left.\begin{aligned} &X \cdot \sum\frac{g_k a_k a_k}{m} + Y \cdot \sum\frac{g_k a_k b_k}{m} + \ldots + W \cdot \sum\frac{g_k a_k p_k}{m} = 1, \\ &X \cdot \sum\frac{g_k b_k a_k}{m} + Y \cdot \sum\frac{g_k b_k b_k}{m} + \ldots + W \cdot \sum\frac{g_k b_k p_k}{m} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &X \cdot \sum\frac{g_k p_k a_k}{m} + Y \cdot \sum\frac{g_k p_k b_k}{m} + \ldots + W \cdot \sum\frac{g_k p_k p_k}{m} = 0, \end{aligned}\right\} \quad . \quad (14)$$

гдѣ вообще $g_k = 1 : (2M_k)$.

Количества g_1, g_2, ..., g_m пропорціональны *вѣсамъ* предстоящихъ наблюденій, характеризующимъ тщательность эксперимента или наблюденія, дающаго результаты l_1, l_2, ..., l_m.

Слѣдуетъ замѣтить, что каждый коэффиціентъ въ системѣ (14) при любомъ изъ неизвѣстныхъ X, Y, ..., W для любого изъ уравненій системы представляетъ *среднее ариѳметическое* отъ членовъ $g_k\, g_k\, r_k$ суммы вида $\sum g_k q_k r_k$. Если эти члены суть всегда конечныя величины, то при

любомъ весьма большомъ значеніи числа m наблюденій система (14), вообще говоря (исключенія бываютъ), даетъ конечныя значенія всѣхъ v неизвѣстныхъ $X, Y, \ldots, W$. Слѣдовательно и система (13) опредѣлитъ конечныя значенія величинъ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$; а потому и вышеуказанное количество H, опредѣляемое равенствомъ (10), будетъ конечнымъ, при чемъ количество K будетъ величиною, весьма близкою къ 1; т. е. сдѣланныя выше предположенія (8), сводящія погрѣшность $\frac{\Delta}{m}$ приближенноваго равенства (11) къ ничтожной величинѣ, будутъ почти *достовѣрными*. Въ этой достовѣрности содержится главная цѣнность вывода.

III. *Исключенія* изъ этихъ общихъ разсужденій, нарушающія норму (правило) надежности вывода (заключенія), бываютъ тогда, когда слишкомъ малъ детермирантъ

$$D = \begin{vmatrix} (aa), & (ab), & \ldots, & (ap) \\ (ba), & (bb), & \ldots, & (bp) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (pa), & (pb), & \ldots, & (pp) \end{vmatrix}, \quad \ldots \quad (15)$$

гдѣ вообще для краткости положено:

$$(qr) = \sum g_k q_k r_k = g_1 q_1 r_1 + g_2 q_2 r_2 + \ldots + g_m q_m r_m. \quad (16)$$

Если детерминантъ D есть нуль или приближенъ къ нулю настолько, что количества λ_k, опредѣляемыя системами (13) и (14), оказываются либо безконечностями, либо слишкомъ большими конечными величинами, то вышеизложенныя сужденія дѣлаются парадоксальными.

Очевидно, въ этихъ особыхъ случаяхъ имѣетъ мѣсто парадоксъ второй категоріи (см. § 20), подрывающій довѣріе къ устойчивости выводовъ. Этимъ исключительнымъ (но не рѣдкимъ) случаямъ соотвѣтствуетъ основательное сомнѣніе и то или другое *парадоксальное* положеніе въ условіяхъ и установкѣ опытовъ и наблюденій; вышеуказанное количество K можетъ далеко отойти отъ 1, роняя нашъ курсъ довѣрія къ выводамъ. Иначе говоря, при подобномъ парадоксальномъ положеніи оказываются въ наличности достаточныя основанія, чтобы заранѣе провидѣть ненадежность предположеннаго вывода неизвѣстныхъ $x, y, \ldots, w$ по способу наименьшихъ квадратовъ, а потому искать другихъ способовъ надежнаго вывода и, можетъ быть, видоизмѣнить условія и установку наблюденій такъ, *чтобы поставить дѣло внѣ сомнительнаго положенія*.

Выше мы выяснили способъ опредѣленія лишь одного неизвѣстнаго x. Повторяя разсужденія, можемъ тотъ же способъ распространить на остальныя неизвѣстныя $y, z, \ldots, w$, выдвигая ихъ поочередно на мѣсто x.

Найденныя по этому плану алгебраическія выраженія неизвѣстныхъ

$x, y, \ldots, w$ совпадаютъ по виду съ выраженіями тѣхъ значеній перемѣнныхъ $x, y, \ldots, w$, для коихъ функція

$$g_1\delta_1^2 + g_2\delta_2^2 + \ldots + g_m\delta_m^2,$$

содержащая величины δ_k, выводимыя изъ уравненій (1), обращается въ минимумъ. Въ этомъ убѣждаются слѣдующимъ сопоставленіемъ.

Найденную выше формулу (11) нужно преобразовать съ помощью уравненій (13), исключая величины $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. Получимъ:

$$x = X\sum\frac{g_k a_k l_k}{m} + Y\sum\frac{g_k b_k l_k}{m} + \ldots + W\sum\frac{g_k p_k l_k}{m}.$$

Внося сюда детерминантныя выраженія неизвѣстныхъ $X, Y, \ldots, W$, выведенныя изъ системы уравненій (14), будемъ имѣть:

$$x = \frac{D_{11}}{D}\sum g_k a_k l_k + \frac{D_{22}}{D}\sum g_k b_k l_k + \ldots + \frac{D_{vv}}{D}\sum g_k p_k l_k \quad . \quad (17)$$

гдѣ D есть вышеуказанный детерминантъ, а D_{kk} есть его миноръ, получаемый вычеркиваніемъ въ детерминантѣ D строки k и столбца k.

Вмѣстѣ съ тѣмъ легко убѣдиться, что неизвѣстная величина x, опредѣляемая равенствомъ (17), выводится изъ системы уравненій:

$$\left.\begin{aligned}
&x\sum g_k a_k^2 + y\sum g_k a_k b_k + \ldots + w\,.\sum g_k a_k p_k = \sum g_k a_k l_k,\\
&x\sum g_k b_k a_k + y\sum g_k b_k^2 + \ldots + w\,.\sum g_k b_k p_k = \sum g_k b_k l_k,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x\sum g_k p_k a_k + y\sum g_k b_k p_k + \ldots + w\,.\sum g_k p_k^2 = \sum g_k p_k l_k.
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (18)$$

Этою же самою системою опредѣляются тѣ значенія перемѣнныхъ $x, y, \ldots, w$, для которыхъ функція $\sum g_k\delta_k^2$ обращается въ minimum.

Способъ Гаусса (см. мою книгу «Теорія Вѣроятностей») приводитъ къ тѣмъ же выраженіямъ неизвѣстныхъ $x, y, \ldots, w$, но съ другой точки зрѣнія.

Это формальное (по алгебраическому выраженію результатовъ) совпаденіе рѣшеній по способамъ Гаусса и Лапласа соотвѣтствуетъ какъ нельзя лучше практическому *сличенію* ожиданія, формулируемаго въ смѣтномъ (Лапласовскомъ) порядкѣ, съ оказательствомъ въ совершеніи и въ фактическомъ ревизіонномъ (Гауссовомъ) порядкѣ. Достовѣрное à priori, конечно, оправдывается и заднимъ числомъ, согласно постулату, указанному въ § 27, п. IV; относительность достовѣрности и другіе изъяны вывода и опытовъ дѣлаютъ эту повѣрку заднимъ числомъ необходимымъ стараніемъ.