ОПЫТЫ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ИЗЛОЖЕНІЯ ЛОГИКИ

СОСТАВИЛЪ

В. В. Бобынинъ

Приватъ-Доцентъ Императорскаго Московскаго Университета.

ВЫПУСКЪ II.

Изданіе Редакціи журнала „Физико-Математическія Науки въ ихъ настоящемъ и прошедшемъ“

МОСКВА. 1894

ТОВАРИЩЕСТВО ТИПОГРАФІИ А. И. МАМОНТОВА

ЛЕОНТЬЕВСКІЙ ПЕР., Д. МАМОНТОВА

ПРОДАЮТСЯ СОЧИНЕНІЯ В. В. БОБЫНИНА:

1. Опыты математическаго изложенія логики. Вып. I. М. 1886. Ц. 60 к. Вып. II. М. 1894. Ц. 50 к.

Содержаніе: Вып. I. Вступленіе.—Работы Буля.—Сочиненіе Роберта Грассманна. Вып. II. Сочиненія Эриста Шрёдера.

2. Біографіи знаменитыхъ математиковъ XIX столѣтія. Вып. I. Германнъ Грассманнъ. М. 1886. Ц. 60 к. Вып. II. Бернгардъ Риманъ.— Якоби. М. 1894. Ц. 75 к. Вып. III. Гоёне Вронскій. М. 1894. Ц. 1 р. Вып. V. Карлъ Фридрихъ Гауссъ. М. 1889. Ц. 1 р.

3. Очерки исторіи развитія физико-математическихъ знаній въ Россіи. Томъ первый (въ 2 выпускахъ). XVII столѣтіе. М. 1886—1893. Ц. 3 р.

Содержаніе: Очеркъ I. Рукописная математическая литература XVII столѣтія.—Очеркъ II. Источники нашей рукописной математической литературы XVII столѣтія.—Очеркъ III. Характеристическія черты и особенности содержанія ариѳметическихъ рукописей XVII столѣтія.—Очеркъ IV. Астрономія въ нашихъ математическихъ рукописяхъ XVII столѣтія.—Очеркъ V. Землемѣріе.—Очеркъ VI. Практическая Стереометрія.

4. Русская физико-математическая библіографія. Указатель книгъ и журнальныхъ статей по физико-математическимъ наукамъ, вышедшихъ въ Россіи съ начала книгопечатанія до послѣдняго времени. Томъ первый (въ 3 выпускахъ). Цѣна 3 р. 50 к. М. 1886—1890. Томъ второй (въ 4 выпускахъ). Ц. 6 р. 50 к. М. 1889—1893 *).

---

*) Оба тома рекомендованы Министерствомъ Народнаго Просвѣщенія для пріобрѣтенія въ фундаментальныя библіотеки среднихъ учебныхъ заведеній (см. «Журналъ Минист. Народнаго Просвѣщенія» № 6, Іюнь 1890 г. и № 2. Февраль 1894 г.). Они-же рекомендованы и Главнымъ Управленіемъ Военно-учебныхъ заведеній для пріобрѣтенія въ фундаментальныя библіотеки Кадетскихъ Корпусовъ и Военныхъ Училищъ (см. «Педагогическій Сборникъ» № 11. Ноябрь 1893 г.).

ОПЫТЫ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ИЗЛОЖЕНІЯ ЛОГИКИ

СОСТАВИЛЪ

В. В. Бобынинъ

Приватъ-Доцентъ Императорскаго Московскаго Университета.

ВЫПУСКЪ II.

Изданіе Редакціи журнала „Физико-Математическія Науки въ ихъ настоящемъ и прошедшемъ“.

МОСКВА. 1894

ТОВАРИЩЕСТВО ТИПОГРАФІИ А. И. МАМОНТОВА

ДРОНТЬЕВСКІЙ ПЕР., Д. МАМОНТОВА

QA
265
БИБЛИОТЕКА
СОЦИАЛИСТИЧЕСКОЙ
АКАДЕМИИ
4044
24

Дозволено цензурой. Москва 20 мая 1894 г.

ОПЫТЫ МАТЕМАТИЧЕСКАГО ИЗЛОЖЕНІЯ ЛОГИКИ.

Сочиненія Эрнста Шрёдера.

Продолжателемъ работъ Буля и Роберта Грассманна, въ смыслѣ ихъ усовершенствованія и упрощенія, явился *Эрнстъ Шрёдеръ*. До сего времени имъ написаны: одно систематическое сочиненіе по Математической Логикѣ Der Operationskreis des Logikkalkuls (Leipzig, 1877) и помѣщенная въ Mathematische Annalen (XII Band, 1877) статья подъ заглавіемъ Note über den Operationskreis des Logikkalkuls (S. 481—484), главная цѣль которой, по словамъ самаго автора «обратить вниманіе математической публики на содержаніе» перваго сочиненія. Какъ занимающаяся исключительно изложеніемъ особенностей послѣдняго по сравненію съ методами Буля, эта статья не имѣетъ самостоятельнаго значенія. Цѣлями своего систематическаго сочиненія авторъ выставляетъ, во-первыхъ, устраненіе многихъ присущихъ по его мнѣнію работамъ Буля несовершенствъ и, во-вторыхъ, доставленіе нѣмецкой ученой публикѣ въ болѣе совершенной отдѣлкѣ «полнаго образа всего въ высшей степени замѣчательнаго и въ формальномъ отношеніи высокоинтереснаго круга дѣйствій дедуктивной логики» (S. IV).

Какъ на важнѣйшее изъ несовершенствъ работы Буля, авторъ указываетъ на «введеніе имъ въ изслѣдованія съ цѣлью разрѣшенія своей задачи элемента совершенно *чуждаго* сущности дѣла». Таковымъ, по его мнѣнію, является «весь балластъ алгебраическихъ чиселъ», имѣющій кромѣ своей ненужности еще и то вредное дѣйствіе, «что, слѣдуя работамъ Буля, приходится отказаться отъ истолковываемости отдѣльныхъ шаговъ и вообще вести вычисленіе помощью символовъ, логически совершенно неспособныхъ къ истолкованію, въ родѣ, наприм., $2,—1, \frac{1}{3}, \frac{1}{0}$» (S. III). Исключеніе изъ этого ка-

тегорическаго приговора авторъ дѣлаетъ только для символовъ 0 и 1, «у которыхъ у однихъ не можетъ быть отрицаемо право гражданства также и въ Логическомъ Исчисленіи». Причину существованія разсматриваемаго несовершенства въ высокоуважаемой нашимъ авторомъ работѣ Буля онъ видитъ въ томъ, «что творецъ новаго ученія не смогъ достаточно полно отрѣшиться отъ ариѳметическихъ правилъ, которыя для обратныхъ операцій Логики именно и не имѣютъ значенія».

Что касается до сочиненія Роберта Грассманна, то авторъ находитъ его стоящимъ на совершенно правильной дорогѣ. По его поводу онъ выражаетъ нѣкоторое сожалѣніе только о томъ, что тотъ не пошелъ по этой дорогѣ достаточно далеко «именно не на столько далеко, чтобы быть въ состояніи рѣшить тѣ-же самыя задачи, какъ и Буль, и тѣмъ сдѣлать безъ надобности запутанный аппаратъ послѣдняго окончательно излишнимъ» (S. V).

Усовершенствованія, внесенныя въ ученіе Буля нашимъ авторомъ, состоятъ, по его мнѣнію, въ замѣтномъ уменьшеніи продолжительности и утомительности вычисленій, требуемыхъ задачами, и въ упрощеніи, на столько значительномъ, орудій, нужныхъ для построенія теоріи, что дѣлается возможнымъ обойтись безъ употребленія «даже ничтожнѣйшихъ между предварительными математическими свѣдѣніями, не исключая и таблицы умноженія» (S. IV). Также и въ отношеніи формальной стороны исчисленія и ея обосновки авторъ заявляетъ свои права на достигнутую имъ простоту и совершенство. Всѣми этими важными результатами онъ обязанъ, по своему собственному признанію, слѣдованію пути, проложенному Робертомъ Грассманномъ. «Измѣненная (сравнительно съ Булемъ) точка зрѣнія», говоритъ авторъ, «сдѣлала то, что когда оказалось возможнымъ удержать бо́льшую часть изъ представленныхъ Булемъ предложеній, тогда доказательства почти сплошь пришлось замѣнить другими, изъ которыхъ нѣсколько подобны даннымъ у Роб. Грассманна» (S. V).

Der Operationskreis des Logikkalkuls состоитъ изъ 4 параграфовъ. Первый изъ нихъ представляетъ собственно Введеніе въ сочиненіе. Онъ содержитъ въ себѣ установленіе отношеній между обыкновенной логикой и Логикой Математической или Логическимъ Исчисленіемъ, раздѣленіе послѣдней, значеніе принятыхъ въ ней символовъ и, наконецъ, довольно подробное разсмотрѣніе ея основныхъ дѣйствій.

Относясь совершенно безразлично въ виду поставленныхъ имъ себѣ ближайшихъ цѣлей къ вопросу о достоинствахъ и недостаткахъ

обыкновенной логики, Шродеръ не объявляетъ ей войну, подобно Грассманну. Напротивъ, въ вопросѣ объ отношеніяхъ между нею и Логическимъ Исчисленіемъ онъ слѣдуетъ самой миролюбивой политикѣ. «Если мы примкнемъ», говоритъ онъ, «къ наиболѣе употребительному раздѣленію логики (дедуктивной), въ силу котораго предметъ ея составляетъ вообще ученіе о понятіяхъ, сужденіяхъ и умозаключеніяхъ, то Математическая Логика или Логическое Исчисленіе будетъ характеризоваться, главнымъ образомъ, тѣмъ, что понятія, а также и сужденія, вообще представляются въ ней буквами, умозаключенія же совершаются въ видѣ вычисленій, выполняемыхъ надъ тѣми-же самыми буквами на основаніи опредѣленныхъ простыхъ законовъ».

Логическое Исчисленіе авторъ раздѣляетъ на двѣ части. Первая или *Вычисленіе понятіями* имѣетъ предметомъ совершеніе такихъ умозаключеній, посылки и заключенія которыхъ представляются сужденіями, что-нибудь высказывающими о вещахъ, то есть называемыми обыкновенно категорическими. Шродеръ называетъ ихъ вмѣстѣ съ Булемъ «сужденіями перваго класса» [первичныя или простыя нашего предыдущаго изложенія *)]. Вторая или *Вычисленіе сужденіями* занимается главнымъ образомъ такими изслѣдованіями, въ которыхъ обсуживаются наши утвержденія о вещахъ, и именно въ отношеніи рода и способа, какимъ истинность или неистинность одного зависитъ отъ истинности или неистинности другаго. Сюда относятся, слѣдовательно, тѣ сужденія, которыя обыкновенно обозначаются названіями условныхъ предложеній, гипотетическихъ и раздѣлительныхъ сужденій. Шродеръ и въ этомъ случаѣ согласно съ Булемъ называетъ ихъ «сужденіями втораго класса» (вторичныя или сложныя нашего предыдущаго изложенія). Главное значеніе въ отношеніи формальной стороны вычисленія принадлежитъ первой части, такъ какъ вычисленіе ведется въ обѣихъ частяхъ по однимъ и тѣмъ-же законамъ. Разница между ними состоитъ единственно въ томъ, что истолкованіе получаемыхъ формулъ въ обѣихъ частяхъ различно. Въ виду такихъ отношеній между обѣими частями, первой изъ нихъ принадлежитъ по праву и первое мѣсто въ изложеніи.

Буква въ первой части Логическаго Исчисленія всегда обозначаетъ *классъ* или *родъ* объектовъ мышленія. Поэтому, соотвѣтствующія имъ въ языкѣ названія есть всегда общія имена. Буква является,

*) Отдѣлъ научныхъ статей. Томъ I. Стр. 44 и слѣд.

слѣдовательно, символомъ понятія, въ которомъ нами мыслятся совмѣщенными всѣ существенные признаки, общіе всѣмъ принадлежащимъ къ классу индивидуумамъ. Если совокупность этихъ признаковъ представляетъ «содержаніе» понятія, то самъ классъ служитъ выраженіемъ «объема» послѣдняго. Подъ видомъ символовъ класса Логическое Исчисленіе оперируетъ, слѣдовательно, надъ понятіями, представляемыми по ихъ объемамъ. Классы, разсматриваемые этимъ Исчисленіемъ, могутъ быть составляемы также и изъ индивидуумовъ, выбираемыхъ совершенно случайно и произвольно изъ всего, что только можетъ быть мыслимо. Въ частныхъ случаяхъ, за исключеніемъ общей случайности ихъ выбора, они могутъ не обнаруживать ни одного общаго признака. Число индивидуумовъ, содержащихся въ классѣ, можетъ быть ограничено, или безгранично, или даже сведено къ одному индивидууму. Въ послѣднемъ случаѣ символу класса будетъ соотвѣтствовать въ языкѣ собственное имя.

Какъ и въ ариѳметикѣ, въ Логическомъ Исчисленіи существуютъ 4 основныя дѣйствія, различающіяся отъ соотвѣтствующихъ ариѳметическихъ не столько по своему характеру, сколько по предметамъ, къ которымъ они прилагаются. Для однихъ эти предметы — числа, для другихъ — понятія. Въ виду этого «ничто не препятствуетъ», говоритъ и подчеркиваетъ Шродеръ, «назвать 4 основныя дѣйствія въ Логикѣ тѣми-же именами и выразить ихъ тѣми-же знаками, какіе употребляются въ ариѳметикѣ». Это распространеніе ариѳметической терминологіи на логическія основныя дѣйствія не должно однако-же исключать изъ употребленія и ихъ собственныя названія, давно уже получившія право гражданства въ философіи или грамматикѣ. Эти названія мы приводимъ нѣсколькими строками ниже.

Особенности и свойства внутренней природы 4 основныхъ ариѳметическихъ дѣйствій заставляютъ, какъ извѣстно, раздѣлять ихъ по степени сложности на двѣ группы, къ первой изъ которыхъ принадлежатъ сложеніе и вычитаніе, а ко второй — умноженіе и дѣленіе. Принципы этого раздѣленія однако не могутъ быть примѣнены къ логикѣ. Даже можно сказать болѣе, въ ней совсѣмъ не усматриваются какія-бы то ни было основанія для группировки основныхъ дѣйствій. Но за то она представляетъ весьма ясно выраженную аналогію между дѣйствіями, соотвѣтствующими ариѳметическимъ прямымъ и обратнымъ. Пары этихъ дѣйствій въ Логическомъ Исчисленіи представляютъ даже замѣчательный примѣръ

дуализма который Шродеръ приводитъ какъ эмпирическій принципъ, откладывая его доказательство до послѣдующаго. Онъ формулируетъ его слѣдующимъ образомъ: «*Изъ всякой общей формулы, имѣющей значеніе въ Логикѣ, можетъ быть получена еще другая, также правильная формула, если въ первой знаки плюсъ и минусъ будутъ вездѣ замѣнены знаками умноженія и дѣленія, а символы 0 и 1 соотвѣтственно замѣстятся другъ другомъ*». Практическое примѣненіе этого принципа автору удается свести на одну взаимную замѣну знаковъ умноженія и сложенія. Разматривая съ этою цѣлью знаки 0 и 1 какъ модули сложенія и умноженія и замѣняя ихъ въ формулахъ соотвѣтствующими знаками μ_+ и $\mu_\times$, а также и обыкновенные знаки вычитанія и дѣленія соотвѣтственно знаками $(:)_+$ и $(:)_\times$, авторъ вполнѣ достигаетъ желаемаго

Принципъ дуализма приводитъ автора къ слѣдующему схематическому расположенію основныхъ дѣйствій Логическаго Исчисленія.

1°) *Умноженіе* или *опредѣленіе*	1′) *Сложеніе* или коллективное соединеніе (*коллекція*).
2°) *Дѣленіе* или *отвлеченіе* (*абстракція*).	2′) *Вычитаніе* или *исчерпываніе* (исключеніе).

Подобнымъ-же образомъ, то-есть съ помощью употребленія однихъ и тѣхъ-же нумеровъ, отмѣченныхъ 0 и ′, и помѣщенія другъ подлѣ друга, онъ обозначаетъ и впослѣдствіи предложенія, связанныя принципомъ дуализма.

Авторъ заканчиваетъ § 1 своего сочиненія указаніемъ возможности устраненія второй пары дѣйствій, то-есть дѣленія и вычитанія, введеніемъ пятаго, находящагося къ самому себѣ въ отношеніяхъ дуализма и состоящаго въ образованіи противорѣчащей противоположности. Онъ называетъ это дѣйствіе *противоположеніемъ* или *отрицаніемъ* и присоединяетъ его къ предыдущей схемѣ на третьемъ мѣстѣ. Откладывая болѣе подробное ознакомленіе съ этимъ дѣйствіемъ до послѣдующаго, авторъ замѣчаетъ только, что оно по своей природѣ проще другихъ, такъ какъ при его употребленіи можно предполагать данными только *одинъ* операціонный членъ, тогда какъ при всѣхъ другихъ ихъ *много*. Вмѣстѣ съ умноженіемъ и сложеніемъ это дѣйствіе составляетъ слѣдовательно три *конечныя* основныя дѣйствія Логическаго Исчисленія, доведеннаго до наибольшей возможной простоты.

Второй параграфъ посвященъ изложенію теоретической части Ма-

тематической Логики. Въ немъ излагаются ея существеннѣйшія *опредѣленія*, *аксіомы* и *предложенія*, а также и доказательства послѣднихъ.

Выполненію своей задачи авторъ предпосылаетъ слѣдующее замѣчаніе о характерѣ теоремъ и аксіомъ Математической Логики. «Всѣ теоремы нашего ученія *интуитивны*; разъ приведенныя въ сознаніе, онѣ представляются непосредственно ясными; мы могли бы, поэтому, утвержденія, приведенныя здѣсь въ значеніи аксіомъ, представить съ нѣкоторымъ правомъ какъ слѣдствія, непосредственно доставляемыя опредѣленіями. Эти аксіомы, ни въ какомъ случаѣ не имѣющія эмпирическаго характера, я могъ бы поэтому точнѣе назвать только какъ *формальныя*, потому что какъ таковыя я привожу исключительно тѣ утвержденія, которыя не выводятся мною путемъ формальнаго вычисленія по уже установленнымъ и классифицированнымъ методамъ или при посредствѣ заключеній, ясно поставленныхъ и прямо выводимыхъ изъ предыдущаго. При такомъ способѣ выраженія формальное основаніе всего ученія будутъ составлять не опредѣленія, но только случайно присоединенные къ нимъ постулаты вмѣстѣ съ аксіомами».

Первое и притомъ обособленное мѣсто въ изложеніи своего ученія авторъ отводитъ *опредѣленію равенства* двухъ или нѣсколькихъ символовъ класса и двумъ связаннымъ съ ними аксіомамъ. Символы классовъ должны называться равными другъ другу, когда выражаемые ими классы содержатъ тожественнымъ образомъ одни и тѣ-же индивидуумы, когда, слѣдовательно, они суть только названія одного и того-же класса. Вслѣдствіе этого получаютъ силу слѣдующія двѣ аксіомы. «Всякій символъ класса равенъ самому себѣ». «Если два символа класса равны третьему, то они также равны и между собою». Затѣмъ авторъ переходитъ къ разсмотрѣнію ставимыхъ имъ 20 паръ предложеній, связанныхъ между собою принципомъ дуализма Между этими предложеніями содержатся какъ теоремы, такъ и опредѣленія и аксіомы. Послѣдуемъ въ ихъ разсмотрѣніи за авторомъ.

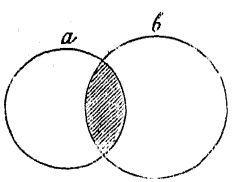
1°) *Опредѣленіе произведенія* ab двухъ символовъ класса. *Подъ* ab *слѣдуетъ подразумѣвать совокупность или классъ, цѣлый родъ индивидуумовъ, которые принадлежатъ какъ къ классу* a *такъ и къ классу* b

1′) *Опредѣленіе суммы* $a + b$ двухъ символовъ класса. *Классъ* $a + b$ *обозначаетъ совокупность индивидуумовъ, которые принадлежатъ или классу* a *или также классу* b *или обоимъ вмѣстѣ.*

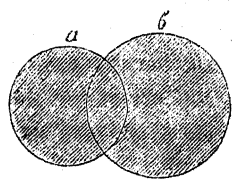
Для поясненія значенія этихъ опредѣленій авторъ пользуется давно уже употребляемымъ философами наглядным способомъ представленія объема понятія въ видѣ какой-нибудь ограниченной части плоскости, напр., круга, гдѣ всякая точка, геометрическая или чертежная, изображаетъ одинъ изъ принадлежащихъ классу индивидуумовъ. Рекомендуя этотъ старый пріемъ, пренебреженный Булемъ и Грассманномъ, авторъ видитъ въ немъ, какъ въ реальномъ субстратѣ формальныхъ операцій вычисленія Математической Логики, средство предоставленія ей возможности пользоваться чисто геометрическими процессами въ протяженіяхъ первыхъ трехъ измѣреній.

Примѣняя этотъ графическій пріемъ къ изображенію разсматриваемыхъ произведенія и суммы, авторъ находитъ согласно съ ихъ опредѣленіями, что они представятся въ видѣ заштрихованныхъ частей слѣдующихъ фигуръ.

ab



$a + b$



Такимъ образомъ во всякомъ пространственномъ образѣ представляетъ

$a \,.\, b$ область, въ которой области a и b взаимно *проникаютъ* другъ друга

$a + b$ область, до которой области a и b взаимно *дополняютъ* другъ друга.

Логическое

умноженіе назначено для того, чтобы изъ многообразія мыслимаго выдвинуть такія вещи, которыя характеризуются *общностью ихъ признаковъ*; оно въ сущности оказывается *выбираніемъ или выдѣленіемъ*. Философы называютъ его *опредѣленіемъ*, потому что если изъ класса a выдѣлить тѣ индивидуумы, которые въ то-же время принадлежатъ классу b, то понятіе a получитъ

сложеніе напротивъ того назначено, чтобы составлять такіе классы вещей, отдѣльныя группы которыхъ характеризуются *разнородными признаками*; оно приводится такимъ образомъ къ соединенію, къ *коллекціи*

болѣе близкое опредѣленіе вслѣдствіе обнаруженія, что разсматриваемыя a въ то-же время должны имѣть и признаки b.

Необходимость распространить данное опредѣленіе на случай, когда

оба круга лежатъ внѣ одинъ другаго,	обѣ поверхности покрываютъ вмѣстѣ всю плоскость,

заставляетъ автора ввести новые символы, которыми онъ избираетъ уже употребляемые въ томъ-же значеніи его предшественниками знаки

0	1

Такимъ образомъ

нуль есть знакъ, выражающій *ничто*, то-есть классъ, къ которому не принадлежитъ ни одинъ индивидуумъ.	*единица* представляетъ классъ *нѣчто*, то-есть категорію всего мыслимаго, совокупность всего. о чемъ можетъ идти рѣчь.

Символы 0 и 1 являются слѣдовательно предѣлами, между которыии заключаются всѣ символы классовъ, такъ какъ ни одинъ изъ этихъ послѣднихъ не можетъ быть менѣе, чѣмъ ничто, также какъ и ни одинъ не можетъ заключать въ себѣ индивидуумовъ болѣе, чѣмъ сколько ихъ вообще существуетъ.

Вслѣдствіе этого слѣдуетъ полагать

$ab = 0,$	$a + b = 1,$

когда классы a и b

не имѣютъ ни одного общаго индивидуума. Въ этомъ случаѣ классы могутъ быть названы *раздѣльными*; ихъ понятія исключаютъ одно другое.	обнимаютъ вмѣстѣ все мыслимое. Классы этого рода могутъ быть названы всего ближе *дополнительными до всего*.

Первое изъ этихъ двухъ замѣчаній показыаетъ, что въ Логикѣ произведеніе можетъ уничтожаться, когда ни одинъ изъ множителей не равенъ 0.

Распространяя опредѣленія 1) на какое угодно число символовъ класса, авторъ замѣчаетъ, что содержаніе, вложенное въ разсматриваемые нумера, онъ видитъ собственно не въ приведенныхъ опредѣленіяхъ, но въ опирающихся на нихъ *постулатахъ*, *данные символы классовъ перемножитъ другъ съ другомъ*, взаимно *сложить*, то-есть, слѣдовательно, другими словами, въ аксіоматическихъ предложеніяхъ:

Аксіома. Произведеніе | *Аксіома. Сумма*

символовъ классовъ въ свою очередь всегда есть символъ класса или логическое умноженіе, взаимно сложеніе, есть *безусловно выполнимая операція;* формальный результатъ его въ области символа класса никогда не становится не имѣющимъ смысла, незначащимъ или имѣющимъ *нулевое значеніе.*

2⁰) *Аксіома. Законъ перемѣстительности умноженія*

$$ab = ba$$

3⁰) *Аксіома. Законъ собирательности умноженія:*

$$a(bc) = (ab)c = abc$$

2′) *Аксіома. Законъ перемѣстительности сложенія:*

$$a + b = b + a$$

3′) *Аксіома Законъ собирательности сложенія:*

$$a+(b+c)=(a+b)+c=a+b+c$$

Послѣдовательность и *группировка* членовъ дѣйствій, все расположеніе процесса умноженія взаимно, сложенія, замѣчаетъ авторъ, безразлично для значенія конечнаго результата.

4″) *Аксіома.* Равное, умноженное на равное, даетъ равное. Если

$$a = b,$$

то также и

$$ac = bc$$

4′) *Аксіома.* Равное, приложенное къ равному, даетъ равное. Если

$$a = b,$$

то также и

$$a + c = b + c$$

предложеніе, которое легко распространить на соединеніе какого угодно числа уравненій.

Какъ на весьма важное свойство разсматриваемыхъ аксіомъ слѣдуетъ указать на ихъ *необратимость*, обнаруживающуюся съ особенной ясностью при помощи аксіомы 6⁰). Онѣ показываютъ также, что оба прямыя основныя дѣйствія Логическаго Исчисленія не могутъ быть многозначными. Если при томъ принять во вниманіе, что на основаніи 1) они не могутъ быть также и беззначными, то есть лишенными значенія, то остается заключить, что они должны быть опредѣляемы какъ *вполнѣ однозначныя.*

Аналогія между законами логическихъ и ариѳметическихъ дѣйствій, уже нарушенная указанною сейчасъ необратимостью послѣднихъ предложеній, смѣняется совершенною противоположностью въ двухъ слѣдующихъ:

5⁰) *Аксіома.*

$$aa = a$$

то-есть классъ отъ *умноженія на самаго себя не измѣняется.*

5′) *Аксіома.*

$$a + a = a.$$

Классъ, сложенный самъ съ собою, остается неизмѣннымъ.

Въ виду характеристичности этихъ аксіомъ для Логическаго Исчисленія авторъ даетъ имъ названіе *специфическихъ законовъ* этого Исчисленія. Чтобы привести ихъ въ совершенную ясность, достаточно обратиться къ опредѣленіямъ 1).

Возраженіе о несообразности съ общей точки зрѣнія выполненія такихъ дѣйствій, какъ $a \,.\, a$ или $a + a$, авторъ устраняетъ слѣдующими соображеніями. «Несомнѣнно, въ самомъ дѣлѣ, что при образованіи ничѣмъ неприкрытыхъ выраженій этого рода дѣлаютъ *тавтологію*. Но для общности изслѣдованій весьма удобно, когда въ относящихся къ какимъ угодно классамъ произведеніяхъ или суммахъ не исключается также и случай равенства классовъ. Пользу, происходящую отъ этой свободы въ отношеніи упрощенія способовъ выраженія, можно было-бы легко иллюстрировать примѣрами, а также и показать, что эти послѣдніе санкціонированы обычнымъ употребленіемъ. Но что въ общемъ происходитъ неявно, въ скрытой формѣ, то въ системѣ должно совершаться вполнѣ явнымъ образомъ». Сказанное позволяетъ автору сдѣлать шагъ далѣе, именно распространить оба предложенія съ двухъ на какое угодно число членовъ

$$aaa\ldots. = a$$

Степенямъ такимъ образомъ нѣтъ мѣста въ Логическомъ Исчисленіи. Мѣсто показателя остается здѣсь въ распоряженіи верхнихъ указателей, чѣмъ авторъ и обѣщаетъ воспользоваться впослѣдствіи.

$$a + a + a + \ldots. = a$$

Та зависимость между умноженіемъ и сложеніемъ, посредствомъ которой мы въ Ариѳметикѣ опредѣляемъ натуральное произведеніе, въ Логическомъ Исчисленіи *не существуетъ*.

Разсмотрѣнными аксіомами заканчивается рядъ предложеній, изъ которыхъ каждое имѣетъ дѣло съ какимъ-нибудь изъ основныхъ дѣйствій въ отдѣльности, что авторъ и обозначаетъ терминомъ «*чистый*», называя упомянутыя предложенія «чистыми законами обѣихъ прямыхъ основныхъ операцій». Слѣдующія два предложенія относятся уже къ связи, существующей между тѣми же операціями, что и даетъ автору поводъ назвать ихъ «смѣшанными» законами послѣднихъ.

6°) *Аксіома. Законъ распредѣлительности* («первый» или «второй»)

$$a(b+c) = ab+ac$$
$$\text{или } (b+c)a = ba+ca$$

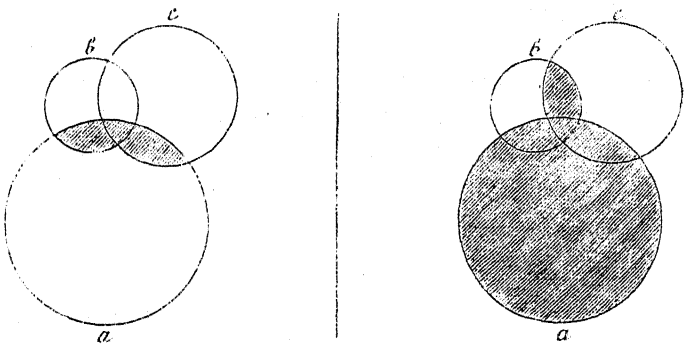
остается въ силѣ и для логическихъ операцій. Предложеніе является въ сущности правиломъ для *помноженія* многочлена на одночленъ и для *соединенія* (или выдѣленія общаго множителя въ членахъ суммы).

6′) *Теорема.* Также остается въ силѣ и предложеніе, соотвѣтствующее по принципу дуализма закону распредѣлительности

$$a+bc = (a+b)(a+c)$$
$$\text{или } bc+a = (b+a)(c+a).$$

Доказательство теоремы откладывается авторомъ до предложенія 10), что онъ считаетъ возможнымъ въ виду отсутствія ея примѣненій къ промежуточнымъ теоремамъ.

Геометрически эти предложенія могутъ быть представлены наглядно помощью слѣдующихъ фигуръ, заштрихованныя части которыхъ представляютъ совпадающія значенія двухъ частей уравненій.



Изъ сказаннаго обнаруживается слѣдующая важная особенность обѣихъ прямыхъ основныхъ операцій Логическаго Исчисленія. *Операціи логическаго сложенія и умноженія являются единственнымъ извѣстнымъ примѣромъ такихъ перемѣстительныхъ операцій, которыя стоятъ другъ къ другу во взаимно распредѣлительномъ отношеніи*, для которыхъ именно *всѣ четыре* закона распредѣлительности оказываются имѣющими силу одновременно. Распространеніе вышеприведенныхъ законовъ распредѣлительности на какое угодно число членовъ вмѣстѣ съ обобщеніемъ извѣстнаго характера доставляетъ

Правило умноженія многочленовъ, | [Правило сложенія произведеній],

которое въ простѣйшемъ случаѣ выражается формулой

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd. \quad | \quad [ab+cd=(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)].$$

7) *Аксіома*

Для каждаго символа класса a существуетъ по меньшей мѣрѣ одинъ a_1, *обладающій такимъ свойствомъ, что какъ только*

$$7^0)\ aa_1=0, \text{ то и } 7')\ a+a_1=1.$$

Не трудно видѣть, что упомянутый другой классъ a_1 вполнѣ опредѣленъ и представляетъ противорѣчащую противоположность для a. Однако-же нѣтъ никакой необходимости вносить этотъ однозначно опредѣленный символъ a_1 въ предположеніе аксіомы. Чтобы быть въ состояніи доказать (ниже), что существуетъ не болѣе какъ одинъ такой классъ, достаточно допущенія, что вообще есть нѣкоторый классъ, обладающій упомянутымъ свойствомъ. Если временно назвать такой символъ a_1 *дополненіемъ* къ a, то придется назвать также и a дополненіемъ къ a_1, при чемъ послѣдняя аксіома утверждаетъ за каждымъ символомъ класса, который только можетъ быть мыслимъ, по крайней мѣрѣ, одно дополненіе. Какъ будетъ показано ниже (предложеніе 12), разсматриваемая аксіома обнимаетъ третій и послѣдній изъ постулатовъ, на которыхъ основывается теорія автора.

8⁰) *Теорема*
$$0\ a=0$$
9⁰) *Аксіома*
$$a\ .\ 1=a.$$

8′) *Теорема*
$$1+a=1.$$
9′) *Теорема*
$$a+0=a.$$

Доказательства парныхъ теоремъ 8) выполняются весьма легко съ помощью соотвѣтствующихъ частей аксіомы 7) или основаннаго на нихъ употребленія дополненія a_1. Вотъ эти доказательства соотвѣтственно

$$a\ .\ 0=a\ (aa_1)=(aa)\ a_1=aa_1=0$$
$$a+1=a+(a+a_1)=(a+a)+a_1=a+a_1=1.$$

Кромѣ упомянутой аксіомы въ этихъ доказательствахъ, какъ не трудно видѣть, участвуютъ еще законъ собирательности 3) и пред-

ложенія 4) и 5). Что касается до доказательства теоремы 9′), то оно состоитъ въ ея выводѣ помощью закона распредѣлительности и предложеній 7′), 5°) и 7°) изъ парнаго предложенія, разсматриваемаго, какъ аксіома. Вотъ этотъ выводъ.

$$a \,.\, 1 = a\,(a + a_1) = aa + aa_1 = a + 0.$$

Предложенія двухъ послѣднихъ нумеровъ даютъ автору возможность замѣнить данныя имъ выше опредѣленія символовъ 0 и 1 слѣдующими новыми, болѣе строго обоснованными:

0 обозначаетъ такой классъ, который со всякимъ другимъ, а слѣдовательно, въ частности, и съ противорѣчаще противоположными классами, имѣетъ общимъ самаго себя; но такъ какъ послѣдніе не имѣютъ другъ съ другомъ никакого общаго индивидуума, то классъ 0 не можетъ въ себѣ ничего содержать; онъ долженъ быть *пустымъ*, свободнымъ отъ предметовъ, классомъ.

1 представляетъ тотъ классъ, который со всякимъ другимъ мыслимымъ классомъ, имѣетъ общимъ его самого, который, слѣдовательно, заключаетъ въ себѣ всякій мыслимый классъ и всѣ индивидуумы, о которыхъ только можно думать.

По поводу 4 послѣднихъ предложеній, въ которыя входятъ частью общіе, частью частные, символы классовъ и изъ которыхъ три находятъ себѣ мѣсто также и въ ариѳметикѣ, авторъ замѣчаетъ, что «они, очевидно, примыкаютъ еще къ «чистымъ» законамъ нашихъ основныхъ операцій».

Весьма характеристичными, а съ одной стороны даже и важными, для Логическаго Исчисленія авторъ считаетъ слѣдующія два смѣшанныя предложенія.

10°) *Теорема.*

$$a + ab = a,$$

то-есть *членъ, содержащій другой въ качествѣ множителя, въ свою очередь содержится въ немъ и самъ*, или нѣкоторымъ образомъ можетъ быть имъ поглощенъ (*«законъ поглощенія»*).

[10′) *Теорема.* Аналогично:

$$a\,(a + b) = a.$$

Доказательство. Дѣлая указанное перемноженіе въ лѣвой части, получимъ на основаніи предложеній 6°), 5°) и 10°):

$$a\,(a + b) = aa + ab = a + ab = a].$$

Доказательство. На основаніи предложеній 9′), 6′), 8′) и 9′) имѣемъ

$$a + ab = a \,.\, 1 + ab = a(1 + b) = \\ = a \;\; 1 = a$$

[Затѣмъ можетъ быть доказано также и предложеніе 6′) съ помощью перемноженія и на основаніи предложеній 5′) и 10′)

$$(a + b)\;(a + c) = \\ = aa + cb + ac + bc = \\ = (a + ab) + ac + bc = \\ = \{a + ac\} + bc = a + bc].$$

Теперь, когда рядъ основныхъ постулатовъ и аксіомъ завершенъ предложеніями 1′′), 2′′), 3′′), 4′′), 5′′), 6′), 7) и 9′), а также доказаны требуемыя принципомъ дуализма предложенія 6′) и 9′), можетъ считаться, по мнѣнію автора, доказаннымъ и самый этотъ принципъ или, какъ выражается авторъ, «высказанный въ § 1 законъ взаимности или утвержденіе *полнаго дуализма основныхъ логическихъ дѣйствій*».

По поводу приведенныхъ въ значеніи аксіомъ пяти предложеній 2), 3) и 6′) авторъ замѣчаетъ, что еще Германнъ Грассманнъ въ своемъ Учебникѣ ариѳметики привелъ ихъ къ простѣйшимъ относящимся къ единицамъ предположеніямъ и что то-же самое можетъ быть сдѣлано также и въ отношеніи 5) и 9′). Единицамъ соотвѣтствуютъ здѣсь (раздѣльные между собою) *индивидуумы*, логическими суммами которыхъ вида

$$a = i^1 + i^2 + i^3 + \;.\;.\;.\

$$aa_1 = 0,\ a + a_1 = 1,$$

а съ другой также

$$ab_1 = 0,\ a + b_1 = 1,$$

то должно быть

$$a_1 = b_1.$$

Доказательство. Такъ какъ

$$aa_1 = ab_1 \text{ и } a + a_1 = a + b_1,$$

то по теоремѣ 11) $a_1 = b_1$

Изъ доказанной сейчасъ теоремы слѣдуетъ. что если классъ a данъ, то его дополненіе вполнѣ опредѣлено. Кромѣ того, не трудно видѣть, что оно существуетъ только *одно*. Его называютъ *отрицаніемъ* a или *противорѣчащею противоположностью* a или *не-a*.

Само дѣйствіе *отрицанія* или *противоположенія* должно быть называемо поэтому операціей вычисленія, при посредствѣ которой образуется выраженіе *не-a*, если дано выраженіе a. При этомъ необходимо замѣтить, что въ силу предложеній 12) и 7) это *третье основное дѣйствіе* Математической Логики также *совершенно однозначно*, какъ и оба первыя

Въ виду всего сказаннаго уравненіе 7°) является не болѣе, какъ математическимъ выраженіемъ *закона противорѣчія*, утверждающаго, какъ извѣстно, немыслимость всего, что одновременно и въ томъ-же самомъ смыслѣ есть a и *не-a*. Аристотель придавалъ этому закону такое важное значеніе, что свое principium contradictionis стремился поставить во главѣ всего зданія логики.

13) *Теорема*

Всегда

$$(a_1)_1 = a,$$

или *отрицаніе отрицанія* (противоположность противоположности) *какого-нибудь класса есть онъ самъ*. «При отрицаніи отрицанія», замѣчаетъ авторъ, «суффиксы уничтожаются подобно тому, какъ оба знака минуса при вычитаніи отрицательнаго числа или, еще лучше, какъ уничтожается уменьшаемое при вычитаніи изъ него разности».

Доказательство. Теорема легко приводится къ 12). Дѣйствительно, на основаніи аксіомы 7) съ одной стороны,

$$aa_1 = 0, \qquad a + a_1 = 1,$$

а съ другой,

$$a_1(a_1)_1 \text{ или } (a_1)_1 a_1 = 0,\ (a_1)_1 + a_1 = 1.$$

Въ частномъ случаѣ для $0.1=0$ и $0+1=1$ будетъ

$$(1)_1=0, \qquad (0)_1=1.$$

Такимъ образомъ классы 0 и 1 являются отрицаніями другъ друга.

14°) *Теорема. Всякій классъ b можетъ выражаться линейно и однородно черезъ всякій другой a въ формѣ*

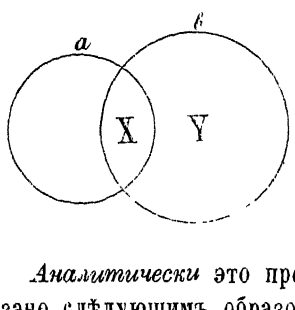
$$(A) \qquad b=xa+ya_1,$$

[14′) *Теорема.* Подобнымъ-же образомъ можно всегда положить, что

$$b=(y+a)\ (x+a_1).$$

гдѣ x и y представляютъ извѣстные, не вполнѣ опредѣленные, *символы классовъ*, которые могутъ быть также равными 0 или 1.

Геометрически предложеніе обнаруживается непосредственно. Дѣйствительно, площадь b разлагается контуромъ a на двѣ части, изъ которыхъ одною именно $X=Xa$, она совпадаетъ съ a. Что-же касается до другой $Y=Ya_1$, то эта послѣдняя лежитъ внѣ a. Уравненіе (A) будетъ, слѣдовательно, справедливо, если положимъ $x=X$ и $y=Y$.



Аналитически это предложеніе всего проще можетъ быть доказано слѣдующимъ образомъ. Такъ какъ

$$(B) \qquad b=b.1=b\ (a+a_1)=ba+ba_1,$$

то разсматриваемое предложеніе справедливо во всѣхъ случаяхъ, когда $x=y=b$.

Что-же касается до неполной опредѣленности x и y, то она явствуетъ изъ того, что если x и y правильные коэффиціенты, удовлетворяющіе уравненію (A), то таковыми-же будутъ тогда также и выраженія $x+ua_1$, $y+va$.

Вообще правильность уравненія

$$(C) \qquad b=(ab+ua_1)a+(a_1b+va)a_1,$$

въ которомъ u и v представляютъ совершенно произвольные классы, видѣть не трудно. Излагаемые вслѣдъ за этимъ методы даютъ полную возможность показать, что (C) въ дѣйствительности есть самая общая форма выраженія (A), изъ которой могутъ быть выведены помощью принятія соотвѣтствующихъ значеній u и v всѣ возможныя выраженія этого рода.

$f(a)$ должно быть обозначаемо теперь всякое выраженіе, которое содержитъ символы a и a_1.

Что касается до дѣйствій, имѣющихъ быть выполненными съ цѣлью образованія выраженія разсматриваемаго вида, то въ отношеніи къ нимъ мы должны прежде всего принять, что символы a и a_1 могутъ быть соединяемы между собою и съ другими данными независимо отъ нихъ, только посредствомъ операціи логическаго сложенія и умноженія. Это есть, конечно, особенно простой случай, но къ нему, какъ будетъ видно изъ слѣдующаго далѣе, легко могутъ быть приведены всѣ случаи, о которыхъ только можно мыслить.

Въ этомъ случаѣ всѣ выраженія суммъ, входящія въ качествѣ множителей, можно перемножить на основаніи предложенія 6°) и такимъ образомъ превратить все выраженіе въ аггрегатъ одночленовъ. Символы a и a_1 не могутъ на основаніи предложеній 7°) и 5°) содержаться въ этихъ одночленахъ одновременно, а также и болѣе одного раза каждый. Весь аггрегатъ будетъ поэтому цѣлымъ выраженіемъ функціи первой степени относительно a и a_1. Его можно сдѣлать однороднымъ, помножая на $a+a_1$ по произволу или только члены, не содержащіе a и a_1, или же все выраженіе. Такимъ образомъ мы, наконецъ, получимъ форму

$$f(a)=xa+ya_1,$$

въ которой x и y даны независимыми отъ a и a_1. Эти коэффиціенты въ настоящемъ случаѣ уже не содержатъ болѣе ничего произвольнаго и могутъ быть опредѣлены съ помощью условія ихъ независимости отъ a въ соединеніи съ условіями ихъ происхожденія отъ даннаго выраженія.

Числовая работа нерѣдко можетъ быть при этомъ значительно сокращена помощью замѣчанія Буля, дающаго предложенію форму

$$(D) \qquad f(a)=f(1).a+f(0).a_1,$$

коэффиціенты которой $f(1)$ и $f(0)$ очевидно могутъ быть прямо выведены изъ неприведеннаго еще выраженія $f(a)$, вставляя въ него $a=1$ вмѣстѣ съ $a_1=0$, соотвѣтственно $a=0$ вмѣстѣ съ $a_1=1$, и принимая во вниманіе предложенія 8), 9). Ходъ разсужденій въ этомъ случаѣ основывается на всеобщности логическихъ уравненій, въ силу которой равенство между даннымъ выраженіемъ $f(a)$ и искомымъ, но уже признаннымъ за допустимое, (A) можетъ продолжать существовать даже и тогда, когда a сдѣлается равнымъ 0 или 1.

Предложеніе (D) можетъ быть легко распространено на два или бо́льшее число аргументовъ.

$$(E) \qquad f(a,b)=f(1,1)ab+f(1,0)ab_1+f(0,1)a_1b+f(0,0)a_1b_1,$$

$$(F) \qquad \begin{aligned} f(a,b,c)=&f(1,1,1)abc+f(1,1,0)abc_1+\\ &+f(1,0,1)ab_1c+f(1,0,0)ab_1c_1+f(0,1,1)a_1bc+\\ &+f(0,1,0)a_1b_1c+f(0,0,1)a_1b_1c+f(0,0,0)a_1b_1c_1 \end{aligned}$$

и т. д. Приведеніе въ этотъ видъ мы называемъ *разложеніемъ* выраженія функціи по символамъ соотвѣтственно a; a и b; a, b, c, и т. д Для запечатлѣнія въ памяти закона образованія этого разложенія можно представить его въ формѣ слѣдующаго правила *Чтобы разложить выраженіе функціи по ея аргументамъ, замѣняютъ всѣхъ ихъ единицей и умножаютъ результатъ на произведеніе расположенныхъ въ послѣдовательномъ порядкѣ аргументовъ: такимъ образомъ получаютъ первый членъ искомаго разложенія. Затѣмъ въ этомъ послѣднемъ замѣняютъ послѣдній аргументъ 1 нулемъ, а въ произведеніи аргументовъ послѣдній множитель его отрицаніемъ, такимъ образомъ находятъ второй членъ. Далѣе въ обоихъ найденныхъ членахъ замѣняютъ находящійся на предпослѣднемъ мѣстѣ аргументъ 1 нулемъ и одновременно съ этимъ предпослѣдній множитель произведенія аргументовъ — его отрицаніемъ, черезъ что получаютъ два слѣдующіе члена. Такимъ-же образомъ поступаютъ въ четырехъ полученныхъ членахъ съ аргументомъ, стоящимъ на третьемъ мѣстѣ отъ конца и т. д.*

Члены разложенныхъ произведеній

$$(G) \qquad \begin{aligned} 1 &= a+a_1, \text{ или соотвѣтственно}\\ 1 &= (a+a_1)(b+b_1)=ab+ab_1+a_1b+a_1b_1,\\ 1 &= (a+a_1)(b+b_1)(c+c_1)= \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

называются *конституентами* этихъ разложеній въ противоположность *коэффиціентамъ* $f(1,1,1)$, $f(1,1,0)$ и т. д., на которые они обыкновенно помножаются.

Во всякомъ полномъ разложеніи, то-есть въ которомъ считаются введенными также и недостающіе конституенты съ ихъ нулевыми коэффиціентами, сумма всѣхъ конституентовъ будетъ очевидно равна 1.

Произведеніе какихъ-нибудь двухъ различныхъ конституентовъ на основаніи предложенія 7°) равно 0, такъ какъ въ нихъ между множителями-аргументами a, b, c, .. по крайней мѣрѣ два должны быть противорѣчаще противоположными; всѣ конституенты вслѣдствіе этого раздѣльны.

Выполненіе дѣйствій надъ разложенными выраженіями, входящими въ вычисленія, можетъ быть въ значительной степени облегчено,

во первыхъ, принятіемъ во вниманіе извѣстныхъ свойствъ логическаго сложенія и, во-вторыхъ, слѣдующей далѣе теоремой объ умноженіи. Относительно первыхъ слѣдуетъ замѣтить, что они прямо приводятъ къ заключенію, что сумма двухъ функцій, разложенныхъ по однимъ и тѣмъ-же символамъ, отыскивается непосредственнымъ сложеніемъ членовъ, одноименныхъ въ отношеніи ихъ конституентовъ. Что-же касается до упомянутой теоремы объ умноженіи, то она состоитъ въ слѣдующемъ.

15⁰) *Теорема. Произведеніе (двухъ) агрегатовъ, разложенныхъ по тѣмъ-же самымъ аргументамъ, есть простое воспроизведеніе каждаго изъ нихъ.* Въ самомъ дѣлѣ, оно получится въ развитой вполнѣ формѣ, если перемножить коэффиціенты одноименныхъ членовъ. Такъ, наприм.

$$(pab + qab_1 + ra_1b + sa_1b_1)\,(p'ab + q'ab_1 + r'a_1b + s'a_1b_1) = \\ = pp'ab + qq'ab_1 + rr'a_1b + ss'a_1b_1.$$

Это предложеніе, какъ не трудно видѣть, является непосредственнымъ слѣдствіемъ правила умноженія многочленовъ въ соединеніи со сдѣланнымъ выше замѣчаніемъ объ обращеніи въ 0 произведенія двухъ различныхъ конституентовъ.

16⁰) *Теорема.* Если
$a+b=0$,
то должны быть также и
$a=0$ и $b=0$.

[16′) *Теорема.* Если
$ab=1$,
то должны быть также и
$a=1$ и $b=1$].

Такимъ образомъ *сумма въ Логическомъ Исчисленіи можетъ равняться 0 не иначе какъ при обращеніи въ нуль ея отдѣльныхъ членовъ.*

Доказательство. Умноженіе посылки предложенія или даннаго равенства на a даетъ по теоремѣ 5⁰) $a + ab = 0$, а слѣдовательно по теоремѣ 10⁰) $a = 0$. Что-же касается до другаго уравненія $b=0$, то оно можетъ быть получено или по теоремѣ 9′), какъ конечный результатъ посылки, или же прямо помощью умноженія послѣдней на b.

Доказанное предложеніе, какъ въ этомъ не трудно убѣдиться, можетъ быть легко распространено на какое угодно число членовъ.

Разсмотрѣнная теорема имѣетъ весьма важное значеніе въ Логическомъ Исчисленіи, такъ какъ въ соединеніи со слѣдующей сейчасъ позволяетъ *всякую систему логическихъ уравненій замѣнить вполнѣ однимъ уравненіемъ, именно приравненной 0 суммой первыхъ частей уравненій, вторыя части которыхъ представлены нулемъ.*

17°) *Теорема. Всякое логическое уравненіе можетъ быть приведено въ одной своей части къ 0. Именно, уравненіе*

$$a = b$$

вполнѣ равносильно уравненію

$$ab_1 + a_1b = 0$$

[17′) *Теорема.* Вмѣсто

$$a = b$$

можно взять съ одинаковымъ правомъ

$$(a + b_1)\ (a_1 + b) = 1$$

или

$$ab + a_1b_1 = 1]$$

Доказательство. Если справедливо первое уравненіе, то во всякомъ случаѣ будетъ справедливо и второе, такъ какъ оно послѣ замѣны a черезъ b [12) и 4)] приводится на основаніи аксіомы 5′) къ аксіомѣ 7°)

Обратно, если выполнено второе уравненіе, то по теоремѣ 16°) должно быть

$$ab_1 = 0 \text{ и } a_1b = 0.$$

Принявъ во вниманіе эти равенства, умножаютъ на a тождественно справедливое по равенству 7′) уравненіе

$$a + a_1 = b + b_1.$$

Тогда на основаніи предложеній 5°) и 7°), находятъ, что

$$a = ab + ab_1 = ab$$

Такимъ-же образомъ помощью умноженія на b получаютъ, что

$$ab + a_1b = b \text{ или } ab = b.$$

Изъ этихъ обоихъ выводовъ на основаніи 2-ой изъ аксіомъ, относящихся къ равенству символовъ класса (см. стр. 9), слѣдуетъ, что $a = b$.

Чтобы съ пользою употреблять доказанное сейчасъ предложеніе, необходимо быть въ состояніи *тотчасъ же находить отрицаніе для всякаго, какъ угодно осложненнаго выраженія класса.* Помочь намъ въ этомъ отношеніи могутъ три непосредственно слѣдующія предложенія.

18°) *Теорема. Отрицаніе произведенія есть сумма отрицаній множителей:*

$$(ab)_1 = a_1 + b_1.$$

18′) *Теорема. Отрицаніе суммы есть произведеніе отрицаній слагаемыхъ:*

$$(a + b)_1 = a_1b_1.$$

Обѣ эти теоремы могутъ быть обобщены и соединены въ слѣдующее правило: Чтобы составить отрицаніе выраженія, построеннаго

при посредствѣ прямыхъ операцій, нужно замѣнить въ немъ всѣ простые элементы ихъ отрицаніями и затѣмъ перевести его въ дуалистическое, то-есть произвести взаимную замѣну сложенія и умноженія.

Въ отношеніи *доказательства* достаточно ограничиться теоремою 18′), такъ какъ доказательство теоремы 18⁰) ведется образомъ, строго соотвѣтственнымъ дуалистически.

Если $a_1 b_1$ должно быть правильнымъ отрицаніемъ $a + b$, то по аксіомѣ 7) должны существовать также и оба извѣстныя соотношенія

$$(a + b)\, a_1 b_1 = 0 \text{ и } a + b + a_1 b_1 = 1.$$

Обратно, если оба послѣднія соотношенія справедливы, то по предложеніямъ 12) и 7) справедливо также и равенство $a_1 b_1 = (a+b)_1$

Правильность перваго соотношенія при этомъ становится ясною непосредственно. Что-же касается до втораго, то оно можетъ быть доказано помощью разложенія суммы $a + b$ по ея слагаемымъ a и b. Въ самомъ дѣлѣ

$$a + b = a\,(b + b_1) + b\,(a + a_1),$$

а слѣдовательно по аксіомѣ 5′)

$$(H) \quad a + b = ab + ab_1 + a_1 b,$$

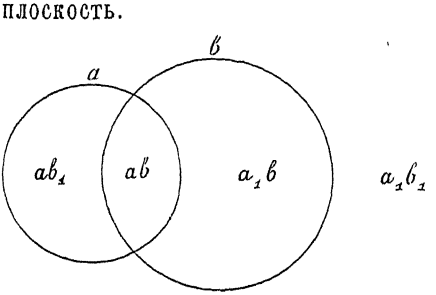
откуда и выходитъ, что

$$a + b + a_1 b_1 = (a + a_1)\,(b + b_1) = 1 \quad (G)$$

Къ тому-же самому заключенію можно было-бы придти также, разлагая сначала средній членъ и затѣмъ соединяя крайніе, то-есть

$$a + b + a_1 b_1 = \underline{a + \overline{ab} + \overline{a_1 b}} + \underline{a_1 b_1} = a + a_1 = 1.$$

По поводу этого доказательства авторъ замѣчаетъ, что три члена уравненія (H), а также и четыре члена разложенія 1 въ (G) соотвѣтствуютъ тремъ или соотносительно четыремъ частямъ, на которыя разбивается контурами a и b поверхность $a + b$ или соотносительно вся плоскость.



Авторъ считаетъ также нужнымъ замѣтить, что въ выраженіи «a и b», представляющемъ словесный переводъ (H), частица «и» можетъ быть замѣнена «или» въ значеніи присоединенія, *включенія* (=«или также»), въ противоположность значенію *исключенія*, принадлежащему тому-же «или» и переводимому выраженіемъ «или a или b» въ формулѣ

$$(K) \quad ab_1 + ba_1.$$

Примѣненіе обоихъ предшествующихъ предложеній и въ послѣдней инстанціи предложенія 18′) часто приводитъ къ отрицанію, выраженному въ неудобной формѣ произведенія суммъ, что дѣлаетъ необходимымъ еще и производство умноженія. Для устраненія надобности въ этой работѣ мы должны обратиться къ слѣдующему предложенію, съ помощью котораго она совершается вообще.

19⁰) *Теорема. Чтобы составить отрицаніе разложеннаго выраженія, нужно просто замѣнить всѣ коэффиціенты ихъ отрицаніями.* Если

$$f = pab + qab_1 + ra_1b + sa_1b_1,$$

то также и

$$f_1 = p_1ab + q_1ab_1 + r_1a_1b + s_1a_1b_1.$$

Доказательство доставляется тотчасъ-же замѣчаніемъ, что данныя для f и f_1 выраженія на основаніи предложенія 15⁰) и заключительнаго замѣчанія теоремы 14⁰) тождественно удовлетворяютъ соотношеніямъ

$$ff_1 = 0 \text{ и } f + f_1 = 1.$$

Также заслуживаетъ вниманія слѣдующее доказательство того-же предложенія, хотя и не столь краткое какъ предыдущее. При его употребленіи предложеніе выводится изъ теоремы 18) только для случая одного аргумента разложенія

$$(xa+ya_1)_1 = (xa)_1 \,.\, (ya_1)_1 = (x_1 + a_1)(y_1 + a) =$$
$$= x_1y_1 + x_1a + y_1a_1 + aa_1 = x_1y_1(a + a_1) + x_1a + y_1a_1 =$$
$$= x_1a(1 + y_1) + y_1a_1(1 + x_1) = x_1a + y_1a_1.$$

Обращаясь затѣмъ къ случаю болѣе чѣмъ одного аргумента разложенія, можно придти къ окончательному заключенію слѣдующимъ образомъ:

$$(pab + qab_1 + ra_1b + sa_1b_1)_1 = \{(pb + qb_1)a + (rb + sb_1)a_1\}_1 =$$
$$= (pb + qb_1)_1 a + (rb + sb_1)_1 a_1 = (p_1b + q_1b_1)a + (r_1b + s_1b_1)a_1 =$$
$$= p_1ab + q_1ab_1 + r_1a_1b + s_1a_1b_1.$$

Непосредственное примѣненіе доказаннаго предложенія можетъ повести къ ошибочнымъ выводамъ въ томъ случаѣ, когда въ выраженіи, для котораго составляется отрицаніе, недостаетъ какихъ-нибудь отдѣльныхъ членовъ. Такъ какъ источникъ этой ошибочности состоитъ въ томъ, что конституенты недостающихъ членовъ имѣютъ въ дополненіи коэффиціентами 1, то для ея устраненія достаточно при составленіи отрицанія дополнить мысленно данное выраженіе всѣми членами, имѣющими коэффиціентомъ 0, и только затѣмъ уже приступить къ составленію отрицанія. Понятно, что разложеніе, для котораго требуется составить отрицаніе, будучи неполнымъ по отношенію къ двумъ аргументамъ, можетъ быть совершенно полнымъ въ отношеніи одного изъ нихъ. Въ этомъ случаѣ можно прямо найти, наприм., что

$$(ab_1 + a_1 b)_1 = ab + a_1 b_1$$

и обратно, что

$$(ab + a_1 b_1)_1 = ab_1 + a_1 b.$$

Три предшествующія предложенія имѣютъ въ системѣ автора весьма важное значеніе, такъ какъ они, главнымъ образомъ, и помогаютъ ей сдѣлать совершенно излишнимъ ариѳметическо-логическій счетный аппаратъ Буля то-есть «аппаратъ, состоящій въ сущности», по мнѣнію автора, «въ утвержденіи и примѣненіи трудныхъ схемъ разложенія (D), (E), (F),... sub 14^0) ко всѣмъ возможнымъ выраженіямъ, получаемымъ еще черезъ рѣшеніе уравненій *по ариѳметическимъ правиламъ*».

20^0) *Теорема. Уравненіе*

$$xa + ya_1 = 0$$

вполнѣ равносильно двумъ слѣдующимъ

$$xy = 0 \quad \text{и} \quad a = ux_1 + y,$$

гдѣ подъ u подразумѣвается нѣкоторый произвольный классъ. При этомъ необходимо замѣтить, что послѣднее изъ двухъ упомянутыхъ уравненій можетъ быть представлено еще въ слѣдующихъ формахъ:

$$a = (u + y)x_1, \quad a = (uy_1 + y)x_1, \quad a = ux_1 y_1 + y,$$

доставляющихъ, смотря по преслѣдуемымъ цѣлямъ, тѣ или другія выгоды.

Для приведенія этихъ различныхъ формъ другъ къ другу достаточно принять во вниманіе, что съ одной стороны

$$u + y = u(y_1 + y) + y = uy_1 + uy + y = uy_1 + y,$$

такъ какъ на основаніи предложенія 10°) предпослѣдній членъ поглощается, а съ другой,—что если уравненіе $xy=0$ справедливо, то

$$x_1 y = x_1 y + xy = (x_1 + x)\, y = y$$

Доказательство разсматриваемаго предложенія должно очевидно состоять въ обнаруженіи, что два послѣднія уравненія теоремы слѣдуютъ изъ перваго, и обратно, что первое обусловливается двумя послѣдними, взятыми вмѣстѣ. Вслѣдствіе этого полное доказательство распадается на нѣсколько отдѣльныхъ частей.

I часть доказательства. Если сложить результаты умноженія перваго уравненія на x и на y, то въ силу аксіомы 5°) получится, что

$$xa + xya_1 + yxa + ya_1 = 0$$

Но вслѣдствіе предположенія, выражаемаго даннымъ уравненіемъ, крайніе члены полученнаго взаимно уничтожаются или вмѣстѣ даютъ 0. Вслѣдствіе этого и само оно обращается въ $xy(a + a_1) = 0$ или въ $xy = 0$. Такимъ образомъ выводится первое изъ двухъ послѣднихъ уравненій теоремы. Чтобы вывести второе, необходимо установить предварительно слѣдующее *вспомогательное предложеніе: Если* $ab=0$, *то можно положить* $a=ub_1$, *гдѣ* u *не опредѣлено.* Оба эти уравненія являются, слѣдовательно, говоря вообще, равносильными другъ другу Доказательство этого предложенія можетъ быть ведено такимъ образомъ.

На основаніи теоремы 14°) всегда можно допустить для извѣстныхъ, хотя въ началѣ еще и неопредѣленныхъ классовъ, u и v, что $a = vb + ab_1$. Умноженіе этого уравненія на b въ соединеніи съ условіемъ $ab = 0$ теоремы показываетъ, что членъ vb, какъ равный 0, можетъ быть опущенъ, а, слѣдовательно, взятое уравненіе приведено къ доказываемому виду $a = ub_1$. Что u при этомъ не опредѣляется данными задачи и остается произвольнымъ слѣдуетъ изъ того, что данное уравненіе можетъ быть получено изъ доказываемаго при всякомъ значеніи u помощью простаго помноженія послѣдняго на b. Не трудно видѣть, что выведенное сейчасъ вспомогательное предложеніе есть не болѣе, какъ частный случай самой доказываемой теоремы, представляющійся при $x = b$ и $y = 0$.

II часть доказательства. На основаніи предложенія 16°) уравненіе $xa + ya_1 = 0$, представляющее условіе доказываемой теоремы, распадается на два, именно на $xa = 0$ и $ya_1 = 0$. Первое изъ нихъ, какъ показываетъ вспомогательное предложеніе, одинаково съ уравненіемъ $a = ux_1$, въ которомъ u теперь уже не является совершенно произвольнымъ, но должно быть опредѣлено такъ, чтобы удовлетворялось второе уравненіе. На основаніи предложеній 18°) и 13°) уравненіе $a = ux_1$ приводитъ къ уравненію $a_1 = u_1 + x$, умноженіе котораго на y въ виду $ya_1 = 0$ даетъ $0 = u_1 y + xy$ или $0 = u_1 y$ вслѣдствіе $xy = 0$. Послѣдній выводъ приводитъ насъ на основаніи вспомогательнаго предложенія къ уравненію $u_1 = vy_1$ или черезъ посредство этого послѣдняго на основаніи предложеній 18°) и 13°) къ $u = v_1 + y$ Подстановка этого значенія u въ исходное уравненіе $a = ux_1$ даетъ $a = (v_1 + y)\, x_1$, гдѣ вслѣдствіе совершенной произвольности v, а слѣдовательно и его отрицанія v_1, это послѣднее можетъ быть замѣнено черезъ u, также являющееся произвольнымъ независимо отъ предыдущихъ разсмотрѣній. Такимъ образомъ въ результатѣ послѣдней подстановки получается вторая изъ приведенныхъ выше и переходящихъ одна въ другую формъ уравненія, выводимаго въ настоящей части доказательства. Что u и теперь остается совершенно произвольнымъ можно видѣть изъ послѣдующей части доказательства.

III часть доказательства. Обратно, если даны уравненія $a = ux_1 + y$ и $xy = 0$, то на основаніи предложеній 18) и 13°) будетъ также справедливо и уравненіе $a_1 = (u_1 + x)\, y_1$, откуда

$$xa + ya_1 = x\,(ux_1 + y) + yy_1\,(u_1 + x) = xy = 0.$$

Такимъ образомъ первоначальное уравненіе $xa + ya_1 = 0$ оказывается справедливымъ при всякомъ значеніи u.

Полезно замѣтить по поводу доказаннаго предложенія, что членъ ux_1, содержащій въ окончательномъ уравненіи $a = ux_1 + y$ произвольное u, весьма нерѣдко исчезаетъ, вслѣдствіе чего получается $a = y$ Достаточнымъ условіемъ этого исчезновенія произвольнаго члена является, какъ показываетъ четвертая форма окончательнаго уравненія, принятіе $x_1 y_1 = 0$. Оно же составляетъ и его необходимое условіе, такъ какъ изъ уравненія $ux_1 + y = y$ послѣ его умноженія на y_1 слѣдуетъ, что $ux_1 y_1 = 0$ *при всякомъ* u, а слѣдовательно и при $u = 1$. Слѣдовательно $a = y$ всякій разъ, когда кромѣ $xy = 0$ еще и $x_1 y_1 = 0$, а также и обратно.

Авторъ видитъ въ доказанномъ сейчасъ 20°) предложеніи «*глав-*

ную теорему, въ которой достигаетъ своего завершенія все Логическое исчисленіе». Съ этимъ вполнѣ можно согласиться, если принять во вниманіе ея значеніе для рѣшенія логическихъ уравненій, къ разсмотрѣнію котораго и обращается теперь авторъ.

Упомянутое значеніе 20°) предложенія состоитъ, главнымъ образомъ, въ томъ, что съ его помощью дѣлается возможнымъ *исключеніе* всякаго класса a изъ какого угодно уравненія. При разсмотрѣніи 14°) предложенія было уже показано, что всякое уравненіе можетъ быть представлено въ видѣ $xa + ya_1 = 0$ и слѣдовательно имѣть въ уравненіи $xy = 0$ уравненіе, происходящее вслѣдствіе исключенія a, или, какъ его называетъ авторъ, *результанту* исключенія.

По тому-же предложенію можно было бы далѣе *вычислить* всякій требуемый классъ a изъ самаго уравненія или, что то же самое, *рѣшить* уравненіе по этому неизвѣстному. Задача такого рѣшенія, какъ не трудно видѣть, въ общемъ не вполнѣ опредѣленна и выраженіе $a = ux_1 + y$ заключаетъ въ себѣ всю совокупность *корней* a уравненія для u, измѣняющагося отъ «ничего» до «всего».

Все сказанное сейчасъ объ *одномъ* уравненіи остается въ силѣ также и *для всякой системы логическихъ уравненій*, такъ какъ на основаніи предложеній 16°) и 17°) она всегда равносильна одному уравненію, содержащему всѣ встрѣчающіеся въ данныхъ уравненіяхъ символы классовъ вмѣстѣ съ ихъ отрицаніями. Эти символы, какъ намъ уже извѣстно, входятъ въ него только какъ такіе члены, которые или *умножаются* или *складываются*. Авторъ предлагаетъ назвать это уравненіе, сообразно его назначенію, уравненіемъ, заступающимъ всю систему или ея *соединеннымъ* уравненіемъ. Приложеніе къ членамъ соединеннаго уравненія законовъ перемѣстительности и собирательности 2′) и 3′) приводитъ, какъ не трудно видѣть, къ предложенію, обыкновенно принимаемому за аксіому и состоящему въ томъ, что *группировка и послѣдовательность посылокъ не имѣютъ вліянія на заключеніе.*

За первымъ символомъ класса также точно можно исключить изъ системы уравненій, то-есть собственно изъ соединеннаго уравненія, второй, третій, и т. д. символы классовъ, а слѣдовательно и всякую *систему ихъ* вообще. Полагая многочленъ соединеннаго уравненія «разложеннымъ» по исключаемымъ символамъ, можно легко доказать предложеніе, что вообще *результанта исключенія какой-нибудь системы классовъ изъ системы уравненій найдется, если*

принять произведеніе коэффиціентовъ (въ соединенномъ уравненіи, разложенномъ по исключаемымъ) *равнымъ* 0.

Такъ, напр., $pqrs=0$ будетъ результантой исключенія a и b изъ уравненія

$$pab+qab_1+ra_1b+sa_1b_1=0.$$

Дѣйствительно, результанта исключенія a изъ этого уравненія есть

$$(pb+qb_1)\ (rb+sb_1)=0 \text{ или } prb+qsb_1=0.$$

По исключеніи изъ нея b очевидно найдется искомая результанта. *Послѣдовательность и группировка слѣдующихъ другъ за другомъ отдѣльныхъ исключеній классовъ* или ихъ второстепенныхъ системъ *являются* такимъ образомъ по отношенію къ замѣняемому ими одновременному исключенію всей системы, *не имѣющими значенія*.

Авторъ замѣчаетъ, что трудъ разложенія соединеннаго уравненія можетъ быть и не доводимъ до конца. Но, чтобы доставить себѣ эту выгоду, необходимо установить вспомогательныя предложенія. Не имѣя въ виду дать полное изложеніе послѣднихъ, авторъ довольствуется указаніемъ, что уже при одномъ *исключаемомъ* нѣтъ надобности въ возстановленіи однородной формы, потому что какъ на результатъ исключенія a изъ уравненія $xa+ya_1+z=0$ можно указать на $xy+z=0$. Такимъ образомъ слѣдуетъ отдѣлить только постоянный (то-есть независимый отъ a) членъ, и затѣмъ опять придать его въ неизмѣненномъ видѣ къ составленному по вышеуказанному правилу выводному или результирующему уравненію. Для примѣра можно также привести еще $pq+rs=0$ какъ результатъ исключенія a, b изъ уравненія $pa+qa_1+rb+sb_1=0$.

Не лишено важности, по мнѣнію автора, замѣчаніе, что результаты исключенія символа a изъ нѣсколькихъ отдѣльныхъ уравненій, которыя полагаются сводимыми въ одно сужденіе только въ концѣ, имѣютъ меньшій объемъ, чѣмъ результанта исключенія того-же символа изъ доставленнаго этими уравненіями соединеннаго уравненія. Если, наприм., исключить a изъ каждаго изъ двухъ уравненій

$$xa+ya_1=0 \text{ и } pa+qa_1=0$$

отдѣльно, то сведеніе результатовъ исключенія

$$xy+pq=0$$

представится именно въ такомъ видѣ, въ какомъ оно представилось бы, если во второмъ уравненіи поставить b, b_1 вмѣсто a, a_1, и за-

тѣмъ полученныя такимъ образомъ четыре величины исключить. Напротивъ результанта исключенія a изъ соединеннаго уравненія:

$$(x+p)\,(y+q)=xy+xq+yp+pq=0$$

имѣетъ большій объемъ, чѣмъ предыдущая, такъ какъ, кромѣ $xy=0$ и $pq=0$, она показываетъ еще, что также $xq=0$ и $yp=0$, то-есть то, чего предыдущая, взятая въ отдѣльности, не даетъ.

Итакъ *не безразлично—будетъ-ли сперва произведено соединеніе, а затѣмъ исключеніе, или сперва исключеніе, а потомъ соединеніе.* Чтобы получить *полный* результатъ исключенія, необходимо слѣдовать первому расположенію дѣйствій. Привлеченіе къ участію въ концѣ дѣйствія позволительно только для такихъ уравненій, которыя совсѣмъ не содержатъ исключаемое. Такъ уравненія $xa+ya_1=0$ и $z=0$ одинаково приводятъ къ уравненію $xy+z=0$ слѣдовать-ли первому расположенію дѣйствій или второму.

Помощью простыхъ средствъ, доставляемыхъ теоремою 20°), мы оказываемся въ состояніи вычислить не только отдѣльный символъ класса, но и *всякую* вообще *логическую функцію* $f\,(a,\ b,\ c\ldots)$ *заданной системы* $a,\ b,\ c\ldots$ *такихъ же символовъ класса*, что состоитъ собственно въ выраженіи этой функціи черезъ какую-нибудь систему другихъ символовъ класса. Для исполненія этого вычисленія прежде всего исключаютъ изъ данной системы уравненій такіе символы класса, которые какъ не принадлежащіе ни къ тѣмъ, въ которыхъ функція должна быть выражена, ни къ тѣмъ, которые содержатся въ ея первоначальномъ выраженіи, не подлежатъ разсмотрѣнію. Затѣмъ упомянутое выраженіе функціи обозначаютъ именемъ новаго символа класса «буквой ω» по обозначенію автора. Слѣдствіемъ этого является простое присоединеніе уравненія $\omega=f(a,\ b,\ c,\ldots)$ къ данной системѣ, а взаимно и къ послѣдней результантѣ исключенія. Задача приводится такимъ образомъ къ рѣшенію новой системы уравненій относительно неизвѣстнаго ω и при исключеніи $a,\ b,\ c,\ldots$, то-есть къ рѣшенной уже въ 20°) задачѣ вычисленія простаго символа класса. Поэтому въ области Логическаго Исчисленія задача нахожденія данной функціи неизвѣстныхъ символовъ только кажется имѣющею большую общность, чѣмъ подобная-же задача, относящаяся къ *одному* неизвѣстному символу; теоретически-же она разрѣшается съ нею одинаково.

Въ то время какъ въ ариѳметикѣ число вычисляемыхъ или исключаемыхъ неизвѣстныхъ стоитъ въ извѣстномъ отношеніи къ числу уравненій, имѣющихся въ распоряженіи, *въ Логическомъ Исчисленіи*,

какъ не трудно видѣть, *и задача исключенія, и задача рѣшенія, разрѣшимы совершенно независимо отъ числа данныхъ уравненій.* Такимъ образомъ, говоря вообще, на сторонѣ Логическаго Исчисленія оказывается рѣдкое преимущество дѣйствительнаго разрѣшенія самой общей задачи, какая только можетъ быть мыслима въ отведенныхъ этому Исчисленію рамкахъ. Становясь на эту точку зрѣнія, Логическое Исчисленіе можно разсматривать какъ совершеннѣйшее и въ то-же время какъ элементарнѣйшее ученіе.

Въ данномъ до сихъ поръ изложеніи заключается, по мнѣнію автора, все, что имѣетъ важность для *техники* счисленія, если при томъ исключить замѣчанія, имѣющія въ виду интерпретацію предмета. Не смотря на это, авторъ находитъ возможнымъ позволить себѣ въ § 4 еще и нѣкоторыя дальнѣйшія разсмотрѣнія въ томъ-же направленіи, какъ представляющія по его мнѣнію нѣкоторый теоретическій интересъ. Также и разсматриваемый § 2 онъ находитъ полезнымъ заключить слѣдующей теоремой Роберта Грассманна, какъ такой, которая (не смотря на перемѣну буквъ) соотвѣтствуетъ своему обращенію по принципу дуализма.

21⁰) *Теорема.* Если $ab=a$, то должно быть и $a+b=b$.

Доказательство. По 10⁰) $a+b=ab+b=b$

21′) *Теорема.* Обратно, если $a+b=b$, то должно быть также и $ab=a$.

Доказательство. По 10′) $ab=a(a+b)=a$.

Оба согласно этому предложенію обусловливающія другъ друга взаимно уравненія, какъ не трудно видѣть, равносильны съ

$$ab_1=0$$

и такимъ образомъ просто выражаютъ *подчиненность* понятія a понятію b.

§ 3 авторъ посвящаетъ иллюстраціи и приложенію теоріи, изложенной въ предыдущемъ. Для этого онъ приводитъ со всѣми промежуточными вычисленіями рѣшеніе слѣдующей *задачи*, предложенной Булемъ.

Пусть принято, что наблюденіе какого-нибудь класса явленій (природы или продуктовъ искусства, наприм. субстанцій) привело къ слѣдующимъ общимъ результатамъ.

а) Въ томъ изъ этихъ продуктовъ, въ которомъ одновременно отсутствуютъ признаки или свойства A и C, всегда находится

признакъ E въ соединеніи съ однимъ изъ двухъ признаковъ B и D, но никогда съ обоими вмѣстѣ.

β) Тамъ, гдѣ признаки A и D въ отсутствіи признака E всегда являются одновременно, признаки B и C или оба отсутствуютъ или оба находятся на лицо.

γ) Всюду, гдѣ признакъ A существуетъ вмѣстѣ съ признакомъ B, или E, или съ обоими вмѣстѣ, встрѣчается также или признакъ C или D, но не оба вмѣстѣ. И обратно, всюду, гдѣ изъ признаковъ C и D замѣчается только одинъ безъ другаго, тотчасъ же появляются и признакъ A въ соединеніи съ B или съ C или съ обоими вмѣстѣ.

Требуется:

во-первыхъ, узнать, что можно заключить въ каждомъ данномъ случаѣ изъ доказаннаго присутствія признака *A* относительно признаковъ *B*, *C* и *D*,

во-вторыхъ, рѣшить—существуютъ-ли независимо отъ наличности или отсутствія остальныхъ признаковъ какія-нибудь отношенія между присутствіемъ или отсутствіемъ признаковъ *B*, *C*, *D* (и въ случаѣ утвердительнаго отвѣта какія?);

въ-третьихъ, отвѣтить подобнымъ-же образомъ, что слѣдуетъ изъ наличности признака *B* въ отношеніи къ *A*, *C*, *D*;

и, наконецъ, *въ-четвертыхъ*, установить, что выходитъ для признаковъ *A*, *C*, *D* само по себѣ.

Прежде чѣмъ приступить къ предположенному рѣшенію, авторъ считаетъ полезнымъ сдѣлать слѣдующія замѣчанія. Такъ какъ въ каждомъ изъ трехъ предложенныхъ данныхъ α), β), γ) свѣдѣнія, сообщаемыя относительно признаковъ *A*, *B*, *C*, *D* являются соединенными съ элементомъ *E*, о которомъ въ намѣченныхъ для вывода заключеніяхъ ничего не говорится, то самъ собой является требованіе исключить соотвѣтствующій качеству *E* символъ изъ системы уравненій, представляющихъ выраженія данныхъ. Разсматриваемый въ полномъ своемъ составѣ классъ случаевъ явленія, содержащихъ одинъ изъ признаковъ *A*, *B*, *C*,..., обозначается въ послѣдующемъ изложеніи соотвѣтствующею малою буквою латинскаго алфавита. Наконецъ, не желая вдаваться въ пространныя разсужденія, авторъ находитъ нужнымъ совсѣмъ отказаться отъ установленія общихъ принциповъ для «интерпретаціи», то-есть для облеченія данныхъ въ формулы, также какъ и для обратнаго перевода результатовъ формулъ на словесный языкъ. Поступить такъ онъ считаетъ себя тѣмъ болѣе въ правѣ, что этимъ въ сущности догадливости читателя

предоставляется только то, что дѣйствительно ея касается. «Мое-же дѣло», говоритъ онъ далѣе, «состоитъ прежде всего въ изложеніи хода вычисленія, такъ какъ въ силу принятой нами въ противоположность Булю точки зрѣнія этотъ ходъ представляется теперь въ гораздо болѣе простомъ видѣ».

При точномъ слѣдованіи словесному тексту данныхъ $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$, они переводятся соотвѣтственно въ слѣдующія уравненія, помѣщенныя въ первомъ столбцѣ и содержащія x, y въ значеніи неопредѣленныхъ классовъ

$\alpha^0)$ $a_1c_1=xe(bd_1+b_1d)$,
$\beta^0)$ $e_1ad=y(bc+b_1c_1)$,
$\gamma^0)$ $a(b+e)=cd_1+c_1d$,

$\alpha')$ $a_1c_1(e_1+bd+b_1d_1)=0$,
$\beta')$ $ad(bc_1+b_1c)e_1=0$,
$\gamma')$ $a(b+e)(cd+c_1d_1)+(cd_1+c_1d)(a_1+b_1e_1)=0$.

Второй столбецъ составляютъ уравненія, представляющія приведенныя къ нулю уравненія перваго столбца, помѣщенныя въ одной строкѣ съ ними. Для двухъ первыхъ изъ этихъ уравненій операція приведенія къ нулю была соединена по «вспомогательному предложенію» $20^0)$ съ исключеніемъ неопредѣленныхъ символовъ класса x, y.

По изложенному на стр. 26 результатъ исключенія e будетъ состоять изъ свободныхъ отъ e, e_1 членовъ суммы трехъ уравненій втораго столбца то-есть изъ выраженія

$$a_1c_1(bd+b_1d_1)+ab(cd+c_1d_1)+a_1(cd_1+c_1d),$$

первый членъ котораго a_1c_1bd входитъ по закону поглощенія въ послѣдній a_1c_1d, и изъ произведенія коэффиціентовъ e и e_1, что все вмѣстѣ полагается равнымъ нулю. Такъ какъ коэффиціентъ при e равенъ $a(cd+c_1d_1)$, при e_1

$$a_1c_1+ad(bc_1+b_1c)+b_1(cd_1+c_1d),$$

а ихъ произведеніе равно ab_1cd, то результантой будетъ

$$a_1(cd_1+c_1d+b_1c_1d_1)+a(bcd+bc_1d_1+b_1cd)=0$$

или, по соединеніи въ одинъ двухъ членовъ,

$$\delta) \qquad a(cd+bc_1d_1)+a_1(cd_1+c_1d+b_1c_1d_1)=0.$$

Произведеніе коэффиціентовъ при a и a_1 въ этомъ уравненіи тождественно обращается въ нуль на основаніи $7^0)$. А потому исключеніе изъ этого уравненія a ведетъ къ $0=0$, чѣмъ обнаруживается въ отвѣтъ на *второй* вопросъ, что *между признаками* B. C и D

самими по себѣ въ отношеніи ихъ присутствія или отсутствія *не существуетъ никакого независимаго отношенія*. По этому же и уравненіе δ) равносильно съ своимъ рѣшеніемъ относительно a. Этимъ рѣшеніемъ прямо оказывается:

$$\varepsilon) \qquad a=cd_1+c_1d+b_1c_1d_1,$$

потому что отрицанія коэффиціентовъ при a и a_1 въ δ) то же раздѣльны (сравни «примѣчаніе» къ 20⁰). Въ самомъ дѣлѣ, будучи разсматриваемъ какъ разложенный по символамъ c, d, одинъ коэффиціентъ прямо является отрицаніемъ другаго.

Результатъ ε), который можетъ быть написанъ также въ равносильныхъ формахъ:

$$a=cd_1+c_1d+b_1c_1=cd_1+c_1d+b_1d_1=cd_1+c_1d+b_1(c_1+d_1),$$

слѣдующимъ образомъ отвѣчаетъ на *первый* изъ поставленныхъ вопросовъ: *Гдѣ есть признакъ A, тамъ признаки C и D или находятся, хотя и никогда вмѣстѣ, или же оба одновременно и въ соединеніи съ признакомъ B отсутствуютъ*. Обратно: *гдѣ всѣ три признака B, C, D вмѣстѣ отсутствуютъ, а также гдѣ находятся одинъ безъ другаго признаки C, D, тамъ долженъ находиться и признакъ A*.

Въ дальнѣйшемъ изъ результанты δ) должно быть исключено b, изъ чего непосредственно слѣдуетъ

$$\zeta) \qquad acd+a_1cd_1+a_1c_1d=0,$$

благодаря чему уравненіе δ) приводится къ такому простому виду какъ b. $ac_1d_1+b_1.a_1c_1d_1=0$. А изъ этого послѣдняго на основаніи четвертой схемы рѣшенія 20⁰) опредѣляется

$$\eta) \qquad \begin{aligned} b&=(a_1+c+d)(a+c+d)v+a_1c_1d_1 \text{ или} \\ b&=(c+d)v+a_1c_1d_1 \end{aligned}$$

при v, представляющемъ нѣкоторый неопредѣленный классъ. «Нельзя не замѣтить», говоритъ авторъ, «что этотъ результатъ проще даннаго Булемъ, чѣмъ въ разсматриваемомъ направленіи и обнаруживается преимущество нашего способа веденія рѣшенія надъ булевскимъ. Послѣдній находитъ дѣйствительно:

$$b=(a_1cd+acd_1+ac_1d)v+a_1c_1d_1,$$

то-есть форму, которая можетъ быть выведена изъ нашего уравненія η) черезъ разложеніе его по символамъ a, c, d и при пользо-

ваніи равенствомъ ζ). Ту же форму можно получить еще скорѣе, если въ сдѣланной однородною результантѣ δ) взять отрицаніе коэффиціентовъ b какъ разложеннаго по c, d аггрегата и присоединить въ качествѣ слагаемаго, свободнаго отъ v, происходящую отъ втораго члена той-же результанты ея часть».

Затѣмъ и *третій* изъ приведенныхъ выше вопросовъ получаетъ по η) слѣдующее словесное рѣшеніе: *При наличности признака B или долженъ представляться также и признакъ C или D, или-же и тотъ и другой должны отсутствовать вмѣстѣ съ A.* Обратно: *если одновременно отсутствуютъ признаки A, C и D, то находится признакъ B.*

Наконецъ и результатъ ζ) равносиленъ своему рѣшенію по a

$$\vartheta) \qquad a = w(c_1 + d_1) + cd_1 + c_1 d = wc_1 d_1 + cd_1 + c_1 d,$$

гдѣ подъ w подразумѣвается неопредѣленный классъ. Этотъ результатъ показываетъ въ свою очередь, *что изъ присутствія признака A можно заключить объ отсутствіи по крайней мѣрѣ одного изъ двухъ признаковъ C, D*, и обратно: *изъ появленія только одного изъ этихъ двухъ признаковъ (безъ другаго) слѣдуетъ заключить о присутствіи признака A.* Этимъ выводомъ дается отвѣтъ на послѣдній изъ предложенныхъ вопросовъ.

Авторъ заканчиваетъ § 3 слѣдующимъ замѣчаніемъ. «Гораздо большимъ, чѣмъ въ разсмотрѣнной сейчасъ задачѣ, представляется контрастъ между работой вычисленія по Булю и таковой же по нашему способу въ случаѣ другой задачи, изложенной Булемъ на стр. 118—120 и 128—129 и сводящейся къ выводу изъ посылокъ

$$ab = x(cd_1 + c_1 d),\ bc = y(ad + a_1 d_1),\ a_1 b_1 = c\, d_1$$

заключеній.

$$a_1 b_1 c + abc = 0,\ a = uc_1 + b_1 c,\ [b = vc_1 + a_1 c],\ c = w(ab_1 + a_1 b).$$

Задача эта не представляетъ впрочемъ столь многоразличныхъ интересныхъ случаевъ взаимности, какъ предыдущая.

Авторъ посвящаетъ § 4 своего сочиненія дополненію теоріи четырехъ основныхъ дѣйствій Логическаго Исчисленія, а слѣдовательно и отвѣту на вопросъ о понятіяхъ и законахъ *объихъ обратныхъ операцій*. Такъ какъ вслѣдствіе дуализма можетъ быть разсматриваема только одна изъ нихъ, то авторъ начинаетъ заявленіемъ о своемъ намѣреніи давать при послѣдующемъ разсмотрѣніи вычитанію преимущество передъ дѣленіемъ, то-есть на этотъ разъ первой сту-

пени передъ второю, оговариваясь, впрочемъ, что будетъ принимать во вниманіе обѣ операціи, когда по ходу изложенія окажется нужнымъ произвести сравненіе между ними или когда дѣло будетъ идти объ установленіи основаній.

Согласно обычаямъ, господствующимъ въ другихъ областяхъ, упомянутыя операціи должны быть введены въ разсмотрѣніе посредствомъ ихъ противоположности прямымъ операціямъ, то-есть вычитаніе, а взаимно и дѣленіе, должно быть опредѣляемо, какъ рѣшеніе относительно неизвѣстнаго c уравненія:

$$22') \quad c+b=a, \qquad | \qquad 22^0) \quad cb=a.$$

Методъ этого рѣшенія изложенъ въ § 2, м изъ него слѣдуетъ, что корни разсматриваемыхъ уравненій ∞ многозначны. Желая сохранить выраженія $a-b$ и $a:b=\frac{a}{b}$ исключительно для представляющагося вполнѣ однозначнымъ опредѣленнаго частнаго рѣшенія соотвѣтствующаго уравненія, авторъ даетъ *полному* или *общему* рѣшенію послѣдняго слѣдующее обозначеніе:

$$23') \quad c=a-b \qquad | \qquad 23^0) \quad c=a::b,$$

при чемъ называетъ это рѣшеніе въ противоположность какимъ-нибудь частнымъ рѣшеніямъ

полнозначною разностью | *полнозначнымъ* частнымъ.

Что-же касается того частнаго случая, которому присвоено первоначальное обозначеніе, то болѣе точная его характеристика будетъ дана ниже. Впрочемъ и въ выраженіяхъ 23) классы a и b не должны быть разсматриваемы какъ произвольные или взятые на удачу, потому что уравненія, принимаемыя за предварительное условіе образованія этихъ выраженій, уже заключаютъ въ себѣ нѣкоторое предположеніе относительно упомянутыхъ классовъ. Предположеніе это можетъ быть обнаружено помощью произведеннаго согласно съ правилами исключенія символа c изъ 22), при чемъ въ качествѣ результанты получается

$$24') \quad a_1 b=0 \qquad | \qquad 24^0) \quad ab_1=0.$$

Отсюда видно прежде всего, что оба обратныя дѣйствія Логическаго Исчисленія не есть какія-нибудь *безусловно исполнимыя операціи*. Въ дѣйствительности ихъ исполнимость связана съ условіемъ 24), вслѣдствіе чего только въ соединеніи съ представляющимъ его уравненіемъ уравненіе 23) можетъ вполнѣ замѣнить 22).

Уравненіе 24) (наприм. лѣвую его часть) какъ являющееся сосуществующимъ условіемъ позволительности допущенія 22′) или какъ составляющее предварительное условіе того, чтобы вообще могла быть рѣчь о разности a и b, авторъ называетъ *условіемъ цѣнности* или *силы* этого выраженія. Дѣйствительно это уравненіе будетъ выполнено, какъ скоро должно имѣть смыслъ названіе $a-b$ и какъ скоро должно вообще принадлежать разности значеніе или цѣнность. Разсматриваемое условіе цѣнности должно быть однимъ и тѣмъ же какъ для полнозначной разности, такъ и для всякаго частнаго случая, а слѣдовательно и для представляемой ниже въ качествѣ однозначной $a—b$. По поводу изложеннаго сейчасъ авторъ замѣчаетъ, что условіе цѣнности будетъ впослѣдствіи подразумѣваться имъ имѣющимъ силу всякій разъ, когда дѣло коснется разности.

Далѣе слѣдуетъ замѣтить, что уравненія 22) и 23) обусловливаютъ другъ друга взаимно, а потому слагаемое можетъ быть переносимо или, что то же самое, можетъ являться на другой сторонѣ знака равенства въ качествѣ вычитаемаго только при посредствѣ *полнозначнаго* вычитанія.

Въ качествѣ значенія c оказывается на основаніи изложеннаго способа

$$25') \quad \begin{aligned} a-b &= ab_1+ub \\ &= a(b_1+u) \\ &= ab_1+uub \end{aligned} \qquad 25^0) \quad \begin{aligned} a::b &= (a+b_1)(u+b) \\ &= a+ub_1 \\ &= ab+ua_1b_1 \end{aligned}$$

при u *неопредѣленномъ*, если принимать соотвѣтственно во вниманіе условіе силы 24).

Пока для искомаго въ 23) класса c неизвѣстно никакого другого отношенія, кромѣ уравненія 22), классъ u слѣдуетъ разсматривать естественнымъ образомъ, какъ совершенно *произвольный*. Помощью другихъ свѣдѣній объ искомомъ слагаемомъ c,—свѣдѣній, которыя даются сверхъ упомянутаго отношенія или были даны ранѣе, если именно c извѣстно напередъ, u можетъ получить дальнѣйшія опредѣленія и даже въ конкретныхъ случаяхъ совсѣмъ лишиться своего неопредѣленнаго характера. Было бы ошибочно, наприм., выводить изъ $a=a+0$ по нашимъ правиламъ заключеніе, что $a-a$, которое есть ua, должно равняться нулю *при произвольномъ* u. Напротивъ, въ виду того, что вычисляемое слагаемое c или 0 является абсолютно опредѣленнымъ, мы должны учить, что u или по крайней мѣрѣ ua должно въ этомъ случаѣ приниматься равнымъ 0. Если опредѣленный гдѣ нибудь классъ черезъ перенесеніе другаго

уединить въ уравненіи, то другая часть послѣдняго также предста витъ вполнѣ опредѣленный классъ, при чемъ, слѣдовательно, произвольный членъ получитъ такое опредѣленіе, что уже будетъ входить по правиламъ Лоическаго Исчисленія.

Имѣются такія общія слѣдствія:

26′)	$\begin{cases} a-a=ua, \\ a-0=a, \end{cases}$	26⁰)	$\begin{cases} a::a=a+u, \\ a::1=a, \end{cases}$

послѣ которыхъ особенно слѣдуетъ указать значенія:

27′)	$\begin{cases} 0-0 \quad 0, \\ 1-0 \quad 1, \end{cases}$	27⁰)	$\begin{cases} 1\cdot.1 \quad 1, \\ 0\cdot\cdot1 \quad 0, \end{cases}$

являющіяся опредѣленными совершенно однозначно. Также заслуживаютъ вниманія значенія

28′)	$1-1=u,$	28⁰)	$0::0=u,$

выражающіяся ∞ многозначно или, точнѣе, прямо *всезначно*.

Противоположно послѣднимъ такія выраженія какъ $0-1$ и $1:.0$ могутъ быть изъяснены только какъ *незначныя*, то-есть какъ не имѣющія ни малѣйшаго смысла. Въ такомъ изъясненіи можетъ оказаться надобность, конечно, только тогда, когда представится къ образованію такихъ выраженій поводъ.

Изъ соединенныхъ въ 25) частныхъ рѣшеній уравненій 22) особеннаго вниманія заслуживаютъ два, именно *самое широкое*, являющееся при $u=1$, и *самое узкое*, соотвѣтствующее $u=0$, при чемъ не должно упускать изъ виду, что согласно съ требованіями дуализма случаю $u=1$ въ одной операціи всегда противопоставляется случай $u=0$ въ другой.

Одною изъ такихъ двухъ операцій является:

для $u=1$:	для $u=0$
29′) a минусъ $b=a$,	29⁰) a на $b=a$,
то-есть (изъясняемая въ качествѣ однозначной) «максимальная разность» равна своему уменьшаемому.	«минимальное частное» одинаково съ дѣлимымъ.

Въ виду этого нѣтъ никакого интереса заниматься дальнѣйшимъ изслѣдованіемъ формальныхъ законовъ соотвѣтствующихъ операцій, то-есть дѣйствій (однозначныхъ) «максимальнаго вычитанія» и «минимальнаго дѣленія».

При второй группѣ допущеній напротивъ получаются:

для $u=0$	для $u=1$
30′) $a-b=ab_1$	30⁰) $a:b=a+b_1=\frac{a}{b}$.

Эти выраженія, именно однозначно по выведеннымъ изъясняемыя

минимальная разность | *максимальное частное*,

представляются нѣкоторымъ образомъ *главными* или *принципіальными* видами полнозначныхъ или общихъ значеній 25). Ихъ слѣдуетъ называть просто разностью и частнымъ и обозначать обыкновенными знаками вычитанія и дѣленія. «Однозначнымъ» вычитаніемъ, взаимно дѣленіемъ, авторъ слѣдовательно называетъ служащія для исполненія этого дѣйствія операціи.

Въ частности изъ 30) слѣдуетъ

31′) $1-b=b_1$	31⁰) $\frac{0}{b}=b_1$,

изъ чего обнаруживается какъ вступающее въ силу

32) $$1-a=\frac{0}{a}$$

въ значеніи общаго выраженія для a_1 или для отрицанія a. Это въ то же время есть (въ сущности) *единственное уравненіе Логическаго Исчисленія, которое соотвѣтствуетъ дуалистически самому себѣ*.

Такъ какъ въ разсмотрѣнномъ частномъ случаѣ условіе силы обращается въ тождество, то на него можно здѣсь и не обращать вниманія. Вычитаніе класса изъ 1 выполнимо поэтому безусловно и т. д.

Если принять во вниманіе 31), то основныя предложенія 7) и 13) могутъ быть представлены въ слѣдующихъ формахъ, способныхъ иногда приносить пользу:

33⁰) $a(1-a)=0$	$a+\frac{0}{a}=1$
$a.\frac{0}{a}=0$	34′) $a+(1-a)=1$
$0:\frac{0}{a}=a$	35′) $1-(1-a)=a$
$\frac{0}{1-a}=a$	$1-\frac{0}{a}=a$

Выраженіе 30), обозначенное буквою c, представляетъ соотвѣтственно рѣшеніе слѣдующей пары уравненій.

$$36') \quad c+b=a,\ cb=0, \qquad | \qquad 36^0) \quad cb=a,\ c+b=1,$$

которымъ, понятно, совершенно недвузначно опредѣляется:

$$37') \quad c=a-b|=a(1-b)| \qquad | \qquad 37^0) \quad c=\frac{a}{b}[=a+(1-b)|$$

Подобно заключенію отъ 36) къ 37), можно заключить и обратно отъ 37) къ 36), стоитъ лишь прибавить условіе силы 24), то-есть заставить въ предположеніи 37') войти въ силу находящееся съ нимъ въ тѣсной связи допущеніе, что данныя выраженія имѣютъ смыслъ. «Это даетъ намъ», говоритъ авторъ, «для Исчисленія обратныхъ операцій слѣдующее основное предложеніе».

Слагаемое, находящееся на одной сторонѣ логическаго уравненія, можетъ быть перенесено посредствомъ однозначнаго вычитанія въ качествѣ вычитаемаго на другую сторону уравненія только въ томъ случаѣ (и при томъ исключительно въ немъ одномъ), когда оно отдѣлено отъ прочихъ членовъ предполагаемой суммы, или когда эта сумма, есть. какъ называетъ ее авторъ, *приведенная* (reducirte).

Напротивъ вычитаемое всегда можетъ быть перенесено въ качествѣ слагаемаго на другую сторону уравненія независимо отъ того будетъ ли оно принадлежать однозначной или полнозначной разности.

Въ частности поэтому легко вывести изъ 9) частью въ противоположность 26), что

$$38') \quad a-0=a,\ a-a=0 \qquad | \qquad 38^0) \quad \frac{a}{1}=a,\ \frac{a}{a}=1.$$

Уравненіе, въ родѣ $a=b$, можетъ быть написано теперь также въ формѣ $a-b=0$, такъ какъ съ одной стороны оно обнимаетъ условіе силы $a_1 b=0$, а съ другой — прямо выражаетъ, что должно существовать равенство $ab_1=0$ (сравни 17^0)).

То опредѣленіе однозначной разности, которое было получено выше путемъ приведенія полнозначной разности къ частному виду, еще разъ представляется при посредствѣ сосуществованія уравненій 36) и 37) въ такомъ самостоятельномъ выраженіи. Если о классѣ c знаютъ только одно то, что его сложеніе съ даннымъ классомъ b доставляетъ другой классъ a, то c еще не вполнѣ извѣстно. Опре-

дѣленнымъ вполнѣ, $=a-b$, искомое слагаемое c будетъ тогда, когда знаютъ, что оно исключаетъ другой классъ b и что, слѣдовательно, bc въ то же время есть 0.

Изображенная въ формѣ $a-b$ логическая операція обладаетъ очень удобнымъ словеснымъ выраженіемъ въ видѣ реченій: „*за исключеніемъ*“, „*безъ*“, такъ какъ $a-b$ представляетъ классъ a послѣ исключенія изъ него b, при чемъ условіе силы 24′) выражаетъ предположеніе, что послѣднее все содержится въ первомъ. Вслѣдствіе этого является основаніе называть вычитаніе *исключеніемъ*, какъ это уже и было сдѣлано авторомъ.

Что касается логическаго дѣленія, то хотя языкъ и не имѣетъ для него никакого соотвѣтствующаго выраженія, оно, какъ не трудно понять, все же оказывается на дѣлѣ *отвлеченіемъ* (абстракціей), потому что для перехода отъ класса bc къ классу c приходится *оставлять безъ разсмотрѣнія* признаки, характеризующіе классъ b.

Изъ законовъ, входящихъ теперь въ силу для однозначнаго вычитанія, авторъ выдвигаетъ на первый планъ законъ распредѣлительности

39′) $$a(b-c)=ab-ac$$

[*Доказательство:* $a(b-c)=abc_1$ и $ab-ac=ab(a_1+c_1)=abc_1$], такъ какъ во встрѣчающихся въ обыденной жизни разсужденіяхъ этотъ законъ является общеупотребительнымъ. По той же причинѣ основывался на немъ, какъ на аксіомѣ, также и Буль. При взглядѣ на него теорема противорѣчія 7°) или 33°) $a(1-a)=0$ представлялась Булю ничѣмъ другимъ какъ перифразою «специфическаго» закона 5°) $a=aa$. Нельзя не замѣтить однако, что условія силы для обѣихъ сторонъ уравненія 39′) неодинаковы; именно для лѣвой стороны $b_1c=0$, а для правой $(a_1+b_1)ac$ или $ab_1c=0$. При необдуманномъ примѣненіи предложенія можно поэтому впасть въ ошибку, такъ наприм. $aa-a$ *не* $=a(a-1)$, потому что условіе силы для разности $a-1$, то есть $a_1=0$, вообще невыполнимо, тогда какъ съ другой стороны $aa-a$ вполнѣ имѣетъ смыслъ, именно значеніе 0.

Относительно другихъ законовъ логическаго вычитанія, требующихъ сравненія съ законами ариѳметическаго, авторъ ограничивается сужденіемъ о слѣдующихъ четырехъ группахъ формулъ *Ариѳметики*, подъ видомъ которыхъ являются собранными вмѣстѣ всѣ

относящіеся не болѣе какъ къ тремъ общимъ числамъ законы операцій первой ступени

$$\text{I.}\quad (a-b)+b=(a+b)-b=b-(b-a)=a.$$

$$\text{II.}\quad \begin{cases}(a+b)-c=a+(b-c)=a-(c-b)=\\ \qquad\qquad =(a-c)+b=b-(c-a).\end{cases}$$

$$\text{III}\quad \begin{cases}a-(b+c)=(a-b)-c=\\ \qquad\qquad =(a-c)-b.\end{cases}$$

$$\text{IV.}\quad \begin{cases}a-b=(a+n)-(b+n)=(a-n)-(b-n)=\\ \qquad\qquad =(n-b)-(n-a)=(a-n)+(n-b).\\ a+b=(a+n)+(b-n)=(a+n)-(n-b)=\\ \qquad =(a-n)+(b+n)=(b+n)-(n-a).\end{cases}$$

По 30′) можно указать значенія каждаго изъ противопоставленныхъ здѣсь другъ другу выраженій, по 24′) написать ихъ условія силы, и по 16⁹) соединить послѣднія въ одно уравненіе. Наконецъ, принимая все это во вниманіе, можно въ случаѣ надобности разложить каждое выраженіе по символамъ, изъ которыхъ оно построено.

При сказанномъ является слѣдующій замѣчательный результатъ. Изъ уравненій, найденныхъ посредствомъ сравненія между собою ариѳметическихъ выраженій, почти *половина* сохраняетъ свою силу также и въ Логикѣ при предположеніи, что выраженія имѣютъ смыслъ на обѣихъ сторонахъ одновременно, то-есть при условіяхъ силы, обнаруживающихся при одномъ взглядѣ на обѣ стороны.

Что касается другой половины уравненій, то она можетъ получить силу въ Логикѣ, если принять въ основаніе то же допущеніе, но не иначе какъ черезъ прибавленіе къ обѣимъ сторонамъ уравненія *поправочнаго члена* (Correktionsglied), который къ тому же и самъ оказывается способнымъ имѣть общее выраженіе.

«Мнѣ пришлось бы», говоритъ авторъ, «зайти слишкомъ далеко, если бы я захотѣлъ подтвердить это для всѣхъ въ отдѣльности комбинацій сравниваемыхъ въ предыдущемъ выраженій. Тѣмъ не менѣе всякое соединенное съ геометрическимъ толкованіемъ изслѣдованіе этого рода можетъ быть рекомендовано начинающимъ какъ очень интересное упражненіе. Изъ предложеній, не остающихся въ силѣ безъ соотвѣтствующаго измѣненія, въ частности должны быть указаны поэтому только немногія. Въ качествѣ особенно замѣчательныхъ имѣемъ:

для I. $(a+b)-b=a-ab$ или $a-b$; поправочный членъ $-ab$ или $-b$;

для II. $a+(b-c)=[(a+b)-c]+ac$; поправочный членъ ac;

для III. алгебраическія предложенія имѣютъ силу, оставаясь совершенно неизмѣнными,—явленіе, не представляющееся удивительнымъ, если принять во вниманіе, что по моимъ формальнымъ изслѣдованіямъ (*E. Schroder:* Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, S. 284) предложенія этой группы находятся въ самой непосредственной связи съ чистыми законами прямыхъ операцій;

для IV. $(a+n)-(b+n)=(a-b)(1-n)$; поправочный членъ $-n(a-b)$, изъ чего видно, что одинаковая составная часть въ уменьшаемомъ и вычитаемомъ можетъ быть уничтожена, а слѣдовательно разность отъ нея освобождена, всегда только въ томъ случаѣ, когда эта составная часть отдѣлена отъ другихъ, именно когда $na=0$ и $nb=0$. Итакъ, *при вычитаніи приведенныхъ суммъ другъ изъ друга содержащіеся въ нихъ одинаковые члены могутъ быть безъ всякаго стѣсненія зачеркиваемы*".

Вмѣсто вопроса о законахъ однозначнаго вычитанія можетъ быть поставленъ также вопросъ о законахъ вычитанія полнозначнаго.

Значенія нижеслѣдующихъ, помѣщенныхъ одно подъ другимъ, элементарныхъ выраженій получаются, если уравненія, стоящія рядомъ съ ними справа, при исключеніи изъ нихъ x и y будутъ предварительно рѣшены черезъ приложеніе методовъ § 2 относительно неизвѣстнаго x:

$x=(a+b)-c$	изъ	$x+c=a+b$,
$x=a+(b-c)$	»	$x=a+y,\ y+c=b$,
$x=a-(c-b)$	»	$x+y=a,\ y+b=c$,
$x=a-(b+c)$	»	$x+b+c=a$,
$x=(a-b)-c$	»	$x+c=y,\ y+b=a$,
$x=(a+n)-(b+n)$	»	$x+b+n=a+n$,
$x=(a-n)-(b-n)$	»	$x+y=z,\ y+n=b,\ z+n=a$,
$x=(a-n)+(n-b)$	»	$x=y+z,\ y+n=a,\ z+b=n$,

и т. д. Условіе силы есть соотвѣтственно результанта исключенія x, y, z.

Но здѣсь представляется еще и другой путь. Схемой 25′) можно предварительно воспользоваться вторичо какъ правиломъ для построенія по ней требуемыхъ выраженій.

Однако при этомъ послѣднемъ способѣ часто появляются въ результатѣ *нѣсколько* другъ отъ друга независимыхъ произвольныхъ классовъ символовъ $v, w, \ldots$, тогда какъ по первому способу на основаніи 20°) можно придти не болѣе какъ къ одному произволь-

ному символу u; тѣмъ не менѣе между результатами обоихъ способовъ должна для каждаго изъ приведенныхъ выраженій существовать равносильность.

По аналогіи можно и вообще утверждать, что всякая функція отъ данныхъ символовъ и отъ независимыхъ между собою произвольныхъ v, w,... можетъ быть замѣнена черезъ извѣстное выраженіе функціи, содержащей кромѣ данныхъ a, b,.... только одинъ произвольный символъ u.

Для примѣра достаточно взять:

$$av + bw = (a+b)u.$$

Равносильность въ этомъ случаѣ можетъ быть обнаружена также и прямо, потому что лѣвая сторона выраженія переходитъ въ правую при допущеніи $v=w=u$, и наоборотъ правая сторона обращается въ лѣвую при допущеніи $u=av+bw$. Обѣ стороны являются такимъ образомъ равнообъемлющими, и $av+bw$ представляетъ только произвольную часть области $a+b$.

Далѣе подобнымъ-же примѣромъ является

$$abv_1 + (a_1b + av)w = (a+b)u,$$

какъ это прямо можно видѣть съ одной стороны изъ допущеній $v = (a+b)u + u_1$, $w = (a+b)u$, а съ другой — изъ допущенія $u = abv_1 + (a_1b + av)w$

Въ случаѣ уравненій между полнозначными выраженіями «поправочные члены» являются до нѣкоторой степени представленными иначе, чѣмъ въ случаѣ уравненій между однозначными выраженіями; по большей части они бываютъ даже свободными отъ произвольныхъ составныхъ частей. Такъ формулы группы III имѣютъ безъ всякаго поправочнаго члена силу также и для полнозначнаго вычитанія.

Если по формуламъ, остающимся такимъ образомъ въ силѣ и для исключенія и абстракціи, производить вычисленіе на самомъ дѣлѣ, то прежде всего даетъ себя чувствовать въ качествѣ очень ощутительнаго неудобства слѣдующее обстоятельство. Правила дѣйствительны не всегда, а производимыя по нимъ преобразованія позволительны не вообще, и связываются съ вышеназванными условіями силы, какъ съ предположеніемъ.

Конечно отъ всего этого можно было-бы освободиться, принимая, наприм., формулу, представляющую разность, за ея опредѣленіе даже и въ томъ случаѣ, когда условія силы не дѣйствуютъ. При этомъ способѣ обратныя операціи изъяснялись-бы какъ операціи

безусловно исполнимыя, а операціи, вытекающія изъ данныхъ ранѣе однозначныхъ изъясненій 30), даже сдѣлались-бы «*совершенно однозначными*», то-есть такими, которыя никогда не бываютъ не только многозначными, но и незначными. Но, во-первыхъ, при этомъ представлялся-бы выборъ между *многими* въ общемъ различными выраженіями, покрывающими другъ друга только вслѣдствіе условій силы, и, во-вторыхъ, не существовало-бы въ общемъ противоположности между изъясненными въ вышесказанномъ операціями и соотвѣтствующими имъ прямыми, чѣмъ онѣ утратили-бы свой главнѣйшій интересъ. Никакого рѣшительнаго мотива, который при упомянутомъ выборѣ давалъ-бы перевѣсъ тому или другому рѣшенію, авторъ однако же не могъ открыть. Если-бы изъ выраженій, находящихся въ распоряженіи, сплошь выбирались имѣющія самый большой объемъ, то разстроился-бы дуализмъ. Къ тому-же, наконецъ, каково-бы ни было избранное рѣшеніе, законы операцій являются на столько болѣе сложными сравнительно съ Алгеброй, что слѣдованіе имъ было-бы безспорно менѣе практичнымъ, чѣмъ употребленіе методовъ, изложенныхъ въ § 2, гдѣ въ вычитаніи и дѣленіи разсматривался только общій частный случай отрицанія.

Въ заключеніе своего сочиненія авторъ останавливается на замѣчаніи, что теорема 14°) D, E, F,... Буля, представленная имъ въ качествѣ аналогичной теоремѣ Тайлора, остается «замѣчательнымъ образомъ» справедливою также и для элементарныхъ выраженій, образованныхъ посредствомъ полнозначныхъ обратныхъ операцій, но въ смыслѣ, существенно уклоняющемся отъ взглядовъ Буля, и, кромѣ того, съ измѣняющимъ дѣло прибавленіемъ, *что тѣ конституенты, коэффиціенты которыхъ являются незначными, должны сами по себѣ полагаться равными* 0, а слѣдовательно и доставлять вмѣстѣ съ тѣмъ условіе силы. Таже самая теорема удерживаетъ, повидимому, значеніе даже и въ случаѣ самыхъ сложныхъ выраженій функціи, построенныхъ при помощи обратныхъ операцій, въ чемъ авторъ не могъ вполнѣ убѣдиться изъ апостеріорнаго доказательства Буля.

Въ самомъ дѣлѣ эта теорема даетъ наприм.:

$$40') \quad a \div b = (1 - 1)\, ab + (1 \div 0)\, ab_1 + (0 - 1)\, a_1 b + (0 - 0)\, a_1 b_1,$$

гдѣ коэффиціентъ $0 \div 1$ лишенъ смысла, а потому обладающая имъ конституента $a_1 b = 0$, и слѣдовательно выражаетъ условіе силы.

Если-же принять во вниманіе 27') и 28'), то останется

$$a \div b = ua b + a b_1,$$

фактически совпадающее съ 25').

Буль въ противоположность изложенному производитъ вычисленіе на основаніи *ариѳметическихъ* законовъ. Полагая согласно съ ними $1-1=0$, онъ находитъ $c=a-b=ab_1$, какъ самое общее рѣшеніе по c уравненія $c+b=a$.

Но послѣднее справедливо только въ томъ случаѣ, когда, какъ это и случилось у Буля, вычисленіе производится надъ суммами съ раздѣльными членами («приведенными» суммами), и когда сложеніе членовъ, совпадающихъ вполнѣ или по частямъ, принципіально исключено.

Но такое исключеніе формы $a+a$ на ряду съ допущеніемъ $a \,.\, a$ совсѣмъ не мотивировано, такъ какъ: во-первыхъ, одна форма не болѣе несообразна, чѣмъ другая; во-вторыхъ, допущеніе первой формы является несомнѣнно полезнымъ для сокращенія выраженія, да и на дѣлѣ эта сумма оказывается общеупотребительною въ обыденной жизни; наконецъ, въ-третьихъ, та же форма позволяетъ изслѣдователю пользоваться выгодами дуализма, который усматривался Булемъ въ весьма неполной формѣ и къ которому значительно ближе подошелъ уже Грассманнъ.

[illegible]
[illegible]
[illegible]

5. Философское, научное и педагогическое значеніе Исторіи математики. М. 1886. Ц. 50 к.

6. Происхожденіе, развитіе и современное состояніе Исторіи математики. М. 1886. Ц. 60 к.

7. Изслѣдованія по Исторіи математики. I. Періоды, направленія и школы въ развитіи наукъ математическихъ. М. 1887. Ц. 25 коп.

8. Программа курса Исторіи математики, читаемаго въ Московскомъ Университетѣ. М. 1890. Ц 30 коп

---

9. Объ анализѣ и синтезѣ. СПБ. 1877. Ц. 40 к.

---

10. Новая теорія происхожденія міра (по сочиненію Фай'я (Faye) Sur l'origine du monde). Съ прибавленіемъ статьи „Согласіе геологическихъ эпохъ съ эпохами космогоническими". М. 1885. Цѣна съ Прибавленіемъ 40 к.

11. Климатъ Нижегородской губерніи. Описаніе метеорологическихъ станцій и температура. Н.-Н. 1877. Ц. 50 к.

12. Таблицы смертности и народонаселенія для Нижегородской губерніи. Н.-Н. 1875. Ц. 50 к.

Имѣющіеся въ очень ограниченномъ количествѣ отдѣльные оттиски статей, напечатанныхъ въ Bibliotheca Mathematica.

13. De l'étude sur l'Histoire des mathématiques en Russie Stockholm. 1888. P. 30 cop.

14. Quelques mots sur l'histoire des connaissances mathématiques anterieures à la science. Stockholm. 1889. P. 25 cop.

15. Sur le procédé employé dans le papyrus de Rhind pour réduire les fractions en quantièmes. Stockholm. 1890. P. 25 cop.

16. Programme du cours de l'histoire des mathématiques à l'université de Moscou. Stockholm. 1891. P. 30 cop.

17. Progrès successifs des sciences mathématiques chez les peuples de l'Europe. Stokholm. 1892. P. 25 cop.

ПЕЧАТАЮТСЯ:

Очерки исторіи развитія физико-математическихъ знаній въ Россіи. Томъ II. XVIII столѣтіе.

Русская физико-математическая библіографія. Выпуски 1-й и 2-й тома III.

Изслѣдованія по Исторіи математики. II. Происхожденіе и первоначальное развитіе счисленія. III. Происхожденіе системъ счисленія.

Лекціи Исторіи математики, читаемыя въ Московскомъ Университетѣ Пр.-Доц. *В. В. Бобынинымъ*.

Съ требованіями на всѣ означенныя книги просятъ обращаться въ Редакцію журнала „Физико-Математическія Науки“, Москва (адресъ извѣстенъ Почтамту). Можно получать также и во всѣхъ болѣе извѣстныхъ книжныхъ магазинахъ Москвы и Петербурга.

Цѣна 50 коп.