С. Богомоловъ.

ВОПРОСЫ ОБОСНОВАНІЯ ГЕОМЕТРІИ.

Часть 1.

ИНТУИЦІЯ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, ИДЕЯ ПОРЯДКА ВЪ ГЕОМЕТРІИ

СЪ ПРИЛОЖЕНІЕМЪ СТАТЬИ

ФИЛОСОФІЯ МАТЕМАТИКИ ВЪ РАБОТАХЪ А. ПУАНКАРЭ.

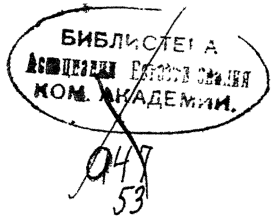
Цѣна 1 руб. 50 коп.

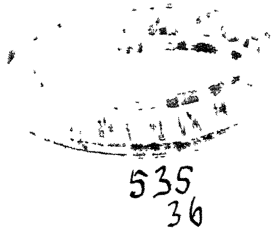
Изданіе Товарищества
В. В. Думновъ—Насл Бр. Салаевыхъ

ВЪ С.-ПЕТЕРБУРГѢ
Большая Конюшенная, № 1.

ВЪ МОСКВѢ.
Мясницкая улица, д. № 5.

„Прод 38“





МОСКВА.
Т—во „Печатня С. П. Яковлева“. Петровка, Салтык. пер. д Т—ва, 9
1913

Von diesen ersten Elementen ist die *Begründung* eine gewiss nicht minder schwierige Aufgabe, als die weitere Entwickelung der complicirtesten Satze. Jene strebt in die Tiefe, diese in die Höhe: und Tiefe und Höhe sind gleich unbegrenzt und dunkel.

Crelle „Zur Theorie der Ebene“

(Journal für d reine u ang. Math. Bd. 45, p. 20).

... . anche nella matematica più elementare ci sia ancor vasto campo di ricerche per loro natura interessanti.

Peano „Sui fondamenti della Geometria“.

(Rivista di Matematica IV, p. 51).

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Въ предлагаемой нами вниманію читателя книгѣ главнымъ образомъ разсматриваются общіе вопросы, которыхъ невозможно обойти молчаніемъ при рѣшеніи задачи строгаго обоснованія геометріи сначала разграничиваются роли интуиціи и логики, совмѣстными усиліями которыхъ достигается указанная цѣль; затѣмъ излагаются начала математической (или символической) логики Наконецъ, въ третьей статьѣ, посвященной введенію идеи порядка въ геометрію, эти общія разсужденія прилагаются къ рѣшенію конкретной геометрической задачи; такъ что послѣдняя статья, съ одной стороны, служитъ какъ бы иллюстраціей двухъ первыхъ, съ другой — является переходомъ къ дѣйствительному обоснованію геометріи.

Такимъ образомъ, упомянутыя здѣсь три статьи представляютъ собою нѣчто цѣлое, почему мы и рѣшаемся выпустить ихъ отдѣльной книжкой. Намъ показалось также умѣстнымъ присоединить сюда, въ качествѣ приложенія, еще докладъ о философіи математики въ работахъ А. Пуанкарэ. здѣсь затрагиваются вопросы, тѣсно связанные съ тѣми, которыхъ приходилось касаться въ двухъ первыхъ статьяхъ.

С. Богомоловъ.

Луга 1913 VIII 9

Оглавленіе.

Стр.

Интуиція, какъ источникъ геометрическаго знанія.

1 Опредѣленіе термина „интуиція“ 1
2. Ученіе Лейбница о роли интуиции и логики при обоснованіи геометріи 5
3. Ученіе Канта 13
4. Ученіе Шопенгауэра 24
5. Взгляды проф. И. И. Лапшина 37
6. Рѣшеніе вопроса при свѣтѣ теорій современной математики 47

Исчисленіе отношеній, какъ часть математической логики.

1. Новѣйшія идеи въ математикѣ и логикѣ, вызвавшія сближеніе этихъ двухъ наукъ 81
2. Исчисленіе предложеній 92
3. Исчисленіе классовъ 103
4. Опредѣленіе термина „чистая математика“ 113
5. Исчисленіе отношеній 118
6. Различные типы опредѣленій въ математикѣ 140
7. Отношенія порождающія ряды 151

Введеніе идеи порядка въ геометрію.

1. Расположеніе точекъ въ открытомъ ряду; понятіе „между“ 161
2. Расположеніе точекъ въ закрытомъ ряду; отношеніе „раздѣленіе паръ“ 194

Приложеніе.

Философія математики въ работахъ А Пуанкарэ 218

Интуиція, какъ источникъ геометрическаго знанія.

1. Современныя изслѣдованія основъ геометріи полны противоположеніями логики и интуиціи; въ цѣломъ рядѣ философскихъ работъ мы найдемъ страницы, посвященныя послѣдней способности, съ той или другой ея оцѣнкой.

Задачу обоснованія геометріи нельзя формулировать во всей ея полнотѣ, нельзя даже установить ея необходимость въ современной постановкѣ вопроса, пока не будутъ выяснены различнаго рода недоумѣнія, связанныя съ понятіемъ интуиціи, какъ особаго источника геометрическихъ истинъ.

Словомъ „интуиція“, по предложенію профессора Введенскаго, передается нѣмецкое „Anschauung“; другіе авторы и переводчики передаютъ послѣднее черезъ „созерцаніе“, „воззрѣніе“ и „наглядное представленіе“, подобное же имѣетъ мѣсто и относительно прилагательнаго „anschaulich“.

Мы едва ли ошибемся, если скажемъ, что слово „интуиція“ получило особенное распространеніе въ философской и математической литературѣ со временъ Канта; у послѣдняго это—прежде всего техническій терминъ для строго единичнаго представленія въ противоположность понятію; къ указанному опредѣленію Кантъ въ другомъ мѣстѣ дѣлаетъ примѣчаніе: „интуиція... не составляетъ, конечно, никакого смотрѣнія, но представленіе объ единичномъ, поскольку это единичное не мыслится, а дано для мышленія“ [1]). Въ дальнѣйшемъ, однако, интересующее насъ слово потеряло изложенное узко спеціальное значеніе и получило болѣе широкій смыслъ; какъ бы его однако ни опредѣляли, всегда, въ

[1]) Введенскій, „Лекціи по исторіи новой философіи“ (литогр. 1896), стр. 52—54.

качествѣ существеннаго признака, входитъ элементъ непосредственности въ противоположность продуктамъ абстракціи. Въ энциклопедическомъ словарѣ, напр., мы находимъ слѣдующее опредѣленіе, принадлежащее Вл. Соловьеву: „интуиція — непосредственное усмотрѣніе чего-либо въ качествѣ истиннаго, цѣлесообразнаго, нравственно добраго или прекраснаго. Противополагается рефлексіи“ [1]). Для насъ, конечно, здѣсь единственно важенъ первый предикатъ истинности Въ послѣдующихъ строкахъ Соловьевъ отрицаетъ за интуиціей право быть высшей нормой философскаго познанія, „передъ которою рефлектирующее мышленіе теряло бы свои права“. Однако нельзя отрицать, что примѣненіе логическихъ законовъ покоится на интуиціи особаго рода [2]). Возьмемъ, напр., такъ называемый принципъ силлогизма: „если p влечетъ за собой q и q влечетъ за собой r, то p влечетъ за собой r“ (здѣсь p, q, r обозначаютъ сужденія); пусть далѣе намъ извѣстно, что изъ равносторонности треугольника (p) вытекаетъ равенство его угловъ между собою (q), а изъ послѣдняго слѣдуетъ, что каждый уголъ нашего треугольника равенъ 60^0; это будетъ сужденіе r Тогда мы въ правѣ сдѣлать заключеніе, что у равносторонняго треугольника всѣ углы равны 60^0; и если насъ спросятъ о формально-логическомъ основаніи вывода, то мы можемъ сослаться на приведенный принципъ силлогизма — одинъ изъ основныхъ законовъ символической логики. Дѣлая это, мы конечно *усматриваемъ*, что дѣйствительно имѣемъ случай, подходящій подъ указанный принципъ, и что, слѣдовательно, его примѣненіе здѣсь вполнѣ законно. Можно ли обосновать подобное непосредственное усмотрѣніе формально-логическимъ путемъ, путемъ „рефлектирующаго мышленія?“ Для этого несомнѣнно понадобился бы особый принципъ, который позволялъ бы примѣнять общій законъ къ конкретному случаю; однако, сейчасъ же возникъ бы вопросъ о правильности примѣненія этого вспомогательнаго предложенія при данныхъ, вполнѣ опредѣленныхъ условіяхъ, для чего понадобился бы

---

[1]) Энцикл. словарь Брокгауза и Ефрона, т. 25, стр. 278.

[2]) Russell „The Principles of mathematics“, p. 41.

особый принципъ 2-го порядка, и т. д. до безконечности. Такимъ образомъ, для перехода отъ общаго закона формальной логики къ любому случаю его приложенія необходимъ призывъ къ интуиціи, которая одна только можетъ разрубить здѣсь гордіевъ узелъ безконечнаго регресса. Разъ это такъ,— а мы не видимъ, что можно было бы противопоставить изложенному разсужденію, — то въ основѣ всякаго акта мысли лежитъ извѣстная интуиція. Однако, именно въ виду своей первичности, своего первостепеннаго значенія для всего человѣческаго мышленія, упомянутый особый видъ интуитивнаго познанія выходитъ далеко за предѣлы вопросовъ, связанныхъ съ обоснованіемъ геометріи, и мы можемъ его съ спокойнымъ сердцемъ предоставить философамъ.

Точно также мы оставимъ въ сторонѣ и другой видъ интуиціи, съ которымъ мы сталкиваемся на каждомъ шагу во всѣхъ областяхъ человѣческаго знанія, въ томъ числѣ и въ нашей наукѣ; однако основанія для этого будутъ какъ разъ противоположными. Мы имѣемъ въ виду такъ называемое „интуитивное“ мышленіе, которое логики противополагаютъ „дискурсивному“ [1]). Послѣднее характеризуется тѣмъ, что мы дѣйствительно переживаемъ всѣ умозаключенія, обосновывающія выводъ, и открыто высказываемъ всѣ ихъ посылки; это—провѣрочное мышленіе, весьма пригодное для убѣжденія другихъ въ справедливости нашихъ положеній. Интуитивное же мышленіе отличается сокращеннымъ характеромъ, выражающимся въ пропускѣ цѣлаго ряда посылокъ и умозаключеній; при такого рода мышленіи весьма часто необходимость окончательнаго вывода лишь чувствуется, а не представляется вполнѣ обоснованной; это—прежде всего догадочное мышленіе, обычный путь всякаго открытія. Но, какъ извѣстно, открытія—дѣло индивидуальнаго таланта, и современные авторы отказались отъ мысли Раймунда Луллія создать логику открытій; такъ что эту сторону дѣла мы оставляемъ совершенно въ сторонѣ. Тогда интуитивное мышленіе теряетъ всякое принципіальное значеніе: оно есть лишь предварительное изложеніе вопроса, которое, рано или поздно, придется

[1]) Введенскій, „Логика, какъ часть теоріи познанія“ 1912; стр. 499—504.

сдѣлать безукоризненнымъ при помощи мышленія дискурсивнаго (или ограничиться соображеніемъ, что всякій въ случаѣ надобности сумѣетъ сдѣлать это самъ); однако не нужно избѣгать, во что бы то ни стало, интуитивнаго мышленія: послѣднее требуется простымъ уваженіемъ ко времени читателя.

Итакъ, мы удаляемъ изъ области своего изслѣдованія два только что указанныхъ вида интуиціи; намъ придется имѣть съ ней дѣло лишь постольку, поскольку она является особымъ источникомъ геометрическихъ истинъ. Отрицать существованіе такого пользованія интуиціей нельзя: когда Евклидъ при доказательствѣ 1-го предложенія „Началъ“ (о возможности построить равносторонній треугольникъ на данномъ основаніи) допускаетъ существованіе общей точки у двухъ круговъ, изъ коихъ каждый проходитъ черезъ центръ другого, то онъ дѣлаетъ здѣсь призывъ къ интуиціи. Въ самомъ дѣлѣ, разъ мы имѣемъ дѣло съ *первой* теоремой, то вопросъ о томъ, вытекаетъ ли что-либо логически изъ сдѣланныхъ допущеній, или нѣтъ, — значительно упрощается; вѣдь въ этотъ моментъ у насъ нѣтъ другихъ основаній, кромѣ самихъ аксіомъ; что же касается до указаннаго заключенія Евклида, то оно, очевидно, не вытекаетъ непосредственно изъ предпосылокъ его системы. Слѣдовательно, здѣсь Евклидъ, вообще весьма тонкій логикъ, основывался на какомъ-то источникѣ геометрическаго знанія, отличномъ отъ дедукціи изъ аксіомъ; такимъ источникомъ и послужила ему интуиція пространства. Замѣтимъ, что самый чертежъ играетъ при подобныхъ заключеніяхъ второстепенную роль; вполнѣ достаточно представить себѣ мысленно два помянутыхъ круга, чтобы согласиться съ правильностью утвержденія Евклида; притомъ вполнѣ очевидно, что оно не зависитъ ни отъ величины общаго радіуса, ни отъ особаго положенія нашихъ круговъ въ пространствѣ; словомъ, оно не сводится къ эмпирическому воспріятію конкретной фигуры. Точно также при доказательствѣ 4-го предложенія Евклидъ пользуется принципомъ наложенія, т.-е. при помощи интуиціи заключаетъ о возможности и основныхъ свойствахъ движенія, о чемъ ни слова не было сказано ни въ аксіомахъ, ни въ постулатахъ.

Безчисленное множество такихъ неизбѣжныхъ повидимому призывовъ къ пространственной интуиціи можно найти во всѣхъ трактатахъ по геометріи, за исключеніемъ лишь нѣсколькихъ, принадлежащихъ самому послѣднему времени.

Предыдущія разсужденія приводятъ насъ къ слѣдующему опредѣленію интуиціи, поскольку дѣло идетъ о геометріи: *интуиція есть непосредственное усмотрѣніе въ качествѣ истинныхъ такихъ свойствъ геометрическихъ образовъ, которыя при данныхъ условіяхъ нельзя обосновать инымъ путемъ.*

Несомнѣнно, что иногда прибѣгаютъ къ интуиціи и для полученія утвержденій, которыя можно оправдать инымъ путемъ; но такой призывъ къ интуиціи не имѣетъ принципіальнаго характера, почему мы и исключили его изъ приведеннаго опредѣленія.

Интуиція, такимъ образомъ, является особымъ источникомъ знанія—хотя бы только геометрическаго—и въ качествѣ такового подлежитъ критическому изслѣдованію; философія—точнѣе гносеологія—должна отвѣтить намъ на вопросъ о достовѣрности и границахъ примѣненія этой познавательной способности. Изложенное заставляетъ насъ посмотрѣть, каковы были воззрѣнія философовъ на интуицію вообще и на роль ея въ геометріи въ частности. Не имѣя въ виду дать исчерпывающаго рѣшенія вопроса, мы не будемъ углубляться въ тьму временъ, а начнемъ съ двухъ великихъ антагонистовъ, вліяніе которыхъ мы непрестанно испытываемъ,—съ Лейбница и Канта.

2. Воззрѣнія того или другого философа на интуицію и ея роль въ геометріи тѣсно связаны съ его ученіемъ о пространствѣ вообще; едва ли можно браться за рѣшеніе перваго вопроса, не покончивъ со вторымъ.

Во времена Лейбница имѣлась вполнѣ опредѣленная теорія пространства; его великій соперникъ по открытію анализа безконечно малыхъ—Ньютонъ—создалъ начала механики и положилъ ее въ основу всего современнаго естествознанія; конечно, эти воззрѣнія пользовались полнымъ признаніемъ со стороны натуралистовъ. По Ньютону пространство есть нѣчто безусловно реальное, не только не завися-

щее отъ какихъ-либо другихъ субстанцій, но само обусловливающее ихъ бытіе: „абсолютное пространство по своей природѣ и безъ отношенія къ какому-нибудь внѣшнему предмету остается всегда равнымъ самому себѣ и неподвижнымъ“. Утвержденіе, что пространство есть субстанція, т.-е. истинно сущее, стояло въ полномъ противорѣчіи съ основными положеніями философіи Лейбница [1]).

Міръ, по его ученію, лишь представляется протяженнымъ и матеріальнымъ; но истинное бытіе принадлежитъ только субстанціямъ непротяженнымъ и нематеріальнымъ; эти „монады“ суть изолированные очаги духовной, преимущественно мыслительной дѣятельности. Наша душа, которая также принадлежитъ къ числу монадъ, въ силу своей ограниченности, имѣетъ лишь несовершенныя представленія о другихъ монадахъ и ихъ соотношеніяхъ; на ряду съ ясными представленіями въ ней существуютъ и смутныя; послѣднимъ обстоятельствомъ и объясняется то, что міръ является намъ протяженнымъ. Такимъ образомъ, пространство не есть субстанція, а лишь явленіе, порождаемое смутностью нашихъ представленій; оно есть не что иное, какъ „смутное представленіе порядка или способа сосуществованія монадъ“.

Трудно ожидать, чтобы авторъ такого воззрѣнія на пространство видѣлъ въ интуиціи могучій источникъ геометрическаго знанія; истину скорѣе надо искать въ совершенной сторонѣ монады-души, т.-е. въ области ясныхъ представленій. Дѣйствительно, теорія познанія Лейбница различаетъ истины двухъ родовъ: 1) истины вѣчныя, необходимыя или истины разума и 2) истины случайныя или истины фактовъ. Поскольку дѣло идетъ о математикѣ, намъ важны лишь истины 1-го рода; выражаясь языкомъ Канта, онѣ суть сужденія аналитическія: понятіе предиката входитъ, въ ка-

---

[1]) Въ дальнѣйшемъ я основываюсь на упомянутыхъ уже лекціяхъ проф. Введенскаго и въ особенности на сочиненіи L. Couturat „La logique de Leibniz (d'après des documents inédits)“, Paris, 1901.

Наибольшій интересъ для нашей темы представляетъ глава IX: „Le calcul géométrique“.

Философіи Лейбница посвящена также особая работа Russell'я. „The philosophy of Leibniz“, Cambridge, 1900.

чествѣ составной части, въ понятіе субъекта; и для установленія истины разума достаточно лишь проанализировать понятіе подлежащаго; доказательство здѣсь единственно основывается на законѣ противорѣчія или тожества. Лейбницу рисуется идеалъ общаго метода, благодаря которому окажется возможнымъ систематизировать вѣчныя истины, доказывать ихъ и даже открывать новыя; для этого прежде всего надо разложить всѣ понятія на простѣйшія, подобно тому, какъ въ математикѣ составныя числа разлагаются на произведенія простыхъ множителей; число основныхъ понятій не можетъ быть велико, и, обозначивъ каждое изъ нихъ особымъ символомъ, мы получимъ „алфавитъ человѣческихъ мыслей“; всевозможныя комбинаціи простыхъ понятій дадутъ намъ совокупность сложныхъ, и хотя число первыхъ невелико, однако, какъ показываютъ формулы *комбинаторики*, число ихъ комбинацій можетъ быть почти неисчерпаемымъ; отсюда комбинаторика является весьма существенной частью наукословія Лейбница, и онъ неоднократно возвращается къ работамъ „De Arte combinatoria“. Впрочемъ, для созданія упомянутаго общаго метода одного алфавита мыслей еще не достаточно; необходимо также ввести особые символы для основныхъ соотношеній между понятіями и установить правила употребленія и комбинаціи этихъ символовъ; все это, вмѣстѣ взятое, составитъ особую логическую алгебру, которая будетъ выражать извѣстными формулами комбинаціи понятій и соотношенія между ними и процессъ мышленія сведетъ къ особому роду механическаго счисленія. Лейбницъ не разъ возвращался къ осуществленію этихъ идей; на примѣрѣ своего дифференціальнаго исчисленія онъ зналъ, какъ много значитъ для науки удачная символика. Намѣченное выше логическое счисленіе онъ называлъ *всеобщей характеристикой*; мы узнаемъ въ ней черты современной символической логики. Построенный такимъ образомъ новый органонъ знанія поведетъ къ перечисленію всѣхъ истинъ разума; единственной основой для ихъ доказательства, кромѣ закона противорѣчія, будутъ опредѣленія: „est enim Demonstratio nil nisi catena definitionum“; даже аксіомы любой науки, которыя Лейбницъ охотно допускаетъ изъ ме-

тодологическихъ соображеній, могутъ быть въ концѣ концовъ доказаны: вспомнимъ основное положеніе, по которому всѣ вѣчныя истины должны быть сужденіями аналитическими.

Все сказанное въ частности относится и къ математикѣ: послѣднее основаніе математическихъ истинъ есть законъ противорѣчія; его одного достаточно для обоснованія всей ариѳметики и геометріи. Однако далеко не всѣ математики держались подобныхъ воззрѣній; критикуя „Начала“ Евклида, Лейбницъ замѣчаетъ, что великій геометръ древности, устанавливая свои аксіомы, основывался исключительно на интуиціи. Возьмемъ, напримѣръ, аксіому: двѣ прямыя не могутъ замыкать пространства [1]); по мнѣнію Лейбница, воображеніе, извлеченное изъ чувственнаго опыта [2]), не позволяетъ намъ представить себѣ болѣе одной встрѣчи двухъ прямыхъ; но на этомъ нельзя основывать науки. Подобнаго рода образы суть лишь смутныя представленія, и тотъ, кто не знаетъ о прямой ничего другого, не въ состояніи доказать ни одного относящагося сюда предложенія [3]). Въ геометріи, какъ и вездѣ, надо подняться до ясныхъ представленій, которыя одни только первоначальны, и доказать всѣ внушенныя интуиціей аксіомы, сводя ихъ къ настоящимъ опредѣленіямъ. Съ этой точки зрѣнія, современное ему состояніе геометріи не удовлетворяетъ Лейбница; мы владѣемъ двумя различными методами для построенія нашей науки, которые лежатъ соотвѣтственно въ основѣ т.-наз. аналитической и синтетической геометрій, и ни одинъ изъ нихъ не свободенъ отъ существенныхъ недостатковъ Что касается первой, то Лейбницъ глубоко убѣжденъ въ несовершенствѣ алгебры, какъ орудія геометрическаго изслѣдованія; алгебра есть лишь отрасль всеобщей характеристики, имѣющая дѣло съ величинами и числами, и въ этой области она владѣетъ положеніемъ; но

---

1) Въ настоящее время это предложеніе не относятъ къ числу подлинныхъ евклидовыхъ аксіомъ.

2) L'imagination, prise de l'expérience des sens.....

3) Надо сознаться, что примѣръ выбранъ Лейбницемъ не особенно удачно, такъ какъ уже Проклъ старался доказать разсматриваемую аксіому, основываясь на томъ, что двѣ точки опредѣляютъ *одну* прямую.

въ геометріи—здѣсь Лейбницъ высказываетъ одно изъ своихъ великихъ предвидѣній, осуществленныхъ XIX-мъ вѣкомъ—мы изучаемъ не столько величины, сколько положеніе (situs); вопросы же положенія переводятся на языкъ величинъ лишь насильственнымъ и неестественнымъ образомъ: чтобы опредѣлить *одну* точку, аналитическая геометрія нуждается въ *трехъ* величинахъ; опредѣленіе геометрическихъ мѣстъ съ помощью уравненій имѣетъ искусственный характеръ, такъ какъ существенно связано съ выбранной системой координатъ, и влечетъ за собой то обстоятельство, что одну и ту же линію можно задать безчисленнымъ множествомъ различныхъ способовъ. Все это происходитъ отъ того, что здѣсь мы опредѣляемъ фигуры, основываясь на ихъ отношеніяхъ къ постороннимъ образамъ (координатной системѣ), тогда какъ для опредѣленія всякаго объекта достаточно принимать во вниманіе лишь его внутреннія свойства. Наконецъ, аналитическая геометрія основывается на синтетической въ началѣ своихъ изслѣдованій и, такимъ образомъ, не доводитъ до конца анализа геометрическихъ понятій. Не лучше обстоитъ дѣло и съ геометріей синтетической; ея опредѣленія или описанія въ-силу своей интуитивности расплывчаты; ея разсужденія, основанныя на интуиціи, далеко не строги. Лучшимъ доказательствомъ, что и она не обладаетъ совершеннымъ методомъ, служитъ пользованіе по существу чуждымъ ей понятіемъ величины; здѣсь она какъ-бы вторгается въ область геометріи аналитической, при чемъ однако не можетъ сравняться съ нею; въ самомъ дѣлѣ, въ ея построеніяхъ отводится видное мѣсто воображенію, которое не можетъ считаться общимъ и надежнымъ методомъ; тогда какъ анализъ, при всей его искусственности въ приложеніяхъ къ геометріи, идетъ опредѣленнымъ путемъ и представляетъ собою „нить Аріадны, позволяющую ориентироваться въ лабиринтѣ интуиціи“. Изложенное побуждаетъ Лейбница создать для геометріи особый методъ, соединяющій преимущества обоихъ уже извѣстныхъ безъ ихъ недостатковъ.

Къ сущности его можно подойти, разсматривая, что собственно лежитъ въ основѣ обычныхъ интуитивныхъ до-

казательствъ и приводитъ насъ къ истинѣ, несмотря на недостатки метода. Легко видѣть, что снабжая доказательства чертежами и, повидимому, основывая на нихъ свои разсужденія, мы въ сущности имѣемъ въ виду не эти грубыя и несовершенныя изображенія, а ихъ идеальные прообразы; но въ чемъ же заключается абсолютная точность послѣднихъ, какъ не въ отвлеченныхъ соотношеніяхъ, которыя геометръ открываетъ въ нихъ или даже въ нихъ вкладываетъ посредствомъ опредѣленій? На этомъ-то основаніи и можно построить истинный методъ, которымъ, по мнѣнію Лейбница, владѣли отчасти древніе геометры, умѣвшіе обходиться безъ помощи алгебры. Прежде всего необходимо довести до конца анализъ нашей науки и найти ея простѣйшія понятія и первоначальныя предложенія; послѣ этого надо обозначить особыми знаками основныя понятія и выразить особыми формулами принципы, и мы будемъ имѣть все необходимое, чтобы геометрію цѣликомъ свести къ символическому счисленію.

Такимъ образомъ, интуиція окончательно изгоняется изъ арсенала орудій геометра, и вступаетъ въ свои исключительныя права логика въ ея наиболѣе утонченной, алгебраической формѣ.

Новое геометрическое счисленіе будетъ, подобно алгебрѣ, особою частью всеобщей характеристики, имѣющей цѣлью изслѣдованіе геометрическихъ образовъ, главнымъ образомъ вопросы положенія; оно будетъ истиннымъ Analysis situs [1]). Особенно хорошихъ результатовъ ожидаетъ Лейбницъ отъ своего метода въ примѣненіи къ рѣшенію задачъ: онъ позволитъ избѣжать двоякаго перевода данныхъ геометріи на языкъ алгебры и обратно, какъ это приходится дѣлать въ геометріи аналитической, и избавитъ насъ отъ безконечныхъ и сложныхъ построеній геометріи синтетической, не владѣющей для нихъ къ тому же общимъ пріемомъ. Въ созданіи своего новаго счисленія Лейбницъ не пошелъ дальше различныхъ, не вполнѣ согласованныхъ попытокъ. Его неудачу

---

[1]) Въ настоящее время этотъ терминъ понимается иначе; введенъ опъ снова Риманомъ.

Кутюра объясняетъ тѣмъ, что онъ не выдержалъ имъ же поставленнаго требованія чисто геометрическаго обоснованія и положилъ въ основу идеи разстоянія и конгруенціи, которыя неразрывно связаны съ понятіемъ величины. Мы полагаемъ, что на этихъ идеяхъ, какъ показали современныя изслѣдованія, можно обосновать геометрію; нужно только ввести ихъ надлежащимъ образомъ, именно, какъ первоначальныя понятія, и формулировать всѣ необходимыя свойства въ качествѣ аксіомъ [1]). Другое дѣло, насколько подобный путь возможно согласовать съ ученіемъ Лейбница объ аналитичности всѣхъ истинъ разума и съ требованіемъ доказывать аксіомы при помощи опредѣленій. Рессель объясняетъ крушеніе идеи Лейбница недостатками его логики и вѣрой въ логическую необходимость евклидовой геометріи; обоснованіе послѣдняго утвержденія неизбѣжно должно было повести къ неудачѣ. Намъ кажется, что нельзя также не принять во вниманіе, что поставленная Лейбницемъ задача—возсоздать по единому методу *все* человѣческое знаніе, съ его элементовъ до вершинъ—превышала силы даже такого генія первой величины, какимъ былъ творецъ анализа безконечно малыхъ; ему пришлось одновременно создавать и методъ и самую науку: геометріи положенія, напр., въ его время еще не существовало. Во всякомъ случаѣ послѣдующее развитіе математики оправдало его завѣтныя мечты: Штаудтъ создалъ въ своей „Geometrie der Lage“ анализъ положенія, независимый ни отъ числа, ни отъ фигуръ; а Грассманъ и Пеано положили начало символическому счисленію въ геометріи.

Мы упомянули только что одну особенность гносеологіи Лейбница, которая могла затруднить ему путь къ построенію идеальной геометріи; это—убѣжденіе въ томъ, что всякое утвержденіе математики, какъ и другихъ раціональныхъ наукъ, есть сужденіе аналитическое; отсюда возникло стремленіе всѣ истины разума свести къ опредѣленіямъ и предложеніямъ тождественнымъ: „patet denique omnes veritates resolvi in definitiones, propositiones identicas et experimenta“.

---

[1]) См., напр., Russell „The Principles of Mathematics“, p. 410.

При оцѣнкѣ этого взгляда имѣетъ, конечно, значеніе, какъ авторъ понимаетъ опредѣленія. Лейбницъ не придерживался схоластическаго правила опредѣлять per genus et differentiam [1]), но имѣя въ виду близкіе ему методы математики, онъ требовалъ отъ опредѣленія, чтобы оно прежде всего обнаруживало возможность опредѣляемаго объекта, а лучшій способъ для этого—указать самое его построеніе: „Hinc utile est habere definitiones involventes rei generationem“. Опредѣленіе перестаетъ быть чѣмъ-то совершенно произвольнымъ; и Кутюра считаетъ возможнымъ правило Лейбница изложить въ такой „математической“ формулировкѣ: „опредѣленіе должно обладать условіями, необходимыми и достаточными для того, чтобы, основываясь на немъ, можно было доказать всѣ свойства опредѣляемаго объекта“. Такимъ образомъ, опредѣленія уже теряютъ характеръ простого наложенія имени и являются результатомъ синтезирующей дѣятельности нашего ума, что̀ представляетъ уже существенную поправку къ ученію о вѣчныхъ истинахъ и можетъ послужить отправнымъ пунктомъ для критики знаменитаго дѣленія сужденій на аналитическія и синтетическія.

Если бы Лейбницъ вывелъ всѣ слѣдствія изъ своего ученія объ опредѣленіяхъ, то онъ подошелъ бы весьма близко къ современному воззрѣнію на аксіомы и уничтожилъ бы тѣ подводныя скалы, о которыя неизбѣжно должны были разбиться его попытки созданія идеальной геометріи.

Лейбницъ, въ послѣдній разъ въ исторіи философіи, воплощаетъ въ себѣ великаго математика вмѣстѣ съ великимъ философомъ; въ болѣе отдаленныя эпохи, въ силу большей доступности всеобъемлющаго знанія, подобныя соединенія были чаще и знаменовались всегда могучимъ толчкомъ къ дальнѣйшему прогрессу, который испытывали обѣ дисциплины; достаточно назвать имена Ѳалеса, Пиѳагора, Платона, Декарта. Быстрое развитіе отдѣльныхъ наукъ въ новѣйшее время все болѣе и болѣе устраняетъ возможность энциклопедическаго знанія; и философы, дѣлавшіе прежде математику исходной точкой своихъ построеній, принуждены

[1]) Couturat, l. c., p. 188—195.

теперь или довольствоваться элементами, далеко отстоящими отъ современной научной работы, или черпать свои свѣдѣнія изъ вторыхъ рукъ. Между тѣмъ теперь, какъ никогда прежде, математика должна интересовать философа: критическая работа второй половины XIX-го вѣка заставила подвести новый фундаментъ подъ анализъ безконечно малыхъ и геометрію; создались новыя принципіально важныя отрасли нашей науки, какъ-то: геометрія положенія, неевклидова геометрія, теорія совокупностей (Mengenlehre), теорія группъ. Человѣкъ со всеобъемлющимъ геніемъ Лейбница, творчески владѣющій методами философіи и математики, на долгіе годы зажегъ бы маякъ для будущихъ изслѣдователей и началъ бы новую главу въ исторіи философіи.

3. Въ противоположность Лейбницу, Кантъ считаетъ синтетическими всѣ сужденія, дѣйствительно расширяющія наше знаніе; въ подобныхъ сужденіяхъ связи сказуемаго съ подлежащимъ нельзя установить путемъ одного только анализа понятій, какъ это имѣетъ мѣсто для сужденій аналитическихъ. Таковы предложенія математики, таковы принципы естествознанія; слѣдовательно, для установленія ихъ истинности надо выйти за предѣлы понятій субъекта и предиката и въ чемъ-то третьемъ искать основанія для ихъ соединенія. Этимъ третьимъ не можетъ быть опытъ, такъ какъ указанныя сужденія обладаютъ всеобщимъ и необходимымъ характеромъ; точно также и обычные научные методы здѣсь безсильны, ибо дѣло идетъ о предпосылкахъ всякаго знанія. Отсюда возникаетъ основная задача гносеологіи Канта, и въ ея простомъ и геніальномъ рѣшеніи заключается его непреходящее значеніе. Философія кенигсбергскаго мыслителя достаточно извѣстна среди широкихъ круговъ общества; не ставя себѣ непосильной задачи изложить ее въ нѣсколькихъ строкахъ, мы напомнимъ лишь ея общія основанія [1]). Поставленная выше гносеологическая проблема получаетъ рѣшеніе въ такъ-наз. коперниковской точкѣ зрѣнія: нашъ разсудокъ самъ предписываетъ законы природѣ. Дѣло въ томъ, что человѣческому сознанію присущи нѣкоторыя неиз-

[1]) Я и здѣсь основываюсь на лекціяхъ проф. Введенскаго.

бѣжныя формы, безъ подчиненія которымъ ничто не можетъ быть сознано или воспринято нами; подводя всѣ наши представленія (а по мнѣнію Канта мы имѣемъ дѣло исключительно съ представленіями) подъ указанныя формы, мы неизбѣжно вкладываемъ въ нихъ извѣстный синтезъ; остается только выразить его въ цѣломъ рядѣ сужденій, и мы получимъ принципы всякаго знанія. Человѣческую познавательную способность Кантъ дѣлитъ на двѣ разнородныхъ части: чувственность [1]) и разсудокъ. Формами первой являются пространство и время; сами онѣ суть интуиціи, т.-е. строго единичныя представленія [2]), а не понятія. Воспріятія нашего внѣшняго чувства необходимымъ образомъ укладываются въ форму пространства, т -е. являются намъ пространственными. Представленіе пространства не есть отвлеченіе отъ данныхъ опыта; наоборотъ, оно ему логически предшествуетъ и обусловливаетъ его. Словомъ, пространство есть неизбѣжная форма внѣшняго чувства; а время—внутренняго, но черезъ его посредство и внѣшняго. Что касается разсудка, то здѣсь имѣется рядъ основныхъ понятій—категорій,—подъ которыя необходимо подводится все, что является намъ въ качествѣ представленія; благодаря этому, представленія объективируются, т.-е., постигаются, какъ предметы, находящіеся внѣ насъ и намъ противостоящіе. Синтезъ, заключающійся въ понятіяхъ разсудка, даетъ содержаніе принципамъ естествознанія; такъ напр., съ категоріей причины и дѣйствія связанъ законъ, гласящій, что всякое явленіе имѣетъ причину. Что же касается математики, то она основана на формахъ чувственности—интуиціяхъ пространства и времени; разъ пространство есть неизбѣжная форма внѣшняго чувства, то все, что мы устанавливаемъ, разсматривая интуицію пространства, неизбѣжно осуществляется въ области представленій; т.-е. геометрія получаетъ безусловное значеніе для всякаго возможнаго опыта. Аксіомы геометріи суть не что иное, какъ сужденія, выражающія основныя свойства интуиціи пространства; на вопросахъ, каковы именно эти аксіомы въ систе-

---

[1]) или чувствительность (Sinnlichkeit).

[2]) См. начало § 1.

матическомъ перечнѣ, почему именно мы основываемся на тѣхъ, а не на другихъ аксіомахъ о прямой, о параллельныхъ и т. д.,—Кантъ не считаетъ нужнымъ останавливаться; для него является непререкаемымъ, самоочевиднымъ фактомъ, что геометрія Евклида и есть геометрія пространства, неизбѣжной формы нашей чувственности. Какъ отвлеченную логическую возможность онъ пророчески допускалъ и другія геометрическія системы: возможны „многоразличные виды пространства“, и „наука о нихъ была бы несомнѣнно высшей геометріей, какая можетъ быть доступна конечному уму“ [1]); но для Канта несомнѣнно, что истинное пространство, пространство повседневнаго опыта есть то самое, свойства котораго изучены въ „Началахъ“ Евклида. Не надо только думать—а трансцендентальная эстетика можетъ навести на эту мысль,—что геометрія отдана исключительно во власть чувственности, и разсудку разъ навсегда запрещено вмѣшиваться въ ея компетенцію; въ трансцендентальной логикѣ Кантъ указываетъ, что это подчеркиваніе роли чувственности сдѣлано лишь изъ методологическихъ соображеній; а въ концѣ концовъ и „чувственность опредѣляется разсудкомъ“; синтетическое единство многообразія ея наглядныхъ представленій создается „сообразно категоріямъ“ [2]). Это замѣчаніе важно для насъ съ точки зрѣнія вопроса о методѣ геометріи.

Прежде всего необходимо рѣшить, исчерпывается ли роль интуиціи пространства лишь установленіемъ аксіомъ, а дальше уже вступаетъ въ свои права формальная логика, т.-е. разсудокъ, или геометрическое мышленіе всегда и вездѣ неразрывно связано съ интуиціей. Въ своихъ изслѣдованіяхъ Кантъ весьма часто ссылается на геометрію и ея методъ; а потому въ нашемъ распоряженіи имѣется не мало строкъ, посвященныхъ интересующему насъ вопросу [3]). Довольно

---

[1]) Куно Фишеръ „Иммануилъ Кантъ и его ученіе“; часть I, стр. 154.

[2]) «Критика чистаго разума» пер. Лосскаго, стр. 111—112; см. также стр. 128. Во всемъ дальнѣйшемъ мы будемъ пользоваться этимъ переводомъ; обращаемъ вниманіе читателей на то, что терминъ Anschauung Н. О Лосскій переводитъ словами «наглядное представленіе».

[3]) Мы укажемъ главнѣйшія, ограничиваясь сочиненіями критическаго періода: «О формѣ и началахъ міра чувственнаго и умопостигаемаго», пер.

обыченъ взглядъ, сложившійся не безъ вліянія Шопенгауэра, согласно которому всякое геометрическое изслѣдованіе по Канту существеннымъ образомъ связано съ пространственной интуиціей; будучи поставлены въ необходимость оправданія *синтетическихъ* сужденій, мы ничего не можемъ достигнуть средствами формальной логики; а потому опору для синтеза мы должны искать въ тѣхъ конкретныхъ представленіяхъ, въ тѣхъ „интуиціяхъ“, которыя подходятъ подъ геометрическія понятія; такъ что пользованіе пространственной интуиціей, даже фактически вычерчиваемыми фигурами, есть существенный, неотъемлемый методъ геометріи. Нельзя отрицать, что сторонники изложеннаго мнѣнія могутъ привести подлинныя цитаты въ свое оправданіе; но если мы сопоставимъ всѣ указанныя въ подстрочномъ примѣчаніи мѣста, то и при отсутствіи у Канта полной опредѣленности въ рѣшеніи вопроса придемъ къ нѣсколько инымъ выводамъ. Прежде всего слѣдующія строки подкрѣпляютъ обычное сужденіе о методѣ геометріи по Канту: въ его диссертаціи („О формѣ и т. д.“, стр. 20—21) о геометрическихъ теоремахъ и задачахъ читаемъ: онѣ „не выводятся изъ какого-либо общаго понятія пространства, но *различаются* [1]) въ немъ конкретно“; и далѣе: „геометрія доказываетъ свои общія положенія, не мысля объектъ въ формѣ общаго понятія, какъ это дѣлается въ наукахъ раціональныхъ, а представляя его воочію посредствомъ единичной интуиціи, какъ въ эмпирическихъ наукахъ“. Въ „Критикѣ“ (стр. 131) Кантъ говоритъ, что онъ не можетъ представить себѣ никакой линіи, „не проводя ея мысленно, т.-е., не производя послѣдовательно всѣхъ ея частей“, и черезъ нѣсколько строкъ прибавляетъ: „на этомъ послѣдовательномъ синтезѣ продуктивной способности воображенія, создающемъ фигуры, основывается математика протяженности (геометрія) съ ея аксіомами, выражающими условія чувственнаго нагляднаго представленія a priori“... Точно также въ „Пролегоменахъ“ (стр. 39) Кантъ утверждаетъ, что безъ пред-

---

Лосскаго; стр. 20—21. „Пролегомены“ пер Соловьева (Anschauung—воззрѣніе); §§ 7, 12, 13, 38. «Критика чистаго разума», пер. Лосскаго; стр. 11, 44—45, 57, 120, 131—132, 400—410.

[1]) Курсивъ подлинника.

БИБЛІОТЕКА ... КОМ. АКАДЕМІИ.

варительнаго представленія своего понятія въ воззрѣніи „математика не можетъ сдѣлать ни шагу“ [1]). Сильное подтвержденіе своего мнѣнія кенигсбергскій мыслитель усматриваетъ въ такъ называемомъ парадоксѣ симметричныхъ фигуръ. Подробно разсматривается вопросъ въ „Пролегоменахъ“ (стр. 46—48): „Если двѣ вещи во всѣхъ своихъ частяхъ, которыя только могутъ быть узнаны въ каждой отдѣльно (т.-е. во всѣхъ опредѣленіяхъ величины и качества),—если онѣ вполнѣ одинаковы, то вѣдь должно слѣдовать, что во всѣхъ случаяхъ и отношеніяхъ одинъ изъ этихъ предметовъ можетъ быть замѣщенъ другимъ, такъ что обмѣнъ не произведетъ никакого различія. Такъ это и есть относительно плоскихъ фигуръ въ геометріи; но въ различныхъ сферическихъ фигурахъ, несмотря на полное ихъ внутреннее согласованіе, оказывается такое внѣшнее отношеніе, по которому одна фигура никакъ не можетъ быть замѣщена другою; такъ, напримѣръ, два сферическіе треугольника обоихъ полушарій, имѣющіе общимъ основаніемъ извѣстную дугу экватора, могутъ быть вполнѣ равны и сторонами и углами, такъ что если описывать въ отдѣльности и подробно одинъ изъ нихъ, то не найдется ничего такого, чего бы не было также и въ описаніи другого [2]); и между тѣмъ одинъ не можетъ быть поставленъ на мѣсто другого (именно въ противоположномъ полушаріи); и тутъ вѣдь есть какое-то *внутреннее* [3]) различіе обоихъ треугольниковъ, которое не можетъ быть показано разсудкомъ, какъ внутреннее, а открывается только черезъ внѣшнее отношеніе въ пространствѣ“. Далѣе Кантъ ссылается на примѣръ любого предмета и его зеркальнаго изображенія, правой и лѣвой руки, раковинъ улитокъ съ противоположными по направленію извилинами; по его мнѣнію здѣсь „нѣтъ никакихъ внутреннихъ различій, мыслимыхъ для разсудка“, а между тѣмъ указанные объекты нельзя привести

[1]) Сюда же относятся: «Пролегомены», стр. 45; «Критика», стр. 44, 57, 124.

[2]) Въ диссертаціи (стр. 20) по аналогичному поводу сказано: «во всемъ остальномъ, что можетъ быть высказано признаками понятными уму, они могутъ замѣнить другъ друга».

[3]) Курсивъ подлинника.

къ совмѣщенію другъ съ другомъ. Разрѣшеніе парадокса Кантъ видитъ въ томъ, что мы имѣемъ дѣло не съ вещами въ себѣ, а лишь съ явленіями, которыя неизбѣжно укладываются въ форму пространства, подчиненнаго особому закону своего внутренняго опредѣленія; онъ заканчиваетъ выводомъ: „поэтому мы не можемъ объяснить различіе подобныхъ и равныхъ, но не совпадающихъ вещей... никакимъ однимъ понятіемъ; это различіе понятно только черезъ отношеніе къ правой и лѣвой рукѣ, которое дается непосредственнымъ воззрѣніемъ“. Нельзя не признать, что аргументъ отъ симметричныхъ фигуръ является совершенно не выдерживающимъ критики съ точки зрѣнія *современной намъ* геометріи; въ указанныхъ Кантомъ случаяхъ дѣйствительно всѣ *мѣровыя* опредѣленія взятыхъ имъ объектовъ одни и тѣ же; но послѣдніе отличаются *расположеніемъ* своихъ частей; они составлены изъ подобныхъ и равныхъ частей, но не изъ подобно расположенныхъ. Съ развитіемъ геометріи положенія въ XIX-омъ вѣкѣ, идеи порядка все болѣе и болѣе выдвигаются въ математикѣ на первый планъ, такъ что прежнее опредѣленіе ея, какъ ученія о величинахъ, безнадежно устарѣло; этими идеями въ своей наукѣ геометры овладѣваютъ вполнѣ, благодаря такъ называемымъ аксіомамъ расположенія, впервые введеннымъ Пашемъ въ 1882 г. Опредѣленіе различія, которое поразило Канта, начинаетъ проникать даже въ учебники, при чемъ площади и объемы фигуръ симметричныхъ опредѣляются числами различныхъ знаковъ [1]). Не вина, конечно, Канта, что онъ жилъ въ то время, когда геометрія была исключительно геометріей мѣры, и вообще, когда вся чистая математика была далека отъ того логическаго совершенства, которое создано критическимъ направленіемъ второй половины истекшаго столѣтія; Кутюра выразилъ это въ мѣткихъ словахъ, что столѣтняя годовщина смерти Канта совпадаетъ всего лишь съ пятидесятилѣтіемъ чистой математики [2]). Съ точки зрѣнія однихъ только мѣровыхъ опредѣле-

---

[1]) См., напр , Couturat „Les principes des Mathématiques“; p. 292—297. Le paradoxe des objets symétriques.

[2]) Couturat, ib. p. 305.

ній симметричныя фигуры неразличимы, и здѣсь не обойтись безъ призыва къ интуиціи; опередить же современниковъ въ этомъ пунктѣ Кантъ не могъ: онъ не былъ геометромъ, равнымъ Лейбницу.

Несмотря на полную, казалось бы, опредѣленность приведенныхъ свидѣтельствъ въ пользу необходимости интуиціи при геометрическомъ изслѣдованіи, имъ можно противопоставить другія, вносящія весьма существенныя поправки. Можно было бы думать, что разъ дѣло идетъ объ интуиціи, соотвѣтствующей извѣстному геометрическому понятію, то мы имѣемъ передъ собой нѣчто безусловно единичное и вполнѣ опредѣленное; однако не таковъ методъ геометріи, что и признаетъ самъ Кантъ („Критика“, стр. 131—132): „если я говорю, что посредствомъ трехъ линій, изъ которыхъ двѣ, вмѣстѣ взятыя, больше третьей, можно образовать треугольникъ, то здѣсь я имѣю дѣло съ чистою функціею продуктивной способности воображенія, которая можетъ проводить большія или меньшія линіи, а также соединять ихъ подъ всевозможными углами“. Кантъ идетъ дальше и, признавая, что интуиція никогда не можетъ быть адэкватной понятію, высказываетъ слѣдующія утвержденія: „Въ основѣ нашихъ чистыхъ чувственныхъ понятій дѣйствительно лежатъ не образы предметовъ, а схемы [1]). Понятію о треугольникѣ вообще не могъ бы соотвѣтствовать никакой образъ треугольника. Въ самомъ дѣлѣ, образъ всегда ограничивался бы только частью объема этого понятія и никогда не могъ бы достигнуть всей общности понятія, которое должно имѣть значеніе для всѣхъ треугольниковъ, прямоугольныхъ, остроугольныхъ и т. п. Схема треугольника не можетъ существовать нигдѣ, кромѣ какъ въ мышленіи, и обозначаетъ правило синтеза способности воображенія въ отношеніи чистыхъ формъ въ пространствѣ“. Выходъ можетъ быть только въ томъ, что, разсматривая апріорное наглядное представленіе, соотвѣтствующее данному понятію—на языкѣ Канта это называется

[1]) «Критика», стр. 120; немного выше цитируемаго мѣста мы находимъ опредѣленіе «схемы понятія разсудка»: это есть «формальное и чистое условіе чувственности, которымъ понятіе разсудка ограничивается въ своемъ примѣненіи».

конструированнымъ понятіемъ,—мы отвлекаемся отъ многихъ его конкретныхъ опредѣленій и обращаемъ вниманіе только на то, что имѣетъ всеобщее значеніе для всѣхъ возможныхъ наглядныхъ представленій, подходящихъ подъ то же понятіе („Критика“, стр. 400): „Единичная нарисованная фигура имѣетъ эмпирическій характеръ, но служитъ тѣмъ не менѣе для выраженія понятія безъ ущерба для его всеобщности, такъ какъ въ этомъ эмпирическомъ наглядномъ представленіи я всегда имѣю въ виду только актъ построенія понятія, для котораго многія опредѣленія, напр., величины сторонъ и угловъ, совершенно безразличны, и потому я отвлекаюсь отъ этихъ особенностей, не измѣняющихъ понятія треугольника“. На слѣдующей стр. (ib., 401) находится знаменитая параллель между методами философа и математика, взявшихся за разрѣшеніе одного и того же вопроса о суммѣ угловъ треугольника; существеннымъ пріемомъ второго является рядъ извѣстныхъ построеній, которыя въ связи съ ранѣе доказанными предложеніями и приводятъ къ рѣшенію задачи; здѣсь во всякомъ случаѣ помимо конструированія понятія видное мѣсто занимаетъ и чисто логическій элементъ: „такимъ образомъ, путемъ цѣпи умозаключеній, руководясь всегда наглядымъ представленіемъ, онъ (геометръ) приходитъ къ совершенно очевидному и вмѣстѣ съ тѣмъ общему рѣшенію вопроса“. Слово „руководясь“, поставленное послѣ „цѣпи умозаключеній“, отводитъ здѣсь интуиціи уже подчиненную роль. Можно указать мѣста, гдѣ еще рѣшительнѣе отдается предпочтеніе разсудку согласно тому общему положенію, что онъ всегда опредѣляетъ чувственность; такъ въ предисловіи ко 2-му изданію „Критики“ (стр. 11) читаемъ: „Новый свѣтъ открылся тому, кто впервые доказалъ теорему о равнобедренномъ треугольникѣ... Онъ понялъ, что его задача состоитъ не въ изслѣдованіи того, что онъ усматриваетъ въ фигурѣ или въ понятіи ея, какъ бы прочитывая въ ней ея свойства, а въ томъ, чтобы создать фигуру (путемъ конструированія) съ помощью того, что онъ самъ a priori сообразно понятіямъ мысленно вложилъ въ нее и представилъ въ ней; онъ понялъ, что имѣть надежное апріорное знаніе мы можемъ лишь въ томъ случаѣ, если приписываемъ

вещи только то, что необходимо слѣдуетъ изъ вложеннаго въ нее нами самими сообразно нашимъ понятіямъ". Въ „Пролегоменахъ" (стр. 99—101) имѣется прекрасный примѣръ для поясненія сказаннаго; именно, если взять кругъ и исходить изъ его основного свойства равенства радіусовъ, то нетрудно доказать извѣстную теорему о равенствѣ прямоугольниковъ, построенныхъ на отрѣзкахъ двухъ пересѣкающихся хордъ; если же этотъ кругъ разсматривать, какъ одно изъ коническихъ сѣченій, стоящее подъ общими условіями ихъ построенія, то мы получимъ вышеупомянутую теорему въ иной, болѣе общей формулировкѣ [1]). Итакъ, дѣло не въ фигурѣ, а въ томъ законѣ, который вкладываетъ разсудокъ, конструируя ее сообразно своимъ понятіямъ: „то, что опредѣляетъ пространство фигурами круга, конуса и шара,—есть разсудокъ, насколько онъ содержитъ основанія для единства ихъ построенія". Любопытно сопоставить съ этими выписками изъ Канта слова одного изъ выдающихся математиковъ нашего времени; Клейнъ, отмѣчая огромное эвристическое значеніе интуиціи, прибавляетъ: „но настоящее доказательство мы получаемъ лишь тогда, когда нарисованныя фигуры замѣняемъ другими, законосообразно построенными на основаніи аксіомъ, и на этихъ послѣднихъ продѣлываемъ въ деталяхъ общій ходъ нашей мысли" [2]).

Мы извиняемся передъ читателями за длинный рядъ цитатъ. Но въ вопросѣ о томъ, какъ Канту рисовался методъ геометріи, нѣтъ мелочей. Мы приведемъ еще одну и послѣднюю выписку изъ его трудовъ, чтобы уяснить его воззрѣнія

---

[1]) Кантъ выражаетъ это послѣднее предложеніе нѣсколько неясно. «всѣ хорды, пересѣкающіяся въ этихъ сѣченіяхъ—эллипсисѣ, параболѣ, гиперболѣ,—пересѣкаются такъ, что прямоугольники изъ ихъ частей хотя и не равны, но всегда находятся въ равныхъ отношеніяхъ между собою». Правильно будетъ: «прямоугольники, построенные на отрѣзкахъ двухъ пересѣкающихся хордъ, относятся другъ къ другу, какъ квадраты діаметровъ, параллельныхъ этимъ хордамъ». (См. Salmon «Traité de Géométrie analytique à deux dimensions», p 250—251)

[2]) F. Klein „Nicht—Euklidische Geometrie"; I, p. 360.

Слѣдуетъ отмѣтить, что по своимъ воззрѣніямъ на природу геометрическаго мышленія Клейнъ стоитъ къ Канту ближе подавляющаго большинства современныхъ математиковъ.

на сущность математическихъ опредѣленій; послѣдняя проблема постоянно раздѣляетъ на различные лагери не только философовъ, но и математиковъ. Въ „Критикѣ“ (стр. 407—408) читаемъ: „философскія опредѣленія осуществляются только въ формѣ экспозиціи [1]) данныхъ понятій, а математическія опредѣленія въ формѣ конструированія первоначально созданныхъ понятій; первыя осуществляются лишь аналитически путемъ разложенія (полнота котораго не обладаетъ аподиктическою достовѣрностью), а вторыя синтетически; слѣдовательно, математическія опредѣленія *создаютъ* самое понятіе, а философскія опредѣленія только *объясняютъ* [2]) его“. Въ силу этого „математическія опредѣленія никогда не могутъ быть ошибочными“; а самое большее могутъ имѣть лишь недостатки въ своей формѣ.

Въ ученіи Канта о математическихъ опредѣленіяхъ мы встрѣчаемъ поразительное совпаденіе съ мыслями Лейбница (см. выше); и если два столь великихъ и столь различно направленныхъ ума приходятъ въ данномъ вопросѣ къ тожественнымъ выводамъ, то это можно объяснить только существомъ дѣла: дѣйствительно математика опредѣляетъ свои объекты не per genus et differentiam, какъ требуетъ традиціонная логика, а per generationem, какъ это всегда были склонны утверждать многіе адепты нашей науки.

Въ предшествующемъ мы старались выяснить взглядъ Канта на методъ геометріи и пришли къ выводу, что, при отсутствіи полной опредѣленности въ его утвержденіяхъ, воззрѣнія кенигсбергскаго мыслителя не стоятъ въ безнадежномъ противорѣчіи съ мнѣніями современныхъ математиковъ. Тѣмъ не менѣе весьма часто высказывается положеніе, что новѣйшія теоріи математики и въ особенности новыя отрасли геометріи опровергли сущность ученій Канта о пространствѣ и его познаваніи Входить въ подробный разборъ подобныхъ утвержденій здѣсь мы не можемъ: если и были разсмотрѣны съ нѣкоторою подробностью взгляды Канта, то другая сто-

---

[1]) Нѣсколько выше выясняется, что экспозиція есть такое опредѣленіе, относительно полноты котораго позволительно сомнѣваться.

[2]) Курсивъ подлинника.

рона—воззрѣнія современной математики—была затронута лишь мимоходомъ; поэтому мы ограничимся нѣсколькими замѣчаніями. Въ первую голову для опроверженія трансцендентальнаго идеализма Канта ссылаются на построеніе неевклидовыхъ системъ. Мы уже имѣли случай въ другомъ мѣстѣ [1]) разобрать эти аргументы; по нашему мнѣнію, послѣдніе совершенно ошибочны: геометрія Лобачевскаго не опровергаетъ ученія Канта о пространствѣ [2]), какъ объ апріорной формѣ внѣшняго чувства; она ставитъ лишь вопросы, которые дѣйствительно не были затронуты творцемъ критической философіи, такъ какъ онъ вѣрилъ въ единую истинность евклидовой геометріи, въ ея неизбѣжность для объясненія внѣшняго міра. Дѣло въ томъ, что всѣ свойства нашей пространственной интуиціи, которыя мы констатируемъ при ея разсмотрѣніи, необходимо осуществляются въ опытѣ; но каковы эти свойства, какъ отличить здѣсь истину отъ заблужденія,—Кантъ не изслѣдуетъ въ силу того исключительнаго положенія, которое имѣла для него евклидова геометрія. Для насъ же эти вопросы не рѣшаются такъ просто; мы знаемъ, что въ основу изслѣдованія природы можно положить и иныя системы. Въ дальнѣйшія подробности мы здѣсь входить не можемъ. Многимъ соотечественникамъ, какъ намъ кажется, просто психологически невозможно представить себѣ несовмѣстимость ученій Канта и Лобачевскаго; знакомству русскаго общества съ именемъ великаго казанскаго геометра много способствовали лекціи кантіанца проф. А. И. Введенскаго; и въ нихъ, вѣроятно, не одинъ слушатель нашелъ побужденіе къ одновременному изученію пангеометріи и критической философіи.

Несравненно болѣе основательны утвержденія, что воззрѣнія Канта на методъ математики опровергнуты той переработкой его и тѣмъ развитіемъ, которыя были слѣдствіемъ критическаго отношенія къ основамъ нашей науки, наполь-

---

[1]) Вопросы Философіи и Психологіи, кн. 80: „Ученіе Канта о пространствѣ и пангеометрія Лобачевскаго“.

[2]) См. приведенную выше цитату изъ Канта о возможности различныхъ геометрій; впрочемъ она принадлежитъ до-критическому періоду.

нившаго работы конца XIX-го вѣка [1]). Нужно однако замѣтить, что обычно взгляды Канта понимаются въ томъ неправильномъ освѣщеніи, которое придалъ имъ своимъ авторитетомъ Шопенгауэръ; объ этомъ мы уже говорили и скажемъ еще нѣсколько ниже. За вычетомъ подобныхъ недоразумѣній, все-таки Кантъ стоитъ несравненно дальше Лейбница отъ того пониманія метода геометріи, которое въ настоящее время является общепринятымъ среди математиковъ. Какъ мы уже отмѣтили по поводу парадокса симметричныхъ фигуръ, это объясняется уровнемъ математическихъ знаній въ его время, и особенно тѣмъ, что въ концѣ XVIII-го вѣка сами математики, при всѣхъ своихъ великихъ открытіяхъ, имѣли довольно смутныя представленія о сущности методовъ ихъ науки и были совершенно чужды требованіямъ современной строгости. Лейбницъ, превышавшій головою не только философовъ, но и математиковъ, имѣлъ геніальныя провидѣнія, которыя оцѣнило вполнѣ лишь послѣднее время; это не было удѣломъ Канта. Разборъ намѣченнаго вопроса отвелъ бы насъ слишкомъ далеко отъ нашей непосредственной темы—о роли интуиціи въ геометріи.

4. При разборѣ ученія Канта о методѣ геометріи было указано, что у него въ рѣшеніи этого вопроса проглядываетъ извѣстная двойственность: въ нѣкоторыхъ мѣстахъ какъ будто утверждается рѣшающая роль интуиціи, въ другихъ выдвигается на первый планъ разсудокъ со своими понятіями. По нашему мнѣнію послѣдняя точка зрѣнія болѣе отвѣчаетъ духу философіи Канта, отводившему вездѣ чувственности подчиненное положеніе по отношенію къ разсудку; тѣмъ не менѣе сосредоточивая вниманіе на той или иной сторонѣ его ученія, можно прійти къ совершенно различнымъ конечнымъ выводамъ. Такъ оно и было въ исторіи философіи;

---

[1]) Russell „The Principles of Mathematics“, ch. LII: Kant's theory of space. Авторъ высказываетъ, что почти по всякому пункту его взгляды діаметрально противоположны взглядамъ Канта; см. также Couturat „Les Principes des Mathématiques; Appendice: La philosophie des Mathématiques de Kant. Кутюра начинаетъ съ доказательства, что всѣ сужденія математики аналитичны.

въ трудахъ Шопенгауэра мы находимъ доведеннымъ до крайнихъ предѣловъ обычное пониманіе геометрическаго метода по Канту; а работы нашего соотечественника И. И. Лапшина, внося существенныя поправки въ ученіе о формахъ чувственности, возстановили разсудокъ въ его правахъ, поскольку дѣло идетъ о методѣ геометріи съ обще-философской точки зрѣнія.

Шопенгауэръ, слѣдуя Канту, признаетъ пространство и время формами человѣческаго сознанія, въ которыя неизбѣжно укладывается всякій возможный опытъ; эти формы сами по себѣ являются источниками апріорнаго знанія, которое мы имѣемъ въ математикѣ; чтобы понять, какъ это происходитъ, необходимо хотя бы самымъ краткимъ образомъ ознакомиться съ теоріей познанія Шопенгауэра [1]). Послѣднюю онъ строитъ, анализируя законъ достаточнаго основанія; его „корнемъ“ является слѣдующее положеніе: „.... всѣ наши представленія находятся между собою въ закономѣрной и по своей формѣ a priori опредѣляемой связи, въ силу которой ничто существующее само для себя и независимое, ничто единичное и оторванное, не можетъ сдѣлаться для насъ объектомъ. Эту-то связь и выражаетъ собою въ своей всеобщности законъ достаточнаго основанія“ [2]). Однако указанный законъ можетъ принимать различныя формы, согласно различію объектовъ; Шопенгауэръ насчитываетъ ихъ четыре: I) законъ достаточнаго основанія бываніе или законъ причинности; II) законъ достаточнаго основанія познанія, который заключается въ согласіи мышленія съ законами логики; III) законъ достаточнаго основанія бытія, который имѣетъ для насъ особенное значеніе и о которомъ сейчасъ скажемъ подробнѣе, и IV) законъ мотиваціи или причинности, разсматриваемой изнутри. Что касается III-ей формулировки, предоставимъ слово автору: „Пространство и время

---

[1]) Она изложена въ его диссертаціи: „О четверякомъ корнѣ закона достаточнаго основанія“ (перев. Ю. И. Айхенвальда).

Краткое изложеніе ея можно найти въ статьѣ И. И. Лапшина, помѣщенной въ 78-омъ томѣ энциклопедическаго словаря Брокгауза и Ефрона.

[2]) „О четверякомъ корнѣ и т. д.“, стр. 24.

имѣютъ ту особенность, что всѣ ихъ части находятся другъ къ другу въ такомъ отношеніи, въ силу котораго каждая изъ нихъ опредѣляется и обуславливается другой. Въ пространствѣ это отношеніе называется *положеніемъ*, во времени—*послѣдовательностью*". Указанныя отношенія не имѣютъ ничего общаго ни съ отношеніемъ причины и дѣйствія, ни съ отношеніемъ основанія и слѣдствія; мы не можемъ ихъ постигнуть при помощи понятій разсудка, а только при помощи чистой интуиціи a priori; это прекрасно пояснилъ Кантъ примѣромъ правой и лѣвой руки. „А законъ, по которому части пространства и времени опредѣляютъ одна другую въ указанномъ отношеніи, я называю закономъ *достаточнаго основанія бытія*" [1]). Мы сейчасъ увидимъ, какъ указанный принципъ ведетъ къ построенію геометріи и какимъ долженъ быть ея методъ по мнѣнію Шопенгауэра; для этого сопоставимъ тѣ мѣста его работы, въ которыхъ онъ говоритъ о нашей наукѣ [2]).

Прежде всего для великаго пессимиста дѣйствительнымъ познаніемъ является только интуиція въ ея непосредственности; отвлеченное же познаніе онъ называетъ „самымъ дурнымъ" и „тѣнью настоящаго знанія"; по его мнѣнію, „всякая истина и всякая мудрость въ концѣ концовъ лежитъ въ интуиціи" [3]); словомъ, мы встрѣчаемся здѣсь съ убѣжденіемъ, образно выраженнымъ въ словахъ Мефистофеля:

Суха, мой другъ, теорія вездѣ,
А жизни древо блещетъ все цвѣтами.

Въ частности интуиція пространственныхъ образовъ является могучимъ и исчерпывающимъ источникомъ геометрическаго знанія; не говоря уже о такихъ, сравнительно простыхъ объектахъ, какъ уголъ, треугольникъ, разстояніе,

---

[1]) Ib., стр. 116; курсивъ принадлежитъ подлиннику.

[2]) Важнѣйшія суть:

„О четвероякомъ корнѣ и т. д.", § 39.

„Міръ, какъ воля и представленіе", т I, пер. А. Фета; стр 54—55, § 15.

„Міръ, какъ воля и представленіе", т. II, пер. Ю. И. Айхенвальда; стр. 32, 68—69, глава XIII.

[3]) „Міръ и т. д.", т. II, стр. 68—69.

направленіе, параллелизмъ, „мы вполнѣ познаемъ чистымъ созерцаніемъ существо и закономѣрность параболы, гиперболы, спирали“; „все дифференціальное исчисленіе нисколько въ сущности не расширяетъ нашего познанія о кривыхъ, не содержа въ себѣ ничего болѣе того, что заключалось уже въ чистомъ созерцаніи оныхъ“. Отвлеченное познаніе пространственныхъ отношеній даже дѣлается возможнымъ лишь при условіи предварительнаго перевода ихъ „во временныя отношенія, т.-е. въ числа“ [1]). Насколько допустимо держаться подобнаго взгляда на пространственную интуицію, мы изслѣдуемъ ниже при свѣтѣ современныхъ теорій математики; а пока примемъ это, какъ исходную точку Шопенгауэра. Прежде всего нужно отказаться отъ предразсудка, будто въ геометріи истина, логически доказанная, имѣетъ какое-то преимущество передъ истиной, познанной интуитивно; законъ основанія познанія, т.-е. логическіе принципы, не имѣетъ вовсе высшей достовѣрности по сравненію съ закономъ основанія бытія: оба суть лишь различныя формы одного и того же закона достаточнаго основанія. Второе его выраженіе даетъ намъ основаніе бытія, которое сводится къ непосредственно и наглядно познаваемой связи частей пространства и времени; это-то непосредственное познаніе и позволяетъ обосновать всю геометрію, не прибѣгая къ окольному пути отвлеченнаго мышленія. Мало того, аксіомы, обычно полагаемыя во главу системы, не имѣютъ никакого преимущества очевидности передъ теоремами; въ основѣ любой теоремы лежитъ интуиція пространственныхъ отношеній, и для полнаго убѣжденія нужно только вскрыть „основаніе бытія“, обуславливающее данныя отношенія Шопенгауэръ согласенъ только допустить, что аксіомы, по сравненію съ дальнѣйшими предложеніями геометріи, обладаютъ большей простотой вслѣдствіе меньшаго содержанія; но этимъ самымъ, какъ намъ кажется, онъ уже даетъ нѣкоторую точку опоры для возраженій: естественно вѣдь начинать съ болѣе простого и класть его во главу угла. Исходя изъ подобныхъ воззрѣній на достовѣрность непосредственнаго познанія въ геометріи—на достовѣрность

[1]) „Міръ и т. д.“, т. I, стр. 54—55.

интуиціи, скажемъ короче,—Шопенгауэръ подвергаетъ жестокой критикѣ методъ построенія геометріи, ставшій классическимъ со временъ Евклида, но для нашего автора являющійся лишь „блестящимъ извращеніемъ дѣла“ [1]). Для суроваго критика впрочемъ понятно, почему знаменитый геометръ древности избралъ такой превратный путь: философскія ученія мегариковъ, софистовъ и др. подорвали вѣру въ достовѣрность чувственнаго созерцанія и „заносчиво заключили, что одно только разумно-логическое мышленіе можетъ служить основаніемъ истины“; подобныя ученія и побудили Евклида обосновать лишь однѣ аксіомы на непосредственной интуиціи, а все дальнѣйшее изложить съ помощью цѣпи умозаключеній. Все это имѣло бы основаніе, если бы дѣло шло объ эмпирическомъ созерцаніи; но суть вопроса и заключается въ томъ, что въ геометріи мы имѣмъ дѣло не съ эмпирическимъ, а съ чистымъ созерцаніемъ a priori, какъ то было указано Кантомъ; его ученіе, произведшее полный переворотъ въ мышленіи европейскихъ народовъ, должно въ частности радикально измѣнить построеніе математическихъ системъ. Отнынѣ „созерцанія пространства и времени вполнѣ различны отъ эмпирическаго, совершенно независимы отъ всякаго чувственнаго впечатлѣнія,..... и потому *не подвержены обману чувствъ*“ [2]). Шопенгауэръ часто пользуется чертежами; онъ желаетъ даже, чтобы учебникъ геометріи состоялъ изъ ряда умѣло расположенныхъ чертежей; но все-таки надо отмѣтить, что геометрическая интуиція для него не есть простое разсматриваніе рисунка: „то, что при созерцаніи фигуры заявляетъ намъ свою необходимость, происходитъ не изъ фигуры, быть можетъ, весьма несовершенно нарисованной на бумагѣ, и не изъ абстрактнаго понятія, при этомъ возникающаго, а изъ непосредственной, a priori намъ присущей формы всякаго познанія, которая всюду—законъ основанія“.

Если послѣ переработки Кантомъ воззрѣній на природу пространственной интуиціи настаивать на сохране-

---

[1]) „Міръ и т.-д.“; I, стр 73.

[2]) Ib. стр. 74, курсивъ мой.

нiи метода Евклида, то это значитъ уподобиться человѣку, отрѣзавшему себѣ ноги, чтобы ходить на костыляхъ. Обычный методъ изложенія геометріи приводитъ къ вѣрнымъ результатамъ, — Шопенгауэръ признаетъ это безъ всякихъ оговорокъ; но помимо того, что онъ заставляетъ насъ окольнымъ и утомительнымъ путемъ приходить къ выводу, обладающему всей живостью непосредственной очевидности, онъ и не даетъ полнаго удовлетворенія въ познаніи; истинное знаніе состоитъ не только въ знаніи, *„что нѣчто таково“*, но и въ знаніи, *„почему оно таково“*. Обнаруживая логическую истинность теоремы, мы удовлетворяемъ лишь первому условію, тогда какъ, познавая интуитивно основаніе бытія геометрическаго предложенія, мы получаемъ полное удовлетвореніе всѣхъ запросовъ нашего ума [1]).

Разберемъ примѣры, которыми Шопенгауэръ подкрѣпляетъ свои разсужденія и на которыхъ онъ старается выяснить единственно пригодный методъ геометріи; послѣднее достигается тѣмъ, что извѣстнымъ доказательствамъ Евклида противопоставляются новыя, основанныя на непосредственномъ созерцаніи. Критика начинается съ аксіомъ [2]); далеко не всѣ изъ нихъ покоятся на отдѣльныхъ воззрѣніяхъ и потому являются самостоятельными; цѣлый рядъ аксіомъ—именно: всѣ, касающіяся сложенія и вычитанія равныхъ или неравныхъ величинъ, касающіяся опредѣленія равенства при помощи совмѣщенія, равенства прямыхъ угловъ—Шопенгауэръ считаетъ нужнымъ замѣнить просто соображеніемъ, что „разница въ мѣстѣ не уничтожаетъ тожества въ прочихъ отношеніяхъ“ [3]). Онъ упускаетъ изъ вида, что здѣсь идетъ рѣчь не только о геометрическихъ образахъ, но и о величи-

---

[1]) Намъ казалось бы наоборотъ, что истинный математикъ, постигнувъ что-либо интуитивно, только тогда получитъ полное удовлетвореніе, когда поставитъ новое пріобрѣтеніе въ тѣсную связь съ простѣйшими предпосылками своей науки.

[2]) Шопенгауэръ не имѣлъ, конечно, лучшаго изданія „Началъ“, доступнаго намъ; поэтому и сами аксіомы и ихъ нумерація отличны отъ общепринятыхъ нынѣ. Точно такое-же изложеніе мы находимъ въ переводѣ „Началъ“, сдѣланномъ проф. Ващенко-Захарченко.

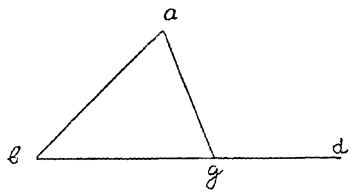
[3]) „О четверякомъ корнѣ и т. д.“, стр. 118—119.

нахъ вообще (этимъ, по мнѣнію нѣкоторыхъ, и отличаются аксіомы отъ постулатовъ); кромѣ того, въ указанной группѣ аксіомъ упоминаются также различныя дѣйствія надъ величинами, которыя едва-ли сводятся къ различію въ положеніи. Не останавливаясь долго на вопросѣ объ аксіомахъ, Шопенгауэръ переходитъ къ разбору 6-го предложенія „Началъ“, которое гласитъ: „если въ $\triangle$ *ABC* углы *ABC* и *ACB* равны, то стороны *AC* и *AB*, противолежащія этимъ угламъ, равны“; доказательство Евклида ведется отъ противнаго, при чемъ приходимъ къ противорѣчію съ 9-й аксіомой: „цѣлое больше части“. Нашъ авторъ признаетъ его дѣйствительность, но полагаетъ, что никто не основываетъ своей увѣренности въ справедливости теоремы на изложенномъ „основаніи познанія“, т.-е. на извѣстныхъ логическихъ разсужденіяхъ; увѣренность эта зиждется „скорѣе на познанномъ интуиціей основаніи бытія, по которому (въ силу необходимости, не поддающейся дальнѣйшему доказательству, а доступной только воззрѣнію), если отъ обѣихъ конечныхъ точекъ линіи двѣ другія равномѣрно наклоняются одна къ другой, то онѣ могутъ встрѣтиться только въ одной точкѣ, находящейся на одинаковомъ разстояніи отъ обѣихъ конечныхъ точекъ, *потому что два возникающихъ угла собственно представляютъ одинъ только уголъ, и онъ кажется двумя углами лишь вслѣдствіе противостоящаго положенія; поэтому нѣтъ основанія, по которому линіи встрѣчались бы ближе къ одной точкѣ, чѣмъ къ другой*“ [1]). Итакъ, основаніемъ бытія здѣсь является необходимая связь равенства сторонъ треугольника съ равенствомъ его угловъ; нельзя, конечно, спорить, что интуиція пространства свидѣтельствуетъ объ этой связи довольно убѣдительнымъ образомъ; но намъ представляется, что въ приведенномъ мѣстѣ Шопенгауэръ не выдержалъ метода непосредственнаго созерцанія геометрической истины, присоединивъ слова, напечатанныя курсивомъ. Въ самомъ дѣлѣ, если интуиція съ полной достовѣрностью свидѣтельствуетъ о существованіи отмѣченной выше необходимой связи, то зачѣмъ эти разсужденія о при-

---

[1]) „О четверякомъ корнѣ и т. д.“, стр. 121; курсивъ мой.

чинахъ, почему одинъ уголъ *кажется* двумя различными углами,—разсужденія, какъ будто-бы упрекающія интуицію въ недостаточномъ умѣніи разбираться въ данныхъ? Зачѣмъ упоминать объ отсутствіи *основанія* нашимъ линіямъ встрѣтиться ближе къ одной точкѣ, чѣмъ къ другой, разъ непосредственно очевидно, что онѣ встрѣчаются на одинаковыхъ разстояніяхъ? Не держимся-ли мы въ этихъ разсужденіяхъ скорѣе „основанія познанія“, чѣмъ „основанія бытія“?—Подобныя замѣчанія можно сдѣлать и относительно дальнѣйшихъ примѣровъ Шопенгауэра. Пропуская нѣсколько теоремъ, онъ останавливается на 16-ой: „Если въ треугольникѣ продолжимъ какую-нибудь изъ сторонъ, то внѣшній уголъ будетъ больше каждаго изъ внутреннихъ угловъ треугольника, съ нимъ не смежныхъ“; приводится обычное доказательство предложенія. Путемъ умозаключеній оно дѣйствительно убѣждаетъ насъ въ истинѣ теоремы; но, какъ и всегда, совсѣмъ не указываетъ, по мнѣнію Шопенгауэра, *почему* это такъ, не даетъ „основанія бытія“. Онъ предлагаетъ слѣдующее доказательство (см. черт. 1): „Для того, чтобы уголъ



Черт. 1.

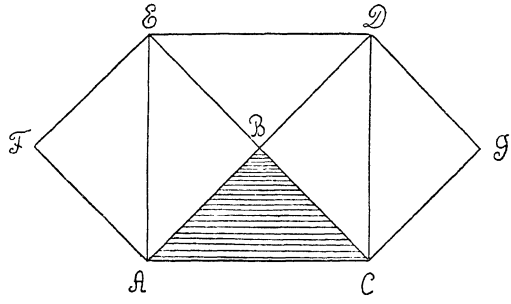
bag только сравнялся съ угломъ *agd*, не говоря уже—превзошелъ его, линія *ba* (вѣдь именно это и значитъ равенство угловъ) должна была бы упасть на *ga* въ такомъ же направленіи, какъ и *bd*, т.-е. параллельно *bd*,—другими словами, она никогда не должна была-бы совпадать съ *bd*; но для того, чтобы образовать треугольникъ, она должна (основаніе бытія) упасть на *bd*, т.-е. сдѣлать противоположное тому, что требуется для того, чтобы уголъ *bag* только достигъ величины *agd*“. Также устанавливается, что и другой уголъ *abg* меньше *agd*; Шопенгауэръ оговаривается, что онъ при-

водитъ изложенное доказательство исключительно для поясненія своей мысли объ отличіи основанія бытія отъ основанія познанія; а на самомъ дѣлѣ въ соотвѣтствующемъ мѣстѣ „Началъ“ нельзя пользоваться понятіемъ о параллельныхъ линіяхъ; съ этой точки зрѣнія и будемъ разбирать его разсужденія. Мы не находимъ здѣсь единой цѣльной интуиціи, которая довлѣетъ себѣ и не нуждается въ болѣе слабыхъ средствахъ формальной логики. Во-первыхъ, мы встрѣчаемся съ двумя болѣе простыми актами интуиціи, которые могли быть опознаны раньше, именно: необходимая связь параллелизма съ равенствомъ угловъ и не менѣе необходимыя условія образованія треугольника; интуиція, долженствующая оправдать 16-ое предложеніе „Началъ“, какъ бы расчленяется на два отдѣльныхъ момента; а не заключается-ли въ подобномъ расчлененіи существо порицаемаго метода Евклида? Во-вторыхъ, невозможность равенства угловъ *bag* и *agd* обнаруживается благодаря тому обстоятельству, что линія *ba* въ одно и то же время и должна пересѣкать линію *bd* и не должна; а это представляетъ не что иное, какъ разсужденіе, основанное на законѣ противорѣчія, т.-е. основаніе познанія. Наше соображеніе подтверждается еще и тѣмъ, что въ другомъ мѣстѣ [1]) Шопенгауэръ самъ призналъ, что къ противорѣчію приводитъ лишь логическая невозможность, а не математическая. Стоитъ остановиться на примѣрѣ, которымъ онъ подкрѣпляетъ свое послѣднее соображеніе; понятія „равносторонній“, „прямоугольный“ и „треугольникъ“ попарно согласуемы (въ частности два первыхъ соединимы въ понятіи квадрата) слѣдовательно, понятіе „прямоугольный равносторонній треугольникъ“ не можетъ заключать въ себѣ логическаго противорѣчія; а если предикаты прямоугольности и равносторонности оказываются одновременно несоединимыми съ понятіемъ треугольника, то это обнаруживается не логическимъ анализомъ, не чистымъ мышленіемъ, а непосредственнымъ воззрѣніемъ. Намъ представляется нетруднымъ указать ошибку изложеннаго разсужденія; дѣло въ томъ, что понятія „прямоугольный“ и „равносторонній“ соединимы не безусловно:

---

[1]) „Міръ и т. д.“ II, стр. 32.

самъ Шопенгауэръ указываетъ, что „въ квадратѣ они сходятся“; а въ такомъ случаѣ нельзя утверждать и логической согласуемости всѣхъ трехъ понятій [1]). Какъ бы то ни было, послѣдняя цитата подкрѣпляетъ наше мнѣніе, что при доказательствѣ 16-ой теоремы Евклида у Шопенгауэра не послѣднее мѣсто занимаетъ и чисто логическая сторона дѣла.— Неоднократно возвращается нашъ авторъ къ своему излюбленному примѣру—пиѳагоровой теоремѣ [2]); обычное ея доказательство онъ называетъ мышеловкой: протягиваются неизвѣстно зачѣмъ линіи, которыя затѣмъ неожиданно затягиваются, какъ силки, и улавливаютъ согласіе ученика; а внутренняя связь соотношеній въ прямоугольномъ треугольникѣ остается ему непонятной, является какой-то qualitas occulta. Несравненно цѣлесообразнѣе замѣнить это „ходульное, даже коварное“ доказательство, по крайней мѣрѣ въ частномъ случаѣ равенства катетовъ, ссылкой на прилагаемую фигуру (черт. 2): она „съ перваго взгляда доставляетъ



Черт. 2.

намъ гораздо болѣе прозрѣнія въ самую вещь, чѣмъ его (т.-е.,

---

[1]) Подобный примѣръ можно найти въ области, не имѣющей ничего общаго съ математикой; возьмемъ понятія: „спѣлый“, „зеленый“ (по цвѣту) и „вишня“; всѣ они попарно совмѣстимы: вишня можетъ быть зеленой (пока она не созрѣла) и можетъ быть спѣлой, спѣлое можетъ быть зеленымъ (вспомнимъ объ огурцѣ или крыжовникѣ); однако „спѣлая зеленая вишня“ невозможна, если только подъ вишней понимать извѣстные намъ сорта этого растенія.

[2]) „Міръ и т. д.“ I, стр. 72, 75; „О четвероякомъ корнѣ и т. д.“, стр. 123.

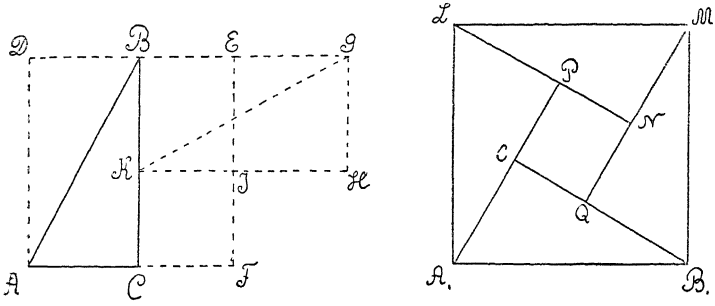
Евклида [1]) доказательство, и приводитъ къ твердому убѣжденію прямой необходимости и зависимости такого качества отъ прямого угла". Итакъ, основаніемъ бытія здѣсь является прямой уголъ; дѣйствительно, прямой уголъ при B въ $\triangle ABC$ есть существенное условіе построенія фигуры; но этого мало, чтобы удостовѣриться въ совпаденіи двухъ вершинъ меньшихъ квадратовъ съ вершинами E и D квадрата, построеннаго на гипотенузѣ: вѣдь мы знаемъ, что для Шопенгауэра выполненный эмпирически чертежъ не является рѣшающей инстанціей. Для установленія указаннаго обстоятельства надо обратить вниманіе на то, что углы A и C нашего треугольника въ силу равенства катетовъ равны каждый 45°; а потому его стороны AB и CB совпадаютъ съ діагоналями квадрата, и кромѣ того $EB{=}BA$ и $BD{=}BC$. Такимъ образомъ, и здѣсь приходится расчленять единый актъ интуиціи, долженствующій при помощи чертежа убѣдить насъ въ справедливости пиѳагоровой теоремы; въ частности необходимо выдвинуть простѣйшую интуицію, на которой было уже обосновано 6-ое предложеніе „Началъ", такъ что будетъ, пожалуй, проще прямо сослаться на доказанную раньше теорему, что введетъ, конечно, въ наше доказательство такъ называемое „основаніе познанія". Не останавливаясь болѣе на частномъ случаѣ, перейдемъ къ общему; Шопенгауэръ, правда, не даетъ чертежа для случая неравныхъ катетовъ, ограничиваясь указаніемъ на его возможность; но Гартманъ [2]), примыкая здѣсь къ воззрѣніямъ нашего философа, приводитъ древне-индусское доказательство, основанное на интуиціи (см. черт. 3) и совершенно соотвѣтствующее всѣмъ требованіямъ Шопенгауэра. Всматриваясь въ эти двѣ фигуры, мы придемъ дѣйствительно къ убѣжденію въ справедливости пиѳагоровой теоремы; но только предварительно надо отдать себѣ полный отчетъ въ произведенныхъ построеніяхъ, что едва-ли всегда удастся сдѣлать съ одного взгляда. Слѣва мы имѣемъ два квадрата $ADEF$ и $EIHG$, построен-

---

[1]) Вставка моя

[2]) Цитирую по книгѣ И. И. Лапшина: „Законы мышленія и формы познанія", стр. 178; см. также чертежъ въ концѣ книги.

ныхъ на катетахъ ΔABC; вспомогательными линіями они дѣлятся на 4 треугольника, равныхъ данному, и квадратъ $CKIF$, построенный на разности катетовъ; справа у насъ изображенъ квадратъ, построенный на гипотенузѣ, который раздѣленъ на тѣ же самыя части. То, что мы сейчасъ сооб-



Черт. 3.

щили, необходимо выяснить каждому, кто пожелаетъ понять приведенное интуитивное доказательство. Такъ какъ всякій чертежъ можетъ содержать ошибки,—а въ этомъ, какъ мы видѣли, Шопенгауэръ отдаетъ себѣ полный отчетъ,—то отдѣльныя, существенныя для насъ особенности нарисованныхъ фигуръ должны быть обоснованы независимо отъ чертежа; сюда прежде всего относятся слѣдующіе факты: въ квадратѣ $ADEF$ отрѣзокъ $BE=BC—AC$; треугольники ADB, BGK и KGH равны данному ABC; четыреугольникъ $CKIF$ есть квадратъ со сторонами, равными $BC—AC$; тѣмъ же свойствомъ обладаетъ и четыреугольникъ C_1PNQ; наконецъ, уголъ LA_1C_1 равенъ углу $C_1B_1A_1$, въ силу извѣстнаго свойства суммы угловъ треугольника (этого соображенія можно избѣжать, если при построеніи ΔLPA_1 находить точку P, какъ пересѣченіе двухъ окружностей, что опять-таки потребуетъ доказательства ея существованія). Какъ ни просты намѣченные этапы полнаго убѣжденія въ истинѣ теоремы, они все-таки являются расчлененіемъ наличной интуиціи на ея составныя части и соединеніемъ послѣднихъ въ одно цѣлое по правиламъ логики.

Нашъ выводъ изъ разсмотрѣнія примѣровъ Шопенгауэра заключается въ томъ, что въ сколько-нибудь сложныхъ случаяхъ предлагаемый имъ методъ не отличается существенно отъ метода Евклида; вѣдь доказательства послѣдняго и сводятся къ тому, что единый актъ интуиціи, который лежитъ въ основѣ данной теоремы и наличіе котораго требуется воззрѣніями Шопенгауэра, расчленяется на болѣе частные, болѣе простые акты, которые были уже опознаны въ предыдущихъ теоремахъ или аксіомахъ; такимъ образомъ теоремы, по мысли Евклида, получаютъ въ концѣ концовъ достовѣрность аксіомъ; а что въ основаніи послѣднихъ лежатъ именно простѣйшія интуиціи,—это признаетъ и разбираемый авторъ. Почему же Шопенгауэръ такъ рѣзко противополагаетъ свои разсужденія методу Евклида? Прежде всего причиной этого является нѣкоторая переоцѣнка изложенія знаменитаго геометра; правда, мы встрѣчаемъ въ одномъ мѣстѣ [1]) совершенно справедливый упрекъ этому изложенію въ томъ, что оно пользуется подвижностью фигуръ и, такимъ образомъ, вводитъ матеріальныя тѣла, покидая чистое пространство [2]). Тѣмъ не менѣе, Шопенгауэръ былъ, конечно, далекъ отъ современнаго признанія, что Евклидъ весьма часто, нарушая цѣльность логической дедукціи, прибѣгаетъ къ непосредственной интуиціи; наоборотъ, онъ держался убѣжденія, что предложенія „Началъ“ строго логически вытекаютъ изъ ихъ предпосылокъ, тогда какъ суть своей реформы онъ именно и видѣлъ въ требованіи, чтобы интуиція неизмѣнно сопровождала геометрическое мышленіе. Кромѣ того Шопенгауэръ ограничился лишь простыми иллюстраціями своихъ мыслей, не считаясь даже съ порядкомъ развертыванія геометрическихъ

---

[1]) „Міръ и т. д.“ II, стр. 126.

[2]) Въ другомъ мѣстѣ („О четверякомъ корнѣ и т. д.“, стр. 121) Шопенгауэръ утверждаетъ, что „обычный методъ доказательствъ собственно только убѣждаетъ насъ въ томъ, что оба равенства (дѣло идетъ о 6-омъ предложеніи, о которомъ см. выше, С. Б) сосуществуютъ въ данной, изображенной для примѣра фигурѣ, а вовсе не въ томъ, что они всегда бываютъ вмѣстѣ“. На это ему можно отвѣтить, что если онъ умѣлъ правильно пользоваться чертежомъ, то этого можно достигнуть и при другомъ способѣ изложенія.

истинъ (см. выше о 16-омъ предложеніи „Началъ“), и не пытался дать систематическаго изложенія; между тѣмъ только послѣднее выяснило бы вопросъ до конца. Какъ бы то ни было, Шопенгауэръ совершенно убѣжденъ въ превратности метода Евклида; и Немезида по заслугамъ покарала великаго эллина: его методъ доказательствъ „изъ собственнаго же лона породилъ на себя самую мѣткую пародію и карикатуру—въ знаменитомъ спорѣ о теоріи параллелей и въ повторяющихся изъ года въ годъ попыткахъ доказать одиннадцатую аксіому“ [1]). Послѣдняя обладаетъ всей силой *непосредственной очевидности*, и отыскивать ея логическое доказательство—предпріятіе совершенно безсмысленное и безплодное. „Эта добросовѣстность—продолжаетъ Шопенгауэръ: напоминаетъ мнѣ юридическій вопросъ Шиллера:

„Многіе годы мой носъ для обонянья мнѣ служитъ:
Но обладаю ли я доказуемымъ правомъ на носъ?“

Мы видимъ, насколько далекъ былъ знаменитый философъ отъ правильнаго пониманія изслѣдованій, касающихся теоріи параллелей; значительную часть вины однако надо переложить съ него на современный ему ученый міръ вообще: вспомнимъ, что и математики не сразу признали неевклидову геометрію.

Заслуга Шопенгауэра заключается въ томъ, что онъ вывелъ до конца всѣ слѣдствія изъ признанія интуиціи единственнымъ источникомъ геометрическихъ истинъ и облегчилъ, такимъ образомъ, критикѣ ея задачу.

Основное положеніе Шопенгауэра о непогрѣшимости интуиціи мы подвергнемъ впослѣдствіи разбору; а сейчасъ убѣдимся, что возможно и другое пониманіе Канта, отводящее въ геометріи почетное мѣсто и для „основанія познанія“.

5. Критическая философія имѣетъ сильныхъ представителей въ петербургскомъ университетѣ; въ своей диссертаціи [2]) И. И. Лапшинъ является ея послѣдователемъ, вводя однако нѣкоторыя весьма существенныя поправки въ кон-

---

[1]) „Міръ и т. д.“ II, стр. 125—126.

[2]) „Законы мышленія и формы познанія“; С.-Петербургъ, 1906.

ціи Канта; одна изъ нихъ имѣетъ первостепенное значеніе для пониманія методовъ современной геометріи.

По ученію Канта, пространство и время суть не понятія, а чистыя созерцанія или интуиціи (т.-е. строго единичныя представленія); поэтому геометрія, какъ наука, изучающая свойства пространства, имѣетъ особый методъ, состоящій въ конструкціи понятій (подробности см. выше). Проф. Лапшинъ [1]) примыкаетъ къ мнѣнію Гегеля, настаивавшему на томъ, что пространство и время—понятія. Замѣчательно, что и Кутюра въ цитированной выше работѣ подходитъ къ тому же выводу; отмѣтивъ нѣкоторыя противорѣчія во взглядахъ Канта на роль интуиціи въ геометріи, онъ заключаетъ: „нѣтъ въ самомъ дѣлѣ никакого основанія для того, чтобы форма интуиціи была сама интуиціей; быть можетъ, этимъ соображеніемъ окажется возможнымъ разрѣшить трудности кантовскаго ученія: пространство и время были бы формами интуиціи, но формами разсудочными, а не чувственными“ [2]). На чемъ же основываетъ проф. Лапшинъ свое отклоненіе отъ Канта? Исходной точкой является непредставимость пустого пространства и времени, что сознавалъ уже и самъ отецъ критической философіи. „Въ самомъ дѣлѣ, если мы признали, что пространство и время, какъ *чистыя созерцанія*, немыслимы сами по себѣ безъ чувственнаго субстрата въ видѣ ощущеній и воспроизведенныхъ представленій, то что же заставляетъ насъ называть ихъ созерцаніями, а не понятіями, которыя только мыслимы, но никогда въ чистомъ видѣ не созерцаемы? Я мыслю понятіе *качества*, но наглядное созерцаніе не даетъ мнѣ *качества вообще*; я могу въ наглядномъ созерцаніи, напримѣръ, звука или цвѣта только *иллюстрировать* понятіе, но никогда не созерцать его. Однако вѣдь также я могу сказать и о пространствѣ и времени: *всякая интуиція пространства и времени есть только иллюстрація понятія пространства и времени*“ [3]). Такимъ

[1]) Ib., стр. 50—53.

[2]) Couturat, l. c., p. 289 (note). Послѣдняя фраза въ подлинникѣ гласитъ: „mais les formes intellectuelles, et non sensibles“.

[3]) Лапшинъ, l. c., стр. 51; курсивъ подлинника. Подъ „интуиціей“ здѣсь понимается, согласно первоначальному смыслу этого слова,—строго единичное представленіе.

образомъ, пространство и время являются такими же понятіями, какъ и качество, количество, причинность и др.; они суть высшіе роды, т.-е. *категоріи* познанія. Кантъ самъ былъ близокъ къ этой мысли; вспомнимъ хотя-бы приведенныя выше слова о неадекватности всякаго образа понятію о треугольникѣ вообще, а также другія мѣста, гдѣ чувственность подчиняется разсудку; тѣмъ болѣе странно, какъ такой тонкій мыслитель допустилъ подобную ошибку. „Психологической причиной", побудившей Канта противополагать форму чувственности категоріямъ, послужило то обстоятельство [1]), что „время, а также и пространство, въ видѣ чувственныхъ созерцаній, ближе къ идеальному понятію времени и пространства, чѣмъ любая иллюстрація категоріи къ ней самой, напримѣръ, категоріи *качества*. Разстояніе, отдѣляющее иллюстрацію понятія Δ-ка въ „чистомъ созерцаніи" Δ-ка отъ понятія Δ-ка, меньше, чѣмъ разстояніе, отдѣляющее иллюстрацію любого качественнаго „эмпирическаго" понятія отъ этого самаго понятія... Представляемый мною многоугольникъ въ чистомъ созерцаніи, конечно, не состоитъ изъ математическихъ и математически прямыхъ линій и не созерцается въ абсолютно неокрашенномъ пространствѣ, но очищеніе элементовъ пространства въ данномъ случаѣ гораздо радикальнѣе, чѣмъ при образованіи любого качественнаго понятія". Изложенныя особенности и были причиной того, что Кантъ отвелъ интуиціи пространства исключительное мѣсто, утверждая, что геометрія пріобрѣтаетъ познанія не изъ понятій, а изъ конструкціи понятій [2]); по мнѣнію нашего автора, указанное обстоятельство вовсе не является отличительной особенностью геометріи.

Основная мысль диссертаціи И. И. Лапшина заключается въ томъ, что примѣненіе законовъ мышленія обусловлено *всѣми* формами познанія, въ томъ числѣ и пространственнымъ синтезомъ; напримѣръ: „нельзя изъ отвлеченнаго ана-

---

[1]) Ib , стр. 53.

[2]) Въ примѣчаніи къ стр. 56 проф. Лапшинъ говоритъ: „выраженіе „конструкція понятія" слѣдуетъ понимать, какъ метафорическое оно означаетъ· „конструкція иллюстраціи понятія"; слѣдуетъ ссылка на слова Канта о несоотвѣтствіи образа Δ-ка его понятію.

лиза понятія *a* понять, что оно = *a*, если при этомъ не данъ пространственный синтезъ въ видѣ сопоставленія двухъ буквъ съ правой и съ лѣвой стороны знака равенства или двухъ звуковъ *a*, соединенныхъ произнесеніемъ слова „*равно*“, *и притомъ не только во времени, но и гдѣ-нибудь въ пространствѣ, ибо видь и звуки локализируются нами въ пространствѣ*“ [1]). Точно также [2]) истинность самаго закона противорѣчія зависитъ отъ „трехмѣрной пространственной интуиціи“. Такимъ образомъ, падаетъ то исключительное положеніе геометріи, которое Кантъ видѣлъ въ пользованіи пространственнымъ синтезомъ: „Кантъ, къ сожалѣнію, не предусмотрѣлъ того важнаго обстоятельства, что зависимость законовъ мышленія отъ пространственнаго синтеза *совершенно уничтожаетъ противоположеніе познанія изъ понятій и познанія изъ созерцаній*, путемъ наглядной *конструкціи понятій*“ [3]). Немного далѣе читаемъ: „всякое познаніе требуетъ пространственной конструкціи понятія [4])……; только въ философіи эти иллюстраціи по преимуществу качественнаго характера, а въ математикѣ—количественнаго“.

Мы остановились довольно подробно на затронутыхъ здѣсь вопросахъ, такъ какъ они весьма важны для пониманія переворота, происшедшаго въ воззрѣніяхъ на аксіомы и методъ математики,—переворота, тѣсно связаннаго съ нѣкоторыми философскими проблемами; именно, цитированная выше фраза: „всякая интуиція пространства и времени есть только иллюстрація понятія пространства и времени“ могла бы послужить эпиграфомъ для многихъ современныхъ работъ по обоснованію геометріи. Конечно, проф. Лапшинъ ставитъ всякій актъ мысли въ зависимость отъ пространственной интуиціи; но именно, въ виду своей универсальности, это требованіе не имѣетъ особаго значенія при спеціальномъ изслѣдованіи метода геометріи.

Изложенные взгляды проф. Лапшина ставятъ его, ко-

---

[1]) Ib., стр. 97; курсивъ подлинника.
[2]) Ib., стр. 105
[3]) Ib., стр. 97; курсивъ подлинника.
[4]) См. выше примѣчаніе объ этомъ терминѣ.

нечно, въ полное противорѣчіе съ Шопенгауэромъ [1]), поскольку дѣло касается метода геометріи; послѣдній настаивалъ „на безусловномъ устраненіи изъ геометріи всякаго *дискурсивнаго* элемента въ доказательствахъ“; благодаря этому, „значеніе интуиціи, выдвинутое Кантомъ въ геометріи, было совершенно извращено Шопенгауэромъ“. Замѣна доказательства чертежомъ, который при напряженномъ всматриваніи убѣждаетъ насъ въ истинности теоремы, не можетъ быть допущена; прежде всего „неточность чертежа, поспѣшность, зрительная иллюзія могутъ повести легко къ самообману“ [2]). Дѣйствительно, если мы при изложеніи геометріи отводимъ интуиціи рѣшающее значеніе, то чертежи дѣлаются въ свою очередь весьма существеннымъ моментомъ; однако, по нашему мнѣнію, связь интуитивнаго познанія съ эмпирически изображенными фигурами не такъ проста, какъ можно было бы думать. Несомнѣнно, въ простѣйшихъ случаяхъ мы не нуждаемся ни въ какомъ чертежѣ, напр., при тѣхъ интуиціяхъ, которыя лежатъ въ основѣ евклидовыхъ доказательствъ 1-го и 4-го предложенія; при болѣе сложныхъ отношеніяхъ безъ рисунковъ не обойтись; проф. Клейнъ, который является сильнымъ противникомъ полнаго изгнанія интуиціи изъ геометріи, указываетъ, что если даже имѣть дѣло съ прямыми, то при большомъ числѣ ихъ необходимо держать передъ собою чертежъ, чтобы только понять, о какой именно линіи идетъ рѣчь [3]). Мы должны, такимъ образомъ, допустить, что интуиція во всякомъ случаѣ находитъ опору въ чертежѣ; но она не исчерпывается простымъ разсмотрѣніемъ и констатированіемъ данныхъ чертежа, хотя бы потому, что обычно сопровождается убѣжденіемъ во всеобщности и необходимости конечныхъ результатовъ, чего не можетъ дать никакой единичный чертежъ; такъ этому училъ Кантъ, такъ думалъ даже Шопенгауэръ. Тѣмъ не менѣе, если геометрическая интуиція находитъ нѣкоторую

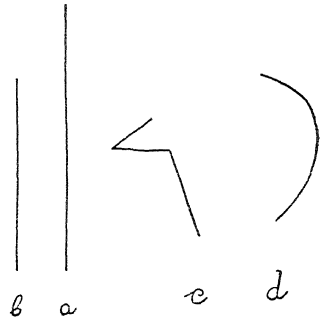
---

[1]) Лапшинъ, l. c., стр. 177—178.

[2]) Ib., стр. 178; см. также стр. 54 и соотвѣтствующій чертежъ.

[3]) F. Klein „Nicht-Euklidische Geometrie“ I, p. 355; здѣсь упоминается чертежъ, получаемый при введеніи проективныхъ координатъ на прямой.

опору въ эмпирически воспроизведенныхъ фигурахъ, то возможныя здѣсь неточности въ состояніи затемнить дѣло и сбить насъ съ правильнаго пути; такъ что въ концѣ концовъ, съ приведенными оговорками, мы принимаемъ замѣчаніе проф. Лапшина о чертежахъ. Вторымъ обстоятельствомъ, не допускающимъ принять шопенгауэровскій методъ, служитъ то, что онъ „непримѣнимъ къ *сложнымъ* отношеніямъ“. Выше мы и пытались установить это положеніе, доказывая, что въ такихъ случаяхъ неизбѣжно приходится прибѣгать къ логическому дѣйствію расчлененія; нашъ авторъ обосновываетъ свое утвержденіе иначе, ссылаясь на Спенсера (см. черт. 4): „вотъ двѣ линіи... *a* и *b*; очевидно,



Черт. 4.

что $a > b$. Но вотъ двѣ другія линіи *c* и *d*; которая изъ нихъ длиннѣе?“ Невозможность отвѣтить на этотъ вопросъ сразу, по нашему мнѣнію, ничего не говоритъ въ пользу безсилія интуиціи разобраться въ сколько-нибудь сложныхъ отношеніяхъ, такъ какъ здѣсь дѣло идетъ собственно объ *оцѣнкѣ на глазъ*, что уже совершенно другое. Для возможности интуиціи необходимо имѣть геометрическія опредѣленія объектовъ, съ которыми мы оперируемъ; нужно знать общія условія синтеза, подъ которыми происходитъ конструкція понятія, какъ сказалъ бы Кантъ; а то намъ въ примѣрѣ И. И. Лапшина совершенно неизвѣстно, представляетъ ли линія *c* ломаную, или это только такъ кажется; въ первомъ случаѣ

неизвѣстно, по какому закону составлены ея отрѣзки; а относительно линіи d рѣшительно ничего не дано. Поэтому можно попытаться оцѣнить длины на глазъ, но мы никогда не будемъ убѣждены въ справедливости этой оцѣнки, какъ былъ убѣжденъ Евклидъ въ основательности своихъ доказательствъ 1-го и 4-го предложеній, какъ можно убѣдиться при помощи интуиціи въ томъ, что прямая есть кратчайшее разстояніе между двумя точками, что объемлющая болѣе объемлемой, и т. д. Болѣе удачнымъ является примѣръ Декарта, который упоминается въ разсматриваемой работѣ на стр. 108 и который показываетъ, что иногда „воображеніе. . нимало не содѣйствуетъ вскрытію специфическихъ свойствъ“ геометрическаго объекта. Подлинныя слова Декарта таковы: „Когда я мыслю о треугольникѣ, передъ моимъ воображеніемъ возникаетъ его образъ, и это представленіе находится въ полномъ соотвѣтствіи съ геометрическимъ понятіемъ треугольника, какъ фигуры съ тремя сторонами и тремя углами. Но, если я буду думать о 1000-угольникѣ, то, несмотря на всѣ усилія, мнѣ не удастся конструировать въ воображеніи представленіе, точно соотвѣтствующее понятію этой фигуры— ея математическому опредѣленію. На самомъ дѣлѣ я представляю какую-то фигуру, которая не есть 1000-угольникъ, ибо она нисколько не отличается отъ смутнаго образа, который могъ бы мнѣ служить замѣстителемъ образа 10000-угольника“. Можно ли утверждать, что образъ треугольника находится въ полномъ соотвѣтствіи съ его понятіемъ, конечно, сомнительно: уже Кантъ отрицалъ это; но предыдущее разсужденіе дѣйствительно убѣждаетъ насъ, что интуиція 1000-угольника, въ силу сложности объекта, едва-ли можетъ дать многое для познанія его свойствъ. Во всякомъ случаѣ отожествлять геометрическое доказательство съ эмпирической конструкціей понятія нельзя; къ особой наглядности позволительно стремиться лишь изъ педагогическихъ соображеній и то въ предварительномъ курсѣ геометріи [1]); съ послѣднимъ замѣчаніемъ проф. Лапшина согласится всякій преподаватель математики.

---

[1]) Ib., стр. 178 и примѣчаніе къ ней (стр. 266).

Итакъ, мы должны отказаться отъ мысли отводить въ геометріи, по примѣру Шопенгауэра, рѣшающее значеніе пространственной интуиціи; ея объекты останутся лишь иллюстраціями математическихъ понятій — иллюстраціями, правда, наиболѣе совершенными изъ доступныхъ намъ. При соблюденіи этого требованія возможныя погрѣшности въ конструкціяхъ понятій не будутъ гибельными для разсужденія: „математикъ можетъ доказать свойства круга вообще, начертивъ фигуру палкой на пескѣ [1]), какъ-бы она ни была неправильна, съ такимъ же совершенствомъ, какъ если бы самый искусный граверъ выгравировалъ ее на мѣди“ [2]). Рѣшающее значеніе при каждомъ доказательствѣ имѣетъ оперированіе съ точными геометрическими понятіями, которое происходитъ по неизмѣннымъ законамъ мышленія „въ математикѣ мы постоянно руководствуемся не одними законами пространственно-временнаго синтеза, но и закономъ противорѣчія“ [3]). Гармонія двухъ различныхъ моментовъ: логики и интуиціи, возможность наиболѣе точной иллюстраціи понятій и ихъ связи,—вотъ причины превосходства геометрическаго метода: „*самая совершенная доказательность, на какую только способенъ человѣческій разсудокъ, есть доказательность математическая*“ [4]). Неясное пониманіе отношенія, существующаго между интуиціей и мышленіемъ изъ понятій, служитъ причиной характерныхъ заблужденій при построеніи геометріи; оказывается, что ничто не ново подъ луною: въ XVII-мъ вѣкѣ Іохимъ Юнгіусъ въ своей книгѣ „Geometria Empirica“ пытался замѣнить дискурсивныя доказательства вырѣзываніемъ фигуръ, складываніемъ и наложеніемъ; одинъ изъ его современниковъ Schioppius поступилъ какъ разъ наоборотъ: онъ изложилъ „Начала“ Евклида въ силлогистической формѣ безъ чертежей [5]). Обѣ попытки проф. Лапшинъ осуждаетъ, ссылаясь на слова Канта: „интуиціи безъ концептовъ—слѣпы, концепты безъ интуицій—пусты“.

---

[1]) Знаменитый примѣръ Архимеда! С. Б.

[2]) Ib., стр. 56. Эти прекрасныя слова Канта подтверждаютъ наше представленіе о его воззрѣніяхъ на методъ геометріи (см. выше).

[3]) Ib., стр. 179; см. также стр. 177—178.

[4]) Ib., стр 180; курсивъ подлинника.

[5]) Ib , стр. 179.

Прежде чѣмъ окончить разсмотрѣніе интересующей насъ работы, мы должны сказать нѣсколько словъ о мыслимости многомѣрнаго [1]) пространства, которое тамъ отвергается самымъ рѣшительнымъ образомъ [2]). Этому понятію приписывается лишь значеніе „вспомогательной *фикціи*, *символическаго* понятія, математической *метафоры*“; по поводу уравненія

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

которое опредѣляетъ извѣстное численное многообразіе, математики символически говорятъ о шарѣ четырехмѣрнаго пространства и также условно истолковываютъ другія, вполнѣ возможныя аналитическія формулы. Что же касается *геометріи* многомѣрнаго пространства, то она „остается фикціей, подобной понятію такой сверхъ-алгебры, въ которой существовалъ бы законъ коммутативности въ примѣненіи къ любой величинѣ и ея показателю степени, т.-е. всякое $n^y = y^n$.....“ Отрицаніе мыслимости (а не только непредставимости) многомѣрнаго пространства обусловливается общей философской позиціей И. И. Лапшина: если законы мышленія сами зависятъ отъ *трехмѣрной* пространственной интуиціи, то, конечно, понятіе *многомѣрнаго* пространства можетъ быть только символическимъ. Мы не беремся обсуждать мимоходомъ это основное философское положеніе, защитѣ котораго посвя-

---

[1]) Замѣтимъ, что нѣкоторыя строки у проф. Лапшина могутъ навести на мысль, какъ будто-бы многомѣрное пространство смѣшивается съ пространствомъ неевклидовымъ въ широкомъ смыслѣ этого слова. Такъ, на стр 99 говорится о многомѣрномъ пространствѣ и сейчасъ же приводятся слова Зигварта о неевклидовой геометріи; на стр. 172 утверждается, что допущеніе возможности для двухъ прямыхъ замыкать пространство приводитъ къ столкновенію съ аксіомами *трехмѣрнаго пространства*.

По поводу неевклидовой геометріи замѣтимъ еще, что на стр. 167 стоитъ: „Подобныя же соображенія заставили .... Лобачевскаго провѣрять аксіомы геометріи измѣреніемъ астрономическихъ треугольниковъ“. Здѣсь необходимо внести поправку: къ разсмотрѣнію звѣздныхъ треугольниковъ Лобачевскій обращался не для провѣрки *аксіомъ геометріи*, а для рѣшенія вопроса, какая же именно геометрія выражаетъ истинныя свойства реальнаго пространства. Входить въ подробное обсужденіе, насколько правиленъ путь Лобачевскаго, здѣсь не мѣсто.

[2]) Лапшинъ, l. c., стр. 99—107.

щена цѣлая диссертація; замѣтимъ только, что другіе авторы, какъ указывается и въ разсматриваемой книгѣ, держатся иныхъ воззрѣній; такъ, проф. Челпановъ склоненъ допустить мыслимость многомѣрнаго пространства. Оставаясь на чисто математической почвѣ, мы только укажемъ, что для современныхъ геометровъ пространство четырехъ измѣреній не является лишь истолкованіемъ ариѳметическихъ формулъ; оно стало доступнымъ и для такъ называемаго синтетическаго изслѣдованія, хотя, конечно, косвеннымъ путемъ. Дѣло въ томъ, что въ нашемъ трехмѣрномъ пространствѣ можно построить многообразія 4-хъ и бо́льшаго числа измѣреній; напр., совокупность всевозможныхъ шаровъ дастъ многообразіе 4-хъ измѣреній (для полнаго заданія шара надо указать 3 координаты его центра и, кромѣ того, радіусъ). Дѣйствительно, въ этой совокупности сферъ мы можемъ осуществить всю геометрію 4-хъ измѣреній, условившись отдѣльные шары принимать за точки, а особыя ихъ системы— т.-наз. пучки, связки, сѣти—за прямыя, плоскости, пространства 3-хъ измѣреній [1]). Подобное построеніе геометріи 4-хъ измѣреній въ высшей степени облегчаетъ дѣло: оно получаетъ наглядность обычной геометріи и позволяетъ намъ прибѣгать къ помощи интуиціи; вѣдь геометрія шаровъ трехмѣрнаго пространства обладаетъ *непосредственной представимостью*; въ цитированной только что книгѣ Веберъ-Вельштейна приводится и примѣръ такихъ разсужденій. Замѣтимъ еще, что послѣднія имѣютъ значеніе и для обычной геометріи, такъ какъ нѣкоторыя задачи упрощаются, если призвать на помощь пространство бо́льшаго числа измѣреній, какъ упрощается при помощи стереометрическихъ соображеній доказательство теоремы Дезарга, касающейся геометріи на плоскости.

Намъ представляется серьезной заслугой проф. Лапшина сближеніе критической философіи въ части, соотвѣтствующей ученію о пространствѣ и его познаніи, съ умозрѣніями современныхъ математиковъ. Въ рукахъ своего творца крити-

[1]) Веберъ и Вельштейнъ, „Энциклопедія элементарной математики“, т. II, книга I (основанія геометріи); переводъ подъ редакціей и съ примѣчаніями прив.-доц. В. Кагана. См. стр. 123—127.

цизмъ имѣлъ твердую опору въ геометріи; шопенгауэровское пониманіе ея метода безнадежно разошлось съ новыми теоріями математиковъ, выработанными въ результатѣ усиленной критической работы второй половины XIX-го вѣка; нынѣ снова пути математики и критической философіи сходятся, и послѣдняя, подобно древнему Антею, коснувшемуся своей матери-земли, получитъ новыя силы; а многіе геометры, которымъ равно близки и геніальныя концепціи Канта и философскіе выводы ихъ науки, будутъ избавлены отъ непріятной обязанности выбора.

Предыдущее изслѣдованіе не можетъ считаться исчерпывающимъ, поскольку дѣло идетъ о воззрѣніяхъ философовъ на роль интуиціи въ геометріи; но такой задачи мы себѣ и не ставили. Во всякомъ случаѣ мы познакомились съ двумя противоположными оцѣнками интуиціи, какъ достовѣрнаго источника геометрическихъ знаній; эти оцѣнки послужатъ намъ теперь объектомъ для критики съ точки зрѣнія современныхъ теорій математики.

6. Приступая къ намѣченному критическому изслѣдованію, постараемся прежде всего поставить его въ точно очерченныя рамки. Оцѣнивая различные методы—путь интуиціи и путь дискурсивнаго мышленія,—мы исключительно будемъ имѣть въ виду *методы доказательствъ* геометрическихъ истинъ, оставляя совершенно въ сторонѣ вопросъ о томъ, какъ мы доходимъ до этихъ истинъ; всякое открытіе есть дѣло индивидуальнаго дарованія, и едва-ли возможно дать какія-либо опредѣленныя правила въ указанномъ направленіи [1]); несомнѣнно, что здѣсь интуиція, въ широкомъ смыслѣ этого слова, занимаетъ видное, пожалуй первенствующее мѣсто.

Едва-ли нужно изслѣдовать отдѣльно вопросъ о возможности обосновывать геометрическія доказательства только на интуиціи; въ настоящее время найдется немного сторонниковъ подобнаго мнѣнія. Такъ думалъ Шопенгауэръ; но мы старались выше установить, что онъ и самъ не выдерживалъ

---

[1]) См. книгу проф. А. И. Введенскаго: „Логика, какъ часть теоріи познанія“, стр. 1—4.

строгости своего требованія въ приводимыхъ имъ примѣрахъ; даже въ учебникахъ геометріи, естественно стремящихся къ наибольшей простотѣ, на ряду съ широкимъ пользованіемъ интуиціей не забываются и логическія обоснованія высказываемыхъ предложеній. Наконецъ, если бы мы пришли къ выводу, что и частичное пользованіе интуиціей при обоснованіи нашей науки недопустимо, по тѣмъ или инымъ соображеніямъ, то первый вопросъ отпалъ-бы самъ собою. Итакъ, мы должны изслѣдовать интуицію, какъ особый источникъ геометрическихъ истинъ, существующій на ряду съ дедукціей изъ аксіомъ и не всегда ею замѣнимый (вспомнимъ первыя теоремы „Началъ“). Конечно, такая двойственность метода, въ случаѣ ея оправданія, явилась бы весьма замѣчательнымъ обстоятельствомъ; она свидѣтельствовала бы о неустранимыхъ недостаткахъ формальной логики, поскольку дѣло идетъ о геометріи, и повела бы къ основательнымъ попыткамъ создать здѣсь новые пути въ духѣ шопенгауэровскаго пониманія Канта: вѣдь если мы обладаемъ возможностью непосредственно познавать истину, то подобное познаніе надо предпочесть обходному пути логическаго мышленія; нужно только развивать эту нашу способность и предоставлять ей все болѣе и болѣе широкое поле дѣятельности. Мы видимъ, что къ рѣшенію интересующаго насъ вопроса надо отнестись съ полнымъ вниманіемъ. Во избѣжаніе недоразумѣній отмѣтимъ еще разъ, что интуицію надо отличать отъ простого разсматриванія чертежа или модели; иногда ни въ чемъ подобномъ мы не нуждаемся; но во всякомъ случаѣ мы отчетливо сознаемъ, что факты, доставляемые интуиціей, отличаются общимъ и необходимымъ характеромъ, а не относятся исключительно къ такому-то единичному случаю. Когда Евклидъ утверждалъ существованіе точки пересѣченія у двухъ окружностей, изъ которыхъ каждая проходитъ черезъ центръ другой, то ему было совершенно ясно, что такъ будетъ всегда и вездѣ при любой величинѣ общаго радіуса; въ этомъ убѣжденіи очень скромную роль игралъ чертежъ, если таковой и былъ передъ глазами великаго геометра. Кромѣ того, непосредственное познаніе указаннаго свойства обладало для него всей возможной силой убѣдительности,

такъ что онъ не задумался обосновать на этомъ свое первое предложеніе, хотя вообще стремился къ такой строгости, которая была бы въ состояніи обезоружить даже софистовъ.

Такимъ образомъ, мы приходимъ къ мысли *критически разсмотрѣть интуицію, какъ особый источникъ достовѣрнаго знанія въ геометріи, не сводящійся къ простому констатированію свойствъ эмпирически воспроизведенныхъ фигуръ и естественно противополагаемый логической дедукціи изъ аксіомъ.*

Перечислимъ прежде всего важнѣйшіе случаи, когда прибѣгаютъ къ интуиціи при традиціонномъ построеніи геометріи. На первое мѣсто придется поставить вопросы, касающіеся расположенія точекъ, прямыхъ, плоскостей; насколько укоренилась здѣсь привычка ссылаться на непосредственную очевидность, а не пытаться овладѣть предметомъ при помощи нѣсколькихъ явно формулированныхъ аксіомъ, видно изъ того, что первая работа, въ которой была поставлена и рѣшена эта задача, появилась всего 30 лѣтъ тому назадъ [1]). Къ указанной области относятся предложенія въ родѣ слѣдующихъ: изъ трехъ точекъ прямой одна и только одна лежитъ между 2 другими; если прямая пересѣкаетъ одну изъ сторонъ треугольника, то она пересѣчетъ и другую (постулатъ Паша), и т. п. На непосредственномъ созерцаніи мы весьма часто основываемся, имѣя дѣло съ углами: различаемъ, напр., среди угловъ съ параллельными или перпендикулярными сторонами равные и дополняющіе другъ друга до $2d$; проводя биссектриссы или медіаны треугольника, мы непосредственно заключаемъ, что онѣ попарно пересѣкаются въ точкахъ, лежащихъ *внутри* треугольника [2]), и т. д. Другой безспорной областью интуиціи является обычно ученіе о

[1]) M. Pasch „Vorlesungen über neuere Geometrie“, Leipzig, 1882. Бѣглое указаніе на недостаточность обычныхъ аксіомъ находимъ уже у Гаусса: „es müssen solche Worte wie „zwischen“ auch erst auf klare Begriffe gebracht werden, was sehr gut angeht, was ich aber nirgends geleistet finde“ (цитирую по книгѣ: K. Th. Vahlen „Abstrakte Geometrie“, p. 141).

[2]) Но не основываемъ на интуиціи утвержденія, что всѣ три пересѣкаются въ одной точкѣ; см. Hölder „Anschauung und Denken in der Geometrie“, p. 11—12.

геометрическомъ равенствѣ и равновеликости. Здѣсь, по крайней мѣрѣ на первыхъ шагахъ, самымъ широкимъ образомъ пользуются представленіемъ о движеніи геометрическихъ фигуръ, при которомъ сохраняется цѣлый рядъ ихъ свойствъ, такъ наз. мѣровыя опредѣленія. Употребленіе послѣдняго метода при построеніи геометріи можно оспаривать; во всякомъ случаѣ требуется особое изслѣдованіе условій, при которыхъ понятіе движенія допустимо въ геометріи; но наша пространственная интуиція далека отъ всякихъ сомнѣній и логическихъ тонкостей: то, что она даетъ, очевидно непосредственно и не нуждается въ какомъ-либо иномъ обоснованіи. Къ движенію мы прибѣгаемъ при откладываніи равныхъ отрѣзковъ и угловъ, при доказательствѣ основныхъ теоремъ о равенствѣ треугольниковъ: вспомнимъ уже не разъ упоминавшееся 4-ое предложеніе „Началъ“; во всѣхъ этихъ вопросахъ интуиція получаетъ опору въ возможности перемѣщенія фигуръ при сохраненіи ихъ формы и размѣровъ, что иногда и формулируется въ видѣ особаго принципа „свободной подвижности“. Къ движенію иногда прибѣгаютъ и въ совершенно другихъ областяхъ геометріи; такъ, нѣкоторые доказываютъ, что 3 точки вполнѣ опредѣляютъ плоскость съ помощью вращенія плоскости вокругъ прямой до совпаденія съ 3-ей точкой. Что же касается до ученія о площадяхъ и объемахъ, то мы считаемъ самоочевиднымъ, что геометрическимъ образамъ присущъ характеръ величинъ, и безъ дальнѣйшихъ разсужденій переносимъ сюда всѣ ихъ общія свойства, напр: два значенія величины одного и того же рода или равны, или одно больше другого, и т. п. Далѣе, непрерывность пространства принадлежала до послѣдняго времени къ интуитивнымъ фактамъ. Прежде всего исключительно на интуиціи обосновывается существованіе безчисленнаго множества точекъ на прямой, на плоскости, въ пространствѣ; затѣмъ, исходя изъ непосредственнаго представленія о непрерывности пространства, утверждается возможность раздѣлить отрѣзокъ или уголъ на n равныхъ частей, рѣшаются вопросы о пересѣченіи круга съ прямою, о пересѣченіи двухъ круговъ (вспомнимъ 1-ое предложеніе Евклида) и т. д.; сюда же относится и такъ-наз. принципъ Архимеда.

Наконецъ, и содержаніе всѣхъ открыто формулируемыхъ аксіомъ, поскольку дѣло идетъ о геометріи реальнаго пространства, почерпается въ непосредственной интуиціи и можетъ намъ кое-что дать при характеристикѣ этого рода познанія.

При внимательномъ обзорѣ перечисленныхъ выше, наиболѣе обычныхъ призывовъ къ интуиціи нельзя не замѣтить, что послѣдняя почти всегда находитъ для себя опору въ представленіи т.-наз. *идеальнаго движенія*, т.-е. движенія, по возможности очищеннаго отъ эмпирическихъ и случайныхъ опредѣленій [1]). Особенно это бросается въ глаза, когда геометрически равныя фигуры опредѣляются по Евклиду, какъ *совмѣщающіяся при наложеніи*. Здѣсь призывъ къ интуиціи сводится къ констатированію тѣхъ свойствъ движенія, которыя намъ извѣстны изъ повседневнаго опыта; говоря о доказательствѣ 4-го предложенія „Началъ“, Гельдеръ утверждаетъ, что это—не дедукція, а „непосредственная ссылка на интуицію или, если это намъ болѣе нравится, на опытъ, пріобрѣтенный при движеніи твердыхъ тѣлъ“ [2]). Нетрудно вскрыть связь съ представленіемъ движенія и у данныхъ нашей интуиціи, относящихся къ непрерывности геометрическихъ образовъ; постулатъ Архимеда такъ и напрашивается на формулировку: идя равными шагами, мы достигнемъ всякой точки на прямой. Привычныя, довольно смутныя представленія о непрерывности въ послѣднее время дали поводъ къ установленію особой аксіомы, которая, формулируемая обыкновенно по Дедекинду, можетъ уже служить основаніемъ для доказательства дальнѣйшихъ предложеній. Въ интересномъ сборникѣ статей итальянскихъ геометровъ, вышедшемъ подъ редакціей проф. Энрикеса [3]), этому вопросу посвящена статья

[1]) Едва-ли однако возможно мыслить движеніе безъ всякаго матеріальнаго субстрата.—Значеніе идеальнаго движенія, какъ иллюстраціи геометрическихъ понятій, признаютъ и философы; см., напр., Лапшинъ, l. c., стр. 57.

[2]) Holder l. c., p. 13.

[3]) „Questioni riguardanti la Geometria elementare“, Bologna, 1900: имѣется русскій переводъ. Упоминаемая ниже статья Vitali озаглавлена: „Sulla applicazioni del postulato della continuità nella Geometria elementare“ (p. 83).

Дж. Витали. Устанавливая постулатъ непрерывности, нашъ авторъ указываетъ тѣ интуитивные факты, которые даютъ намъ поводъ для подобныхъ соображеній; основаніе своего постулата онъ видитъ въ слѣдующемъ, заимствованномъ изъ непосредственной интуиціи, обстоятельствѣ: если на какомъ-либо отрѣзкѣ прямой будутъ двигаться 2 точки, пробѣгая его въ противоположныхъ направленіяхъ, то онѣ непремѣнно встрѣтятся въ одномъ опредѣленномъ мѣстѣ.

Что же касается расположенія точекъ на прямой, то, казалось бы, здѣсь нѣтъ основанія прибѣгать къ движенію; достаточно лишь яснаго представленія прямой линіи, чтобы установить, напр., тотъ фактъ, что изъ 3 точекъ одна лежитъ между 2 другими; но въ томъ-то и дѣло, что при отчетливомъ воспроизведеніи прямой въ нашемъ представленіи пространства мы достигаемъ этого съ помощью воображенія нѣкоторыхъ механическихъ процессовъ, мысля, напр., прямую, какъ слѣдъ движенія точки, сохраняющаго свое направленіе; подтвержденіе сказанному мы находимъ въ слѣдующихъ словахъ Канта, излагающихъ непосредственныя данныя самонаблюденія: „Я не могу себѣ представить линіи, какъ бы мала она ни была, *не проводя ея мысленно*, т.-е. не производя послѣдовательно всѣхъ ея частей, начиная съ опредѣленной точки и, такимъ образомъ, впервые начертая наглядное представленіе ея“ [1]).—Наконецъ, даже концепція поверхностей и объемовъ, какъ величинъ особаго рода, имѣетъ, по нашему мнѣнію, свое основаніе въ томъ очевидномъ для всякаго фактѣ, что одни поверхности и объемы могутъ *помѣщаться* внутри другихъ, откуда естественно возникаютъ понятія „больше“ и „меньше“ и т. д.

Мы приходимъ, слѣдовательно, къ выводу, что интуиція тѣсно связана съ представленіемъ такъ-наз. идеальнаго движенія и въ немъ находитъ себѣ опору. Указанное обстоятельство отнюдь нельзя считать случайнымъ; изслѣдованія послѣдняго времени, во главѣ которыхъ стоятъ работы С. Ли [2]), установили, что геометрію можно разсматривать,

---

[1]) „Критика“, стр. 131; курсивъ мой.

[2]) Подробное изложеніе ихъ читатель найдетъ въ книгѣ: В. Каганъ „Основанія геометріи“, т. II; тамъ же указаніе литературы вопроса.

какъ изученіе нѣкоторой *группы движеній*; многіе геометры идутъ теперь этимъ путемъ, а Пуанкарэ въ силу сказаннаго считаетъ необходимымъ при начальномъ преподаваніи геометріи исходить изъ идеи движенія твердыхъ тѣлъ [1]). Конечно, при изслѣдованіяхъ подобнаго рода „движенія“ суть не что иное, какъ преобразованія или „сопряженія“ пространства; но формальныя свойства послѣднихъ, выборъ которыхъ зависитъ исключительно отъ насъ, постулируются, имѣя въ виду всѣмъ извѣстное движеніе твердыхъ тѣлъ. Окончательные выводы упомянутыхъ изслѣдованій въ области основъ геометріи приводятъ къ замѣчательному подтвержденію нашей мысли еще съ другой точки зрѣнія. Попытки доказать аксіому параллелей, безуспѣшно предпринимавшіяся въ теченіе 2000 лѣтъ, свидѣтельствуютъ о томъ, что эта аксіома по своей интуитивной очевидности уступала другимъ предпосылкамъ Евклида. Въ самомъ дѣлѣ, современное представленіе объ аксіомахъ, какъ о необходимыхъ и достаточныхъ основаніяхъ извѣстной теоріи, при чемъ бо̀льшая или меньшая очевидность является чѣмъ-то несущественнымъ [2]), была бо̀льшею частью совершенно чужда предшествующимъ эпохамъ; для подавляющаго большинства ученыхъ прошлыхъ временъ аксіомы — истины самоочевидныя и потому не нуждающіяся въ доказательствѣ; если при такихъ воззрѣніяхъ вся критика сосредоточилась на 5-омъ постулатѣ, то для насъ это является серьезнымъ указаніемъ на его меньшую очевидность по сравненію съ остальными. Невольно напрашивается параллель между этимъ отношеніемъ ученія о параллелизмѣ къ непосредственной очевидности и тѣмъ особымъ мѣстомъ, которое отводится 5-му постулату современными изслѣдованіями. Дѣло въ томъ, что общія предпосылки, выдѣляющія группу движеній и поставленныя во главѣ Софусомъ Ли, ведутъ въ одинаковой мѣрѣ какъ къ геометріи Евклида, такъ и къ обѣимъ неевклидовымъ системамъ (Лобачевскаго и Римана); другими словами, основныя свойства движенія, которыя по-

---

[1]) Пуанкарэ „Наука и методъ“, стр. 173.

[2]) Такъ думаетъ, напр., Рёссель (l. c., § 421).

знаются въ конечной части пространства, одинаково согласуются съ тремя различными ученіями о параллелизмѣ. Итакъ, менѣе тѣсная связь съ движеніемъ ведетъ къ меньшей очевидности, что отрицательнымъ путемъ подтверждаетъ высказанное выше положеніе.

Охарактеризовавъ въ общихъ чертахъ тотъ матеріалъ, который доставляется пространственной интуиціей, интересно поставить вопросъ о его происхожденіи. Едва-ли возможно въ настоящее время видѣть въ интуиціи *совершенно особый* источникъ познанія; такое мнѣніе могло еще сложиться подъ вліяніемъ односторонняго пониманія Канта; но съ тѣхъ поръ, не говоря уже о математикахъ, и послѣдователи критической философіи (см. выше) сгладили кажущуюся пропасть между „познаніемъ изъ понятій“ и „познаніемъ изъ конструкціи понятій“. Тогда не остается ничего другого, какъ выставить опытъ въ широкомъ смыслѣ этого слова въ качествѣ послѣдняго основанія геометрическихъ знаній, если только мы не станемъ считать ихъ чѣмъ-то врожденнымъ и притомъ въ готовомъ видѣ. Канта менѣе, чѣмъ кого-либо другого, можно упрекнуть въ грубомъ эмпиризмѣ; однако первыя слова „Критики чистаго разума“ гласятъ: „безъ сомнѣнія, все наше знаніе начинается съ опыта“; только сейчасъ же указывается и на то содержаніе, которое вносится туда необходимыми формами мысли. Основанное на опытѣ знаніе можетъ быть или непосредственнымъ констатированіемъ данныхъ такого-то вполнѣ опредѣленнаго эксперимента, или представляетъ собою результатъ извѣстной обработки этихъ данныхъ. Что касается до той интуиціи, которая въ состояніи доставлять намъ геометрическія истины, то первое допущеніе не имѣетъ мѣста, какъ мы уже неоднократно старались выяснить. Переходя ко второму, мы тоже наталкиваемся на затрудненія, коренящіяся въ нѣкоторыхъ особенностяхъ геометрическаго знанія, и эти особенности обнаруживаются уже самымъ мимолетнымъ самонаблюденіемъ. Дѣло въ томъ, что, во-первыхъ, при построеніи геометріи мы совершенно не нуждаемся въ опытѣ, къ которому неизбѣжно приходимъ тамъ, гдѣ онъ является основой познанія, какъ, напр., въ химіи, физикѣ и т. п.; а во-вторыхъ, предложеніямъ геомет-

ріи, начиная съ аксіомъ, мы склонны приписывать характеръ абсолютной необходимости; отъ этого и происходитъ, что такъ трудно примириться съ геометріей Лобачевскаго впервые приступающимъ къ ея изученію, а нѣкоторые и понынѣ готовы видѣть въ ней прискорбное недоразумѣніе. Ничего подобнаго мы не наблюдаемъ въ физикѣ или химіи, гдѣ основные законы складываются и преобразуются на нашихъ глазахъ, гдѣ открытіе радіоактивныхъ веществъ сломало непроницаемыя перегородки между химическими элементами, и никто ни одной минуты не колебался принять новые законы, не старался выставить противъ нихъ какія-либо философскія, принципіальныя возраженія. Тѣмъ не менѣе и въ области геометріи нѣтъ другого пути для пріобрѣтенія начальныхъ свѣдѣній, какъ только опытъ; но въ виду сказаннаго его приходится отнести въ глубину подсознательныхъ процессовъ мысли, на первые шаги индивидуальнаго развитія, быть можетъ, призвать на помощь исторію расы. Въ философско-математической литературѣ мы найдемъ не мало подтвержденій изложенному мнѣнію. Такъ, Гефдингъ [1]), сопоставляя нативистическую и генетическую теоріи, предложенныя для объясненія развитія воспріятія пространства, считаетъ возможнымъ примирить ихъ, призывая теорію эволюціи рода на помощь теоріи эволюціи особи и утверждая, что „унаслѣдованныя предрасположенія пополняютъ недостатки индивидуальныхъ опытовъ“. Тѣ же самыя мысли мы встрѣтимъ и у знаменитаго математика Пуанкарэ [2]): пространственныя ассоціаціи коренятся въ безсознательномъ, онѣ суть расовыя пріобрѣтенія; очевидность геометрическихъ истинъ есть не что иное, какъ „сопротивленіе, которое мы оказываемъ каждой попыткѣ разложить то, что уже такъ давно ассоціировано“,— не что иное, какъ „наша косная неспособность отказаться отъ очень старыхъ привычекъ“ [3]). Наконецъ, еще болѣе опредѣленныя указанія мы находимъ

---

[1]) „Очерки психологіи, основанной на опытѣ“; стр. 198—199.
[2]) „Наука и методъ“, стр. 127—128.
[3]) Ib., стр. 143.

у Энрикеса [1]): необходимость геометрическихъ постулатовъ имѣетъ причиной то обстоятельство, что образованіе основныхъ понятій геометріи, въ противоположность понятіямъ физическимъ, происходитъ до пробужденія рефлектирующаго сознанія; вотъ почему для насъ почти невозможно вообразить иныя пространственныя условія. Такимъ образомъ, все свидѣтельствуетъ въ пользу мнѣнія, что начальныя знанія въ области геометріи складываются подъ вліяніемъ опыта; но только этотъ опытъ приходится отнести къ самой ранней и подсознательной жизни индивидуума, а можетъ быть и цѣлой расы. Каковы именно характерныя черты требуемаго для указанной цѣли опыта, въ какихъ именно областяхъ окружающей насъ многосторонней дѣйствительности надо искать первоисточникъ пространственныхъ ассоціацій,— выяснено уже предыдущимъ изслѣдованіемъ: важнѣйшимъ факторомъ въ созданіи простѣйшихъ геометрическихъ свѣдѣній является движеніе тѣлъ, принимаемыхъ нами за твердыя, въ этомъ заключается глубокое основаніе тѣснаго единенія геометріи съ кинематикой.

Итакъ, *факты, доставляемые интуиціей въ качествѣ непосредственно очевидныхъ, суть не что иное, какъ начальныя геометрическія свѣдѣнія, пріобрѣтенныя въ глубинѣ подсознательной дѣятельности и неразрывно связанныя со свойствами движенія такъ называемыхъ твердыхъ тѣлъ.*

Такой концепціи не противорѣчитъ извѣстное обстоятельство, что интуиціей мы иногда пользуемся въ весьма серьезныхъ изслѣдованіяхъ, которыя становятся доступными человѣку лишь въ полномъ расцвѣтѣ его сознательной жизни: новыми являются здѣсь лишь комбинаціи простѣйшихъ элементовъ, а сами они остаются тѣми же самыми.

Эмпирическое происхожденіе свѣдѣній, почерпаемыхъ изъ интуиціи, ни въ коемъ случаѣ не можетъ считаться порочащимъ обстоятельствомъ, отнимающимъ у нихъ всякую цѣну. Мы не присоединимся къ слишкомъ рѣзкому сужденію Рёсселя [2]), разсматривающаго интуицію, какъ со-

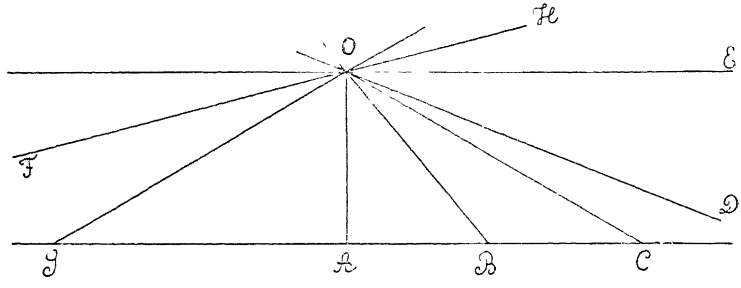
[1]) „Questioni etc.“, статья: Enriques „Sull' importanza scientifica e didattica delle questioni che si riferiscono ai principi della geometria,“ p. 7.

[2]) Russell, l. c., p. 260.

вокупность „непроанализированныхъ предразсудковъ“ Интуиція весьма часто не только внушаетъ блестящія мысли (конечно, тѣмъ, кто вообще къ таковымъ способенъ), но и при многихъ доказательствахъ приводитъ къ совершенно вѣрнымъ результатамъ: вспомнимъ, что до послѣдняго времени геометрія строилась при ея существенной поддержкѣ. Считать, такимъ образомъ, интуицію безусловно ошибочной нельзя; но даже возможность — и притомъ очень рѣдкая — ошибки дѣлаетъ ее уже непригодной для обоснованія чистой математики. Поэтому намъ необходимо подвергнуть критическому изслѣдованію интуицію, какъ особый источникъ геометрическихъ истинъ, черпающій ихъ изъ непосредственнаго представленія пространства. Къ сказанному впослѣдствіи присоединяется вопросъ, необходимо-ли ссылаться на интуицію всякій разъ, когда это обычно дѣлалось, и если—нѣтъ, то какова именно неизбѣжная первооснова нашихъ геометрическихъ знаній, которую приходится заимствовать изъ интуиціи; указанные вопросы уже относятся къ выбору необходимой и достаточной системы аксіомъ.

Нетрудно замѣтить, что не ко всѣмъ фактамъ, доставляемымъ интуиціей, необходимо подходить именно такимъ путемъ; напр., что касается прямой линіи, то мы при помощи непосредственнаго созерцанія убѣждаемся въ слѣдующихъ двухъ основныхъ ея свойствахъ: 2 точки вполнѣ опредѣляютъ прямую и 2 прямыя могутъ пересѣкаться только въ одной точкѣ; между тѣмъ, второе положеніе есть ближайшее слѣдствіе перваго, и его можно вывести, не прибѣгая къ интуиціи и совершенно независимо отъ характера того образа, который соотвѣтствуетъ у насъ понятію прямой. Такимъ образомъ, данныя интуиціи во всякомъ случаѣ не образуютъ *необходимой* системы предпосылокъ; это обстоятельство опять-таки не можетъ опорачивать ея данныхъ, а требуетъ лишь извѣстной ихъ кодификаціи. Гораздо важнѣе другой вопросъ: согласуемы-ли между собой указанныя начальныя свѣдѣнія изъ области геометріи? не можемъ-ли мы, комбинируя ихъ и выводя всевозможныя слѣдствія, натолкнуться на противорѣчія? Одинъ извѣстный примѣръ изъ области элементарныхъ соображеній показываетъ, что эти сомнѣнія

вполнѣ законны. Несомнѣнно, существованіе подобныхъ фигуръ, т.-е. возможность измѣненія размѣровъ при полномъ сохраненіи формы, принадлежитъ къ числу фактовъ, которые обычно считаются самоочевидными; не нужно знать геометріи, какъ научной системы, чтобы высказать это убѣжденіе. Съ другой стороны, также очевидно, что прямолинейный отрѣзокъ можно неопредѣленно продолжать въ обѣ стороны; такъ какъ, кромѣ того, неизмѣнность направленія есть существенный признакъ нашего образа прямой, то, казалось-бы, послѣдней слѣдуетъ приписать двѣ различныхъ безконечно-удаленныхъ точки, если только является необходимость ввести это понятіе. Дѣйствительно, рано или поздно приходится произвести обобщеніе понятія „точка“ подобно тому, какъ въ анализѣ расширяется понятіе числа; но при этомъ оказывается необходимымъ приписать прямой лишь одну точку на безконечности—обстоятельство, поражающее своей неожиданностью всѣхъ, впервые о немъ узнающихъ. Укажемъ нѣкоторыя основанія для подобнаго заключенія; возьмемъ прямую GC (см. черт. 5) и черезъ точку O внѣ ея будемъ



Черт. 5.

проводить различныя прямыя, или—для бо́льшей наглядности—будемъ вращать прямую OA вокругъ точки O противъ движенія часовой стрѣлки; точки B, C ... ея пересѣченія съ данною прямою GC будутъ постоянно и безпредѣльно удаляться отъ точки A; наконецъ, предполагая, что мы остаемся въ области евклидовой геометріи, мы приведемъ нашу прямую въ положеніе OE, параллельной GC; точки пересѣченія тогда не будетъ; при дальнѣйшемъ вращеніи

на безконечно малый уголъ HOE точка пересѣченія появится уже слѣва отъ A на произвольно большомъ разстояніи отъ нея. Итакъ, при всѣхъ положеніяхъ вращающейся прямой, за исключеніемъ OE, имѣется точка встрѣчи обѣихъ прямыхъ; чтобы избѣжать этого исключенія и получить предложеніе самаго общаго характера, что̀ всегда являлось главной цѣлью математики, расширимъ область извѣстныхъ намъ до сихъ поръ точекъ; совершенно также въ алгебрѣ къ вещественнымъ числамъ присоединяются комплексныя, чтобы установить общее положеніе: уравненіе степени n имѣетъ n корней. Сообразно съ этимъ мы вводимъ „идеальныя“ точки и говоримъ, что 2 параллельныя прямыя „пересѣкаются“ въ подобной точкѣ; такъ какъ по мѣрѣ приближенія вращающейся прямой OA къ положенію OE точка встрѣчи ея съ GC безпредѣльно удалялась отъ A, то мы имѣемъ полное основаніе, въ разсматриваемомъ случаѣ евклидовой геометріи, называть идеальную точку безконечно-далекой. Подобное же побужденіе даютъ также извѣстныя формулы аналитической геометріи: координаты точекъ прямой, опредѣляемой 2 точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2), задаются уравненіями:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \; ^{1})$$

гдѣ λ — перемѣнный параметръ, имѣющій весьма простой геометрическій смыслъ. Всякому значенію λ соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленная точка, за единственнымъ исключеніемъ $\lambda = -1$; желая избавиться отъ этого исключенія, мы дополняемъ область точекъ новыми и имѣемъ вѣскія основанія называть послѣднія безконечно удаленными; для каждой прямой потребуется одна и только одна подобная точка[2]). На разобранномъ примѣрѣ мы замѣчаемъ, что интуиція повидимому съ одинаковой очевидностью свидѣтельствуетъ о 2 фактахъ: о существованіи подобныхъ фигуръ и о 2 безко-

---

[1]) Для простоты ограничиваемся случаемъ геометріи на плоскости.

[2]) Изложенное предствляетъ лишь бѣглый намекъ на теорію идеальныхъ элементовъ.

нечно-удаленныхъ точкахъ прямой; между тѣмъ, въ геометріи Евклида эти положенія несовмѣстимы: подобіе есть, но необходимо принять одну безконечно-удаленную точку на прямой. Не имѣя возможности входить сейчасъ въ подробное изложеніе, такъ какъ это отвлекло бы насъ далеко въ сторону, добавимъ, что въ геометріи Лобачевскаго подобныхъ фигуръ нѣтъ, а каждой прямой приходится приписать 2 различныхъ точки на безконечности; такъ что оба эти положенія, доставляемыя интуиціей, остаются взаимно исключающими. Конечно, противъ разсмотрѣннаго примѣра можно возразить, что здѣсь дѣло осложняется идеей безконечности и что мы не можемъ имѣть непосредственнаго представленія безконечно-удаленныхъ точекъ; на это мы отвѣтимъ, что интуиція ясно свидѣтельствуетъ о двухъ различныхъ направленіяхъ прямой, исходящихъ изъ данной точки; что она самымъ рѣшительнымъ образомъ противится признанію у прямой только одной точки на безконечности; что, наконецъ, изъ ученія о параллелизмѣ, которое также строится на интуитивныхъ предпосылкахъ и тѣсно связано съ вопросомъ объ идеальныхъ точкахъ, изгнать совершенно идею безконечности нельзя по самой сути дѣла.

Такимъ образомъ, мы убѣждаемся, что прежде чѣмъ класть данныя интуиціи въ основу геометрическаго разсужденія, надо всесторонне изслѣдовать ихъ взаимную согласуемость, чтобы застраховать себя отъ противорѣчій въ дальнѣйшемъ изложеніи. На этомъ основаніи мы не можемъ согласиться съ Энрикесомъ, утверждающимъ, что для геометріи, основанной на интуиціи, такія изслѣдованія излишни[1]).

Пока мы разсматривали лишь всю совокупность данныхъ интуиціи съ точки зрѣнія ихъ взаимной связи; перейдемъ теперь къ критикѣ отдѣльныхъ фактовъ, имѣя въ виду достовѣрность заключающагося въ нихъ знанія. Прибѣгая къ интуиціи, какъ къ непосредственному источнику геометрическихъ истинъ, мы неизбѣжно опираемся на мысленные

---

[1]) „Questioni“ p. 10: „Per la Geometria dunque, in quanto essa è fondata sull' intuizione, non occorrerá domandarsi se i postulati sono compatibili, purchè essi sieno intuitivamente evidenti“.

образы пространственныхъ объектовъ; поэтому, изслѣдуя достовѣрность интуиціи, мы должны подвергнуть критикѣ и нашу способность представленія пространства; именно, надо рѣшить вопросъ, въ состояніи-ли мы воспроизводить мысленно геометрическіе образы со всей точностью и опредѣленностью, которая требуется чистой геометріей. Въ математической литературѣ мы встрѣчаемъ не мало указаній по интересующему насъ вопросу; особенно цѣнны строки, въ которыхъ кто-либо изъ видныхъ ученыхъ излагаетъ факты непосредственнаго самонаблюденія.

Оставаясь на почвѣ элементарно-геометрическихъ разсужденій, уже можно говорить объ отсутствіи полнаго соотвѣтствія между интуиціей и геометріей, какъ отраслью чистой математики, и о необходимости прибѣгать въ послѣдней къ точнымъ разсудочнымъ опредѣленіямъ. Такъ, Гёльдеръ [1]) утверждаетъ, что онъ не въ состояніи представить себѣ 2 совершенно равныхъ отрѣзка; все, что онъ можетъ, это— вообразить 2 приближенно равныхъ отрѣзка и затѣмъ *постулировать*, что въ дальнѣйшемъ будетъ мыслить ихъ, какъ равные; т.-е. въ указанномъ пунктѣ почтенный профессоръ отказывается основываться только на интуиціи въ силу ея недостаточной опредѣленности; такъ же обстоитъ дѣло и съ наглядным представленіемъ безконечно протяженной прямой. Если же въ нѣкоторыхъ простѣйшихъ случаяхъ,—напр., при разсматриваніи общихъ свойствъ треугольника, намъ кажется, что представляемый образъ вполнѣ адэкватенъ соотвѣтственному геометрическому понятію, то, по мнѣнію проф. Клейна [2]), это происходитъ отъ слѣдующихъ причинъ: когда мы имѣемъ дѣло съ простыми отношеніями, уже давно знакомыми и часто вновь появляющимися въ нашемъ сознаніи, то здѣсь происходитъ такое тѣсное соединеніе наглядной картины съ разсудочными опредѣленіями и постулатами, что мы непроизвольно замѣняемъ одно другимъ и, имѣя передъ глазами несовершенный образъ треугольника, мыслимъ о его идеальномъ прототипѣ. Что же касается до болѣе сложныхъ

---

[1]) Holder, „Anschauung und Denken in der Geometrie“, p. 66.

[2]) Klein „Nicht-Euklidische Geometrie“, I, p. 300—301.

случаевъ, то здѣсь наше безсиліе отчетливо созерцать соотвѣтственные образы становится уже доступнымъ непосредственному наблюденію. Вспомнимъ слова Декарта [1]), который отказывался конструировать представленіе, точно соотвѣтствующее понятію 1000-угольника; великій философъ думалъ только, что это возможно для треугольника; его ошибку объясняютъ только что цитированныя слова проф. Клейна. Мы ссылались уже на одинъ примѣръ, приводимый проф. Гёльдеромъ [2]) для выясненія роли интуиціи въ геометріи; именно, мы склонны выводить изъ непосредственнаго представленія, что равнодѣлящія угловъ треугольника пересѣкаются попарно внутри его; но никто не основывается только на интуиціи, чтобы доказать пересѣченіе трехъ биссектрисъ въ одной точкѣ; этотъ фактъ устанавливается при помощи „искусственнаго пути дедукціи“. Въ связи съ изложеннымъ нашъ авторъ дѣлитъ различныя высказыванія о фигурахъ на двѣ группы: болѣе грубыя и болѣе тонкія; первыя,—напримѣръ, пересѣченіе 2 биссектрисъ внутри треугольника — мы склонны основывать только на интуиціи; вторыя подобному обоснованію не поддаются въ силу извѣстной неопредѣленности, присущей образамъ пространственнаго воображенія. Такъ какъ указанное различіе не основано ни на какомъ точномъ критеріи, то нельзя съ полной увѣренностью всякій разъ рѣшить, какого порядка утвержденіе имѣемъ мы передъ собою, а это можетъ явиться источникомъ различныхъ ошибокъ.

Наконецъ, въ области элементарной геометріи имѣется вопросъ, который въ сущности породилъ всю современную литературу объ основахъ нашей науки и который развѣнчалъ интуицію, сведя ее съ высокаго пьедестала, возведеннаго для нея въ геометріи подъ вліяніемъ отчасти неправильнаго пониманія Канта; мы имѣемъ въ виду теорію параллелей. При созданіи неевклидовыхъ системъ интуиція, въ силу необычности новыхъ отношеній, естественно отступала на второй планъ и выдвигались мало-по-малу логическіе моменты

---

[1]) См. выше цитату по книгѣ проф. Лапшина.

[2]) Hölder, l. c., p. 11—12.

въ построеніи чистой геометріи. Не имѣя возможности сейчасъ входить въ дальнѣйшія подробности, ограничимся замѣчаніемъ, что новыя системы нигдѣ не запутывались въ противорѣчіяхъ, несмотря на отрицаніе одного изъ краеугольныхъ камней геометріи Евклида. Такимъ образомъ, была установлена возможность иныхъ пространственныхъ опредѣленій, на первый взглядъ такъ рѣзко расходящихся съ нашей способностью представленія пространства; мало того, оказалось, что любую изъ трехъ системъ—Евклида, Лобачевскаго, Римана—можно положить въ основу объясненія природы. Дѣло въ томъ, что при извѣстныхъ условіяхъ формулы неевклидовыхъ геометрій даютъ такія отличія отъ обычныхъ, которыя лежатъ за предѣлами нашихъ чувствъ, подкрѣпленныхъ самыми могущественными инструментами; при наличіи подобнаго обстоятельства нельзя, какъ справедливо указываетъ проф. Клейнъ [1]), говорить объ абсолютной точности интуиціи; въ противномъ случаѣ мы были бы въ состояніи такъ или иначе рѣшить вопросъ объ истинномъ содержаніи неизбѣжной для насъ формы пространства.

Однако полнаго освѣщенія вопроса о способности представленія пространственныхъ образовъ, являющихся иллюстраціями геометрическихъ понятій, можно достигнуть, лишь обратившись къ нѣкоторымъ новѣйшимъ даннымъ высшей математики; на такую точку зрѣнія неоднократно становится проф. Клейнъ въ своихъ работахъ [2]). Геттингенскій ученый утверждаетъ, что современный математикъ въ состояніи указать множество такихъ пространственныхъ образованій, которыя, несмотря на ясность и даже простоту опредѣленія, не поддаются сколько-нибудь отчетливому воспроизведенію въ пространственномъ представленіи; между тѣмъ точность и достовѣрность интуиціи весьма существенно зависитъ именно отъ этой нашей способности. Примѣры, при-

---

[1]) См. Klein, l. c., p. 163, 299—300, 356.

[2]) Кромѣ уже цитированныхъ лекцій по неевклидовой геометріи надо еще указать „Anwendung der Differential—und Integralrechnung auf Geometrie [eine Revision der Principien]“—тоже литографированныя лекціи, а также статью въ 22-омъ томѣ Math. Annalen.

водимые Клейномъ, можно разбить на нѣсколько группъ: кривыя Вейерштрасса и Пеано, построенія изъ теоріи автоморфныхъ функцій, нѣкоторые вопросы теоріи совокупностей (Mengenlehre).

До 60-хъ годовъ прошлаго столѣтія думали, что всякая непрерывная функція имѣетъ производную; заблужденіе это было вскрыто Вейерштрассомъ, указавшимъ нѣкоторую функцію, которая, будучи непрерывной, не обладаетъ свойствомъ дифференцируемости ни для одного значенія аргумента; указанная функція задается рядомъ:

$$y = \sum_{0}^{\infty} b^n . \cos(a^n \pi x), \tag{1}$$

гдѣ $o < b < 1$ и a — нечетное число [1]). Примѣръ Вейерштрасса особенно интересенъ тѣмъ, что начальныя понятія анализа безконечно-малыхъ сложились несомнѣнно подъ вліяніемъ интуиціи: эмпирическая кривая съ опредѣленной касательной въ каждой своей точкѣ, движеніе точки съ опредѣленной скоростью въ каждый моментъ дали поводъ къ образованію понятій непрерывности и производной; однако, будучи построены и строго опредѣлены, эти понятія повели къ слѣдствіямъ, выходящимъ уже за предѣлы всякой интуиціи. Представить себѣ пространственно ходъ вейерштрассовой кривой (т.-е. кривой, опредѣляемой уравненіемъ (1)) мы не можемъ; постараемся выяснить, отчего это происходитъ. Чтобы по возможности ближе подойти къ истинному виду этой кривой, Клейнъ сначала говоритъ о „частичныхъ кривыхъ“:

$$y_r = b^r \cos(a^r \pi x),$$

которыя суть волнообразныя линіи съ уменьшающейся амплитудой ($b < 1$) и становящіяся все „круче и круче“; изъ соединенія $(m + 1)$ изъ нихъ получается „m-ая приближенная кривая“:

$$y_m = \sum_{0}^{m} b^r \cos(a^r \pi x);$$

---

[1]) См. Klein „Anwendung etc“, p. 83—101, тамъ же имѣется указаніе дальнѣйшей литературы.

а „окончательной (Endcurve)“ онъ называетъ кривую, заданную уравненіемъ (1). Приближенная кривая порядка m получается изъ предыдущей тѣмъ путемъ, что въ послѣднюю привходитъ новое колебаніе (соотвѣтствующее частичной кривой $y = b^m \cos(a^m \pi x)$) съ меньшей амплитудой и съ еще меньшей длиной волны. Такимъ образомъ, исходя изъ перваго приближенія

$$y_0 = \cos \pi x,$$

т.-е., изъ обыкновенной косинусоиды, можно получать послѣдующія. Однако, наша способность представленія скоро исчерпываетъ свои силы и приходится довольствоваться формулами и чисто логическими опредѣленіями; изъ подобныхъ соображеній вытекаетъ, что окончательная кривая имѣетъ на любомъ конечномъ промежуткѣ безконечно-большое число безконечно-малыхъ колебаній, и общее понятіе о ея ходѣ можно составить себѣ слѣдующимъ образомъ Положимъ, мы построили m-ое приближеніе нашей линіи; оказывается, что кривая Вейерштрасса заключается вся въ полосѣ шириною $\frac{2\,b^{m+1}}{1-b}$, при чемъ центральной линіей этой полосы служитъ m-ое приближеніе; съ возрастаніемъ m эту величину можно сдѣлать произвольно малой; въ случаѣ $b = 0{,}1$ см. уже при $m = 6$ имѣемъ

$$\frac{2b^{m+1}}{1-b} = 0{,}00000022\ldots \text{см.},$$

т.-е. такую величину, которую едва-ли можно замѣтить въ самые сильные микроскопы. Особенности нашей линіи, съ которыми мы сейчасъ познакомились, объясняютъ, почему мы не можемъ отчетливо ее представить. По мнѣнію Клейна, дѣло все въ томъ, что когда мы представляемъ себѣ линію, то послѣдняя не является длиной безъ ширины, но всегда воображается въ видѣ нѣкоторой узкой полоски; такъ что наше представленіе соотвѣтствуетъ не строгому понятію функціи, а лишь приближенному понятію „функціональной по-

лосы (Functionsstreifen)“ [1]). Съ такой точки зрѣнія совершенно понятно, что нѣкоторыя болѣе тонкія детали, какъ напр., безчисленныя колебанія кривой Вейерштрасса, ускользаютъ отъ нашего пространственнаго представленія. Точно также понятно, что у подобной криволинейной полосы всегда будетъ касательная въ видѣ прямолинейной полоски, отчасти захватывающей первую; вотъ почему возникъ предразсудокъ, что всякая непрерывная функція имѣетъ производную.

Такимъ образомъ, мы убѣждаемся, что многія болѣе тонкія подробности строенія геометрическихъ объектовъ ускользаютъ отъ нашей способности представленія въ силу ея ограниченности. Къ изложеннымъ соображеніямъ близко подходитъ открытый Пеано [2]) фактъ, что линія, заданная уравненіями:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

гдѣ $\varphi(t)$ и $\psi(t)$—непрерывныя функціи, можетъ заполнять цѣликомъ площадь извѣстнаго квадрата; подобная линія такъ же мало доступна пространственному представленію, какъ и кривая Вейерштрасса. Особенность примѣра Пеано заключается въ томъ парадоксальномъ на первый взглядъ обстоятельствѣ, что однократно протяженная совокупность точекъ оказывается эквивалентной двояко протяженной; парадоксъ этотъ разрѣшается съ помощью ученія Кантора о мощностяхъ безконечныхъ совокупностей, гдѣ часть можетъ быть эквивалентной цѣлому [3]). Наконецъ, въ связи съ этими классическими примѣрами умѣстно упомянуть о болѣе простой кривой:

$$y = x.sin\left(\frac{1}{x}\right),$$

которая, будучи непрерывной, имѣетъ въ любомъ промежуткѣ, содержащемъ O, безчисленное множество maxima и

---

[1]) Klein „Ueber den allgemeinen Functionsbegriff und dessen Darstellung durch eine willkürliche Curve“; перепечатано въ „Math. Ann.“ Bd 22.

[2]) Klein „Anwendung etc.“, p. 240—247.

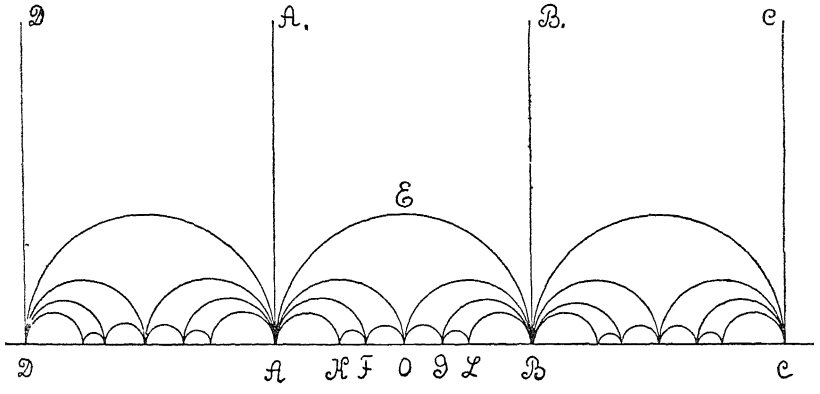
[3]) Во избѣжаніе недоразумѣній замѣтимъ, что эквивалентность, какъ ее понимаетъ Канторъ, отнюдь не совпадаетъ съ тождественностью.

minima; вслѣдствіе послѣдняго обстоятельства для насъ невозможно представить себѣ ходъ этой линіи въ смежности съ началомъ координатъ. Вспомнимъ здѣсь также всѣмъ извѣстную гиперболическую спираль, задаваемую въ полярныхъ координатахъ уравненіемъ:

$$\varrho . \Theta = a;$$

при увеличеніи угла Θ наша линія безпредѣльно приближается къ полюсу, дѣлая вокругъ него безчисленное множество поворотовъ; несмотря на исключительную простоту аналитическаго опредѣленія, воображеніе наше безсильно передъ задачей дать отчетъ въ расположеніи витковъ гиперболической спирали.

Мы попадемъ въ область болѣе элементарныхъ постро-



Черт. 6.

ній, если обратимся къ излюбленнымъ примѣрамъ проф. Клейна, почерпаемымъ изъ близкой ему теоріи автоморфныхъ функцій [1]). Мы ограничимся наиболѣе простымъ и потому наиболѣе поучительнымъ случаемъ. Пусть дана намъ нѣкоторая область, ограниченная полуокружностью AEB, центръ которой лежитъ въ точкѣ O, и двумя касательными къ ней AA_1 и BB_1 (черт. 6); требуется построить новыя области,

[1]) Сюда относятся: „Anwendung etc.“, p. 212—233, 275—295 (если ограничиться случаемъ 3 круговъ); „N-Eukl Geom“. p. 302—304.

которыя получаются изъ данной путемъ инверсіи [1]) относительно трехъ ограничивающихъ ее линій; каждую вновь построенную область мы должны инвертировать относительно линій, являющихся ея границами, и т. д.; ставится вопросъ о совокупности образованныхъ изложеннымъ способомъ областей. Такъ какъ инверсія на прямой линіи сводится къ нахожденію обыкновеннаго зеркальнаго изображенія, то влѣво отъ AA_1 и вправо отъ BB_1 получится безчисленное множество повтореній той фигуры, къ которой мы придемъ въ основной полосѣ A_1ABB_1. Что же касается инверсіи на полуокружности AEB, то это есть такое точечное преобразованіе, при которомъ двѣ соотвѣтственныя точки P и P'_1 лежатъ на одной прямой, проходящей черезъ O, при чемъ

$$OP.OP' = r^2,$$

гдѣ r—есть радіусъ нашей полуокружности (здѣсь дѣло идетъ о такъ называемой гиперболической инверсіи); къ основнымъ свойствамъ инверсіи принадлежитъ то, что при этомъ преобразованіи углы остаются неизмѣнными и круги переходятъ въ круги; прямая разсматривается, какъ окружность, проходящая черезъ безконечно удаленную точку, а послѣдней при инверсіи соотвѣтствуетъ центръ круга, являющагося ея основаніемъ. Теперь нетрудно понять, что прямыя AA_1 и BB_1 при инверсіи на AEB перейдутъ въ полуокружности AO и OB, а наша полуокружность—въ самое себя. Такимъ образомъ, первоначальная область A_1AEBB_1 перейдетъ въ криволинейный треугольникъ съ вершинами въ A, O, B; надо вообразить, что подобныя инверсіи на полуокружностяхъ произведены и въ другихъ полосахъ. Пока, какъ замѣчаетъ проф. Клейнъ, мы можемъ дать себѣ довольно ясный отчетъ въ полученной фигурѣ; но мы должны помнить о поставленномъ требованіи и подвергнуть всѣ новыя области инверсіи на ихъ границахъ При инверсіи на полуокружности AO полуокружности AEB и OB перейдутъ соотвѣтственно въ

---

[1]) Объ инверсіи см., напр., уже цитированную книгу Веберъ-Вельштейна, стр. 47—51.

линіи того же вида, построенныя на AF и FO, какъ на діаметрахъ; а криволинейный $\Delta\ AOB$ преобразуется въ $\Delta\ AFO$, подобное же построеніе сдѣлаемъ и для полуокружности OB и получимъ новую область OGB съ полуокружностями OB, OG, GB въ качествѣ пограничныхъ линій; инвертируя новыя области на ихъ границахъ, мы придемъ къ криволинейнымъ треугольникамъ AKF, GLB и т. д. Легко видѣть, что число образуемыхъ такимъ путемъ криволинейныхъ треугольниковъ безпредѣльно возрастаетъ, размѣры каждаго изъ нихъ безпредѣльно убываютъ и они все тѣснѣе и тѣснѣе прилегаютъ къ прямой DC. Въ теоріи автоморфныхъ функцій любой изъ этихъ треугольниковъ имѣетъ то же значеніе, что и первоначальная область; однако, несмотря на простоту и ясность изложеннаго построенія, наша способность пространственнаго представленія можетъ овладѣть лишь первыми ступенями процесса, а затѣмъ оказывается не въ силахъ слѣдить за нимъ. Даже многолѣтняя практика, по цѣнному указанію проф. Клейна о самомъ себѣ, не устраняетъ этого безсилія человѣческаго воображенія, и примѣръ этотъ доказываетъ намъ, что разсудочное требованіе, съ которымъ мы имѣемъ дѣло въ математикѣ, выходитъ за предѣлы жизненнаго представленія въ силу ограниченной точности послѣдняго. Въ другомъ мѣстѣ по аналогичному же поводу Клейнъ замѣчаетъ, что, стоя въ безсиліи передъ безконечностью, мы можемъ повторить слова Шиллера:

Senke nieder
Adlergedank', dein Gefieder!
Kühne Seglerin, Phantasie,
Wirf ein mutloses Anker hie.

Тѣмъ замѣчательнѣе, что, придерживаясь строгихъ опредѣленій и вообще призвавъ разсудокъ на помощь сознавшейся въ своемъ безсиліи интуиціи, можно прійти къ опредѣленнымъ выводамъ относительно нашей безконечной совокупности исчезающихъ областей [1]).

---

[1]) См. указанныя мѣста у Клейна.

Наконецъ, примѣры изъ теоріи совокупностей[1]) свидѣтельствуютъ о томъ, что та строгость и тонкость, которою мы обладаемъ въ понятіи числа, совершенно ускользаетъ отъ геометрическои интуиціи или, лучше сказать, отъ нашей способности представленія геометрическихъ объектовъ. Несомнѣнно подъ вліяніемъ интуиціи мы устанавливаемъ приближенное соотвѣтствіе между вещественными числами и точками прямой (напр., оси абсциссъ); полнаго же согласія можно достигнуть лишь съ помощью постулата: „всякому числу соотвѣтствуетъ одна и только одна точка нашей прямой, и всякой точкѣ—одно и только одно число". Это положеніе, будучи однажды формулировано въ связи съ современнымъ понятіемъ числа, сейчасъ же ведетъ къ слѣдствіямъ, которыя выходятъ за предѣлы возможной интуиціи. Условимся считать какую-либо совокупность чиселъ вполнѣ опредѣленной, если относительно любого даннаго числа мы въ состояніи рѣшить, принадлежитъ ли оно нашей совокупности, или нѣтъ; на основаніи вышеприведенной аксіомы, каждой такой совокупности чиселъ будетъ отвѣчать также опредѣленная совокупность точекъ взятой прямой. Теперь мы можемъ обратиться къ тѣмъ двумъ примѣрамъ, которыми проф. Клейнъ подкрѣпляетъ сдѣланное выше утвержденіе. Возьмемъ сначала совокупность всѣхъ раціональныхъ чиселъ, лежащихъ по своей величинѣ между 0 и 1, и соотвѣтственную совокупность точекъ; обѣ онѣ могутъ быть названы „повсюду плотными" (überall dicht); это значитъ, что въ произвольно малой части даннаго промежутка имѣется безчисленное множество нашихъ чиселъ (и, слѣд., точекъ). Однако ирраціональныя числа исключены изъ разсматриваемой совокупности, такъ что послѣднюю нельзя считать непрерывной [2]). Можно ли теперь представить въ пространствѣ повсюду плотную совокупность точекъ, которая однако далеко не исчерпываетъ continuum'а? „Отвлеченное опредѣленіе ясно"

---

[1]) Klein „Anw.", p. 17—19; также Voss „Ueber das Wesen der Mathematik", p. 72—73.

[2]) По ученію Кантора, она „исчислима", т.-е. ея мощность ниже мощности continuum'а.

отвѣчаетъ Клейнъ: „представленіе же для меня во всякомъ случаѣ невозможно“. Въ качествѣ другого примѣра разсмотримъ всѣ вещественныя числа, расположенныя между 0 и 1, за исключеніемъ этихъ границъ; т.-е., мы беремъ отрѣзокъ, концы котораго отняты отъ него. „Наше представленіе пространства повидимому учитъ насъ, что нельзя ограничить отрѣзка, не причисляя на самомъ дѣлѣ къ отрѣзку его концовъ“; такъ что мы не въ состояніи представить себѣ пространственно указанную совокупность точекъ, несмотря на ея полную опредѣленность.

Рядъ изложенныхъ соображеній приводитъ геттингенскаго ученаго [1]) къ убѣжденію въ неточности и ограниченности нашей способности пространственнаго представленія и тѣсно связанной съ ней такъ называемой геометрической интуиціи. Дадутъ ли намъ кривую Пеано или хорошо извѣстную окружность круга, все равно: основываясь на непосредственной интуиціи, мы можемъ и въ томъ и въ другомъ случаѣ прійти къ нѣкоторымъ приближеннымъ представленіямъ и заключеніямъ; но истинно математическихъ результатовъ можно достигнуть лишь, исходя изъ разсудочныхъ опредѣленій нашихъ линій, выраженныхъ либо въ ихъ уравненіяхъ, либо въ способѣ ихъ построенія при помощи основныхъ образовъ геометріи. Любопытно, что подобнаго рода признаніе вырвалось однажды у самого Шопенгауэра [2]): математика можетъ „совсѣмъ обходиться безъ воззрѣнія и оперировать съ помощью однихъ только отвлеченныхъ и даже изображаемыхъ не словами, а знаками, понятій и все-таки достигать вполнѣ достовѣрныхъ и притомъ столь отдаленныхъ результатовъ, что ихъ нельзя было бы получить, если бы мы оставались на твердой почвѣ интуиціи“; указанное обстоятельство Шопенгауэръ объясняетъ въ духѣ Канта особенностью математическихъ понятій, отвлеченныхъ отъ апріорныхъ воззрѣній.

Какъ бы то ни было, на предшествующихъ страницахъ мы убѣдились, что силы геометрической интуиціи обычно недостаточны для тѣхъ требованій, которыя предъявляетъ

---

[1]) Klein „Anw.“ p. 19—20, 260—261, „N. Eukl. Geom“ p. 299.

[2]) „Міръ, какъ воля и представленіе“; т II, стр. 176.

чистая математика, и эта недостаточность иногда способна просто вводить въ заблужденіе: вспомнимъ о безконечно удаленныхъ точкахъ прямой и о существованіи производной у непрерывной функціи. Теперь мы можемъ отвѣтить на вопросъ, съ которымъ обратились къ критическому изслѣдованію интуиціи, а именно: можно ли полагаться на нее, какъ на достовѣрный источникъ геометрическихъ истинъ? Согласно всему предыдущему отвѣтъ будетъ отрицательнымъ; достовѣрно лишь то, что выведено по правиламъ формальной логики изъ предпосылокъ, поставленныхъ во главѣ системы, т.-е. изъ аксіомъ. Правильнѣе будетъ сказать, что достовѣрна лишь связь извѣстныхъ выводовъ съ извѣстными предпосылками, ибо о достовѣрности аксіомъ этимъ путемъ никакихъ заключеній сдѣлать нельзя: будучи основаніями всѣхъ разсужденій, онѣ не могутъ подтверждаться или опровергаться ими.

Мы покидаемъ почву послѣднихъ изслѣдованій съ такимъ заключеніемъ: *такъ какъ ограниченная точность интуиціи не удовлетворяетъ идеалистическимъ требованіямъ чистой геометріи, то при построеніи этой науки нельзя ограничиваться ссылкой на интуицію, а всякій разъ необходимо строго дедуктивное доказательство, основанное только на поставленныхъ во главѣ аксіомахъ.*

Этотъ выводъ служитъ основаніемъ того стремленія превратить геометрію въ отвлеченно логическую систему [1]), которое мы наблюдаемъ у множества современныхъ авторовъ.

Какъ мы вскорѣ увидимъ, слова, напечатанныя курсивомъ, не изгоняютъ совсѣмъ интуиціи изъ области геометріи; пока же остановимся на вопросѣ о томъ, что представляютъ собою аксіомы и какъ мы къ нимъ приходимъ, и вопросъ этотъ затронемъ здѣсь исключительно въ связи съ понятіемъ интуиціи.

При томъ способѣ построенія геометріи, который является неизбѣжнымъ результатомъ предыдущихъ разсужденій, для интуиціи остается только одна область, въ которой, ка-

---

[1]) „гипотетически-дедуктивная система“ по словамъ итальянскаго геометра Піери.

залось бы, она должна господствовать безраздѣльно; мы имѣемъ въ виду установленіе аксіомъ. Геометрія, какъ всякая дедуктивная наука, должна имѣть недоказуемыя предпосылки, и такимъ послѣднимъ основаніемъ ея служитъ система аксіомъ; такъ какъ мы уже не можемъ логически вывести ихъ изъ другихъ предложеній, то оправданіе ихъ должно происходить на какихъ-то иныхъ основаніяхъ. Если дѣло идетъ о геометріи, какъ о наукѣ, изучающей пространство повседневнаго опыта — а пока мы исключительно и держались подобнаго взгляда, — то вполнѣ естественно формулировать въ аксіомахъ тѣ свойства пространства, которыя лежатъ въ основѣ всѣхъ остальныхъ; а за установленіемъ ихъ мы должны обратиться къ интуиціи, къ совокупности доставляемыхъ ею фактовъ, о которыхъ говорили нѣсколько выше. Тогда все, что необходимо почерпнуть изъ интуиціи для созданія геометрической системы, будетъ вложено въ аксіомы; а дальше уже вступитъ въ свои исключительныя права логика. Однако было бы ошибочнымъ, исходя изъ указанныхъ соображеній, опредѣлять аксіомы, какъ самоочевидныя геометрическія истины, или повторять слова Канта: „Аксіомы суть апріорныя синтетическія основоположенія, поскольку онѣ *непосредственно достовѣрны*“ [1]). Подъ это опредѣленіе подошло бы множество предложеній, доставляемыхъ намъ интуиціей, которыя однако не относятся къ числу аксіомъ при обычномъ изложеніи. Авторы систематическихъ курсовъ геометріи, начиная съ Евклида, всегда предпочитали вывести одно предложеніе изъ другихъ, если только это не представляло какихъ-либо чрезвычайныхъ трудностей; они не стремились къ умноженію безъ нужды числа недоказываемыхъ положеній; вспомнимъ, что попытки доказать знаменитый 5-й постулатъ отчасти имѣли своимъ основаніемъ то обстоятельство, что „авторъ Началъ доказывалъ предложенія, несравненно болѣе очевидныя“; между тѣмъ эти послѣднія пришлось бы неизбѣжно причислить къ аксіомамъ, если бы мы приняли безъ всякихъ оговорокъ вышеприведенное опредѣленіе. Стремленіе всякой науки свести

---

[1]) „Критика“, стр. 408; курсивъ мой.

къ minimum'у свои недоказуемыя предпосылки надо признать совершенно законнымъ; не говоря уже о томъ, что такимъ путемъ достигается логическое изящество ея построенія и болѣе глубокое проникновеніе во внутреннюю связь ея теоремъ, этотъ minimum имѣетъ и практическое значеніе; примѣняя выводы отвлеченной теоріи къ совокупности реальныхъ объектовъ, необходимо убѣдиться, что въ послѣдней выполнены исходныя положенія первой; чѣмъ меньше ихъ, тѣмъ это легче, особенно если вспомнить, что о безусловно точномъ осуществленіи обыкновенно говорить не приходится; а приближенную оцѣнку надо по возможности освобождать отъ излишнихъ источниковъ погрѣшностей. Такимъ образомъ, къ опредѣленію аксіомъ, какъ истинъ самоочевидныхъ, надо во всякомъ случаѣ прибавить: „*необходимыхъ и достаточныхъ* для построенія геометріи“.

При обычной концепціи аксіомы являются непосредственными данными интуиціи. Эмпиристы, какъ Гельмгольцъ и Бенно-Эрдманъ [1]), признаютъ, что онѣ выражаютъ физическое свойство вещей; геометры переносятъ центръ тяжести на интуицію, не отрицая эмпирическаго происхожденія аксіомъ; такое опредѣленіе можно, напр., найти у Энрикеса [2]) и даже у Гильберта [3]), по которому аксіомы высказываютъ основные факты нашей интуиціи. Съ этимъ мнѣніемъ рѣшительно не согласенъ Клейнъ, и вышеизложенныя соображенія о неточности интуиціи, принадлежащія большей частью ему же, даютъ твердую основу его утвержденіямъ. Мы принуждены были отказать интуиціи въ непогрѣшимости, если даже дѣло шло о простѣйшихъ случаяхъ; причиной было то, что образы нашего пространственнаго представленія являются лишь грубыми и отдаленными подобіями тѣхъ объектовъ, надъ которыми оперируетъ чистая геометрія; образы такихъ простыхъ фигуръ, какъ кругъ, треугольникъ, прямая линія, не воспроизводятъ той тонкости строенія, которая вытекаетъ изъ ихъ дѣйствительныхъ опредѣленій; вспомнимъ, что пря-

---

[1]) См. книгу проф. Челпанова: „Проблема воспріятія пространства“.

[2]) „Vorlesungen über projective Geometrie“, p. 2.

[3]) „Grundlagen der Geometrie“, 3-te Auflage, p. 2.

мая созерцается нами, какъ весьма узкая полоска. Раздѣляя эти взгляды, надо быть послѣдовательнымъ и отказать интуиціи въ притязаніи на абсолютную точность даже тамъ, гдѣ рѣчь идетъ о простѣйшихъ фактахъ, дающихъ содержаніе аксіомамъ. Если прямая рисуется намъ въ видѣ хотя бы и очень узкой полоски, то мы отнюдь не можемъ отчетливо созерцать, что 2 прямыя всегда пересѣкаются въ одной точкѣ; при небольшомъ углѣ наклоненія ихъ мы будемъ созерцать совсѣмъ другое. Нельзя отрицать, что интуиція приводитъ насъ къ тому, чтобы формулировать положеніе о пересѣченіи 2 прямыхъ только въ одной точкѣ (или эквивалентное ему— объ опредѣленіи прямой 2 точками); но устанавливая это предложеніе во всей его математической общности, мы уже выходимъ за предѣлы всякой интуиціи. Прекрасный примѣръ въ указанномъ смыслѣ даетъ постулатъ параллелей; послѣдній не можетъ быть только констатированіемъ данныхъ непосредственнаго усмотрѣнія, ибо нашей интуиціи для сколько-нибудь отчетливаго обозрѣнія доступна лишь ограниченная и во всякомъ случаѣ конечная часть пространства; тогда какъ названное положеніе выходитъ за предѣлы всякаго конечнаго пространства и неизбѣжно связано съ идеей о безконечно-удаленныхъ его частяхъ; такой характеръ аксіомы параллелей признаетъ даже Энрикесъ, вообще настойчиво подчеркивающій эмпирическое происхожденіе предпосылокъ нашей науки [1]). Точно также постулаты непрерывности ни въ коемъ случаѣ не представляютъ непосредственнаго даннаго интуиціи въ той строгой формулировкѣ, какую только и знаетъ современная математика; всѣмъ требованіямъ пространственнаго представленія можно прекрасно удовлетворить съ помощью однихъ только раціональныхъ чиселъ и „раціональныхъ“ точекъ. Такимъ образомъ, мы можемъ принять опредѣленіе проф. Клейна [2]), гласящее: аксіомы суть требованія, благодаря которымъ мы отъ ограниченной точности интуиціи восходимъ къ безграничной точности чистой ма-

---

[1]) „Questioni“, p. 28: „...postulato delle parallele, che si riferisce allo spazio infinito, ed appare quindi un'osservazione estesa dal nostro stesso inteletto“.

[2]) „N. Eukl. Geom.“, p. 356.

тематики. Интуиція пространства позволяетъ намъ подмѣтить основныя положенія геометріи и даетъ поводъ къ формулировкѣ той или другой аксіомы; но высказывая послѣднюю во всей опредѣленности и общности, которая приличествуетъ предпосылкамъ нашей науки, мы уже выходимъ за предѣлы всякой возможной интуиціи. Оказывается, что значеніе интуиціи пошатнулось подъ вліяніемъ современной критики даже въ самой ея цитадели; аксіомы являются для насъ необходимыми и достаточными предпосылками геометріи, свободно устанавливаемыми во всей ихъ логической чистотѣ; а данныя интуиціи служатъ лишь внѣшнимъ поводомъ къ тому.

Послѣднія разсужденія незамѣтно привели насъ къ современной точкѣ зрѣнія на геометрію, какъ на отрасль *чистой* математики,—точкѣ зрѣнія, которая рѣзко отличается отъ прежней, когда подъ геометріей понимали науку, изучающую свойства реальнаго пространства. Послѣ открытія неевклидовыхъ системъ и другихъ „патологическихъ“ геометрій такое воззрѣніе должно было пасть; все яснѣе и яснѣе выступало убѣжденіе, что дѣло математики — въ томъ числѣ и геометріи—установить связь извѣстныхъ результатовъ съ извѣстными предпосылками; что же касается истинности самихъ предпосылокъ—въ частности сюда входитъ вопросъ объ истинныхъ свойствахъ нашего пространства,—то эти изслѣдованія уже выходятъ за предѣлы нашей дисциплины; здѣсь вступаютъ въ свои права теорія познанія, отчасти же и опытныя науки. По мѣткому выраженію Піери, геометрія стала „гипотетически-дедуктивной системой“; любая теорема состоитъ въ утвержденіи связи двухъ предложеній, въ утвержденіи слѣдованія одного изъ другого. Въ конечномъ счетѣ въ геометріи мы узнаемъ лишь, что такія-то предпосылки влекутъ за собою такія-то слѣдствія; что же касается до отдѣльнаго утвержденія предпосылокъ въ данной области реальныхъ объектовъ, а потому и отдѣльнаго утвержденія тамъ же всѣхъ слѣдствій изъ нихъ, то это, по мнѣнію Ресселя, является характернымъ признакомъ прикладной науки. Напр., теоремы обычной геометріи всѣ имѣютъ своей подразумѣваемой предпосылкой предложеніе: „если мы имѣемъ

дѣло съ евклидовымъ пространствомъ", т.-е., если мы поставили во главѣ систему аксіомъ, обычно характеризующихъ геометрію Евклида; если же мы присоединимъ сюда положеніе: „пространство нашего опыта есть евклидово", то получимъ возможность утверждать для этого пространства всѣ теоремы уже безъ всякихъ оговорокъ; но здѣсь мы покидаемъ почву чистой математики и переходимъ къ прикладной. Съ подобной точки зрѣнія геометрія является отвлеченно-логической системой, и мы въ правѣ свободно выбирать ея предпосылки, лишь бы онѣ были между собой согласуемыми и, конечно, необходимыми и достаточными для построенія данной теоріи; по прекрасному выраженію Г. Кантора „сущность математики заключается именно въ ея свободѣ" [1]); творецъ ученія о безконечности предлагаетъ вмѣсто обычнаго предиката „чистая" говорить: „свободная математика".

Въ выборѣ аксіомъ мы, такимъ образомъ, свободны; но само собою понятно, что не всякій выборъ будетъ цѣлесообразенъ съ точки зрѣнія практическихъ приложеній и даже въ интересахъ самой отвлеченной науки. Здѣсь уже намъ придется руководиться интуиціей, при ея помощи усмотрѣть ту систему аксіомъ, которая можетъ лечь въ основу дальнѣйшаго научнаго прогресса. Систематически отказывая интуиціи въ рѣшающемъ значеніи для математическихъ *разсужденій и доказательствъ*, мы принуждены тѣмъ не менѣе отвести ей высокое мѣсто въ выборѣ моментовъ, опредѣляющихъ общій ходъ научной работы: послѣдніе всегда устанавливались особымъ прозрѣніемъ геніальныхъ умовъ. Что же касается до рѣшающаго значенія интуиціи при доказательствахъ, то этотъ вопросъ даже не въ состояніи возникнуть, если принять новѣйшее ученіе о сущности геометріи; въ самомъ дѣлѣ, наша наука тогда является отвлеченно-логической системой, и обычная геометрія съ ея извѣстными всѣмъ точками, прямыми, плоскостями, ученіемъ о равенствѣ и т. п. будетъ лишь одной изъ возможныхъ иллюстрацій абстрактной теоріи; такъ, система, логически

[1]) Math. Ann. Bd. 21.

выведенная изъ аксіомъ Гильберта, допускаетъ множество различныхъ какъ пространственныхъ, такъ и непространственныхъ истолкованій [1]) Такимъ образомъ, интуиція можетъ доставлять здѣсь лишь иллюстраціи, отнюдь не связанныя необходимо съ существомъ дѣла; и основывать доказательства на нихъ очевидно нельзя: давно уже извѣстно, что comparaison n'est pas raison!

Можетъ однако показаться, что мы, предоставивъ интуиціи нѣсколько геніальныхъ прозрѣній — безъ сомнѣнія высокая миссія,—въ дальнѣйшемъ уже совершенно устраняемъ ее отъ созиданія геометріи; дѣйствительно, при желаніи безъ всякихъ иллюстрацій можно обойтись и только менѣе легкимъ путемъ прійти къ тѣмъ же результатамъ. Тѣмъ не менѣе подобный методъ, при всей своей законности, былъ бы нецѣлесообразнымъ: зачѣмъ лишать себя такого могучаго подспорья, каковымъ является наглядность всякаго рода? Надо только для предохраненія отъ ошибокъ отводить ей надлежащее мѣсто. При доказательствѣ каждой отдѣльной теоремы мы считаемъ возможнымъ отвести интуиціи мѣсто, въ общемъ напоминающее ея роль при обоснованіи всей геометріи. Только интуиція позволяетъ намъ обнять науку въ ея цѣломъ, понять выборъ ея исходныхъ предпосылокъ среди безчисленнаго множества возможностей, проникнуться ея отдаленными цѣлями, только интуиція дѣлаетъ насъ способными, по образному выраженію Пуанкарэ, на ряду съ работой каменщика постигнуть и планъ архитектора. Точно также и при доказательствѣ каждой отдѣльной теоремы знаніе однихъ лишь послѣдовательныхъ шаговъ дедукціи было бы неполнымъ; необходимо постигнуть внутреннее его единство, его общій планъ и, самое главное, тотъ способъ, которымъ мы примѣняемъ и комбинируемъ имѣющіяся въ нашемъ распоряженіи средства; одна только логика не дастъ намъ указанной общей концепціи, здѣсь—исключительная область интуиціи въ широкомъ смыслѣ этого слова. Итакъ, для интуиціи останется почетное мѣсто въ геометріи и при удовлетвореніи всѣхъ строгихъ требованій, предъявляемыхъ

[1]) См. книгу Веберъ-Вельштейна.

нынѣ къ построенію послѣдней; самъ великій Гауссъ, у котораго мы впервые находимъ стремленія въ духѣ современной аксіоматики (см. выше о понятіи „между"), считалъ коренной ошибкой изгнаніе всякой наглядности изъ геометріи; такъ, защищая въ одномъ журнальномъ отзывѣ воззрѣнія Канта на методъ геометріи, princeps mathematicorum утверждаетъ, что логическіе законы несомнѣнно примѣняются въ нашей наукѣ на каждомъ шагу, но безъ жизненной оплодотворяющей силы интуиціи „nur taube Blüthen treiben" [1]).

Съ вопросомъ объ интуиціи тѣсно связанъ и вопросъ о примѣненіи чертежей, которые хотя и не исчерпываютъ сущности интуиціи, но представляютъ для нея серьезную опору. Если, какъ мы видѣли выше, доказательство теоремъ должно вестись исключительно средствами логики, то чертежъ уже не является чѣмъ-то безусловно необходимымъ; вѣдь единственнымъ основаніемъ нашихъ разсужденій должны быть, за исключеніемъ общихъ законовъ формальной логики, лишь аксіомы и ранѣе доказанныя предложенія. Такого мнѣнія держится, напр., проф. Пашъ [2]): если не жалѣть труда и времени, то при доказательствѣ любого геометрическаго предложенія можно совсѣмъ обойтись безъ чертежа; только то доказательство безукоризненно, которое не потеряетъ своей убѣдительности, если отбросить соотвѣтствующій чертежъ. Мы имѣемъ осуществленіе подобныхъ воззрѣній у проф. В. Ф. Кагана, который въ обширномъ „Опытѣ обоснованія евклидовой геометріи" [3]) совсѣмъ не пользуется чертежами; своей кульминаціонной точки они достигаютъ въ символическомъ исчисленіи итальянскаго геометра Пеано. Существуютъ однако и діаметрально противоположные взгляды; мы уже имѣли случай сослаться на проф. Клейна, который полагаетъ, что „при дѣйствительно геометрическомъ мышленіи интуиція пространства сопровождаетъ насъ на каждомъ шагу" [4]); въ другомъ мѣстѣ онъ говоритъ еще рѣши-

[1]) Engel und Stäckel „Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss", p. 221.

[2]) Pasch „Vorlesungen über neuere Geometrie", p. 43, 45.

[3]) „Основанія геометріи", т 1.

[4]) Klein „N.—Eukl. Geom.", p. 355.

тельнѣе: „для меня во всякомъ случаѣ невозможно вести геометрическое изслѣдованіе чисто логически, не удерживая постоянно передъ глазами соотвѣтствующей фигуры“ [1]). Дѣлая эти сопоставленія, нельзя не вспомнить принадлежащаго Пуанкарэ дѣленія всѣхъ математиковъ на два типа: аналитиковъ и геометровъ; извѣстно, что французскій ученый считаетъ своего нѣмецкаго собрата рѣзко выраженнымъ примѣромъ второго типа. Мы полагаемъ, что, какъ и всегда, истина лежитъ по серединѣ: не приписывая чертежамъ рѣшающаго значенія при доказательствѣ, было бы однако нецѣлесообразно лишать себя такого могучаго вспомогательнаго средства. Чертежъ, построенный соотвѣтственно допущеніямъ той или другой теоремы, позволяетъ намъ однимъ взглядомъ обнимать эти подчасъ весьма сложныя данныя; всякое построеніе, сдѣланное въ теченіи доказательства, закрѣпляется на чертежѣ, такъ что всѣ отношенія между различными элементами имѣются у насъ передъ глазами. Интуиція, подкрѣпленная наглядной иллюстраціей геометрическихъ понятій, лучше исполнитъ свою наводящую и объединяющую роль; а при послѣдовательномъ проведеніи требованія: „ничего не принимать на вѣру безъ достаточнаго логическаго обоснованія“, индивидуальныя, чувственныя свойства пространственныхъ образовъ не повредятъ логической чистотѣ и общности нашихъ концепцій.

Итакъ, гдѣ дѣло идетъ объ открытіи новыхъ истинъ, о проложеніи новыхъ путей въ наукѣ, объ установленіи конечныхъ цѣлей нашего знанія, тамъ мѣсто интуиціи; она даетъ геніальнымъ людямъ блестящія прозрѣнія въ будущее; здѣсь творчество математика родственно творчеству поэта [2]). Затѣмъ наступаетъ вторая стадія научной работы: надо закрѣпить новое пріобрѣтеніе, поставить его въ связь съ другими, сдѣлать его доступнымъ для познанія всѣхъ и каждаго; единая логика вступаетъ здѣсь въ свои права.

Словомъ, *интуиціи — свобода исканія, логикѣ — полнота доказательства*.

---

[1]) Math. Ann. Bd 37, p. 571.

[2]) См., напр., Voss „Ueber das Wesen der Mathematik“, p. 92.

Исчисленіе отношеній, какъ часть математической логики.

Les mathematiciens ont autant besoin d'estre philosophes que les philosophes d'estre mathematiciens.

Leibniz.

1. Всматриваясь въ развитіе любой науки, можно замѣтить чередованіе двухъ періодовъ, отличающихся другъ отъ друга тѣми интересами, которые занимаютъ преобладающее положеніе: одинъ характеризуется открытіемъ и накопленіемъ новыхъ фактовъ, другой—желаніемъ разобраться въ нихъ и критически разсмотрѣть примѣнявшіеся методы; здѣсь на первый планъ выступаютъ уже вопросы, обычно опредѣляемые, какъ философскіе. Смѣна обоихъ періодовъ происходитъ вполнѣ естественнымъ и даже необходимымъ путемъ: накопленіе фактовъ приводитъ къ стремленію систематизировать ихъ, а философская критика методовъ всегда служитъ могучимъ толчкомъ къ дальнѣйшему прогрессу научнаго знанія.

Восемнадцатый вѣкъ былъ для математики временемъ безпримѣрныхъ успѣховъ, подготовленныхъ всѣмъ предшествовавшимъ ея развитіемъ; только что открытые методы анализа безконечно-малыхъ безъ труда справлялись съ задачами, считавшимися прежде классическими по своей трудности. Тѣмъ не менѣе вопросы полнаго и строгаго обоснованія новыхъ областей математики были далеки большинству ученыхъ того времени. Хотя и раздавались кое-гдѣ голоса, указывавшіе, что не все обстоитъ благополучно съ различными

примѣненіями дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій,—голоса, находившіе даже нѣкоторыя противорѣчія въ ихъ основахъ, но они должны были умолкнуть передъ неоспоримымъ фактомъ—невиданнымъ прогрессомъ какъ самой математики, такъ и смежныхъ съ нею наукъ. Великіе ученые того времени—ихъ имена извѣстны и дороги каждому математику,—руководясь часто геніальнымъ прозрѣніемъ болѣе, чѣмъ строго обоснованными разсужденіями, завѣщали намъ великія открытія и великія идеи, служащія и до сего времени путеводной звѣздой; тѣмъ не менѣе, въ ихъ трудахъ мы находимъ подчасъ такія разсужденія, даже такія формулы, которыя рѣжутъ современный, болѣе изощренный взглядъ.

Конечно, рано или поздно должна была наступить реакція: періодъ накопленія знаній долженъ былъ уступить мѣсто другому, заполненному болѣе философскими интересами; не могли также оставаться долго незамѣченными ошибки и пробѣлы въ обычныхъ изслѣдованіяхъ, пользовавшихся понятіями безконечно-малыхъ. Этому способствовало еще и то обстоятельство, что въ теченіе первой половины XIX-го вѣка были открыты новыя отрасли математики, которыя неизбѣжно повели къ критикѣ ея основъ. Ограничиваясь главнѣйшимъ, укажемъ, что развитіе геометріи положенія и въ особенности неевклидовыхъ системъ вызвало полный переворотъ въ воззрѣніяхъ на обоснованіе геометріи; оно подготовило современный взглядъ на геометрію, какъ на абстрактно-логическую систему, стоящую совершенно въ сторонѣ отъ вопроса объ истинныхъ свойствахъ реальнаго пространства. Точно также развитіе анализа повело къ переработкѣ его элементовъ; со времени Вейерштрасса намъ стали извѣстны примѣры функцій, опрокидывающихъ наивно-непосредственныя представленія XVIII вѣка о ихъ непрерывности, дифференцируемости и т. п.; теорія совокупностей въ работахъ Г. Кантора поставила цѣлый рядъ новыхъ вопросовъ, не находившихъ себѣ отвѣта въ предыдущихъ изслѣдованіяхъ; теорія группъ, занявшая выдающееся положеніе со времени работъ С. Ли, въ связи съ другими дисциплинами, заставила отбросить опредѣленіе математики, какъ науки о величинахъ; она выдвинула идею порядка, которая съ легкой

руки Дедекинда получаетъ все бо̀льшее значеніе при обосно ваніи нашей науки.

Все это повело къ тому, что, начиная со 2-ой половины истекшаго столѣтія, въ математикѣ возникло сильное критическое теченіе, посвятившее много труда выясненію принципіальныхъ, философскихъ вопросовъ и поведшее къ переработкѣ основъ математическаго знанія—переработкѣ, не закончившейся и по сіе время. Въ сущности зародыши современныхъ идей мы находимъ у Лейбница [1]), за исключеніемъ развѣ вопросовъ обоснованія анализа безконечно-малыхъ, находившихся у него въ неразрывной связи съ специфическими особенностями его философіи; но идеи Лейбница были слишкомъ чужды его современникамъ и вскорѣ были окончательно вытѣснены ученіемъ Канта; ихъ снова пришлось мало-по-малу открывать по мѣрѣ развитія науки. На ряду съ болѣе или менѣе извѣстными именами творцовъ неевклидовой геометріи, на ряду съ упомянутыми уже именами Вейерштрасса, Дедекинда, Г. Кантора, много потрудившихся надъ окончательной обработкой анализа, здѣсь необходимо назвать еще имя Грассмана, который одинъ изъ первыхъ съ 1844 г. проводилъ новыя воззрѣнія на сущность математики, какъ чисто формальной науки. Другая формальная наука—логика—отграничивается отъ первой, по Грассману, способомъ, подъ которымъ подписались бы современные изслѣдователи вопроса: „логика есть наука объ общихъ законахъ мышленія; математика есть наука о различныхъ частныхъ построеніяхъ человѣческой мысли“ [2]).

Критическое направленіе въ математикѣ совпало съ неожиданнымъ прогрессомъ другой дисциплины, которая дотолѣ казалась достигшей возможнаго для нея совершенства. Корни реформы логики опять-таки восходятъ къ Лейбницу; достаточно перелистать „Formulaire“ Пеано, чтобы замѣтить, какъ онъ пестритъ ссылками на Лейбница [3]); и опять-таки XIX-му вѣку пришлось снова открывать идеи Лейбница.

---

[1]) См. Couturat „La logique de Leibniz“.

[2]) См. Каганъ „Основанія геометріи“, т. II, стр. 59—68.

[3]) См. также Couturat „La logique de Leibniz“.

По мнѣнію Кутюра [1]), логика нашла пути для своего развитія, присматриваясь ближе къ способамъ разсужденій, весьма обычнымъ въ математикѣ; что послѣдніе не всегда укладываются въ классическія формы силлогизма, признавалъ уже Лейбницъ. Въ подтвержденіе только что сказанному часто ссылаются на особый случай доказательства посредствомъ deductio ad absurdum, которымъ пользовался еще Евклидъ и который былъ выдвинутъ Саккери—однимъ изъ предтечъ неевклидовой геометріи. Основа его такова: „даже допуская предположительно ложность предложенія, которое мы желали бы доказать, мы все же можемъ прійти къ выводу, что оно вѣрно“. Эту идею Саккери и примѣняетъ къ изслѣдованію зависимости V-го постулата отъ другихъ предпосылокъ геометріи [2]). Полное освѣщеніе подобныхъ заключеній даетъ лишь современная символическая логика или, какъ ее еще иначе называютъ,—логистика. Недостаточность ученія о силлогизмѣ признаютъ и нѣкоторые логики, какъ напр. Лотце, при чемъ послѣдній также имѣлъ въ виду особенности математическихъ разсужденій [3]). Весьма важной причиной, почему „традиціонная“ логика не въ состояніи объяснить всѣхъ методовъ математическаго мышленія, является ея ученіе о возможности привести любое сужденіе къ типу „субъектъ-предикатъ“; тогда какъ, по мнѣнію Весселя—творца особой логики отношеній—признаніе несводимости къ подобному виду всѣхъ предложеній, утверждающихъ отношенія, служитъ необходимымъ условіемъ сколько-нибудь состоятельной философіи математики. Нетрудно видѣть, что здѣсь открывается для логики совершенно новое поле изслѣдованія.

Помимо основныхъ идей, реформаторы логики заимствовали у математиковъ и внѣшнюю форму для ихъ выраженія—особый символизмъ; хотя послѣдній является второстепеннымъ признакомъ, отсутствіе котораго не измѣнило бы ни въ чемъ существенномъ новыя пріобрѣтенія логики, однако

---

[1]) Couturat „Les Principes des Mathématiques“, p. 2.

[2]) Бонола „Неевклидова геометрія“, пер. А. Р. Кулишера; стр. 19, 32.

[3]) Цитирую по Hölder'y „Anschauung und Denken in der Geometrie“, p. 41.

нельзя забывать, что тотъ или другой символизмъ имѣетъ не послѣднее мѣсто въ дѣлѣ усвоенія и примѣненія новыхъ идей; достаточно вспомнить, какую роль сыграло удачное обозначеніе Лейбница въ распространеніи методовъ анализа безконечно-малыхъ. Авторы одного изъ послѣднихъ систематическихъ изложеній интересующей насъ науки, о которомъ намъ придется не мало говорить [1]), въ предисловіи указываютъ, что символизмъ явился необходимостью при ихъ изслѣдованіяхъ, а не только способомъ систематическаго изложенія. Символизмъ позволилъ подвергнуть математическому трактованію такія области мысли, которыя дотолѣ стояли совершенно въ сторонѣ отъ методовъ нашей науки (напримѣръ: отношенія различія, подчиненія между классами и вообще весь обычный матеріалъ логики). Особенную услугу оказываетъ символизмъ человѣческой мысли, когда послѣдняя забирается на высоту послѣднихъ абстракцій, исходныхъ точекъ логическаго мышленія; въ силу крайней отвлеченности предмета, воображеніе уже безсильно руководить нами, и вотъ тогда одни только простѣйшіе символы и основные законы ихъ комбинацій въ состояніи дать точки опоры для интуиціи, даже въ самой ея наглядной, пространственной формѣ.

Какъ бы то ни было, за послѣднія 50—60 лѣтъ мы имѣемъ цѣлый рядъ работъ, посвященныхъ расширенію обычнаго матеріала логики. Онѣ открываются книгой Буля „The laws of thought“ (1854 г.) и работами Де-Моргана, у котораго находимъ первые намеки на самостоятельное исчисленіе отношеній; послѣднее впервые получило систематическое развитіе у Пирса, и всѣ предыдущія изслѣдованія были резюмированы и продолжены въ 3-томныхъ лекціяхъ Шредера по „алгебрѣ логики“ [2]). Здѣсь можно считать закончившимся

---

[1]) Whitehead and Russell „Principia Mathematica“; vol. I, 1910, vol. II, 1912. Третій томъ, содержащій окончаніе теоріи рядовъ и геометрію, еще не вышелъ. Въ дальнѣйшемъ эта книга цитируется, какъ Pr. M.

[2]) Формальная сторона новаго исчисленія, за исключеніемъ теоріи отношеній, разобрана въ книгѣ Whitehead: „A treatise on Universal Algebra“ (book II: „The Algebra of symbolic Logic“),—разобрана подъ угломъ зрѣнія общаго ученія о знакоположеніи и основныхъ свойствахъ различныхъ операцій.

первый періодъ развитія символической логики, который характеризуется тѣмъ, что во главу клалось исчисленіе классовъ; благодаря не совсѣмъ удачному символизму, названныя работы для математики прошли почти безслѣдно. Картина мѣняется, когда итальянскій математикъ Пеано берется одновременно за обоснованіе логистики и математики. Начиная съ 1889 г., появляется цѣлый рядъ изданій его основного труда „Formulaire de Mathématiques“, въ которомъ послѣ изложенія основъ символической логики нѣкоторые математическіе вопросы (ариѳметика, аналитическія функціи, комплексныя числа, векторы) трактуются съ помощью новаго символическаго языка; при помощи послѣдняго учениками Пеано написано значительное число статей, частью появившихся въ особомъ журналѣ [1]). Чуть-ли не главной заслугой Пеано является изобрѣтеніе удачнаго символизма, позволяющаго примѣнять на практикѣ положенія логистики; этотъ символизмъ легъ въ основу всѣхъ дальнѣйшихъ изслѣдованій вопроса. Другимъ важнымъ нововведеніемъ было предоставленіе первенствующаго мѣста исчисленію предложеній по сравненію съ исчисленіемъ классовъ [2]). Нельзя не признать указанную реформу весьма существенной: всякія высказыванія о классахъ суть предложенія и потому предполагаютъ уже извѣстной ихъ теорію. Однако трудъ Пеано не исчерпалъ всѣхъ трудностей до конца; такъ, у итальянскаго геометра нѣтъ самостоятельнаго исчисленія отношеній, которое, какъ увидимъ ниже, безусловно необходимо для обоснованія математики. Честь построенія указаннаго отдѣла логики выпала на долю Рёсселя [3]); въ его послѣднихъ трудахъ, написанныхъ въ сотрудничествѣ съ Уайтхедомъ, мы уже

---

[1]) „Rivista di Matematica“.

[2]) Если перелистать „Formulaire“, то можно, пожалуй, прійти къ противоположному выводу, ибо рѣчь постоянно идетъ о классахъ; но дѣло въ томъ, что основныя соотношенія между классами, напримѣръ: тождество, подчиненіе, опредѣляются съ помощью соотвѣтственныхъ соотношеній между предложеніями (см. ниже).

[3]) „The Principles of Mathematics,“ 1903; въ дальнѣйшемъ эта книга цитируется, какъ Pr. См. также его „Sur la logique des relations“, Revue de Mathématiques, t. VII, p. 115; все это резюмировано въ Pr. M.

значительно ближе къ завершенію великой задачи, поставленной въ концѣ истекшаго столѣтія: подвести прочный логико-философскій фундаментъ подъ ученія современной математики. Необходимо еще назвать здѣсь имя нѣмецкаго ученаго Фреге, который въ своихъ работахъ проводилъ по существу тѣ же философскія идеи, что и Рессель; послѣдній признаетъ, что иногда ему приходится комбинировать идеи Фреге съ болѣе удачнымъ символизмомъ Пеано. И въ Россіи мы имѣли работника на нивѣ символической логики въ лицѣ профессора казанскаго университета Порѣцкаго; очевидно, въ Казани еще живы философскія традиціи, завѣщанныя Лобачевскимъ.

Несмотря на то, что почти всѣ культурныя націи внесли свою долю въ построеніе символической логики, какъ необходимой основы математическихъ наукъ, работу едва-ли можно считать законченной. Такъ, намъ извѣстно нѣсколько попытокъ Ресселя изложить логистику, исходя изъ небольшого числа первоначальныхъ понятій и предложеній; и въ каждой изъ этихъ статей кладутся въ основу иныя системы основныхъ понятій и аксіомъ [1]). Дѣйствительно, изслѣдованія основаній логики подвержены спеціальнымъ трудно-

---

[1]) Мы имѣемъ въ виду: 1) названныя уже „Principles of Math." (1903); 2) „The theory of implication" [American Journal of Math. 1906]; 3) „Mathematical Logic as based on the theory of types" [ib., 1908]; 4) „Principia Mathematica" 1910—1912, разрабатываемыя вмѣстѣ съ Whitehead'омъ. Эти статьи, расположенныя въ хронологическомъ порядкѣ, даютъ представленіе о той эволюціи, которую претерпѣли воззрѣнія авторовъ, — эволюціи, вызванной необходимостью устранить подводные камни, о которые грозила разбиться попытка построенія символической логики. Мало-по-малу выдвинулась такъ-наз. „теорія типовъ", которая проникаетъ всецѣло послѣднюю работу и обусловливаетъ ея подчасъ значительныя разногласія съ первой. Авторы полагаютъ, что имъ наконецъ удалось достигнуть удовлетворительнаго разрѣшенія всѣхъ поставленныхъ вопросовъ; этому соотвѣтствуетъ и догматическое изложеніе „Principia" въ противоположность критическому духу, которымъ проникнуты „Principles". Такъ-ли это, судить до полнаго окончанія работы трудно; насъ преимущественно интересуетъ вопросъ обоснованія геометріи, который отложенъ до третьяго тома. Наибольшія трудности представляло свободное отъ противорѣчій (см. ниже) ученіе о числѣ (конечномъ и безконечномъ); повидимому авторамъ это удалось.

стямъ по сравненію, напр., съ вопросомъ о принципахъ геометріи; Рессель отдаетъ себѣ въ этомъ полный отчетъ. Указывая предпосылки, на которыхъ основано исчисленіе предложеній, онъ подчеркиваетъ [1]), что рѣшить вопросъ о ихъ независимости не такъ-то легко. Общій путь для такихъ изысканій извѣстенъ: чтобы доказать независимость аксіомы *A* отъ аксіомъ *B*, *C*, *D*..., надо установить возможность отрицанія *A* при утвержденіи всѣхъ остальныхъ; другими словами, надо доказать согласуемость системы: *non—A*, *B*, *C*, *D*... Положимъ, мы примѣняемъ указанный методъ для изслѣдованія независимости логическихъ принциповъ; тогда *A*, *B*, *C*, *D*... суть не что иное, какъ основные законы мышленія; и отрицаніе одного изъ нихъ въ случаѣ, если оно дѣйствительно выражаетъ необходимый законъ мысли, или окажется по существу невозможнымъ, или, при послѣдовательномъ проведеніи этого отрицанія, приведетъ къ слѣдствіямъ, которыя лишь кажущимся образомъ вытекаютъ изъ предпосылокъ: вѣдь мы отказались отъ одного изъ основныхъ законовъ мышленія! Вотъ почему и въ „Principia Mathematica“ авторы ограничиваются утвержденіемъ, что ихъ предпосылки только достаточны для построенія логики. Здѣсь намъ невольно вспоминается недавній докладъ г-на Васильева въ Петербургскомъ философскомъ обществѣ [2]); уважаемый докладчикъ между прочимъ ставитъ себѣ задачу изслѣдовать законы мышленія съ точки зрѣнія ихъ взаимной связи, при чемъ за образецъ беретъ подобныя же изслѣдованія въ области геометріи. Извѣстно, что Лобачевскій, желая выяснить зависимость V-го постулата Евклида отъ другихъ предпосылокъ обычной геометріи, отвергъ его и вывелъ всевозможныя слѣдствія, вытекавшія изъ такого видоизмѣненія системы аксіомъ; такъ какъ нашъ знаменитый геометръ при этомъ нигдѣ не запутался въ противорѣчіяхъ, то независимость аксіомы параллелей была доказана, и создалась неев-

---

[1]) Pr. p. 15.

[2]) Докладъ напечатанъ въ августовской книжкѣ Журн. Мин. Народ. Просв. за 1912 г.: Н. А. Васильевъ «Воображаемая (неаристотелева) логика».

клидова геометрія. Въ настоящее время по этому образцу производится цѣлый рядъ изслѣдованій, и ихъ-то имѣлъ въ виду г. Васильевъ. Однако намъ кажется, что примѣръ геометріи можетъ оказаться неподходящимъ, разъ дѣло идетъ о принципахъ логики; неевклидовы геометріи оказались возможными, но это ничего не говоритъ въ пользу существованія „неаристотелевыхъ“ логикъ. Въ самомъ дѣлѣ, какъ мы убѣждаемся въ возможности неевклидовой геометріи? То обстоятельство, что Лобачевскій не натолкнулся на противорѣчіе, еще ничего не доказываетъ: быть можетъ онъ недостаточно далеко продолжилъ свои выводы, а при дальнѣйшемъ развитіи его системы мы окажемся въ состояніи вскрыть противорѣчивость ея предпосылокъ. Полное доказательство ведется въ настоящее время инымъ путемъ. Вдаваться въ подробности было бы сейчасъ неумѣстно; отмѣтимъ только, что суть дѣла заключается обычно въ построеніи особыхъ аналитическихъ пространствъ, въ которыхъ осуществляются аксіомы, требующія доказательства своей согласуемости; другими словами, вопросъ о непротиворѣчивости аксіомъ геометріи сводится къ аналогичному вопросу объ аксіомахъ ариѳметики. Такимъ образомъ, въ своихъ изслѣдованіяхъ геометръ имѣетъ твердую опору въ анализѣ и кромѣ того, конечно, въ логикѣ, какъ ученіи о законахъ мышленія вообще. Что же послужитъ точкой опоры для логика, пожелавшаго разсмотрѣть взаимную связь основныхъ предложеній своей науки и руководиться при этомъ примѣромъ геометра? Будетъ ли онъ въ состояніи отрѣшиться отъ примѣненія какого-либо подлиннаго закона мысли подобно тому, какъ могъ Лобачевскій отбросить постулатъ параллелей? [1]).

---

[1]) Г-нъ Васильевъ предвидитъ подобное возраженіе (стр. 241): «Можно мнѣ возразить такъ: «Вы ссылаетесь на возможность воображаемой геометріи. Однако воображаемая геометрія создается логикой. Чѣмъ же будетъ создаваться ваша воображаемая логика?» На это отвѣчу: *логикой*. Въ логикѣ есть принципы, операціи, общія всѣмъ логикамъ вообще и возвышающіяся надъ отдѣльными логиками, воображаемой и дѣйствительной»? Но какъ вскрыть эти принципы? Какъ установить ихъ общезначимость. Здѣсь неизбѣжно придется опереться на реальную логику со всѣми законами мышленія и формами познанія—настолько реальную, что по мнѣнію

Подобныя сомнѣнія, по нашему убѣжденію, значительно усложняютъ исканія въ области элементовъ логики и подчасъ въ состояніи заставить изслѣдователя въ безсиліи опустить руки, ибо они примѣнимы не только къ сравнительно второстепенному вопросу о независимости постулатовъ. Тѣмъ не менѣе, переходя къ конкретнымъ вопросамъ, мы видимъ, что кое-что создано и на этой зыбкой почвѣ и заслуживаетъ болѣе близкаго знакомства.

Въ послѣднее время трактаты, посвященные логистикѣ, подверглись жестокой критикѣ со стороны Пуанкарэ [1]), а само собой понятно, что нельзя игнорировать мнѣнія одного изъ властителей думъ современныхъ математиковъ. Впрочемъ мы принуждены ограничиться лишь общими замѣчаніями, такъ какъ болѣе детальное разсмотрѣніе его критики отвлекло бы насъ далеко въ сторону [2]); такъ, напр., одна изъ основныхъ идей Пуанкарэ заключается въ томъ, что въ математикѣ существенную и специфическую роль играютъ заключенія, построенныя на такъ-наз. принципѣ математической индукціи; а самъ этотъ принципъ, по мнѣнію знаменитаго ученаго, есть одно изъ кантовскихъ синтетическихъ сужденій a priori и не сводится на чисто логическія операціи. Между тѣмъ Рессель считаетъ разсматриваемый принципъ частью самаго опредѣленія *конечнаго* цѣлаго числа. Если попытаться рѣшить указанный споръ, то нужно разобраться въ различныхъ опредѣленіяхъ понятія числа—вопросъ, который въ состояніи заполнить особое изслѣдованіе. Въ общемъ справедливость нѣкоторыхъ упрековъ Пуанкарэ надо признать, и это объясняется тѣмъ, что логистика находится еще въ состояніи созиданія; ея творцы вынуждены еще искать наиболѣе подходящую систему предпосылокъ; удивительно ли, что можно подчасъ упрекнуть ихъ въ противо-

---

проф. Лапшина всякое примѣненіе законовъ мышленія обусловлено даже присущими намъ формами пространства и времени. При такомъ положеніи дѣла намъ все-таки представляется сомнительнымъ, чтобы изслѣдователь *на самомъ дѣлѣ* могъ отрѣшиться отъ одного изъ основныхъ законовъ мысли.

[1]) «Наука и методъ» (изд. Mathesis), стр. 182—257.

[2]) Подробнѣе воззрѣнія Пуанкарэ разобраны въ приложеніи.

рѣчіяхъ, и не такъ ли обстояло дѣло и съ первыми шагами анализа безконечно-малыхъ? Одной изъ причинъ, заставившей Росселя нѣсколько разъ мѣнять свое изложеніе принциповъ символической логики, служитъ извѣстное противорѣчіе, которое было найдено въ ученіи Кантора о трансфинитныхъ числахъ; его можно формулировать различнымъ образомъ и притомъ оставаясь въ области чистой логики; въ послѣднемъ случаѣ оно указываетъ на нѣкоторыя трудности, связанныя съ понятіемъ класса. Рессель пытается разрѣшить указанное противорѣчіе съ помощью „теоріи типовъ“; но Пуанкарэ ошибается, утверждая, что „на карту поставлены только канторизмъ и логистика“ [1]). Разъ дѣло идетъ о понятіи класса—основномъ и неизбѣжномъ понятіи человѣческаго мышленія,—то не только вся математика, но и все наше знаніе заинтересованы въ удовлетворительномъ разрѣшеніи возникающихъ трудностей; теперь—это одинъ изъ „проклятыхъ вопросовъ“, связанныхъ съ обоснованіемъ логики. Не можемъ мы также согласиться съ мнѣніемъ, что принципы аналитической логики „будутъ тождествами или опредѣленіями“, и „все сведется къ безконечной тавтологіи“. Это—старый вопросъ объ аналитическихъ и синтетическихъ сужденіяхъ, который современные авторы склонны рѣшать въ смыслѣ признанія синтетическими всѣхъ сужденій, въ томъ числѣ и чисто логическихъ [2]).

Чтобы выяснить наше собственное отношеніе къ предмету, начнемъ съ указанія троякой цѣли математической логики, какъ она рисуется авторамъ „Principia“ (въ этой работѣ терминъ „математическая“ предпочитается прежнему „символическая“). Изслѣдованія въ области математической логики должны, во-первыхъ, произвести возможно полный анализъ ея основъ; во-вторыхъ,—дать точное символическое выраженіе предложеніямъ математики, и въ-третьихъ,—указать средства для избѣжанія противорѣчій, которыя были нерѣдки въ символической логикѣ и теоріи совокупностей. Вторая

---

[1]) Пуанкарэ, l. c., стр. 247. О противорѣчіи см. ниже.

[2]) См., напр : Н. Лосскій «Введеніе въ философію», ч. I, стр. 115—118, 247—248, 253; Russell «The philosophy of Leibniz», § 11.

цѣль—наиболѣе близка сердцу математика и осуществляется болѣе простыми средствами; необходимость считаться съ двумя остальными значительно усложняетъ дѣло. Наше положеніе сейчасъ болѣе выгодно. Мы ставимъ себѣ цѣлью рѣшеніе нѣкоторыхъ вопросовъ обоснованія геометріи; съ этой точки зрѣнія наиболѣе важно т.-наз. исчисленіе отношеній, которому мы и удѣлимъ значительное мѣсто; все остальное подлежитъ разсмотрѣнію лишь постольку, поскольку оно обуславливаетъ пониманіе теоріи отношеній. Поэтому читатель не найдетъ въ послѣдующемъ систематическаго изложенія математической логики (у Рёсселя и Уайтхеда въ вышедшихъ пока двухъ томахъ уже имѣется 1438 страницъ!); мы выяснимъ основные пункты и, отославъ за подробностями къ цитированнымъ работамъ съ ихъ удивительной архитектоникой, посвятимъ (въ слѣдующей статьѣ) исключительное вниманіе введенію идеи порядка въ геометрію [1]).

2. Символическая или формальная логика есть изученіе различныхъ общихъ типовъ дедукціи [2]). Она дѣлится на 3 части: исчисленіе предложеній, исчисленіе классовъ и исчисленіе отношеній. Начнемъ съ перваго.

Въ основѣ всякой дедуктивной теоріи должны лежать такія понятія и предложенія, которыя уже не поддаются опредѣленіямъ и доказательствамъ и наз. первоначальными. Ознакомимся съ этими основами символической логики по наиболѣе полному и систематическому ея изложенію, т.-е. по книгѣ Рёсселя и Уайтхеда. Замѣтимъ, что авторы совсѣмъ не считаются съ требованіемъ очевидности аксіомъ. Данная система предпосылокъ прежде всего должна быть достаточной для вывода изъ нея всѣхъ предложеній данной дисциплины, принимаемыхъ нами за истинныя; кромѣ того, мы должны быть такъ или иначе увѣрены въ томъ, что изъ данныхъ предпосылокъ нельзя получить завѣдомо ложнаго

---

[1]) Хорошимъ введеніемъ въ символическую логику можетъ послужить недавно вышедшая книга: A. Padoa „La logique déductive dans sa dernière phase de développement“; она прекрасно выясняетъ необходимость такого болѣе изощреннаго орудія, какимъ является математическая логика. Изложеніе ведется вполнѣ въ духѣ итальянской школы.

[2]) Pr., p. 10.

слѣдствія. Очевидны-ли сами аксіомы, или нѣтъ, это—второстепенный вопросъ [1]). Это замѣчаніе необходимо имѣть въ виду при чтеніи современныхъ работъ, посвященныхъ принципамъ математики.

Первоначальныя понятія суть тѣ, которыя въ данной системѣ принимаются безъ опредѣленій и служатъ основой всѣхъ дальнѣйшихъ опредѣленій. Хотя ихъ нельзя, такимъ образомъ, опредѣлить, однако приходится пояснять ихъ, чтобы читателю было ясно, о чемъ собственно идетъ рѣчь, чтобы въ его умѣ возникла строго соотвѣтственная мысль. На первомъ мѣстѣ въ числѣ первоначальныхъ понятій фигурируетъ *предложеніе* [2]); для поясненія можно сказать, что подъ предложеніемъ мы понимаемъ все то, что можетъ быть истиннымъ или ложнымъ; такъ напримѣръ: „Сократъ—человѣкъ“, „число 2—человѣкъ“ суть предложенія; но „x есть человѣкъ“ не представляетъ собою предложенія, такъ какъ оно ни истинно, ни ложно, пока x остается неопредѣленнымъ объектомъ,—тѣмъ, что называется перемѣнной; но какъ только вмѣсто x мы подставимъ въ предыдущее выраженіе понятіе, обозначающее вполнѣ опредѣленный объектъ („Сократъ“, „число 2“), то сейчасъ же получимъ предложеніе. Такія выраженія, содержащія одну или нѣсколько перемѣнныхъ и становящіяся предложеніями при подстановкѣ вмѣсто этихъ перемѣнныхъ какихъ-либо постоянныхъ, наз. *предложительными функціями* (propositional function); здѣсь мы приходимъ ко второму основному понятію разсматриваемой системы. Предложительныя функціи обозначаются такъ же, какъ и математическія; отмѣтимъ теперь же, что подъ φx, ψx и т. д. будемъ понимать какое-нибудь значеніе соотвѣтствующихъ функцій; если же наше вниманіе останавливается на самихъ функціяхъ, какъ извѣстнаго рода зависимостяхъ, то будемъ обозначать ихъ чрезъ $\varphi\hat{x}$, $\psi\hat{x}$ и т. д.

[1]) Pr. M., p. 62.

[2]) Какъ извѣстно, англійскіе логики предпочитаютъ говорить о предложеніяхъ, а не о сужденіяхъ. Собственно въ „Principia“ сначала вводится понятіе „элементарнаго предложенія“, которое не содержитъ никакихъ перемѣнныхъ (см. ниже); впослѣдствіи все, доказанное для элементарныхъ предложеній, обобщается на случай какихъ-угодно предложеній. Различныя предложенія будемъ обозначать буквами: p, q, r...

Далѣе мы встрѣчаемся съ понятіемъ *утвержденія;* здѣсь имѣется въ виду разница между предложеніями, истину которыхъ мы (ошибочно или правильно) утверждаемъ, и предложеніями, которыя только разсматриваются, какъ извѣстный комплексъ идей; напримѣръ: „Цезарь умеръ“ и „Цезарь умеръ—есть предложеніе“; въ обоихъ указанныхъ случаяхъ наше отношеніе къ мысли „Цезарь умеръ“ совершенно различно. Для того, чтобы отличить предложенія, утверждаемыя отъ неутверждаемыхъ, вводится особый знакъ, который и сопровождаетъ каждое предложеніе перваго рода. Въ настоящей статьѣ намъ нѣтъ основанія бояться подобнаго смѣшенія, а потому, для упрощенія письма, пользоваться этимъ знакомъ не будемъ.

Примемъ за одно изъ основныхъ понятій еще *отрицаніе* предложенія (которое условимся выражать съ помощью символовъ: $-p$, $-q$...), а также *логическую сумму* или *раздѣленіе* 2 предложеній (которое обозначаемъ черезъ $p \vee q$). Послѣдній символъ служитъ для выраженія мысли: „p или q“, при чемъ не исключается возможность одновременной истинности обоихъ. Къ этому списку надо еще прибавить нѣкоторыя другія первоначальныя понятія, появляющіяся впервые въ теоріи классовъ, какъ-то: *индивидуумъ* и еще 2 или 3 другихъ.

Теперь мы въ состояніи опредѣлить понятіе т.-назыв. „матеріальнаго слѣдованія“, которое въ прежнихъ работахъ принималось Рёсселемъ за основное [1]); условившись для обозначенія этого соотношенія употреблять символъ $\supset$, а слова „по опредѣленію есть“ выражать съ помощью знака равенства, присоединяя къ нему (въ концѣ формулы) буквы *Df*, какъ сокращеніе слова Definition, мы напишемъ:

$$p \supset q .=. -p \vee q \; Df;$$

т.-е., „p влечетъ q“ значитъ: „или q истинно, или p ложно“;

---

[1]) Англійское слово implication (букв.: выводъ, заключеніе) мы рѣшили передавать словомъ „слѣдованіе“ въ виду слишкомъ общаго характера приведенныхъ его значеній; соотвѣтственный глаголъ to imply (запутывать, предполагать) мы также не передаемъ буквально; именно: предложеніе „p implies q“ переводимъ или черезъ „p влечетъ q “, или черезъ „q слѣдуетъ изъ p“.

что же касается точекъ, то онѣ замѣняютъ скобки, указывая, какія именно части формулы соединены нашимъ знакомъ равенства. Итакъ, между 2 предложеніями p и q имѣетъ мѣсто матеріальное слѣдованіе, если только второе истинно, или первое ложно (не исключается одновременная возможность того и другого); ничего иного въ это понятіе не вкладывается. Въ опредѣленіи матеріальнаго слѣдованія важна, конечно, та сторона его, которая позволяетъ выводить одно предложеніе изъ другого, уже оправданнаго. Дѣйствительно, пусть намъ извѣстно, что p — истинно и что имѣетъ мѣсто слѣдованіе $p \supset q$; послѣднее сводится къ утвержденію, что либо p—ложно, либо q—истинно; но намъ дано, что p—истинно: слѣд., случай „p—ложно“ надо отбросить, и мы приходимъ къ заключенію, что q—истинно, т.-е. выводимъ истинность q изъ истинности p. Пояснимъ примѣрами данное опредѣленіе: „изъ того, что Сократъ человѣкъ, слѣдуетъ, что Сократъ смертенъ“—будетъ матеріальнымъ слѣдованіемъ; но таковымъ же будетъ и утвержденіе: «Сократъ есть треугольникъ» влечетъ за собой, что «дважды два четыре», ибо оно, очевидно, удовлетворяетъ (даже избыточно) поставленному требованію. Углубившись въ основы логики, мы пришли къ довольно неожиданному выводу, что классическое умозаключеніе: „въ огородѣ бузина, а въ Кіевѣ дядя“ можетъ оказаться правильнымъ, если только въ огородѣ нѣтъ бузины, или въ Кіевѣ дѣйствительно имѣется дядя. Однако, подобныя утвержденія прямо-таки рѣжутъ ухо; въ чемъ здѣсь дѣло и зачѣмъ ставить такое опредѣленіе, которое приводитъ къ весьма страннымъ слѣдствіямъ,—мы поймемъ, обратившись къ понятію „формальнаго слѣдованія“. Послѣднее отношеніе имѣетъ мѣсто между предложительными функціями, а не между опредѣленными предложеніями, при чемъ входящія сюда перемѣнныя обычно могутъ принимать какія угодно значенія [1]). Примѣръ: „x есть человѣкъ“ влечетъ за собой „x—смертенъ“ при всѣхъ значеніяхъ x—есть формальное слѣдованіе; въ самомъ дѣлѣ, давая x-у всевозможныя значенія, мы будемъ получать различныя

[1]) Ограниченныя, впрочемъ, извѣстнымъ типомъ, о чемъ ниже.

матеріальныя слѣдованія, и послѣднія всегда будутъ удовлетворять поставленнымъ выше требованіямъ: если значеніе x-а будетъ дѣйствительно человѣкомъ, то 2-ое предложеніе „x смертенъ“ будетъ истиннымъ; если же вмѣсто x-а подставимъ не-человѣка, то 1-ое предложеніе станетъ ложнымъ. Такимъ образомъ, формальное слѣдованіе въ сущности сводится къ совокупности безчисленнаго множества матеріальныхъ слѣдованій, и утвержденіе перваго есть не что иное, какъ одновременное утвержденіе всѣхъ послѣднихъ. Формальное слѣдованіе необходимо разсматривать, такъ какъ, напримѣръ, всѣ теоремы геометріи имѣютъ такой именно характеръ. Возьмемъ предложеніе: „въ геометріи Евклида сумма угловъ Δ-ка равна $2d$“; его можно выразить такъ: „изъ того, что x есть треугольникъ евклидовой геометріи, вытекаетъ, что x имѣетъ сумму угловъ, равную $2d$“; а это уже есть формальное слѣдованіе, удовлетворяющееся при любомъ значеніи x. Необходимость изученія формальнаго слѣдованія приводитъ, очевидно, къ необходимости введенія и матеріальнаго слѣдованія; а чтобы получить право утверждать формальное слѣдованіе для *всѣхъ значеній перемѣнныхъ*—требованіе совершенно въ духѣ математики, которая всегда стремилась устанавливать предложенія безусловно общаго характера,—не приходится вкладывать въ опредѣленіе матеріальнаго слѣдованія $p \supset q$ ничего другого, какъ раздѣленіе: $-p \vee q$. Рѣжущія ухо утвержденія въ родѣ: „Сократъ есть треугольникъ“ влечетъ, что „Сократъ смертенъ“—происходятъ отъ того, что мы привыкли имѣть дѣло съ формальными слѣдованіями и, говоря о Сократѣ, собственно готовы подставить вмѣсто этой постоянной перемѣнную x. Тогда матеріальное слѣдованіе: „Сократъ—человѣкъ“ влечетъ, что „Сократъ смертенъ“—приводитъ къ правильному формальному слѣдованію: „x есть человѣкъ“ влечетъ, что „x смертенъ“; тогда какъ приведенное выше даетъ: „x есть треугольникъ“ влечетъ, что „x смертенъ“, что, очевидно, неправильно, такъ какъ треугольникъ несмертенъ. Если же отрѣшиться отъ этого безсознательнаго перевода матеріальныхъ слѣдованій въ формальныя, тѣ оба примѣра будутъ одинаково безукоризненными.

Общая формула формальнаго слѣдованія, какъ нѣкотораго отношенія между 2 предложительными функціями, будетъ:

$$\varphi x \, \mathfrak{O}_x \, \psi x,$$

гдѣ маленькое x при знакѣ $\mathfrak{O}$ указываетъ, что слѣдованіе вѣрно для всѣхъ значеній x-а (иногда это добавочное обозначеніе опускается); хотя слѣдованіе вѣрно при всѣхъ значеніяхъ x-а, однако для насъ, конечно, важны тѣ изъ нихъ, при которыхъ φx истинно. Перемѣнная x не содержится въ окончательномъ значеніи предложенія

$$\varphi x \, \mathfrak{O} \, \psi x$$

точно такъ же, какъ она не вліяетъ на величину интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx;$$

въ такихъ случаяхъ перемѣнная наз. *видимой*, въ противоположность *реальной* перемѣнной въ выраженіяхъ φx, ψx и т. д. Если бы наше слѣдованіе выполнялось не при всѣхъ значеніяхъ x-а, а только при нѣкоторыхъ — напр., удовлетворяющихъ какой-либо 3-й предложительной функціи $\chi\hat{x}$, — то намъ только бы пришлось ввести особую предпосылку, чтобы избавиться отъ указаннаго ограниченія. Пусть въ самомъ дѣлѣ

$$\varphi x \, \mathfrak{O} \, \psi x$$

не при всѣхъ значеніяхъ x, а только при такихъ, которыя удовлетворяютъ $\chi\hat{x}$, т.-е , будучи въ нее подставлены, даютъ истинное предложеніе; тогда формальное слѣдованіе

$$\chi x \, . \, \mathfrak{O}_x \, . \, \varphi x \, \mathfrak{O} \, \psi x$$

уже вѣрно при любомъ x (точки, какъ всегда, замѣняютъ скобки): если x удовлетворяетъ $\chi\hat{x}$, то 2-е предложеніе $\varphi x \, \mathfrak{O} \, \psi x$ истинно, если же — нѣтъ, то 1-е χx — ложно.

Исходя изъ понятія логической суммы, введемъ теперь понятіе логическаго произведенія 2 предложеній:

$$pq.=.-(-p \vee -q)\, Df.$$

Разберемся въ этомъ опредѣленіи; $-p \vee -q$ значитъ: „либо $-p$, либо $-q$“; теперь все это утвержденіе отрицается цѣликомъ, и мы приходимъ къ мысли: „и p и q“; т.-е., логическое произведеніе есть одновременное утвержденіе обоихъ предложеній.. Для его обозначенія иногда приходится также прибѣгать къ точкамъ и вмѣсто pq писать $p.q$ (см. ниже).

На понятіи матеріальнаго слѣдованія основывается опредѣленіе эквивалентности 2 предложеній, которую будемъ обозначать знакомъ $\equiv$, а именно:

$$p \equiv q.=: p \supset q.q \supset p\ Df,$$

или, замѣняя для ясности точки скобками:

$$(p \equiv q) = [(p \supset q)(q \supset p)]\, Df,$$

т.-е., эквивалентность p и q сводится къ тому, что оба предложенія вытекаютъ одно изъ другого {въ правой части мы имѣемъ произведеніе 2 предложеній: $p \supset q$ и $q \supset p$} [1]). Оставаясь на почвѣ матеріальнаго слѣдованія, нетрудно заключить, что всѣ истинныя предложенія эквивалентны между собой; то же самое имѣетъ мѣсто и по отношенію къ ложнымъ.

---

[1]) По поводу употребленія точекъ надо замѣтить, что онѣ служатъ и для замѣны скобокъ и для указанія дѣйствія логическаго умноженія; точки перваго рода стоятъ въ непосредственной близости къ одному изъ знаковъ: $\vee$, $\supset$, $\equiv$, $=$ и др. Если точки замѣняютъ скобки, то бо́льшее число точекъ соотвѣтствуетъ внѣшнимъ скобкамъ, меньшее — внутреннимъ; что же касается объема скобокъ, то онъ простирается (въ обѣ стороны для точекъ, обозначающихъ произведеніе, и въ одну для остальныхъ) до того мѣста данной формулы, гдѣ появляется такое же или бо́льшее число точекъ, или, если этого нѣтъ, то до конца предложенія. Иногда вводятся дополнительныя правила, которыя позволяютъ „экономизировать“ точки; мы этого дѣлать не будемъ (за исключеніемъ развѣ числа точекъ послѣ символа $(\exists x)$, съ которымъ познакомимся ниже).

Выяснивъ наиболѣе важныя понятія, составимъ себѣ теперь нѣкоторое представленіе объ аксіомахъ разсматриваемой части символической логики. Прежде всего утверждается, что предложеніе, которое слѣдуетъ изъ истинной предпосылки, само истинно; принципъ этотъ не поддается символизированію, что̀ неудивительно, ибо гдѣ-нибудь должна же быть граница символизма: во всякомъ случаѣ первоначальное введеніе символовъ не можетъ въ нихъ же находить себѣ опору.

Далѣе мы встрѣчаемся съ аксіомами, которыя являются ближайшимъ основаніемъ послѣдующей дедукціи:

$$p \vee p \,.\, \supset \,.\, p$$

{если или p истинно, или p истинно, то p истинно}, это — принципъ тавтологіи;

$$q \,.\, \supset \,.\, p \vee q$$

{если q истинно, то „p или q“ — истинно; другими словами, къ истинному предложенію можно логически прибавить любое предложеніе};

$$p \vee q \,.\, \supset . q \vee p,$$
$$p \vee (q \vee r) \,.\, \supset \,.\, q \vee (p \vee r)$$

{здѣсь мы имѣемъ законы перемѣстительный и сочетательный для дѣйствія логическаго сложенія};

$$q \supset r .\, \supset : p \vee q \,.\, \supset \,.\, p \vee r$$

{т.-е., во всякомъ слѣдованіи можно къ обѣимъ его частямъ придать любое предложеніе, не нарушая правильности слѣдованія}.

Имѣется еще цѣлый рядъ аксіомъ (всего ихъ можно насчитать 18); часть изъ нихъ вызвана вышеуказаннымъ выдѣленіемъ т.-наз. элементарныхъ предложеній, другія связаны съ теоріей типовъ, о чемъ ниже.

Первой теоремой является т.-наз. „принципъ приведенія къ нелѣпости“:

$$p \supset -p \,.\, \supset \,.\, -p,$$

т.-е., если, принявъ p, мы приходимъ къ его отрицанію, то p — ложно. Для доказательства возьмемъ принципъ тавтологіи и замѣнимъ въ немъ p на $-p$:

$$-p \vee -p \,.\, \supset \,.\, -p \;^{1});$$

на основаніи опредѣленія матеріальнаго слѣдованія, $-p \vee -p$ можно замѣнить на $p \supset -p$, и мы получаемъ:

$$p \supset -p \,.\, \supset .\, -p, \qquad \text{что и тр. док.}$$

Если въ эту формулу вмѣсто p подставить $-p$ и воспользоваться доказываемымъ въ послѣдующихъ параграфахъ „Principia“ закономъ двойного отрицанія, въ силу котораго

$$-(-p) \equiv p,$$

то мы придемъ къ предложенію:

$$-p \supset p \,.\, \supset .p;$$

это есть не что иное, какъ тотъ принципъ, которымъ пользовался Саккери и о которомъ мы уже упоминали.

На второмъ мѣстѣ стоитъ парадоксальная на первый взглядъ теорема о томъ, что истинное предложеніе вытекаетъ изъ любого предложенія; его парадоксальность исчезнетъ, какъ только мы вспомнимъ то содержаніе, которое было вложено въ понятіе матеріальнаго слѣдованія. Символически теорема выражается такъ:

$$q \,.\, \supset .p \supset q;$$

для ея доказательства вспомнимъ одно изъ первоначальныхъ предложеній, гласящее, что къ истинному предложенію можно прибавить всякое другое:

$$q \,.\, \supset .\, p \vee q,$$

---

[1]) По поводу этого разсужденія надо замѣтить, что мы просто усматриваемъ возможность примѣнить общее правило (напр.: принципъ тавтологіи) въ данномъ частномъ случаѣ ($-p \vee -p$); подобное усматриваніе нельзя обосновать какимъ-либо другимъ общимъ правиломъ, а придется предоставить здѣсь рѣшающую роль интуиціи особаго рода (см. § 1 пред. статьи).

и подставимъ сюда $-p$ вмѣсто p:

$$q \,.\, \supset .-p \vee q;$$

наконецъ, на основаніи опредѣленія слѣдованія, имѣемъ:

$$q \,.\, \supset . p \supset q, \qquad \text{ч. и т. д.}$$

Мало-по-малу мы доходимъ до основныхъ правилъ и законовъ обыкновенной логики; такъ, взявъ первоначальное предложеніе

$$p \vee q \,.\, \supset \,.\, q \vee p$$

и замѣнивъ тамъ p и q на $-p$ и $-q$, напишемъ:

$$-p \vee -q \,.\, \supset \,.\, -q \vee -p,$$

или

$$p \supset -q \,.\, \supset \,.\, q \supset -p,$$

что представляетъ одну изъ формъ принципа обращенія. Взявъ другой основной принципъ

$$q \supset r \,.\, \supset : p \vee q \,.\, \supset \,.\, p \vee r$$

и подставивъ $-p$ вмѣсто p, найдемъ:

$$q \supset r \,.\, \supset : -p \vee q \,.\, \supset \,.\, -p \vee r,$$

или

$$q \supset r \,.\, \supset : p \supset q \,.\, \supset \,.\, p \supset r;$$

а это есть такъ-наз. принципъ силлогизма; на основаніи другихъ предложеній ему можно придать такую форму:

$$p \supset q \,.\, q \supset r : \supset \,.\, p \supset r.$$

Подобными „вычисленіями“ можно установить, исходя изъ вышеуказанной системы предпосылокъ, и другіе законы, частью обычные для всякаго трактата по логикѣ, частью присущіе спеціально логикѣ математической; сюда относятся:

законъ тождества . . . . . $p \supset p$,
законъ исключеннаго третьяго: $p \vee -p$,
законъ противорѣчія . . . . . $-(p \,.\, -p)$.

Стоитъ отмѣтить еще одно предложеніе, которое было извѣстно Лейбницу (собственно говоря, подобное ему предложеніе изъ теоріи классовъ) и которое онъ очевидно очень цѣнилъ, такъ какъ далъ ему имя „praeclarum theorema“:

$$p \supset r \,.\, q \supset s : \supset : pq \,.\, \supset \,.\, rs.$$

Исходя изъ нашихъ предпосылокъ и опредѣленій, нетрудно установить, что дѣйствія логическаго сложенія и умноженія подчиняются законамъ перемѣстительному, сочетательному и распредѣлительному въ формѣ

$$p \,.\, q \vee r : \equiv : pq \,.\vee. pr;$$

отсюда вытекаетъ, что тѣ свойства одноименныхъ алгебраическихъ дѣйствій, которыя основываются единственно на трехъ указанныхъ законахъ, можно безъ новаго доказательства перенести и въ исчисленіе предложеній.

Такимъ-то путемъ мы получаемъ, напр., слѣдующее предложеніе, которое понадобится въ геометрической части нашей книги:

$$p \vee q \,.\, r \vee s : \equiv : pr \,.\vee. ps \,.\vee. qr \,.\vee. qs,$$

т.-е., одновременное утвержденіе 2 раздѣленій эквивалентно раздѣленію 4 предложеній, изъ коихъ каждое есть одновременное утвержденіе двухъ предложеній изъ числа данныхъ.

Тѣмъ не менѣе формальная сторона логическаго исчисленія не совпадаетъ вполнѣ съ алгебраическимъ исчисленіемъ; причиной тому служитъ присутствіе въ символической логикѣ законовъ, для которыхъ нѣтъ аналогій въ обыкновенной алгебрѣ; сюда относятся двѣ формы закона тавтологіи:

$$pp \,.\equiv.\, p$$
$$p \vee p \,.\equiv.\, p,$$

которыя очевидны на основаніи нашихъ опредѣленій суммы и произведенія [1]), и другой видъ распредѣлительнаго закона:

$$p \,.\vee. qr : \equiv : p \vee q \,.\, p \vee r.$$

---

[1]) Въ систематическомъ изложеніи они, конечно, доказываются со всей строгостью.

Всѣ эти принципы создаютъ особый родъ формальнаго счисленія, которое лишь въ нѣкоторыхъ своихъ частяхъ совпадаетъ съ алгебраическимъ. Какъ и всѣ формальныя правила, законы символической логики доступны различнымъ истолкованіямъ; основное и наиболѣе естественное изъ нихъ это — пониманіе нашихъ формулъ, какъ комбинацій между предложеніями, которыя высказываютъ извѣстные акты мысли; но оно—не единственное. Можно, напр., все предшествующее истолковать, какъ дѣйствія надъ числами; именно, условимся, что объекты, которые обозначались символами: p, q, $p \supset q$, $p \vee q$ и т. д., суть числа, равныя 0 или 1 (только эти два значенія и разсматриваются здѣсь); „$p \supset q$“ имѣетъ значеніе 0, если $p=1$ и $q=0$, иначе оно равно 1; $-p=1$, если $p=0$, и $-p=0$, если $p=1$; $pq=1$, если $p=q=1$, иначе $pq=0$; $p \vee q=0$, если $p=q=0$, иначе $p \vee q=1$; наконецъ, если мы утверждаемъ какую-либо формулу, то это надо понимать такъ, что ея значеніе равно 1. Нетрудно видѣть, что и при такомъ пониманіи всѣ формулы символической логики остаются въ силѣ [1]).

3. Трактаты по логикѣ знаютъ два опредѣленія класса: по объему и по содержанію; первый путь, достигающій своей цѣли путемъ прямого перечисленія объектовъ, не всегда удобенъ, а въ случаѣ безконечнаго класса—и невозможенъ. Второй путь заключается въ указаніи опредѣляющаго классъ понятія, которое даетъ признакъ, общій для всѣхъ его членовъ. Математика нуждается въ особомъ синтезѣ обоихъ способовъ, ибо съ одной стороны она не можетъ избѣжать употребленія безконечныхъ классовъ {напр.: совокупности цѣлыхъ чиселъ, точекъ отрѣзка и т. п.}, а съ другой—въ ея изслѣдованіяхъ всегда выступаетъ на первый планъ объемъ понятія, а не его содержаніе. Чтобы выяснить послѣднее утвержденіе, войдемъ въ нѣкоторыя подробности. Двѣ предложительныя функціи $\Phi\hat{x}$ и $\Psi\hat{x}$ наз. формально эквивалентными, если при всякомъ возможномъ значеніи x онѣ даютъ

---

[1]) Pr. M. p. 120.

эквивалентныя предложенія; обозначается это слѣдующей формулой:

$$\Phi x \equiv_x \Psi x.$$

Пусть теперь у насъ имѣется такая функція отъ функціи (рѣчь идетъ, конечно, о предложительныхъ функціяхъ), что она даетъ мѣсто истиннымъ и ложнымъ предложеніямъ въ однихъ и тѣхъ же случаяхъ, какой бы формально эквивалентной функціей мы ни замѣняли ея аргументъ; т.-е., имѣемъ:

$$\Phi x \equiv_x \Psi x . \supset . f(\Phi\hat{x}) \equiv f(\Psi\hat{x});$$

такая функція f наз. экстензивной [1]). Очевидно, послѣдняя является не столько функціей отъ Φ, сколько отъ тѣхъ значеній x-а, которыя удовлетворяютъ этому Φ, т. е., она опредѣляется заданіемъ объема извѣстнаго класса. Таковы именно всѣ функціи (беремъ это слово въ самомъ широкомъ значеніи), съ которыми имѣетъ дѣло математика. Напр., предложеніе: „изъ того, что x есть квадратъ, слѣдуетъ, что діагонали x-а равны и взаимно перпендикулярны“ есть экстензивная функція отъ функціи „x есть квадратъ“; ибо если мы замѣнимъ послѣднюю другой, ей формально эквивалентной (напр.: „x есть прямоугольникъ съ равными сторонами“), то приведенное выше предложеніе останется вѣрнымъ въ тѣхъ и только въ тѣхъ случаяхъ, когда оно было вѣрно до подстановки. Очевидно, наше утвержденіе имѣетъ въ виду совокупность объектовъ, подходящихъ подъ понятіе квадрата, а не тотъ или другой опредѣляющій признакъ.

Творцы математической логики сначала [2]) искали синтеза между опредѣленіемъ класса по объему и по содержанію тѣмъ путемъ, что вводили классъ, какъ совокупность объектовъ, удовлетворяющихъ нѣкоторой предложительной функціи (т.-е. дающихъ при подстановкѣ въ нее истинныя предложенія). Однако, остаться при такой простой концепціи не удалось вслѣдствіе ряда противорѣчій, получавшихся въ

---

[1]) Pr M. p. 76.

[2]) См. Peano „Formulaire“ и Russell „The Principles of Math.“.

символической логикѣ и въ канторовскомъ ученіи о трансфинитныхъ числахъ. Спеціальная, относящаяся къ классамъ, форма противорѣчія состоитъ въ слѣдующемъ [1]). Исходя изъ только что приведеннаго опредѣленія класса, приходится допустить, что классъ, разсматриваемый въ качествѣ единаго объекта, можетъ входить въ составъ самого себя, какъ извѣстнаго множества; напримѣръ: классъ всѣхъ классовъ есть все-таки классъ, а потому является членомъ самого себя. Съ другой стороны, конечно, существуютъ классы, которые этимъ свойствомъ не обладаютъ; напримѣръ: классъ „человѣкъ“ не есть человѣкъ. Обозначимъ черезъ w классъ всѣхъ тѣхъ классовъ, которые не являются членами самихъ себя; тогда утвержденіе: „x есть w“ для всякаго класса x эквивалентно такому: „x не есть x“ (въ объясненномъ выше смыслѣ); дадимъ x-у значеніе w и мы получимъ, что „w есть w“ эквивалентно предложенію: „w не есть w“, что, конечно, не можетъ быть допущено. Одна изъ формъ этого противорѣчія была извѣстна еще въ старину: „Эпименидъ-критянинъ утверждаетъ, что всѣ критяне—лгуны; и пусть дѣйствительно всѣ другія утвержденія критянъ оказались ложью. Сказалъ-ли Эпименидъ правду, или солгалъ?“ Допустимъ, что онъ сказалъ правду; но тогда *всѣ* критяне на самомъ дѣлѣ—лгуны, а это будетъ правдой только при условіи, что и нашъ Эпименидъ солгалъ. Допустимъ, что послѣдній солгалъ; но тогда очевидно, что всѣ критяне—лгуны, и слѣдовательно Эпименидъ говоритъ правду. Въ цитированномъ мѣстѣ „Principia“ читатель можетъ найти и другія интересныя формы противорѣчія.

Чтобы выйти изъ такихъ безнадежныхъ тупиковъ мысли, Рессель и создалъ мало-по-малу теорію типовъ, которая получила окончательную обработку въ „Principia Mathematica“, написанныхъ совмѣстно съ Уайтхедомъ. Характерной чертой двухъ указанныхъ формъ противорѣчія служитъ то обстоятельство, что тамъ неизбѣжно появляется извѣстная совокупность, содержащая въ себѣ такіе объекты, которые опредѣляются лишь при помощи самой совокупности, разсматривае-

[1]) См. Pr. M. p. 63 и слѣд.

мой какъ цѣлое. Такъ, напримѣръ, классъ всѣхъ классовъ, не содержащихся въ самихъ себѣ, опредѣляется черезъ полную совокупность этихъ классовъ и въ то же время является однимъ изъ ея членовъ; Эпименидъ говоритъ о всѣхъ сужденіяхъ, высказанныхъ когда-либо критяниномъ, и въ то же время это есть утвержденіе, авторомъ котораго является опять-таки критянинъ. Совокупность, обладающую отмѣченной особенностью, нельзя, по мнѣнію нашихъ авторовъ [1]), разсматривать, какъ цѣлое, т.-е. нельзя дѣлать утвержденій, касающихся всѣхъ ея членовъ. Почему это такъ, проще всего видно на примѣрѣ предложительныхъ функцій, которыя и порождаютъ классы; здѣсь мы имѣемъ полную аналогію съ тѣмъ, какъ обстоитъ дѣло въ математикѣ, и это, конечно, облегчитъ для насъ пониманіе сущности вопроса. Будемъ имѣть въ виду вполнѣ опредѣленную функцію φ; возьмемъ какое-нибудь ея значеніе φx; пока вмѣсто x не подставлена какая-либо абсолютная постоянная, значеніе φx не можетъ быть безусловно опредѣленнымъ; однако, это не мѣшаетъ намъ говорить въ извѣстныхъ случаяхъ, что функція φ вполнѣ опредѣлена. Дѣло въ томъ, что φx дѣйствительно есть нѣчто не совсѣмъ опредѣленное; именно, это есть любое изъ совокупности вполнѣ опредѣленныхъ значеній φa, φb, φc и т. д. Такимъ образомъ, говоря объ опредѣленности функціи, мы подразумѣваемъ подъ этимъ только то, что совокупность ея отдѣльныхъ значеній вполнѣ опредѣлена, другими словами, что она такъ или иначе намъ задана. Отсюда вытекаетъ полная невозможность допустить такой случай, когда бы среди значеній функціи имѣлось такое, которое опредѣлялось бы черезъ самоё функцію, т.-е. черезъ всю совокупность ея значеній: это было бы яркимъ примѣромъ логической ошибки, извѣстной подъ именемъ заколдованнаго круга. Мы приходимъ къ выводу, что символъ $\varphi(\varphi\hat{x})$ не имѣетъ смысла [2]); т.-е., въ выраженіи φx

[1]) Pr. M. p. 39 и слѣд.

[2]) Это не значитъ, что въ математикѣ нельзя разсматривать функцій, подобныхъ, напримѣръ, $sin(sinx)$; въ заколдованный кругъ мы попали бы только въ томъ случаѣ, если бы аргументу дали значеніе, для опредѣленія котораго было бы необходимо уже знать искомую величину функціи.

(а также и въ формальномъ слѣдованіи) перемѣнная x не можетъ принимать всѣхъ безъ исключенія значеній; невозможны именно тѣ, которыя опредѣляются черезъ $\varphi\hat{x}$. Вышеизложенныя соображенія и приводятъ къ необходимости разсматривать различные типы перемѣнныхъ; „типъ“ опредѣляется совокупностью тѣхъ значеній перемѣннаго, при которыхъ извѣстная предложительная функція имѣетъ смыслъ. Теорія типовъ дѣйствительно разрѣшаетъ упомянутыя выше противорѣчія; такъ, утвержденіе Эпименида: „всѣ сужденія, высказываемыя критянами, суть ложь“ само не можетъ быть аргументомъ въ предложеніи, приведенномъ въ кавычкахъ; въ противномъ случаѣ мы получили бы предложительную функцію типа $\varphi(\varphi\hat{x})$, что не имѣетъ смысла. Если же сужденія критянъ и сужденія объ этихъ сужденіяхъ принадлежатъ различнымъ типамъ, то ихъ нельзя ставить на одну доску, и возможность противорѣчія отпадаетъ. Все дѣйствіе теоріи типовъ имѣетъ, по словамъ нашихъ авторовъ [1]), отрицательный характеръ: она запрещаетъ нѣкоторыя заключенія, которыя иначе мы могли бы допустить, но не разрѣшаетъ ни одного, которое не было бы правильнымъ безъ ея развитія.

Исчисленіе классовъ складывается всецѣло подъ вліяніемъ теоріи типовъ. Руководясь требованіемъ дѣлать допущенія возможно меньшаго содержанія—требованіемъ, обычнымъ въ трудахъ, посвященныхъ обоснованію логики и математики,— Рессель и Уайтхедъ не принимаютъ въ противоположность Пеано въ качествѣ одной изъ предпосылокъ существованія классовъ, какъ въ нѣкоторомъ смыслѣ единыхъ объектовъ. Названные авторы и не отрицаютъ существованія классовъ; просто это допущеніе для нихъ излишне: они достигаютъ своей цѣли, разсматривая классы, какъ „неполные символы“. Въ математикѣ мы встрѣчаемся часто съ символами, которые получаютъ извѣстный смыслъ лишь въ комбинаціи съ другими; напримѣръ: $\frac{d}{dx}$ не представляетъ никакой математической величины, но получаетъ вполнѣ

[1]) Pr. M. Preface.

опредѣленное значеніе лишь въ соединеніи со знакомъ какой-либо функціи. Подобнымъ же образомъ опредѣляются и классы; условимся о двухъ формально эквивалентныхъ функціяхъ говорить, что онѣ „имѣютъ одинъ и тотъ же объемъ“, при чемъ мы естественно останавливаемъ свое вниманіе на тѣхъ значеніяхъ перемѣннаго, которыя даютъ истинныя предложенія. Если дѣло идетъ о функціи $\Phi\hat{x}$ и эквивалентныхъ ей, то условимся обозначать общій имъ объемъ черезъ

$$\hat{z}(\Phi z);$$

это выраженіе есть неполный символъ, такъ какъ оно получаетъ опредѣленный смыслъ лишь въ фразѣ: „имѣть одинъ и тотъ же объемъ“; послѣдняя обозначаетъ только то, что соотвѣтственныя функціи эквивалентны между собой при любыхъ значеніяхъ аргумента, ограниченныхъ извѣстнымъ типомъ. Если мы вспомнимъ приведенное выше опредѣленіе экстензивной функціи отъ функціи, то увидимъ, что для послѣдней въ сущности безразличенъ выборъ въ качествѣ аргумента той или другой функціи изъ числа эквивалентныхъ между собой; такимъ образомъ, ее можно разсматривать, какъ функцію отъ общаго объема ея возможныхъ аргументовъ; т.-е., отъ выраженія $f(\Phi\hat{x})$ перейти къ $f\{\hat{z}(\Phi z)\}$.

Исходя изъ чисто формальнаго опредѣленія класса, какъ неполнаго символа, можно мало-по-малу прійти къ выводу, что символы въ родѣ $\hat{z}(\Phi z)$, обладая всѣми существенными свойствами, которыя обычно приписываются классамъ, вполнѣ замѣщаютъ ихъ и не приводятъ ни къ какимъ противорѣчіямъ. Возьмемъ прежде всего опредѣленіе тождества двухъ любыхъ объектовъ x и y:

$$x = y. = :\varphi x.\supset_{\varphi}.\varphi y \quad Df\ ^{1});$$

---

[1]) Функція φ, какъ всякая „кажущаяся“ перемѣнная, ограничена извѣстнымъ типомъ. Въ „Principia“ это опредѣленіе устанавливается для т.-наз. предикативныхъ функцій, которыя принадлежатъ къ типу непосредственно выше присущаго ихъ аргументамъ; затѣмъ для любой функціи $\Psi\hat{x}$ доказывается, что $x = y.\supset.\Psi x \equiv \Psi y$. Присутствіе 2 знаковъ равенства въ указанномъ опредѣленіи не ведетъ къ ложному кругу, ибо тотъ изъ нихъ, который отдѣленъ наибольшимъ числомъ точекъ, въ связи съ символомъ Df, обозначаетъ лишь: „по опредѣленію есть“; тогда какъ первый и есть тотъ знакъ, который подлежитъ опредѣленію.

здѣсь мы въ сущности повторяемъ опредѣленіе Лейбница: „eadem sunt quorum unum in alterius locum substitui potest, salva veritate“ [1]). Объ отношеніи тождества намъ придется еще говорить впослѣдствіи; тогда мы согласимся со словами авторовъ „Principia“, что никакого другого опредѣленія знака равенства и не потребуется во всей математикѣ: равенство всегда выражаетъ тождество въ извѣстномъ отношеніи. Теперь же, имѣя въ виду ближайшую цѣль, отмѣтимъ, что, примѣняя опредѣленіе тождества къ нашимъ неполнымъ символамъ, найдемъ слѣдующее основное свойство классовъ въ ихъ обычной концепціи:

$$\hat{z}(\Phi z) = \hat{z}(\Psi z) . \equiv . \Phi x \equiv_x \Psi x;$$

другими словами, классы тождественны, если опредѣляющія ихъ предложительныя функціи эквивалентны. Обозначая далѣе символомъ

$$x \varepsilon \hat{z}(\Psi z)$$

принадлежность x-а классу, опредѣляемому функціей $\Psi\hat{z}$, мы приходимъ естественно къ эквивалентности:

$$x \varepsilon \hat{z}(\Psi z) . \equiv . \Psi x;$$

а отсюда уже вытекаетъ, что

$$\hat{z}(\Phi z) = \hat{z}(\Psi z) . \equiv : x \varepsilon \hat{z}(\Phi z) . \equiv_x . x \varepsilon \hat{z}(\Psi z).$$

Иногда вмѣсто символовъ $\hat{z}(\Phi z)$, $\hat{z}(\Psi z)$ . ... ставятся просто греческія буквы α, β ..... (именно, это можно дѣлать въ тѣхъ случаяхъ, когда для насъ не важно знать опредѣляющей функціи); тогда послѣдняя формула, выражающая основное условіе тождества классовъ, перепишется проще:

$$\alpha = \beta . \equiv : x \varepsilon \alpha . \equiv_x . x \varepsilon \beta;$$

она говоритъ намъ, что классы тождественны тогда и только тогда, когда у нихъ имѣются одни и тѣ же члены.

Такимъ образомъ, неполные символы, заступающіе въ современной математической логикѣ мѣсто классовъ, оказы-

---

[1]) Peano „Formulaire“ 1901, p. 18.

вается возможнымъ почти всегда понимать въ болѣе простой обычной концепціи; исключеніе могутъ представить лишь тѣ особенные случаи, которые ведутъ къ отмѣченнымъ выше противорѣчіямъ и для преодолѣнія которыхъ была создана теорія классовъ, какъ неполныхъ символовъ. Въ нашихъ изысканіяхъ началъ геометріи послѣдней опасности не представится, такъ что мы можемъ понимать классы въ болѣе простомъ обыкновенномъ смыслѣ [1]).

Основное соотношеніе между классами есть подчиненіе, при чемъ и здѣсь разумѣется соотношеніе ихъ объемовъ; сохраняя тотъ же знакъ, что и для слѣдованія предложеній одного изъ другого [2]), мы опредѣлимъ подчиненіе класса a классу β слѣдующимъ образомъ:

$$a \supset \beta . = : x \varepsilon a . \supset_x . x \varepsilon \beta \quad Df,$$

т. е., a содержится въ β, если „x есть a“ влечетъ за собой „x есть β“ при всякомъ возможномъ x. Данное выше условіе тождества классовъ можно теперь преобразовать, а именно:

$$x \varepsilon a . \equiv_x . x \varepsilon \beta : \equiv : . x \varepsilon a . \supset_x . x \varepsilon \beta : x \varepsilon \beta . \supset_x . x \varepsilon a$$

$$x \varepsilon a . \equiv_x . x \varepsilon \beta : \equiv : a \supset \beta . \beta \supset a,$$

такъ что

$$a = \beta . \equiv : a \supset \beta . \beta \supset a,$$

т. е., классы тождественны, если каждый изъ нихъ содержится въ другомъ.

---

[1]) Хотя вышеизложенныя соображенія отвлекли насъ значительно въ сторону, они представляютъ лишь поверхностный очеркъ теоріи типовъ и классовъ; полностью читатель найдетъ ее въ „Principia“, а именно во введеніи и въ §§ 12 и 20. Отмѣтимъ, что существенное практическое значеніе эта теорія впервые получаетъ въ ариѳметикѣ кардинальныхъ чиселъ.

[2]) Въ „Principia“ введены особые символы для основныхъ соотношеній и дѣйствій къ каждой изъ 3 частей символической логики. Здѣсь мы предпочитаемъ прежній путь—пользованіе одними и тѣми же символами въ тѣхъ случаяхъ, когда формальныя свойства дѣйствій совпадаютъ. Такъ всегда поступаютъ въ математикѣ; напр., знакъ $+$ употребляется для обозначенія сложенія вещественныхъ чиселъ, и для сложенія комплексныхъ чиселъ, и для геометрическаго сложенія отрѣзковъ.

Бо̀льшая часть понятій и предложеній ученія о классахъ выводится изъ соотвѣтственнаго матеріала предыдущей части математической логики; такъ, произведеніе классовъ a и β опредѣляется формулой:

$$a\beta = \hat{x}\ (x\varepsilon a . x\varepsilon\beta)\ Df,$$

другими словами $a\beta$ есть классъ, составленный изъ такихъ объектовъ, которые одновременно удовлетворяютъ утвержденіямъ: $x\varepsilon a$ и $x\varepsilon\beta$; очевидно, что логическое произведеніе 2 классовъ есть классъ, общій обоимъ.

Подобнымъ же образомъ опредѣляются и другія дѣйствія надъ классами. Логическая сумма 2 классовъ:

$$a \vee \beta = x\ (x\varepsilon a . \vee . x\varepsilon\beta)\ Df,$$

т. е., $a \vee \beta$ есть совокупность такихъ x-овъ, которые принадлежатъ по крайней мѣрѣ одному изъ 2 данныхъ классовъ; отрицаніе класса:

$$-a = \hat{x}\ (x - \varepsilon a)\ Df\ ^{1}),$$

и мы видимъ, что $-a$ есть классъ членовъ, которые не суть a.

Нѣкоторые особенные классы заслуживаютъ упоминанія; такъ, если опредѣляющая функція даетъ ложныя предложенія для всѣхъ возможныхъ значеній аргумента, то соотвѣтствующій классъ будетъ „нулевымъ“; т. е., онъ не содержитъ совсѣмъ членовъ. Такую функцію можно указать, основываясь на принципѣ тождества; условившись обозначать отрицаніе тождества перечеркнутымъ знакомъ равенства, мы опредѣляемъ нулевой классъ (для него имѣется символъ $\wedge$):

$$\wedge = \hat{x}\ (x \neq x)\ Df\ ^{2}).$$

Если классъ a не сводится къ нулевому, то онъ наз. существующимъ; это обозначается символомъ:

$$\exists ! a\ .$$

---

[1]) $x - \varepsilon a$ стоитъ вмѣсто $-(x\varepsilon a)$.

[2]) Пеано („Formulaire“ 1901, p. 22) опредѣляетъ нулевой классъ, какъ классъ, принадлежащій любому классу.

Среди основныхъ понятій математической логики имѣется одно, которое до сихъ поръ нами не упоминалось; оно имѣетъ знакъ:

$$(\exists x).\Phi x$$

и выражаетъ, что существуетъ объектъ x, который удовлетворяетъ функціи $\Phi\hat{x}$. Пользуясь имъ, можно уже опредѣлить предыдущій символъ; именно, полагаемъ:

$$\exists ! a .=: (\exists x).x\varepsilon a \quad Df.$$

Если классъ содержитъ только одинъ членъ, то онъ называется единичнымъ; классъ, содержащій единственный объектъ x, обозначимъ по Пеано черезъ ιx и опредѣлимъ такъ:

$$\iota x = \hat{y}\ (y = x)\ Df;$$

замѣчательно то, что опредѣленіе не основано на понятіи единицы; наоборотъ, число 1 опредѣляется съ помощью единичнаго класса [1]). Пеано выдвинулъ требованіе отличать единичный классъ отъ его единственнаго объекта; если классы разсматриваются въ качествѣ неполныхъ символовъ, то эта необходимость становится очевидной.

Предложенія теоріи классовъ въ большинствѣ случаевъ весьма просто получаются изъ соотвѣтственныхъ предложеній I-ой части математической логики. Возьмемъ т.-наз. принципъ силлогизма:

$$p \supset q . q \supset r : \supset . p \supset r$$

и подставимъ вмѣсто p, q, r соотвѣтственно предложенія:

$$x\varepsilon a,\ x\varepsilon\beta,\ x\varepsilon\gamma;$$

имѣемъ: $x\varepsilon a . \supset . x\varepsilon\beta : x\varepsilon\beta . \supset . x\varepsilon\gamma . : \supset : x\varepsilon a . \supset . x\varepsilon\gamma,$

но $x\varepsilon a . \supset . x\varepsilon\beta : \equiv . a \supset \beta$ и т. д.;

---

[1]) Pr. M. § 52.

такъ что окончательно получаемъ:

$$\alpha \supset \beta . \beta \supset \gamma : \supset . \alpha \supset \gamma,$$

а это есть принципъ силлогизма для классовъ.

Такимъ-то путемъ, исходя изъ исчисленія предложеній, мы можемъ получать теоремы для теоріи классовъ; однако здѣсь надо принимать нѣкоторыя предосторожности, чтобы иногда не впасть въ ошибку; но на этомъ въ своемъ краткомъ очеркѣ классовъ мы останавливаться не будемъ.

Формальные законы сложенія, умноженія, отрицанія и тавтологіи остаются здѣсь тѣми же, что и для предложеній.

Прежде чѣмъ покинуть исчисленіе классовъ, укажемъ на существенную разницу отношеній ε и $\supset$, т. е., отношенія между индивидуумомъ и классомъ, которому онъ принадлежитъ, и отношенія части и цѣлаго между классами. Приведенный только что принципъ силлогизма для классовъ выражаетъ свойство отношенія $\supset$, которое, забѣгая нѣсколько впередъ, назовемъ транзитивностью; но отношеніе ε указаннымъ свойствомъ не обладаетъ; изъ того, напр., что Сократъ—одинъ изъ грековъ, а греки—одна изъ европейскихъ націй, нельзя сдѣлать заключенія, что Сократъ есть европейская нація. Это важное различіе подмѣчено проф. Пеано [1]).

Теперь мы можемъ перейти къ наиболѣе важному для насъ вопросу — исчисленію отношеній. Предварительно не будетъ лишнимъ сказать нѣсколько словъ о томъ, какъ названные выше логики опредѣляютъ математику, и выяснить, почему для послѣдней существенна именно эта третья часть символической логики.

4. Чистая математика по Рёсселю [2]) есть классъ предложеній, утверждающихъ формальныя слѣдованія и содержащихъ въ качествѣ постоянныхъ лишь логическія постоянныя; подъ послѣдними понимаются основныя понятія символической логики и всѣ другія, опредѣляемыя съ помощью

---

[1]) „Formulaire“ 1901, p. 5.

[2]) Pr. p. 106.

первыхъ. Такимъ образомъ, всѣ утвержденія математики будутъ типа:

$$\Phi(x,\ y,\ z,\ \ldots\ )\ .\ \supset_{x,\ y,\ z\ldots}\ \psi(x,\ y,\ z,\ \ldots.\ );$$

т. е., мы имѣемъ передъ собою отношеніе формальнаго слѣдованія между двумя предложительными функціями, вѣрное при всѣхъ возможныхъ значеніяхъ перемѣнныхъ. Если послѣднее условіе не выполнено, то это указываетъ только на то, что соотвѣтственная теорема математики формулирована не полностью, а содержитъ какую-либо подразумѣваемую предпосылку; напр.:

$$x\,.\,y = y\,.\,x$$

(перемѣстительный законъ для произведенія 2 чиселъ) вѣрно, пока x и y остаются въ области обыкновенныхъ комплексныхъ чиселъ, и невѣрно для кватерніоновъ; чтобы получить формальное слѣдованіе вышеуказаннаго типа, выскажемъ явно нашу предпосылку, обозначивъ черезъ k область обыкновенныхъ комплексныхъ чиселъ:

$$x, y\,\varepsilon k\ .\ \supset_{x,\ y}\ .\ xy = yx;$$

здѣсь уже подъ x и y можно понимать все, что угодно, если только произведеніе xy имѣетъ смыслъ и для того случая, когда x и y перестаютъ быть числами [1]). Можетъ, однако, показаться, что нѣкоторыя предложенія математики не содержатъ перемѣнныхъ, напр.:

$$1 + 1 = 2;$$

но истинное значеніе этого равенства есть: „любая единица и другая любая единица суть двѣ единицы“; а слово „любой“ служитъ характернымъ признакомъ присутствія перемѣнной. То же самое имѣетъ мѣсто и въ геометріи; напр., теорему объ углахъ при основаніи равнобедреннаго треугольника можно привести къ такому виду: „если x есть равнобедренный Δ, то x имѣетъ равные углы при основаніи“, гдѣ x есть перемѣнная уже безъ всякаго ограниченія внутри извѣстнаго типа.

Заговоривъ о геометріи, интересно поставить вопросъ, какъ

---

[1]) $x, y\,\varepsilon k\ .=:x\,\varepsilon k\ .\ y\,\varepsilon k\ Df.$

же при такомъ взглядѣ на чистую математику она отграничивается отъ другихъ ея частей: вѣдь ни о какомъ реальномъ субстратѣ въ родѣ пространства нашего опыта здѣсь не можетъ быть рѣчи. „Геометрія есть изученіе рядовъ двухъ или бо̀льшаго числа измѣреній“,— отвѣчаетъ Рессель[1]); слѣдовательно, теорію комплексныхъ чиселъ приходится отнести въ область геометріи, а не ариѳметики, которая занимается исключительно рядомъ одного измѣренія—рядомъ вещественныхъ чиселъ. Нашъ авторъ самъ сознается, что подобное опредѣленіе „нѣсколько необычно“; но съ другой стороны, какъ же мы выдѣлимъ геометрію изъ совокупности математическихъ дисциплинъ, если нельзя говорить о реальномъ пространствѣ и если мы должны построить понятіе, обнимающее всѣ неевклидовы и другія „патологическія“ системы? На ряду съ опредѣленіемъ Ресселя можно поставить лишь то, которое вытекаетъ изъ работъ С. Ли и носитъ болѣе спеціальный характеръ: „геометрія есть изученіе непрерывной группы движеній“; но послѣднее имѣетъ тотъ недостатокъ, что предрѣшаетъ разъ на всегда и вопросъ о методѣ, тогда какъ вовсе не является необходимостью обосновывать геометрію на понятіи движенія.

Въ предшествующемъ мы изложили основныя идеи первыхъ двухъ частей символической логики, которыя являются фундаментомъ для ея дальнѣйшихъ изслѣдованій; но для математики особый интересъ имѣетъ ея послѣдняя часть. Чтобы понять это, намъ надо дать себѣ отчетъ, въ чемъ же собственно заключается суть предложеній нашей науки. Въ послѣднее время сталъ довольно общеизвѣстнымъ фактъ, что теоремы геометріи (мы всегда имѣемъ въ виду главнымъ образомъ именно эту науку) доступны различнымъ истолкованіямъ, различнымъ реализаціямъ[2]). Такъ, напр., Гильбертъ оставляетъ безъ опредѣленія понятія точки, прямой и плоскости, а только устанавливаетъ въ аксіомахъ основныя соотношенія между ними[3]); отсюда вытекаетъ, что всякіе объ-

[1]) Ib., p. 372.

[2]) См. книгу Веберъ-Вельштейна: „Энциклопедія элем. матем.“, т. II, кн. 1.

[3]) Hilbert „Grundlagen der Geometrie“, p. 2.

екты, между которыми имѣютъ мѣсто указанныя отношенія, могутъ въ качествѣ точекъ, прямыхъ, плоскостей, дать одну изъ безчисленнаго множества реализацій отвлеченной системы Гильберта. Именно, мы знаемъ, что взаимныя отношенія точекъ евклидовой плоскости одинаковы со взаимными отношеніями обыкновенныхъ комплексныхъ чиселъ; что образы параболической шаровой сѣти осуществляютъ геометрію Евклида [1]), и т. д. Тѣмъ не менѣе, указанная аналогія не можетъ сводиться къ полному тождеству; напр.: опредѣленіе прямой двумя точками не то же самое, что опредѣленіе двумя точками окружности при условіи, что намъ разъ навсегда поставлено требованіе, чтобы всѣ разсматриваемыя окружности проходили черезъ опредѣленную точку (центръ сѣти). Итакъ, нѣтъ полнаго тождества отношеній между объектами, дающими различныя реализаціи геометрической системы; но есть *тождество формальныхъ свойствъ тѣхъ отношеній*, на которыхъ единственно и основывается дедукція. Такъ, если взять отношеніе „между“ для 3 точекъ прямой и подобное же отношеніе для 3 вещественныхъ чиселъ (здѣсь, конечно, принимается во вниманіе ихъ расположеніе по возрастающей или убывающей величинѣ), то они очевидно не тождественны; но оба отношенія характеризуются однимъ и тѣмъ же основнымъ свойствомъ: изъ трехъ любыхъ объектовъ одинъ и только одинъ лежитъ „между“ двумя другими. На послѣднемъ свойствѣ (вмѣстѣ съ нѣкоторыми другими, поддающимися такому же сопоставленію) и можно построить всю теорію „между“, какъ это показалъ Гильбертъ. Вдумываясь въ такіе примѣры — число ихъ можно произвольно увеличить, — нетрудно прійти къ убѣжденію, что *истинный предметъ математики составляетъ изученіе формальныхъ свойствъ отношеній;* а эти т.-наз. *типы отношеній* всецѣло опредѣляются черезъ логическія постоянныя, какъ увидимъ ниже.

Такимъ образомъ, вся чистая математика сводится къ символической логикѣ, и Рессель считаетъ это положеніе однимъ изъ величайшихъ открытій нашего вѣка. Въ связи съ этимъ его работы имѣютъ двоякую цѣль: найти элементы символи-

[1]) См. Веберъ-Вельштейна.

ческой логики и доказать, что для построенія всей чистой математики не нужно ничего другого за исключеніемъ понятій и аксіомъ логики: „вся математика есть дедукція изъ законовъ логики по законамъ логики“ [1]).

Прикладная математика отличается отъ чистой тѣмъ, что нѣкоторымъ перемѣннымъ, входящимъ въ предложенія послѣдней, даются частныя значенія, которыя однако не сводятся къ логическимъ постояннымъ; если эти значенія удовлетворяютъ предпосылкамъ чистой математики, то по первому принципу исчисленія предложеній можно предпосылки отбросить и прямо утверждать ихъ слѣдствія; тогда какъ чистая математика утверждаетъ лишь формальное слѣдованіе между 2 предложительными функціями, а не каждую изъ нихъ отдѣльно. Напр.: всѣ предложенія обычной геометріи, если ихъ формулировать полностью, имѣютъ видъ: „если S есть евклидово пространство, то S обладаетъ такими-то свойствами“. Пока утверждается формальное слѣдованіе, мы остаемся въ области чистой геометріи; если же мы скажемъ: „пространство нашего опыта есть евклидово“, то получимъ возможность подставить вмѣсто S эту вполнѣ опредѣленную постоянную и утверждать относительно послѣдней всѣ наши выводы уже безъ всякихъ оговорокъ; но за то мы покинемъ почву чистой геометріи и перейдемъ къ прикладной.

Возвращаясь къ чистой математикѣ, мы видимъ, что она почти неотдѣлима отъ символической логики; Рессель пытается ихъ разграничить, но самъ признаетъ это разграниченіе весьма произвольнымъ. Лучше всего будетъ сказать такъ: символическая логика отличается отъ различныхъ отдѣловъ математики лишь бо́льшей общностью; она представляетъ изъ себя въ нѣкоторомъ родѣ общее введеніе къ нашей наукѣ; разсматривая же различные спеціальные типы отношеній, мы приходимъ къ построенію различныхъ спеціальныхъ отраслей математики [2]).

Отсюда ясно, какъ важно для насъ тщательное изученіе типовъ отношеній.

---

[1]) „...all mathematics is deduction by logical principles from logical principles“. (Pr., p. 5).

[2]) Russell, l. c., p. 26.

5. Намеки на самостоятельную теорію отношеній, какъ почти всѣ элементы современныхъ логико-математическихъ построеній, мы находимъ у Лейбница; онъ пришелъ къ мысли изучать ихъ общія формальныя свойства и ясно установилъ тѣ изъ нихъ, которыя теперь носятъ названія симметричности и транзитивности [1]). Однако, систематическое изложеніе встрѣчаемъ впервые у Пирса и Шредера; ихъ символизмъ оказался не совсѣмъ удачнымъ для математическихъ приложеній. Особенность концепціи названныхъ авторовъ заключалась въ томъ, что они опредѣляли отношеніе по объему, т.-е., какъ совокупность всевозможныхъ паръ, между членами которыхъ оно имѣетъ мѣсто. Въ своихъ первыхъ работахъ Рессель [2]) отнесся отрицательно къ такому ученію объ отношеніяхъ и требовалъ ихъ опредѣленія по содержанію; въ указанномъ мѣстѣ онъ утверждаетъ, что два отношенія могутъ имѣть одинъ и тотъ же объемъ, не будучи тождественными. Росселя вполнѣ поддерживалъ и Кутюра [3]); послѣдній указывалъ, что отношеніе всегда имѣетъ опредѣленное направленіе (или смыслъ), соотнося x къ y и отличаясь вообще отъ отношенія y къ x; отсюда вытекаетъ, что пару (x, y) нельзя разсматривать, какъ простой классъ изъ 2 элементовъ, а надо еще ввести идею ихъ порядка, который несомнѣнно представляетъ собою одно изъ простѣйшихъ отношеній. По мнѣнію Кутюра, опредѣленіе Пирса и Шредера впадаетъ „если и не въ логическій, то въ философскій заколдованный кругъ“.

У Пеано, какъ мы уже имѣли случай указать, нѣтъ послѣдовательно разработанной теоріи отношеній; однако, у него можно найти замѣчанія, которыя могли явиться зародышемъ нѣкоторыхъ идей Росселя [4]). Творцомъ исчисленія отношеній является только что названный англійскій ученый. По мѣрѣ того, какъ развивались идеи Росселя, и ему пришлось перейти къ систематическому и полному ихъ изложенію, нѣкоторые пункты его первоначальныхъ воззрѣній подверг-

---

[1]) Couturat „La logique de Leibniz“, Ch. VII.

[2]) Pr., p. 23—24.

[3]) Couturat „Les Principes des Mathématiques“, p. 28.

[4]) См., напр., опредѣленіе транзитивности („Formulaire“ 1901, p. 12).

лись существенной переработкѣ; такъ было и въ интересующемъ насъ вопросѣ: въ „Principia“ исчисленіе отношеній обосновывается подъ угломъ зрѣнія теоріи неполныхъ символовъ, при чемъ замѣчается рѣшительный поворотъ къ концепціи Пирса и Шредера [1]).

Такъ какъ мы остановились съ нѣкоторой подробностью на понятіи класса, то теперь можемъ быть короче. Любая предложительная функція $\Phi(x, y)$ съ 2 перемѣнными опредѣляетъ извѣстное отношеніе; именно, отношеніе, опредѣляемое функціей $\Phi(x, y)$, есть классъ всевозможныхъ паръ (x, y), которыя удовлетворяютъ нашей функціи, т.-е., будучи въ нее подставлены, даютъ мѣсто истинному предложенію. Пользуясь символами, введенными для классовъ, указанное отношеніе выражаемъ знакомъ

$$\hat{x}\,\hat{y}\,\Phi(x, y);$$

когда неважно знать опредѣляющую функцію, то предпочтительнѣе обозначать отношеніе одной буквой (для этой цѣли преимущественно употребляются буквы: P, Q, R, S).
Символъ

$$x\,R\,y$$

обозначаетъ предложительную функцію: „x имѣетъ отношеніе R къ y“; если

$$R = \hat{x}\,\hat{y}\,\Phi(x, y),$$

то $x\,R\,y$ формально эквивалентно функціи $\Phi(x, y)$. Такимъ образомъ, утверждать, что между двумя данными объектами имѣетъ мѣсто нѣкоторое отношеніе, — значитъ утверждать, что эти объекты удовлетворяютъ нѣкоторой предложительной функціи; хотя точное и полное значеніе термина „отношеніе“ довольно сложно (надо имѣть еще въ виду, что это есть неполный символъ), однако обычно его можно употреблять въ указанномъ болѣе простомъ смыслѣ, который приближается къ обычному; исключеніе, какъ и для классовъ, могутъ представить лишь тѣ немногіе случаи, когда является опас-

[1]) Въ „Pr. M.“ сюда относятся нѣкоторыя страницы введенія и § 21.

ность впасть въ одно изъ упомянутыхъ выше противорѣчій; въ нашихъ изслѣдованіяхъ подобной опасности не предвидится.

Возвращаясь къ опредѣленію отношенія по объему, Рессель какъ будто-бы попадаетъ подъ упреки Кутюра въ допущеніи ложнаго круга. Дѣйствительно, авторы „Principia“ отдаютъ себѣ полный отчетъ въ томъ, что отношеніе заключаетъ въ себѣ извѣстную идею порядка; такъ, въ примѣчаніи къ стр. 27 читаемъ, что пара (x, y), которая является элементомъ отношенія, имѣетъ опредѣленный „смыслъ“ и называется „расположенной парой (ordered couple)“ [1]). Можно пойти даже дальше и сказать, что идея порядка уже содержится въ самыхъ первоначальныхъ понятіяхъ и предложеніяхъ разсматриваемой системы математической логики; такъ, первоначальное понятіе логической суммы и принципъ, выражающій перемѣстительный законъ логическаго сложенія (см. выше), несомнѣнно включаютъ въ себѣ нѣкоторую идею порядка [2]). Тѣмъ не менѣе, едва-ли возможно видѣть въ этомъ „философскій заколдованный кругъ“; можно-ли протестовать противъ того, что принципы научной системы содержатъ въ себѣ зародыши всѣхъ наиболѣе плодотворныхъ ея идей? Не потому-ли исчисленіе отношеній и получаетъ такое блестящее приложеніе къ теоріи рядовъ, т.-е., расположенныхъ совокупностей, что оно въ своихъ основахъ заключаетъ сѣмена идеи порядка?

Въ силу опредѣленія по объему, получается нижеслѣдующее опредѣленіе тождества 2 отношеній:

$$R = S . \equiv : x R y . \equiv_{x,y} . x S y,$$

т. е., два отношенія тождественны тогда и только тогда, когда они имѣютъ мѣсто между однѣми и тѣми же парами объектовъ. Нельзя отрицать, что такая концепція значительно упрощаетъ теорію отношеній; такъ, нѣкоторыя предложенія, которыя въ „Principles“ пришлось взять въ качествѣ аксіомъ

---

[1]) См. также Pr. M., p 213, 348.

[2]) Такимъ же характеромъ обладаетъ и аксіома, отмѣченная номеромъ 11·07 (см. Pr. M.).

или далеко не простыхъ теоремъ, въ „Principia“ не представляютъ никакихъ затрудненій для своего доказательства. Напр., будемъ подъ отрицаніемъ отношенія $\{-R\}$ понимать то отношеніе между x и y, которое проистекаетъ вслѣдствіе отрицанія между ними отношенія R:

$$x - R\,y . \equiv_{x,y} . - (x\,R\,y),$$

другими словами

$$-R = \hat{x}\,\hat{y}\,\{-(x\,R\,y)\}\,Df;$$

и намъ нѣтъ никакой надобности въ аксіомѣ: „отрицаніе отношенія есть отношеніе“, которую встрѣчаемъ въ „Principles“; въ самомъ дѣлѣ, предыдущая формула даетъ намъ $-R$, какъ совокупность извѣстныхъ паръ, т.-е., какъ отношеніе. Въ этомъ сочиненіи [1]) мы находимъ упоминаніе и о такихъ теоремахъ: „если α и β суть два класса, то имѣется такое отношеніе R, что утверждать его существованіе между x и y—все равно, что утверждать принадлежность x-а классу α и y-а—классу β“; „если α есть существующій классъ, то имѣется отношеніе, которое соотноситъ любой членъ этого класса къ самому классу и не имѣетъ мѣста ни для какой другой пары объектовъ“. Чтобы убѣдиться въ справедливости первой теоремы съ точки зрѣнія, принятой въ „Principia“, достаточно указать, что искомое отношеніе R вполнѣ опредѣляется выраженіемъ:

$$\hat{x}\,\hat{y}\,(x \in \alpha . y \in \beta);$$

что же касается второй, то здѣсь очевидно идетъ рѣчь объ отношеніи

$$\hat{x}\,\hat{\alpha}\,(x \in \alpha),$$

для котораго можно оставить символъ $\in$, ибо предложительная функція $x \in \alpha$ отъ этого не измѣнитъ значенія [2]).

Первыя главы исчисленія отношеній строятся совершенно аналогично исчисленію классовъ; совершенно также мы мо-

---

[1]) Pr., p. 26

[2]) Можетъ быть, было бы правильнѣе ввести символъ $\in \alpha$, такъ какъ послѣднее опредѣленіе существенно связано съ классомъ α.

жемъ ввести понятіе объ особой связи между отношеніями, для которой возьмемъ названіе „включенія“ и сохранимъ прежній знакъ ⊃ :

$$R \supset S. = : x R y . \supset_{x,y} . x S y \, Df,$$

т. е., R включаетъ S, если изъ $x R y$ всегда вытекаетъ $x S y$; тогда приведенное выше опредѣленіе тождества между отношеніями можно истолковать, какъ взаимное включеніе:

$$R = S. \equiv : R \supset S . S \supset R.$$

Введя подобнымъ же образомъ дѣйствія логическаго сложенія и умноженія для отношеній, мы получимъ исчисленіе, формально совпадающее съ исчисленіемъ классовъ. Однако эта часть теоріи отношеній представляетъ для насъ мало интереса; наиболѣе интересны именно тѣ ея главы, которыми она отличается отъ предшествующей части математической логики. Общая основа этихъ отличій заключается въ томъ, что отношенія опредѣляются функціями отъ 2 перемѣнныхъ, тогда какъ классы связаны съ функціями одной перемѣнной; понятно, что въ 1-мъ случаѣ возникаютъ вопросы, невозможные во 2-мъ.

Прежде всего, какъ было уже упомянуто, отношеніе имѣетъ направленіе, такъ что мы отличаемъ его предшествующій членъ отъ послѣдующаго; классъ предшествующихъ членовъ наз. *областью* $\{D`R\}$, классъ послѣдующихъ — *сообластью* $\{\mathfrak{C}`R\}$, логическая сумма обоихъ — *полемъ* $\{C`R\}$ отношенія; другими словами:

$$D`R = \hat{x} \{(\exists y) . x R y\}$$

$$\mathfrak{C}`R = \hat{y} \{(\exists x) . x R y\}$$

$$C`R = D`R . \vee . \mathfrak{C}`R.$$

Въ математикѣ мы имѣемъ множество примѣровъ различныхъ отношеній; съ ними встрѣчаемся мы на каждомъ шагу и въ обыденной жизни; особенно отношенія родства даютъ обильную почву для иллюстрацій, чѣмъ по примѣру Рессля мы и будемъ пользоваться. Возьмемъ отношеніе родителей

къ дѣтямъ; тогда его областью будетъ совокупность людей, у которыхъ имѣются дѣти, а сообластью—весь человѣческій родъ; онъ же будетъ и полемъ.

Прежде чѣмъ итти дальше, намъ необходимо познакомиться съ отношеніемъ, обратнымъ данному; слѣдуя Шредеру, Рессель обозначаетъ отношеніе, обратное данному R, черезъ $\breve{R}$; это есть отношеніе, которое имѣетъ мѣсто между x и y всякій разъ, когда прямое соотноситъ y и x:

$$\breve{R} = \hat{x}\,\hat{y}\,(y\,R\,x)\,Df,$$

откуда

$$x\,\breve{R}\,y.\equiv.y\,R\,x.$$

Обратное отношеніе можетъ быть тождественнымъ съ даннымъ, или нѣтъ; отсюда возникаютъ различія въ типѣ [1]), о чемъ мы скажемъ нѣсколько ниже, а пока докажемъ нѣкоторыя свойства обратнаго отношенія [2]).

Теор. 1. Отношеніе, обратное для $\breve{R}$ (обозначимъ его черезъ $\breve{\breve{R}}$), тождественно съ R.

Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ:

$$x\,\breve{R}\,y.\equiv.y\,R\,x,$$

и подставляя сюда $\breve{R}$ вмѣсто R, пишемъ:

$$x\,\breve{\breve{R}}y.\equiv.y\,\breve{R}\,x,$$

или

$$x\,\breve{\breve{R}}\,y.\equiv.x\,R\,y,$$

откуда, на основаніи опредѣленія тождества 2 отношеній, получаемъ:

$$\breve{\breve{R}} = R,\ \text{ч. и т. д.}\ [3]).$$

---

[1]) Слово понимается въ иномъ смыслѣ, чѣмъ выше.

[2]) Pr. M. § 31.

[3]) Маленькія x и y при знакѣ $\equiv$ иногда опускаются.

Теор. 2. Область обратнаго отношенія есть сообласть даннаго.

$$D`\breve{R} = \hat{x}\{(\exists y).\, x\breve{R}y\}$$

$$x\breve{R}y .\equiv .yRx$$

$$D`\breve{R} = \hat{x}\{(\exists y).yRx\} = \mathrm{C}`R, \qquad \text{ч. и т. д.}$$

Также доказывается, что

$$\mathrm{C}`\breve{R} = D`R,$$

откуда уже непосредственно вытекаетъ:

$$C`\breve{R} = C`R.$$

Теор. 3. Отношеніе обратное $-R$ (обозначимъ его черезъ $(-\breve{R})$ есть отрицаніе отношенія $\breve{R}$.

Имѣемъ:

$$-(xRy) .\equiv .x - Ry .\equiv .y(-\breve{R})x$$

$$-(xRy) .\equiv .-(y\breve{R}x) .\equiv .y - \breve{R}x,$$

откуда

$$y(-\breve{R})x .\equiv .y - \breve{R}x,$$

т.-е.

$$(-\breve{R}) = -\breve{R}, \qquad \text{ч. и т. д.}$$

Мы уже говорили о произведеніи отношеній, опредѣляемомъ аналогично произведенію классовъ; гораздо важнѣе для насъ понятіе *относительнаго произведенія* [1]). Относительнымъ произведеніемъ 2 отношеній R и S (обозначаемъ его черезъ $R\cdot S$) наз. отношеніе, которое имѣетъ мѣсто между x и z въ случаѣ, если существуетъ такое y, что x стоитъ къ нему въ отношеніи R, а само оно имѣетъ къ z отношеніе S:

$$R\cdot S = \hat{x}\hat{z}\{(\exists y).xRy.ySz\}\ Df,$$

откуда

$$x(R\cdot S)z .\equiv :(\exists y).xRy.ySz.$$

---

[1]) Pr. M. § 34 Наши обозначенія иногда отличаются отъ обозначеній, принятыхъ въ этой книгѣ.

Напр., пусть R будетъ отношеніемъ родства между братомъ и сестрой, а S — между матерью и сыномъ; тогда $R \cdot S$ будетъ отношеніемъ родства дяди по матери къ своимъ племянникамъ. Нетрудно доказать, что относительное произведеніе подчиняется сочетательному закону; но вообще говоря оно не подчиняется перемѣстительному, т.-е., $R \cdot S$ вообще не $= S \cdot R$. Въ самомъ дѣлѣ, пользуясь нашимъ примѣромъ, найдемъ, что $S \cdot R$ будетъ отношеніемъ родства между матерью и дочерью, или между мачехой и падчерицей; т.-е., мы приходимъ къ родству совершенно другого характера, чѣмъ было $R \cdot S$. Точно также относительное произведеніе вообще не подчиняется закону тавтологіи въ томъ смыслѣ, что $R \cdot R$ не всегда $= R$. Пусть для примѣра R будетъ отношеніемъ отца къ сыну; тогда $R \cdot R$ окажется отношеніемъ дѣда къ внуку, т.-е., будетъ отличнымъ отъ R. На этомъ основаніи мы приходимъ къ понятію о степеняхъ отношенія, а именно опредѣляемъ:

$$R^2 = R\ R, \quad R^3 = R^2\ R, \ldots Df;$$

слѣд.,

$$x R^2 z . \equiv : (\exists y) . x R y . y R z.$$

Возможны однако случаи, когда R^2 сводится къ R, и это опять-таки весьма важно для характеристики типа отношенія. Закончимъ разсмотрѣніе относительнаго произведенія доказательствомъ слѣдующаго предложенія:

Теор. 4. $$(\breve{R \cdot S}) = \breve{S} \cdot \breve{R},$$

гдѣ символъ, стоящій въ лѣвой части, обозначаетъ отношеніе, обратное отношенію $R \cdot S$.

Имѣемъ:

$$x (\breve{R \cdot S}) z . \equiv . z (R \cdot S)\, x . \equiv : (\exists y) . z R y . y S x :$$

$$\equiv : (\exists y) . y \breve{R} z . x \breve{S} y : \equiv . x (\breve{S} \cdot \breve{R}) z,$$

откуда

$$(\breve{R \cdot S}) = \breve{S} \cdot \breve{R}, \qquad \text{ч. и т. д.}$$

Переходимъ къ перечисленію важнѣйшихъ типовъ отношеній, другими словами, ихъ главнѣйшихъ формальныхъ свойствъ.

Съ этой точки зрѣнія прежде всего необходимо сравнить данное отношеніе съ отношеніемъ ему обратнымъ; если они тождественны, т.-е., если

$$R = \breve{R},$$

то отношеніе R наз. *симметричнымъ;* вспоминая опредѣленіе $\breve{R}$, мы получаемъ для такого отношенія въ качествѣ существеннаго признака эквивалентность:

$$x R y . \equiv_{x,y} . y R x \text{ [1]}.$$

Если же yRx исключается тѣмъ фактомъ, что имѣетъ мѣсто xRy, то R наз. *асимметричнымъ;* слѣд., для такого отношенія имѣемъ:

$$x R y . \supset_{x,y} . - (y R x).$$

Наконецъ, если xRy и yRx иногда совмѣстны, иногда несовмѣстны, то R наз. *несимметричнымъ*. Исходя изъ этихъ опредѣленій, нетрудно прійти къ выводу, что $\breve{R}$ по отношенію къ симметріи обладаетъ тѣми же свойствами, что и R.

Вторымъ различающимъ признакомъ служитъ разсмотрѣніе R^2 съ точки зрѣнія, сводится ли оно къ R, или нѣтъ; если

$$x R y . y R z : \supset . x R z,$$

т.-е., если

$$R^2 \supset R,$$

то отношеніе R наз. *транзитивнымъ* [2]); если же существованіе xRy и yRz исключаетъ возможность xRz, то R наз. *интранзитивнымъ*. Въ остальныхъ случаяхъ R будетъ *нетранзитивнымъ*.

---

[1]) Собственно говоря достаточно формальнаго слѣдованія $xRy . \supset . yRx$, такъ какъ примѣняя эту формулу, вѣрную при любыхъ x и y, къ предложительной функціи yRx, найдемъ, что $yRx . \supset xRy$; а обѣ эти формулы вмѣстѣ даютъ эквивалентность, приведенную въ текстѣ.

[2]) См. Pr. M. введеніе (p. 36) и § 201 (во II-мъ томѣ). Итакъ, условіемъ транзитивности служитъ включеніе $R^2 \supset R$, но написать, что $R^2 = R$, можно только въ томъ случаѣ, если еще дано $R \supset R^2$; что̀ это значитъ, увидимъ ниже.

Теор. 5. Отношеніе, обратное транзитивному, само обладаетъ этимъ свойствомъ.

Пусть R — транзитивно; тогда

$$xRy.yRz : \supset .xRz,$$

откуда

$$y\breve{R}x.z\breve{R}y : \supset .z\breve{R}x,$$

$$z\breve{R}y.y\breve{R}x : \supset .z\breve{R}x,$$

т.-е.,

$$(\breve{R})^2 \supset \breve{R}, \text{ ч. и т. д.}$$

Приведемъ въ качествѣ примѣровъ на два указанныхъ общихъ свойства важнѣйшія отношенія математики и символической логики:

1) Математическое равенство симметрично и транзитивно, такъ какъ

$$x=y.\equiv.y=x,$$

$$x=y.y=z : \supset .x=z$$

(о возвратности равенства скажемъ ниже). Указанными формальными свойствами равенства обладаютъ многія другія отношенія: сравнимость цѣлыхъ чиселъ по данному модулю, параллельность прямыхъ, подобіе фигуръ, тождество, эквивалентность предложеній и др.

2) Отношеніе $>$ (больше) асимметрично и транзитивно:

$$x>y. \supset .-(y>x),$$

$$x>y\ y>z : \supset .x>z;$$

тѣ же формальныя свойства присущи и отношенію $<$ (меньше), отношеніямъ предшествованія и слѣдованія во времени и др.

3) Отношеніе $\supset$ (слѣдованія) транзитивно въ силу принципа силлогизма:

$$p \supset q.q \supset r : \supset .p \supset r;$$

но оно несимметрично, такъ какъ изъ того, что $p \supset q$, можетъ вытекать обратное слѣдованіе $q \supset p$, а можетъ и не вытекать.

Такими же формальными свойствами характеризуются и отношенія подчиненія между классами и включенія между отношеніями. Что же касается отношенія ε, то оно будетъ нетранзитивнымъ (см. выше) и, очевидно, асимметричнымъ.

4) Отношеніе сходства симметрично, но нетранзитивно; въ самомъ дѣлѣ, если x сходенъ съ y, а y сходенъ съ z, то x можетъ быть сходенъ съ z; но можетъ случиться, что x и z сходны съ y какъ разъ тѣми признаками, которыми они отличаются другъ отъ друга; тогда между x и z сходства не будетъ. Такими же формальными свойствами обладаетъ и отношеніе различія; обозначивъ его черезъ J[1]), мы можемъ опредѣлить его, какъ отрицаніе тождества:

$$J = -ID f,$$

гдѣ знакъ I для удобства обозначаетъ отношеніе тождества; тогда

$$x J y . \equiv . x =\!|\!= y,$$

и нетрудно убѣдиться, что J — симметрично; дѣйствительно:

$$I = \breve{I},$$

ибо тождество есть симметричное отношеніе; слѣд.,

$$J = -I = -\breve{I} = (\breve{-I}) \qquad \text{(см. теор. 3)},$$

т.-е.,

$$J = \breve{J}, \text{ ч. и т. д.}$$

Далѣе J будетъ нетранзитивнымъ, такъ какъ

$$x =\!|\!= y \;.\; y =\!|\!= z$$

вовсе не влечетъ за собой $x =\!|\!= z$ (именно, возможно и существованіе $x = z$). Послѣднія разсужденія могутъ послужить первымъ шагомъ къ опроверженію довольно распространеннаго среди философовъ мнѣнія, что отношенія сходства и различія не поддаются математическому трактованію: мы характеризовали ихъ съ помощью тѣхъ же терминовъ, что и безспорно математическія отношенія. Докажемъ еще нѣкоторыя свойства отношенія различія.

---

[1]) Pr. M., § 50.

Теор. 6. $R \supset J . \equiv . - (xRx)$ при всякомъ x. Дѣйствительно:

$$R \supset J . \equiv : xRy . \supset . x = | = y,$$

или на основаніи правила обращенія:

$$R \supset J . \equiv : x = y . \supset . - (xRy),$$

а такъ какъ всегда $x = x$, то теорема доказана. Отношеніе, обладающее тѣмъ свойствомъ, что ни одинъ объектъ не можетъ стоять въ этомъ отношеніи къ самому себѣ, наз. *аліорелятивнымъ;* признакъ аліорелятивности отношенія заключается такимъ обр. въ формулѣ:

$$R \supset J.$$

Слѣдствіе. Если R аліорелятивно, то и $\breve{R}$ обладаетъ тѣмъ же свойствомъ.

Въ с. д.:

$$R \supset J . \equiv . - (xRx) . \equiv . - (x\breve{R}x) . \equiv . \breve{R} \supset J, \quad \text{ч. и т. д.}$$

Теор 7. $R^2 \supset J$ есть признакъ асимметричности отношенія R.

Пусть x и z стоятъ въ отношеніи R^2; тогда

$$R^2 \supset J . \equiv : xR^2z . \supset . x = | = z,$$

но

$$xR^2z . \equiv : (\exists y) . xRy . yRz,$$

такъ что наше условіе $R^2 \supset J$ эквивалентно слѣдующему:

$$(\exists y) . xRy . yRz : \supset . x = | = z;$$

отсюда по правиламъ обращенія имѣемъ:

$$x = z . \supset : - \{(\exists y) . xRy . yRz\},$$

другими словами

$$xRy . yRx \quad \text{невозможно, ч. и т. д.}$$

Теор. 8. $R^2 \supset R . \supset : R \supset J . \equiv . R^2 \supset J,$

т.-е., при наличіи транзитивности аліорелятивность отношенія эквивалентна его асимметріи.

Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи транзитивности отношенія включенія имѣемъ:

$$R^2 \supset R . R \supset J : \supset . R^2 \supset J;$$

остается доказать обратное, т.-е., что

$$R^2 \supset J . \supset . R \supset J,$$

и эквивалентность будетъ доказана (если мы докажемъ послѣднее слѣдованіе безусловно, то оно будетъ вѣрнымъ и при наличіи транзитивности). Очевидно, что

$$-(R \supset J) . \equiv : (\exists x) . x R x \qquad \text{(см. теор. 6);}$$

на основаніи закона тавтологіи:

$$x R x . \equiv : x R x . x R x,$$

но

$$x R x \; x R x : \supset . x R^2 x;$$

отсюда

$$-(R \supset J) . \supset : (\exists x) . x R^2 x,$$

но

$$(\exists x) . x R^2 x \; . \equiv . - (R^2 \supset J);$$

слѣд.,

$$-(R \supset J) \; . \supset . - (R^2 \supset J);$$

наконецъ въ силу законовъ обращенія·

$$R^2 \supset J \; . \supset . \; R \supset J, \qquad \text{ч. и т. д.}$$

Мы можемъ также раздѣлить отношенія на группы различныхъ типовъ, если примемъ во вниманіе ихъ свойства однозначности и многозначности. Англійскій языкъ обладаетъ очень удобными терминами для выраженія указанныхъ различій, а именно: one-many, many-one, one-one [1]); мы передадимъ ихъ на русскій языкъ буквально, но не особенно благозвучно. Отношеніе R наз. *одно-многозначнымъ*, если каждому послѣдующему члену отвѣчаетъ только одинъ предыдущій, т.-е., если

$$x R z . y R z : \supset_{x,y,z} . x = y;$$

---

[1]) Pr. M. § 71.

отношеніе R будетъ *много-однозначнымъ*, если каждому предшествующему члену его соотвѣтствуетъ одинъ и только одинъ послѣдующій, т.-е., если

$$xRy.xRz : \supset_{x,y,z} . y = z;$$

наконецъ, *одно-однозначнымъ* наз. отношеніе, которое обладаетъ обоими указанными свойствами, т.-е., если каждому предшествующему члену отвѣчаетъ одинъ и только одинъ послѣдующій и каждому послѣдующему — одинъ и только одинъ предшествующій; нѣкоторые говорятъ также, что въ этомъ случаѣ между областью и сообластью отношенія устанавливается „совершенное сопряженіе“ [1]). Примѣры отношеній указанныхъ типовъ: отношеніе отца къ дѣтямъ будетъ одно-многозначнымъ; отношеніе между корнями степени n и самими числами будетъ много-однозначнымъ; совокупности всѣхъ цѣлыхъ чиселъ и только четныхъ чиселъ находятся въ совершенномъ сопряженіи, если условиться каждому цѣлому числу x относить четное число $2x$ и всякому четному числу—то цѣлое число, которое равно его половинѣ.

Только что введенныя понятія встрѣчаются на каждомъ шагу математическаго разсужденія; такъ, если R есть одно-многозначное отношеніе, то при данномъ y существуетъ одно и только одно x, удовлетворяющее предложительной функціи xRy; легко видѣть, что понятіе о такомъ отношеніи лежитъ въ основѣ общаго понятія однозначной функціи.

Теор. 9. Отношеніе, обратное одно-многозначному отношенію, будетъ много-однозначнымъ, и наоборотъ.

Пусть R — одно-многозначное; тогда

$$xRz.yRz : \supset .x = y,$$

что очевидно эквивалентно такому слѣдованію:

$$z\breve{R}x.z\breve{R}y : \supset .x = y,$$

а это говоритъ намъ, что $\breve{R}$ есть много-однозначное отношеніе. Также доказывается и вторая часть теоремы.

---

[1]) Каганъ „Основанія геометріи“.

Теор. 10. Если R есть одно-многозначное отношеніе, то

$$R \cdot \breve{R} = I,$$

т.-е., относительное произведеніе R и обратнаго ему приводитъ насъ къ исходному элементу; тождество здѣсь, конечно, ограничено областью отношенія R.

Пусть x и y стоятъ въ отношеніи $R \cdot \breve{R}$; тогда

$$x(R \cdot \breve{R})y . \equiv : (\exists z) . x R z . z \breve{R} y,$$

или

$$x(R \cdot \breve{R})y . \equiv : (\exists z)\ x R z . y R z;$$

такъ какъ R — одно-многозначное, то

$$x R z\ \ y R z : \supset . x = y,$$

и мы имѣемъ

$$x(R \cdot \breve{R})y\ . \supset . x = y,$$

т.-е.,

$$R \cdot \breve{R}\ . \supset .\ I,$$

при чемъ очевидно x и y должны принадлежать области отношенія R. Пусть теперь намъ дано, что

$$y \varepsilon D`R\ . x = y;$$

тогда

$$y \varepsilon D`R . \equiv : (\exists u) . y R u,$$

$$x = y\ . \supset . x R u,$$

такъ что

$$y \varepsilon D`R . x = y : \supset : (\exists u) . y R u . x R u,$$

или

$$y \varepsilon D`R . x = y : \supset : (\exists u) . x R u . u \breve{R} y,$$

$$y \varepsilon D`R . x = y : \supset . x(R \cdot \breve{R})y;$$

т.-е.,

$$I\ . \supset . R \cdot \breve{R}$$

при условіи, что y принадлежитъ области R.

Наконецъ,

$$R \cdot \breve{R}\ . \supset . I : I\ . \supset . R \cdot \breve{R}\ . : \equiv .\ R\ \breve{R} = I,$$ ч. и т. д.

Слѣдствіе. Если R есть много-однозначное, то

$$\breve{R}\cdot R = I,$$

при чемъ отношеніе тождества ограничено сообластью отношенія R.

Дальнѣйшей нашей цѣлью будетъ установить такъ-наз. принципъ отвлеченія [1]), который лежитъ въ основѣ цѣлаго ряда математическихъ опредѣленій. Сначала докажемъ двѣ слѣдующихъ теоремы:

Теор. 11. Если R есть много-однозначное отношеніе, то отношеніе $S = R\cdot\breve{R}$ обладаетъ свойствами транзитивности и симметричности.

Въ самомъ дѣлѣ:

$$S = R\cdot\breve{R}\,.\,\supset\,.\,S^2 = (R\cdot\breve{R}\cdot R)\cdot\breve{R},$$

при чемъ скобки въ правой части поставлены въ силу того обстоятельства, что относительное произведеніе подчиняется сочетательному закону; на основаніи слѣдствія изъ теор. 10 имѣемъ:

$$\breve{R}\cdot R = I$$

и слѣд.

$$S^2 = R\cdot\breve{R} = S;$$

далѣе:

$$S^2 = S\,.\,\supset\,.S^2\,\supset S,$$

т.-е., S — транзитивно. Для доказательства же симметричности вспомнимъ теор. 4, въ силу которой:

$$\breve{S} = \breve{\breve{R}}\cdot\breve{R} = R\cdot\breve{R} = S, \qquad \text{ч. и т. д.}$$

Теор. 12. Если S — транзитивно и симметрично, то существуетъ такое много-однозначное отношеніе R, что

$$S = R\cdot\breve{R}.$$

Мы допустимъ, что отношеніе S имѣетъ дѣйствительные случаи своего примѣненія, другими словами, что его область

[1]) Pr. M. § 72; наши теоремы по существу воспроизводятъ тотъ же ходъ мысли.

не сводится къ нулевому классу; условія транзитивности и симметричности сами по себѣ этого не гарантируютъ; мы так. обр. допускаемъ:

$$(\exists x).x \varepsilon D'S;$$

допущеніе — вполнѣ естественное, ибо только такія отношенія и могутъ представлять интересъ. Если x принадлежитъ области отношенія S, то это влечетъ за собой еще существованіе элемента y:

$$x \varepsilon D'S \,.\, \supset : (\exists y)\ xSy,$$

при чемъ мы не нуждаемся ни въ какомъ дальнѣйшемъ утвержденіи о тождествѣ или различіи x и y. Обозначимъ черезъ a классъ всѣхъ объектовъ, къ которымъ x имѣетъ отношеніе S:

$$a = \hat{y}\,(x\,S\,y);$$

на основаніи предыдущаго a не есть нулевой классъ. Введемъ далѣе въ разсмотрѣніе нѣкоторое отношеніе, выражающее принадлежность классу a; оно опредѣляется, какъ

$$\hat{z}\,\hat{a}(z \varepsilon a),$$

и согласно изложенному выше можетъ быть обозначено черезъ ε. Изъ опредѣленія класса a вытекаетъ эквивалентность:

$$y \varepsilon a .\equiv .xSy;$$

отношеніе ε будетъ, конечно, много-однозначнымъ, ибо оно соотноситъ всякое y изъ разсматриваемой совокупности съ однимъ и тѣмъ же послѣдующимъ членомъ a.

До сихъ поръ опредѣленіе класса a было тѣсно связано съ опредѣленнымъ элементомъ x; симметричность и транзитивность отношенія S дѣлаютъ эту связь совершенно несущественной. Обозначимъ временно классъ a, поскольку онъ опредѣляется посредствомъ x, черезъ a_x, такъ что a_z будетъ обозначать классъ, опредѣленный точно такимъ же способомъ черезъ элементъ z:

$$a_z = \hat{y}\,(z\,S\,y);$$

докажемъ, что

$$z \varepsilon a_x \,.\, \supset \,.\, a_x = a_z,$$

т.-е., что любой элементъ класса a, взятый въ качествѣ исходной точки опредѣленія, приведетъ насъ къ той же самой совокупности. Мы знаемъ, что

$$a_x = a_z \,.\equiv: t \varepsilon a_x \,.\equiv_t . t \varepsilon a_z;$$

имѣемъ:

$$z \varepsilon a_x \,.\, t \varepsilon a_x : \equiv : x S z \,.\, x S t : \equiv : z S x \,.\, x S t : \supset . z S t,$$

$$z \varepsilon a_x \,.\, t \varepsilon a_x : \supset . t \varepsilon a_z;$$

обратно:

$$z \varepsilon a_x \,.\, t \varepsilon a_z : \equiv : x S z \,.\, z S t : \supset . x S t,$$

$$z \varepsilon a_x \,.\, t \varepsilon a_z : \supset . t \varepsilon a_x;$$

слѣдовательно:

$$z \varepsilon a_x \,.\, \supset : t \varepsilon a_x \,.\equiv .\, t \varepsilon a_z, \qquad \text{ч. и т. д.}$$

Такъ какъ

$$x S z \,.\equiv .\, z S x,$$

то и само x войдетъ въ классъ a_x; въ самомъ дѣлѣ:

$$z S x \,.\equiv .\, x \varepsilon a_z \,.\equiv\, x \varepsilon a_x.$$

Мы убѣждаемся, что изъ какого бы элемента области отношенія S мы ни исходили, всегда придемъ къ одной и той же вполнѣ опредѣленной совокупности, которую и обозначимъ опять черезъ a, не нуждаясь болѣе въ добавочныхъ значкахъ.

Предыдущія разсужденія убѣждаютъ насъ также въ существованіи такой эквивалентности:

$$z \varepsilon a \,.\, t \varepsilon a : \equiv\, z S t;$$

въ самомъ дѣлѣ:

$$z \varepsilon a \,.\, t \varepsilon a : \supset : (\exists\, x) \,.\, x S z \;\; x S t$$

$$(\exists\, x) \,.\, x S z \,.\, x S t : \equiv : (\exists\, x) \,.\, z S x \,.\, x S t : \equiv .\, z S^2 t$$

$$z S^2 t \,.\, \supset\, z S t \quad \text{(въ силу транзитивности)},$$

такъ что

$$(1) \qquad z \varepsilon a . t \varepsilon a : \supset . z S t;$$

обратно:

$$z S t . \supset . t \varepsilon a$$

$$z S t . \equiv . t S z . \supset . z \varepsilon a,$$

такъ что

$$(2) \qquad z S t . \supset : t \varepsilon a . z \varepsilon a;$$

Формулы (1) и (2) оправдываютъ наше послѣднее утвержденіе. Мы видимъ, что отношеніе S между 2 любыми объектами цѣликомъ сводится къ ихъ одновременной принадлежности къ классу a. Остается добавить нѣсколько словъ, чтобы закончить доказательство нашей теоремы; именно, мы можемъ написать:

$$z S t . \equiv : (\exists a) . z \varepsilon a . a \breve{\varepsilon} t : \equiv . z (\varepsilon \cdot \breve{\varepsilon}) t,$$

откуда

$$S = \varepsilon \cdot \breve{\varepsilon},$$

а такъ какъ ε есть отношеніе много-однозначное, то предложеніе 12-е доказано.

Условившись обозначать классъ много-однозначныхъ отношеній черезъ *m-o* (сокращеніе слова many-one), можно объ предыдущія теоремы символически выразить такъ:

$$R \varepsilon m\text{-}o . S = R \cdot \breve{R} : \supset : \breve{S} = S . S^2 \supset S$$

$$S = \breve{S} . S^2 \supset S : \supset : (\exists R) . R \varepsilon m\text{-}o . S = R \cdot \breve{R},$$

при чемъ доказательство послѣдней было еще основано на допущеніи, что S имѣетъ дѣйствительные случаи своего примѣненія; отношеніе R, которое фигурируетъ во 2-й формулѣ, есть не что иное, какъ отношеніе ε, ограниченное классомъ a. Конечно, изъ обоихъ приведенныхъ слѣдованій вытекаетъ эквивалентность:

$$S = \breve{S} . S^2 \supset S : \equiv : (\exists R) . R \varepsilon m\text{-}o . S = R \cdot \breve{R}\ ^{1}),$$

которая и даетъ намъ нужное предложеніе:

---

[1]) Въ формулировку теор. 11 очевидно можно прибавить условіе $(\exists R)$.

Принципъ отвлеченія. Если отношеніе, которое имѣетъ дѣйствительные случаи своего примѣненія, обладаетъ симметричностью и транзитивностью, то оно цѣликомъ сводится къ извѣстному много-однозначному отношенію, соотносящему всѣ члены области даннаго отношенія съ однимъ вполнѣ опредѣленнымъ объектомъ (классомъ a).

Дѣйствительно, изъ того обстоятельства, что

$$S = R \cdot \breve{R},$$

вытекаетъ слѣдующая эквивалентность:

$$z S t . \equiv . z(R \cdot \breve{R}) t . \equiv : (\exists a) . z R a . a \breve{R} t : \equiv : (\exists a) . z R a . t R a.$$

Принципъ отвлеченія даетъ твердую основу для цѣлаго ряда опредѣленій въ математикѣ; объ этомъ будетъ сказано нѣсколько ниже, а пока займемся третьимъ свойствомъ равенства (и всѣхъ отношеній того же типа) съ цѣлью выяснить его зависимость отъ остальныхъ двухъ свойствъ.

Мы имѣемъ въ виду т.-наз. *возвратность* (или рефлексивность), въ силу которой всегда

$$x S x,$$

если S обладаетъ указаннымъ свойствомъ и x принадлежитъ его области. Очевидно, возвратность есть свойство, противоположное аліорелятивности.

Возникаетъ вопросъ, является ли возвратность свойствомъ, независимымъ отъ симметричности и транзитивности, или же всякое отношеніе, обладающее двумя послѣдними, обладаетъ и первымъ.

Начнемъ съ доказательства слѣдующей теоремы:

Теор. 13. $\quad S = \breve{S} . S^2 \supset S . x \in D`S : \supset . x S x,$

т.-е., симметричное и транзитивное отношеніе S обладаетъ возвратностью для любого элемента своей области.

Нетрудно видѣть, что наши предпосылки совпадаютъ съ условіями теор. 12, такъ что мы получаемъ возможность и здѣсь говорить о классѣ a, какъ о существующемъ и вполнѣ

опредѣленномъ; при доказательствѣ этой теоремы мы видѣли также, что

$$x \varepsilon D`S . \supset . x \varepsilon a.$$

Повторивъ на основаніи закона тавтологіи послѣднее предложеніе 2 раза и имѣя въ виду указанную теорему, пишемъ:

$$x \varepsilon a . x \varepsilon a : \equiv . x S x, \qquad \text{ч. и т. д.}$$

Тѣмъ не менѣе такой выдающійся логикъ, какъ Пеано, отрицаетъ зависимость возвратности отъ симметричности и транзитивности [1]). Съ его точки зрѣнія противъ приведеннаго доказательства можно возразить, что оно не основывается только на двухъ названныхъ свойствахъ отношенія S, но дѣлаетъ еще одно допущеніе, сводящееся въ концѣ концовъ къ утвержденію, что область отношенія S не есть нулевой классъ; и дѣйствительно, свойства симметричности и транзитивности S не влекутъ за собой, что

$$(\exists x) . x \varepsilon D`S,$$

а только показываютъ, что̀ будетъ, если это имѣетъ мѣсто. Рессель [2]) старается защитить доказательство зависимости, основанное на принципѣ отвлеченія, но несомнѣнно, что дѣлается нѣкоторое добавочное допущеніе, безъ котораго едва ли можно обойтись и при доказательствѣ названнаго принципа (см. доказательство теор. 12).

Читатели, слышавшіе на 1-мъ съѣздѣ преподавателей математики докладъ проф. Шатуновскаго о постулатахъ количественнаго сравненія, вспомнятъ, вѣроятно, и о другомъ доказательствѣ независимости свойства возвратности отъ симметричности и транзитивности. Уважаемый докладчикъ разсматриваетъ одновременно 3 отношенія, которыя онъ обозначаетъ черезъ α, β, γ; отношеніе α надѣляется всѣми тремя названными свойствами; что же касается отношеній β и γ то, помимо транзитивности, утверждается еще, что каждое изъ нихъ несовмѣстно съ α [3]).

[1]) Formulaire, 1901; p. 17, 193. См. также замѣчаніе Vailati въ „Rivista di Matematica“, v. II, p. 164.

[2]) Pr. p. 219—220.

[3]) Иллюстраціей этихъ отношеній могутъ служить отношенія: равно, больше и меньше.

Въ основу изслѣдованія кладется система G, которая характеризуется тѣмъ обстоятельствомъ, что между каждыми 2 ея элементами имѣетъ мѣсто по крайней мѣрѣ одно изъ отношеній α, β, γ; ограничиваясь объектами системы G, проф. Шатуновскій доказываетъ согласуемость своихъ постулатовъ, выражающихъ свойства указанныхъ отношеній, и ихъ взаимную независимость. Доказательство ведется тѣмъ путемъ, что въ особыхъ таблицахъ фактически указываются такія системы G (съ конечнымъ числомъ элементовъ), въ которыхъ выполняются или всѣ постулаты, или всѣ за исключеніемъ одного; въ частности таблица № 5 служитъ доказательствомъ независимости свойства возвратности отъ остальныхъ перечисленныхъ выше постулатовъ [1]). Отдавая все должное ясности и остроумію изслѣдованій проф. Шатуновскаго, мы все-таки полагаемъ, что они ничего не говорятъ противъ приведеннаго выше доказательства свойства возвратности: просто мы имѣемъ здѣсь дѣло съ различными точками зрѣнія. Приведенное нами доказательство ограничивается областью отношенія α (если принять обозначенія проф. Шатуновскаго), т.-е., только для объектовъ этого класса возвратность есть слѣдствіе симметричности и транзитивности; между тѣмъ у нашего автора система G, для которой ведутся всѣ доказательства, есть не что иное, какъ логическая сумма полей всѣхъ 3 отношеній α, β, γ. Если мы обратимся къ таблицѣ № 5, то увидимъ, что на ряду съ элементами A, B, C, D, E, которые стоятъ къ самимъ себѣ въ отношеніи α, вводится еще такой элементъ F, что $F\beta F$, при чемъ F ни къ одному изъ названныхъ выше не стоитъ въ отношеніи α; слѣдов., почтенный авторъ выходитъ здѣсь за предѣлы того класса, которымъ мы ограничились при доказательствѣ возвратности; а потому его изслѣдованія и не уничтожаютъ этого доказательства.

Мы видимъ, что вопросъ о зависимости или независимости возвратности отъ другихъ свойствъ равенства далеко не является простымъ.

Резюмируя предыдущія разсужденія, скажемъ, что изъ однихъ свойствъ симметричности и транзитивности, *безъ всякихъ новыхъ допущеній*, нельзя вывести возвратности.

[1]) См. „Труды съѣзда“.

Если же допустить, что отношеніе S имѣетъ дѣйствительные случаи своего примѣненія—а только такія отношенія и представляютъ интересъ,—то вопросъ о зависимости рѣшается утвердительно.

6. Въ настоящемъ параграфѣ мы коснемся вопроса о математическихъ опредѣленіяхъ; къ нему мы подошли довольно близко, затронувъ принципъ отвлеченія.

Смыслъ опредѣленій въ математикѣ значительно отличается отъ того, который въ нихъ вкладывается философами, и Рессель считаетъ нужнымъ подчеркнуть указанное обстоятельство [1]). Философы подъ опредѣленіемъ понятія понимаютъ его анализъ на составныя части; напр., у проф. Введенскаго читаемъ: „подъ опредѣленіемъ понятія (definitio) чаще всего подразумѣваютъ полное указаніе признаковъ, образующихъ содержаніе этого понятія“ [2]). Такая концепція не подходитъ ко многимъ математическимъ опредѣленіямъ, такъ какъ въ математикѣ и символической логикѣ подчасъ опредѣляются извѣстныя операціи, что̀ производится не путемъ расчлененія даннаго понятія. Возьмемъ, напр., опредѣленіе, которое даетъ Пеано для своего знака $\smile$ (логической суммы) въ примѣненіи къ классамъ a и b:

$$a \smile b = x\,\varepsilon(c\,\varepsilon cls.a \supset c.b \supset c : \supset_c.x\,\varepsilon\,c)Df\ ^{3}),$$

т.-е., $a \smile b$ есть такой классъ, который содержится во всякомъ классѣ, содержащемъ a и b. Приведенное опредѣленіе вполнѣ достаточно для изученія свойствъ логической суммы; но оно очевидно не подходитъ подъ философское опредѣленіе, такъ какъ пользуется понятіемъ до извѣстной степени произвольнаго класса c, тогда какъ $a \smile b$ въ сущности состоитъ изъ совокупности членовъ, входящихъ по крайней мѣрѣ въ одинъ изъ данныхъ классовъ; здѣсь мы не имѣемъ анализа на составныя части. Рессель упрекаетъ даже философовъ въ нѣкоторомъ просмотрѣ, а именно: цѣлое еще можетъ быть не дано при заданіи всѣхъ его составныхъ частей, и можетъ быть новой, въ нѣкоторомъ смыслѣ простой сущ-

[1]) Pr., p. 15, 27, 111—112.

[2]) „Логика, какъ часть теоріи познанія“, стр. 454.

[3]) „$x\,\varepsilon$“ у Пеано обозначаетъ: „классъ такихъ x-овъ, что...“

ностью, опредѣляемой лишь съ помощью извѣстныхъ отношеній къ своимъ составляющимъ.

Въ противоположность философскому смыслу, математическое опредѣленіе состоитъ въ указаніи опредѣленнаго отношенія къ опредѣленному объекту, при чемъ этому отношенію подлежитъ лишь одинъ единственный объектъ; послѣдній иногда вовсе и не указывается (устанавливается лишь его существованіе), и нужно „философское прозрѣніе“ для его открытія. Единственными понятіями, не подлежащими опредѣленію и служащими основой для всѣхъ математическихъ опредѣленій, являются логическія постоянныя, о которыхъ мы говорили выше. Какъ это общее положеніе примѣняется на практикѣ, мы поймемъ, познакомившись съ различными видами опредѣленій въ математикѣ.

Весьма часто, напр. при обобщеніи понятія числа, мы встрѣчаемся съ такимъ процессомъ: имѣется извѣстный классъ, и требуется опредѣлить нѣкоторую функцію одного перемѣннаго, ограниченнаго даннымъ классомъ (понятія функціи и перемѣннаго берутся здѣсь во всей возможной широтѣ и общности); тогда вмѣсто того, чтобы непосредственно установить признаки, характеризующіе искомую функцію, мы указываемъ лишь условія, при которыхъ оказываются одинаковыми значенія нашей функціи для различныхъ значеній перемѣннаго; т.-е., мы опредѣляемъ лишь, когда

$$\varphi x = \varphi y$$

при различныхъ x и y. Идею же о самой функціи φ мы составляемъ, какъ бы отвлекая ее отъ всѣхъ тѣхъ случаевъ, когда значенія функціи оказываются тождественными. Подобныя опредѣленія наз. *опредѣленіями по отвлеченію* [1]). Возьмемъ, напр., опредѣленіе отрицательнаго числа по Пеано [2]); обозначивъ черезъ N_0 совокупность цѣлыхъ чиселъ безъ знака, какъ они всегда и вводятся сначала, Пеано не

---

[1]) См. о нихъ: Russell, l. c., p. 114, 116; Couturat, l. c., p. 42—43; Peano, l. c., p. 17.

[2]) „Formulaire“ p. 49.

опредѣляетъ прямо, что̀ такое представляютъ изъ себя цѣлыя числа со знакомъ, а ограничивается опредѣленіемъ ихъ равенства:

$$x = y . = : . u \varepsilon N_0 . u + x, \ u + y \varepsilon N_0 : \circ_u . u + x = u + y \ Df,$$

т.-е., относительныя числа (числа со знакомъ) равны по опредѣленію, если для всякаго абсолютнаго цѣлаго числа u имѣемъ $u + x = u + y$, лишь бы только эти дѣйствія были возможны въ области N_0. Изложеннаго опредѣленія оказывается достаточно для развитія ученія объ отрицательныхъ числахъ; между тѣмъ оно имѣетъ всѣ признаки опредѣленія по отвлеченію. У другихъ авторовъ находимъ по существу тѣ же пріемы для расширенія области чиселъ, а также и для другихъ подобныхъ же цѣлей.

Опредѣленіе по отвлеченію является какъ будто существенно связаннымъ съ отношеніемъ равенства; но мы уже знаемъ, что для математики важенъ не реальный смыслъ отношенія, а лишь его формальныя свойства. Дѣйствительно, всякое отношеніе симметричное и транзитивное, т.-е., обладающее основными свойствами равенства, можетъ повести къ опредѣленію по абстракціи. Указанная аналогія съ равенствомъ служитъ для т.-наз. здраваго смысла достаточнымъ основаніемъ, позволяющимъ свести данное отношеніе къ равенству съ извѣстной точки зрѣнія: объекты, образующіе его поле, признаются тождественными въ нѣкоторомъ смыслѣ, имъ приписывается нѣкоторое „общее свойство“. Такъ, когда въ геометріи мы имѣемъ дѣло съ совокупностью прямыхъ, параллельныхъ данной, то на основаніи симметричности и транзитивности параллелизма, мы приписываемъ всѣмъ имъ общее направленіе, или общую точку на безконечности; разсматривая фигуры, подобныя данной, мы утверждаемъ, что всѣ онѣ имѣютъ одну и ту же форму, и т. д.

Такія опредѣленія Рессель считаетъ несостоятельными съ философской точки зрѣнія, хотя они удовлетворяютъ всѣмъ чисто математическимъ требованіямъ. Въ самомъ дѣлѣ, понятіе „общаго свойства“ остается совершенно неопредѣленнымъ; и если даже допустить его существованіе, то ни от-

куда не слѣдуетъ его единственности, такъ что нельзя быть увѣреннымъ, что разсуждаешь о вполнѣ опредѣленномъ объектѣ. Однако указанный недостатокъ легко исправить, призвавъ на помощь принципъ отвлеченія. Пусть дано намъ какое-нибудь симметричное и транзитивное отношеніе S, и дѣло идетъ объ „общемъ свойствѣ“ элементовъ, между которыми имѣетъ мѣсто это S. Мы уже знаемъ, что для всякихъ двухъ объектовъ x и y утвержденіе предложенія xSy эквивалентно одновременному утвержденію двухъ предложеній: $x \varepsilon a$ и $y \varepsilon a$, гдѣ a есть классъ, опредѣленный изложеннымъ выше способомъ. Такимъ образомъ, принадлежность къ нѣкоторому вполнѣ опредѣленному классу и есть то общее свойство, которое присуще всѣмъ членамъ поля S Въ классѣ a мы находимъ твердую почву для опредѣленія по абстракціи, и взявъ его въ качествѣ искомаго „общаго свойства“, мы вполнѣ удовлетворимъ чисто математическимъ требованіямъ и будемъ правы съ логической точки зрѣнія. Такъ, если дѣло идетъ о совокупности параллельныхъ прямыхъ, то принадлежность къ этой самой совокупности и есть, очевидно, ихъ общее свойство [1]), и намъ не остается ничего другого, какъ ввести безконечно-удаленныя точки въ качествѣ замѣстительницъ пучковъ параллельныхъ прямыхъ — концепція, которая въ настоящее время является господствующей въ геометріи; точно также форма фигуры опредѣляется совокупностью фигуръ, подобныхъ данной, и т. д.

Мы убѣждаемся, что всякое симметричное и транзитивное отношеніе, въ томъ числѣ и математическое равенство, выражаетъ въ нѣкоторомъ смыслѣ тождество объектовъ своего поля; именно, послѣдніе характеризуются принадлежностью *одному и тому же классу* a. Вотъ почему знакъ равенства прежде всего выражаетъ отношеніе тождества; остальныя его значенія въ концѣ концовъ сводятся къ этому.

Итакъ, принципъ отвлеченія разрѣшаетъ всѣ трудности, связанныя съ опредѣленіями разсматриваемаго типа; но онъ же лишаетъ ихъ всякаго самостоятельнаго значенія: въ ре-

---

[1]) Классъ a въ этомъ случаѣ приводится къ совокупности прямыхъ, параллельныхъ данной.

зультатѣ основанныхъ на немъ разсужденій мы получили искомую функцію (или общее свойство) въ видѣ вполнѣ опредѣленнаго объекта, точнѣе—комплекса объектовъ, и намъ остается только дать этому комплексу соотвѣтствующее наименованіе. Мы пришли, такимъ образомъ, къ *номинальному* опредѣленію, которое занимаетъ въ современныхъ логико-математическихъ изслѣдованіяхъ господствующее положеніе и которымъ мы сейчасъ займемся.

Существованіе номинальныхъ опредѣленій признаютъ и философы; проф. А. И. Введенскій *реальному* опредѣленію (соотвѣтствующія строки мы уже цитировали) противопоставляетъ *номинальное*: „Высказанныя въ видѣ предложеній указанія, при помощи которыхъ мы въ состояніи добиться всего лишь правильнаго употребленія термина, обозначающаго опредѣленное понятіе, такъ что указываемъ всего лишь объемъ послѣдняго, но еще не можемъ дать отчетъ въ самомъ содержаніи этого понятія, принято называть тоже опредѣленіями, но номинальными“ [1]). Такимъ образомъ, номинальныя опредѣленія признаются пригодными для формальнаго примѣненія („правильное употребленіе термина“) и считаются какъ бы предварительной стадіей, соотвѣтствующей еще неполному знанію: содержаніе понятія намъ еще не вполнѣ выяснилось. Къ такому пониманію ближе всего подходятъ воззрѣнія Пеано [2]): опредѣленіе есть „равенство, содержащее въ одной изъ своихъ частей нѣкоторый символъ, который или совсѣмъ не входитъ въ другую часть, или занимаетъ тамъ иное положеніе“. Возьмемъ, напр., опредѣленіе логическаго произведенія двухъ классовъ a и b (символомъ умноженія у Пеано является или простая постановка буквъ рядомъ, или знакъ $\frown$):

$$x \varepsilon a \frown b . = : x \varepsilon a . \frown . x \varepsilon b ;$$

въ обѣ части входитъ символъ $\frown$, подлежащій опредѣленію; но въ лѣвой онъ соединяетъ классы, въ правой—предложенія. Приведенная формула есть по Пеано „возможное опре-

---

[1]) „Логика и т. д.“, стр. 455.

[2]) „Formulaire“, p. 6—8.

дѣленіе", ибо предполагая извѣстнымъ значеніе символа $\frown$ для предложеній, можно съ ея помощью опредѣлить произведеніе классовъ; во всякомъ случаѣ она позволяетъ намъ употреблять символъ $a \frown b$ совершенно правильно, не выясняя до конца его значенія, какъ класса, общаго классамъ a и b. На такую же точку зрѣнія иногда становится и Рессель, допуская, что для чисто формальныхъ цѣлей въ качествѣ опредѣленія можно взять эквивалентность, въ которой извѣстное понятіе входитъ лишь съ одной стороны знака $\equiv$; но онъ признаетъ, что въ этомъ еще не заключается истиннаго философскаго анализа данныхъ [1]). Къ послѣднему мы подойдемъ ближе, если опредѣляемое понятіе сведемъ къ другимъ, уже опредѣленнымъ или принятымъ за первоначальныя; тогда опредѣленіе есть просто наложеніе имени на комплексъ уже готовыхъ идей и представляетъ изъ себя не что иное, какъ полезное сокращеніе рѣчи и письма [2]). Здѣсь уже номинальное опредѣленіе приближается по своему характеру къ реальному опредѣленію философовъ съ той только разницей, что послѣдніе видятъ сущность всякаго опредѣленія въ расчлененіи даннаго понятія на составныя части, а математики понимаютъ свою задачу шире: какой-либо объектъ считается опредѣленнымъ при помощи данной системы основныхъ идей, если онъ является единственнымъ, имѣющимъ къ одной изъ нихъ вполнѣ опредѣленное отношеніе, которое также принадлежитъ данной системѣ [3]). Вотъ этотъ-то единственный объектъ и обозначается соотвѣтственнымъ именемъ; такъ какъ подчасъ мы и не знаемъ, что̀ это за объектъ, а увѣрены только въ его существованіи и единственности, то можно сказать, что онъ *порождается* вышеуказаннымъ отношеніемъ. Теперь умѣстно будетъ вспомнить, что Лейбницъ и Кантъ считали математическія опредѣленія проявляющимися per generationem опредѣляемаго объекта. Подчеркнемъ еще одно различіе, раздѣляющее Пеано и Росселя: тогда какъ первый въ каждой отдѣльной отрасли

---

[1]) Pr. p. 18, 429

[2]) Pr. M. p. 11; Couturat, l c, p 36.

[3]) Pr p 111.

математики допускаетъ существованіе особыхъ первоначальныхъ понятій, одно изъ основныхъ положеній второго гласитъ, что въ нашей наукѣ нѣтъ другихъ неопредѣлимыхъ идей, кромѣ логическихъ постоянныхъ; и оправданію этого положенія въ значительной степени посвящены его работы. Приблизительно тѣхъ же воззрѣній на опредѣленія держится Фреге, какъ это, напр., видно изъ его полемики съ Гильбертомъ и Корсельтомъ [1]); замѣтимъ, что Гильбертъ въ своихъ „Grundlagen der Geometrie“ прибѣгаетъ къ 3-му типу математическихъ опредѣленій, къ которому мы сейчасъ и перейдемъ.

Мы говоримъ, что извѣстная совокупность понятій *опредѣляется посредствомъ постулатовъ*, если не давая явнаго (номинальнаго) опредѣленія каждаго изъ нихъ, указываемъ лишь систему первоначальныхъ предложеній, которымъ они должны удовлетворять; мы не вкладываемъ въ наши понятія никакого иного содержанія за исключеніемъ того, что о нихъ утверждается въ постулатахъ; тогда послѣдніе являются какъ бы скрытыми опредѣленіями. Таковъ, напр., путь Гильберта; взявъ безъ всякаго опредѣленія „три различныхъ системы объектовъ“, которые называются точками, прямыми, плоскостями, онъ продолжаетъ: „мы мыслимъ точки, прямыя, плоскости въ извѣстныхъ отношеніяхъ другъ къ другу и обозначаемъ эти отношенія словами въ родѣ: „лежать“, „между“, „параллельный“, „конгруентный“, „непрерывный“; точное и полное описаніе этихъ отношеній достигается посредствомъ аксіомъ геометріи“ [2]).

Нѣчто подобное опредѣленію при помощи постулатовъ мы имѣемъ въ случаѣ первоначальныхъ понятій: номинальнаго опредѣленія ихъ мы дать не можемъ, ибо они служатъ основаніемъ для всякаго опредѣленія, а между тѣмъ утверждаемъ цѣлый рядъ первоначальныхъ предложеній, содержащихъ основныя понятія. Говорить здѣсь объ опредѣленіи въ прямомъ смыслѣ этого слова—было бы, конечно, противорѣчіемъ, къ тому же первоначальныя понятія поддаются различнымъ

---

[1]) Jahresbericht d deut Math.-Ver., 15.

[2]) Hilbert „Grundlagen der Geometrie“, p 2.

истолкованіямъ. Тѣмъ не менѣе нельзя отрицать, что постулаты устанавливаютъ извѣстныя соотношенія между смысломъ основныхъ понятій [1]); это выражается хотя бы въ томъ, что различныя возможныя истолкованія не являются безусловно произвольными. Поскольку дѣло идетъ о понятіяхъ, принятыхъ за первоначальныя, мы имѣемъ дѣйствительно неизбѣжный случай опредѣленія посредствомъ постулатовъ въ особомъ, только что разъясненномъ смыслѣ. Другое дѣло, если мы станемъ опредѣлять при помощи постулатовъ понятія, не принадлежащія къ числу основныхъ. Здѣсь прежде всего возникаетъ сомнѣніе, дѣйствительно-ли наши понятія опредѣляются такимъ способомъ безъ всякихъ двусмысленностей. Совершенно подобная задача встрѣчается въ алгебрѣ: пусть n чиселъ заданы системой n уравненій; наши числа могутъ оказаться или опредѣленными однимъ единственнымъ способомъ, или окажутся болѣе или менѣе произвольными, или наконецъ возможенъ случай, когда ихъ совсѣмъ нельзя опредѣлить изъ данной системы; чтобы разобраться въ этихъ случаяхъ, мы должны перейти къ рѣшенію данныхъ уравненій. Совершенно то же самое имѣетъ мѣсто и для опредѣленія посредствомъ постулатовъ: послѣдніе могутъ опредѣлять искомыя понятія однозначнымъ образомъ, могутъ оставлять ихъ болѣе или менѣе произвольными, могутъ быть наконецъ противорѣчивыми и потому непригодными для пользованія. Чтобы убѣдиться въ томъ, что система постулатовъ дѣйствительно вполнѣ опредѣляетъ наши понятія, возможенъ только одинъ путь: найти изъ нихъ на самомъ дѣлѣ явныя опредѣленія всѣхъ входящихъ туда понятій, въ нѣкоторомъ смыслѣ рѣшить систему постулатовъ. Въ случаѣ успѣха разсматриваемое опредѣленіе посредствомъ постулатовъ будетъ оправдано; но въ то же самое время оно станетъ излишнимъ: мы уже имѣемъ явныя, номинальныя опредѣленія всѣхъ понятій. Такимъ образомъ, опредѣленіе при помощи постулатовъ является лишь предварительнымъ; его должно свести къ номинальнымъ опредѣленіямъ, и послѣднія являются единственно допустимыми въ математикѣ.

[1]) Couturat, l. c , p. 40—41.

Понятно, что съ точки зрѣнія Рёсселя и Фреге нельзя согласиться съ исходными положеніями Гильберта; основныя понятія послѣдняго не представляютъ изъ себя логическихъ постоянныхъ; а потому опредѣленіе при помощи постулатовъ не можетъ считаться окончательнымъ и, по изложеннымъ выше соображеніямъ, должно быть замѣнено совокупностью номинальныхъ опредѣленій. Хотя нельзя отрицать, что съ логико-философской точки зрѣнія опредѣленія посредствомъ постулатовъ оказываются иногда несостоятельными, тѣмъ не менѣе они могутъ прекрасно удовлетворять всѣмъ чисто математическимъ требованіямъ, какъ это мы видимъ и на примѣрѣ Гильберта; педагогическія соображенія въ особенности могутъ заставить отказаться отъ номинальныхъ опредѣленій простѣйшихъ геометрическихъ образовъ въ виду сложности и непонятности для начинающаго подобныхъ требованій.

Въ связи съ ученіемъ объ опредѣленіяхъ необходимо упомянуть еще объ одномъ обстоятельствѣ: всякое опредѣленіе должно сопровождаться теоремой (или постулатомъ) о существованіи опредѣляемаго объекта [1]). Въ математикѣ слово „существованіе“ не можетъ имѣть иного смысла, какъ „отсутствіе противорѣчія“ [2]), такъ что мы должны устанавливать отсутствіе противорѣчія въ каждомъ новомъ понятіи. Для первоначальныхъ понятій символической логики существованіе придется постулировать, для остальныхъ—уже можно доказывать.

Если мы опредѣляемъ цѣлый классъ, то достаточно доказать, что онъ не сводится къ нулевому классу; если же—индивидуумъ, то надо установить не только существованіе, но и единичность соотвѣтственнаго класса; послѣдняя доказывается тѣмъ путемъ, что устанавливается тождество 2 любыхъ объектовъ, принадлежащихъ нашему классу; такъ что a будетъ единичнымъ классомъ, если

$$x, y \varepsilon a \,.\, \supset_{x,y} . x = y.$$

Обычно доказательство существованія состоитъ въ томъ, что существованіе опредѣляемаго объекта ставится въ связь

---

1) Couturat, l. c., p. 39; Russell, l. c., p. 497.

2) Пуанкарэ „Наука и методъ“, стр. 194.

съ существованіемъ другого, которое уже доказано или постулировано. Напр.: существованіе числа *0* выводится изъ существованія нулевого класса; существованіе евклидовыхъ пространствъ любого числа измѣреній Рессель [1]) приводитъ въ связь съ комплексными числами (высшихъ порядковъ), а послѣднія опираются на систему вещественныхъ чиселъ, и т. д.

Особенно необходимо доказательство отсутствія противорѣчія въ случаѣ опредѣленія посредствомъ постулатовъ: мы должны быть увѣрены, что послѣдніе дѣйствительно въ состояніи опредѣлить наши понятія; а для этого первое условіе — ихъ совмѣстность. Такое доказательство мы находимъ у Гильберта вмѣстѣ съ яснымъ сознаніемъ его необходимости.

Однако едва ли возможно въ той же мѣрѣ доказать согласуемость основныхъ предложеній логики въ силу особенныхъ трудностей, о которыхъ мы уже имѣли случай упомянуть; ее скорѣе придется постулировать, какъ необходимую предпосылку всякихъ разсужденій.

При бѣдности русской литературы по вопросамъ о принципахъ математики, разбираемымъ самими математиками, чрезвычайно цѣнно встрѣтить рѣдкія исключенія изъ этого правила. Такъ, по интересующему насъ вопросу объ опредѣленіяхъ мы встрѣчаемъ рядъ соображеній у проф. Кагана [2]). Воззрѣнія уважаемаго автора на сущность опредѣленій вполнѣ совпадаютъ съ тѣми, которыя были развиты выше по поводу номинальныхъ опредѣленій; именно, мы читаемъ: „Подъ опредѣленіемъ мы разумѣемъ предложеніе, присваивающее опредѣленное названіе извѣстному понятію, составленному изъ другихъ понятій, опредѣленныхъ раньше или принятыхъ въ качествѣ основныхъ безъ опредѣленія ... (Опредѣленія) имѣютъ своей цѣлью только упрощеніе рѣчи. Можно было бы вовсе обойтись безъ новыхъ терминовъ ... и оперировать надъ основными терминами“. Констатировавъ тождество исходныхъ точекъ, мы однако не можемъ согласиться съ дальнѣйшими разсужденіями проф. Кагана. Всѣ термины,

---

[1]) l. c., p. 498

[2]) „Основанія геометріи“ т. I, стр. 770 и слѣд.

введенные опредѣленіями (слѣд., не основные), почтенный авторъ дѣлитъ на 2 группы: встрѣчающіеся въ постулатахъ и не встрѣчающіеся, и подробно останавливается на опредѣленіяхъ 1-й группы. Предоставимъ слово автору: „Пока терминъ введенъ опредѣленіемъ и никакихъ другихъ свойствъ ему не приписывается, опредѣленіе не можетъ представлять собой ничего, кромѣ условія называть извѣстное понятіе (или извѣстную совокупность терминовъ) новымъ именемъ. Но если терминъ фигурируетъ сверхъ того въ постулатахъ, то относительно него кое-что допускается, ему тѣмъ самымъ приписываются извѣстныя свойства. При этихъ условіяхъ возникаетъ вопросъ, не представляютъ ли собой *тѣ свойства опредѣляемаго термина, которыя выражены въ опредѣленіяхъ*[1]), слѣдствія тѣхъ его свойствъ, которыя выражены въ постулатахъ; иначе, не представляетъ ли то предложеніе, которое мы именуемъ опредѣленіемъ, теорему, которая подлежитъ доказательству...“ Слова, напечатанныя курсивомъ, мы считаемъ источникомъ недоразумѣнія тѣмъ болѣе, что они противорѣчатъ словамъ того же автора, приведеннымъ выше. Въ самомъ дѣлѣ, если опредѣленіе есть простое наложеніе имени, то опредѣляемому термину здѣсь никакихъ свойствъ не приписывается: послѣдній является просто знакомъ, замѣщающимъ извѣстный комплексъ уже введенныхъ понятій. Точно также тѣ утвержденія о нашемъ терминѣ, которыя встрѣчаются въ постулатахъ, относятся въ сущности къ основнымъ понятіямъ, и это всякій разъ можно сдѣлать яснымъ—цѣною, быть можетъ, краткости и изящества рѣчи. Проф. Каганъ подкрѣпляетъ свои соображенія примѣромъ. Если бы въ числѣ постулатовъ былъ такой: „въ подобныхъ треугольникахъ сходственныя стороны пропорціональны“, то опредѣленіе термина „подобные треугольники“ („подобными называются треугольники, имѣющіе равные углы“) представляло бы собою теорему. Примѣръ этотъ насъ не убѣждаетъ. Если въ одномъ изъ постулатовъ встрѣчается терминъ „подобные треугольники“, то послѣдній или придется взять въ качествѣ основного, или въ ка-

[1]) Курсивъ мой.

чествѣ производнаго; только въ послѣднемъ случаѣ мы получаемъ возможность говорить о его опредѣленіи. Если опредѣленіе останется тѣмъ же, которое приведено выше въ скобкахъ, т.-е., если слова „подобные треугольники“ появятся впервые въ нашемъ изслѣдованіи именно въ такой связи, то здѣсь доказывать нечего; для бо́льшей ясности можно изгнать указанный терминъ и формулировать постулатъ такъ: „въ треугольникахъ, у которыхъ углы равны, сходственныя стороны пропорціональны“. Если же было дано какое-либо иное опредѣленіе подобія треугольниковъ, то предложеніе о равенствѣ угловъ дѣйствительно придется доказывать; тогда оно станетъ теоремой, но именно вслѣдствіе того, что оно уже не будетъ опредѣленіемъ. Итакъ, по нашему убѣжденію опредѣленія никогда не доказываются [1]); но они дѣйствительно непосредственно даютъ мѣсто предложеніямъ, нуждающимся въ доказательствѣ; это будутъ тѣ предложенія, въ которыхъ утверждается существованіе опредѣляемыхъ объектовъ, т.-е., отсутствіе противорѣчія въ томъ комплексѣ идей, который мы обозначаемъ новымъ терминомъ. Если бы попытки доставить требуемое доказательство оказывались безуспѣшными, то пришлось бы постулировать существованіе опредѣляемаго объекта; тогда могъ бы возникнуть вопросъ о независимости этого постулата отъ остальныхъ. Доказательство же независимости опредѣленій, какъ его понимаетъ проф. Каганъ, мы считаемъ излишнимъ; но мы вовсе не утверждаемъ, что относящіяся сюда остроумныя соображенія уважаемаго автора не имѣютъ никакой цѣны: они даютъ цѣлый рядъ различныхъ интерпретацій геометрической системы, при которыхъ опредѣленное, заранѣе назначенное понятіе получаетъ истолкованіе, отличное отъ обычнаго.

7. Предыдущій параграфъ былъ отчасти отступленіемъ отъ нашей непосредственной цѣли,—отступленіемъ, которому ближайшимъ поводомъ послужилъ принципъ отвлеченія; те-

---

[1]) Рессель (Pr. M. p. 11—12) подчеркиваетъ это обстоятельство, оговариваясь не сопровождать опредѣленія знакомъ утвержденія. онъ видитъ въ нихъ не предложенія, а волеизъявленія (volitions).

перь мы возвращаемся къ логикѣ отношеній Съ точки зрѣнія введенія идеи порядка въ геометрію намъ особенно важенъ классъ отношеній, производящихъ расположеніе какихъ-либо элементовъ въ извѣстный рядъ; послѣднія характеризуются тремя признаками; два изъ нихъ намъ уже извѣстны, а съ третьимъ сейчасъ познакомимся.

Отношеніе P наз. *связнымъ*, если между двумя любыми различными элементами его поля имѣетъ мѣсто либо отношеніе P, либо ему обратное $\breve{P}$ [1]); условившись классъ связныхъ отношеній обозначать символомъ *cnx* (сокращеніе слова connexity), мы выразимъ основное свойство такихъ отношеній слѣдующей формулой:

$$P \varepsilon cnx . \equiv : . x, y \varepsilon C`P . x \neq y : \supset_{x,y} : x P y . \vee . y P x,$$

или нѣсколько иначе:

$$P \varepsilon cnx . \equiv : . x, y \varepsilon C`P . \supset_{x,y} : x P y \vee . x = y . \vee . y P x.$$

Теор. 14. $\quad P \varepsilon cnx \equiv . \breve{P} \varepsilon cnx.$

Вспоминая, что на основаніи теор. 2

$$C`P = C`\breve{P},$$

пишемъ

$$P \varepsilon cnx . \equiv : . y, x \varepsilon C`\breve{P} . \supset_{x,y} : y \breve{P} x \vee . y = x . \vee . x \breve{P} y,$$

т.-е.,

$$P \varepsilon cnx . \equiv . \breve{P} \varepsilon cnx, \qquad \text{ч. и т. д.}$$

Теор. 15. $P \varepsilon cnx . P^2 \supset J . x, y \varepsilon C`P : \supset : . x \neq y . — (x P y) : \equiv . y P x.$

Вспомнимъ, что $P^2 \supset J$ есть признакъ асимметричности P (теор. 7); тогда

(1) .. $\qquad P^2 \supset J . \supset : y P x . \supset . — (x P y);$

такъ какъ далѣе

$$P^2 \supset J . \supset . P \supset J \qquad \text{(см. стр. 130)}$$

---

[1]) Pr. M. § 202 (vol. II).

и $P \supset J$ есть признакъ аліорелятивности (теор. 6), то

(2)... $$P^2 \supset J \,.\, \supset : yPx \,.\, \supset \,.\, x \neq y;$$

(1) и (2) вмѣстѣ даютъ намъ:

(3)... $$P^2 \supset J \,.\, \supset :. yPx \,.\, \supset : x \neq y \,.\, -(xPy).$$

Такъ какъ послѣдняя формула вѣрна при всякомъ P, то она не нарушится, если добавить условіе, что $P \varepsilon cnx$.

Обратно, основываясь на свойствѣ связности, пишемъ:

(4)... $$P \varepsilon cnx \; x, y \varepsilon C'P : \supset : . \; x \neq y \,.\, -(xPy) : \supset . yPx;$$

такъ какъ сюда можно присоединить еще условіе $P^2 \supset J$, то сопоставленіе формулъ (3) и (4) и даетъ намъ доказательство теоремы.

Замѣтимъ, что при наличіи одной асимметріи отношенія P можно заключить лишь къ слѣдованію:

$$yPx \,.\, \supset \,.\, -(xPy);$$

присоединеніе свойства связности уже позволяетъ перейти къ эквивалентности.

Теперь мы можемъ перейти къ разсмотрѣнію отношеній, порождающихъ ряды [1]); классъ подобныхъ отношеній обозначимъ черезъ „ser“ (сокращеніе слова serial). Рессель и Уайтхедъ просто отожествляютъ порождающее рядъ отношеніе съ самимъ рядомъ; основаніемъ служитъ то обстоятельство, что самъ по себѣ ни одинъ классъ не имѣетъ какого-либо расположенія своихъ членовъ, а съ другой стороны послѣдніе могутъ быть расположены самымъ различнымъ образомъ въ зависимости отъ того или другого отношенія, которое будетъ положено въ основу расположенія; напр.: классъ раціональныхъ чиселъ можно расположить или въ порядкѣ ихъ величины, или въ совершенно иномъ, позволяющемъ установить ихъ одно-однозначное соотвѣтствіе съ натуральнымъ рядомъ цѣлыхъ чиселъ [2]); оба эти ряда обладаютъ различ-

[1]) Pr. M. vol. II, Part V; въ особенности сюда относится § 204.

[2]) См., напр., Couturat „De l'infini mathématique“, p. 620—622.

ными свойствами: въ первомъ случаѣ нельзя говорить о членѣ, непосредственно слѣдующемъ за даннымъ, а во второмъ—можно. Итакъ, поскольку дѣло идетъ о расположеніи элементовъ, вся суть—въ порождающемъ рядъ отношеніи, почему для всѣхъ математическихъ цѣлей его и можно отожествить съ самимъ рядомъ. Такая концепція не противорѣчитъ основному требованію математики — разсматривать классы по объему, ибо само отношеніе опредѣляется по объему.

Классъ отношеній, порождающихъ ряды, опредѣляется тремя признаками: асимметричностью, транзитивностью и связностью; другими словами:

$$P \varepsilon ser. \equiv : P^2 \supset J . P^2 \supset P . P \varepsilon cnx.$$

Для иллюстрированія относящихся сюда предложеній можно P читать: „предшествуетъ“, а $\breve{P}$—„слѣдуетъ за“. Такъ какъ при наличіи транзитивности асимметричность эквивалентна аліорелятивности (теор. 8), то предыдущую формулу можно переписать и такъ:

$$P \varepsilon ser. \equiv : P \supset J . P^2 \supset P . P \varepsilon cnx.$$

Теор. 16. $P \varepsilon ser. \equiv . \breve{P} \varepsilon ser.$

Доказательство состоитъ въ сопоставленіи теоремъ 5 и 14, а также слѣдствія изъ теор. 6.

По поводу каждой изъ 3 составныхъ частей нашего опредѣленія P надо сдѣлать нѣкоторыя замѣчанія.

1) Такъ какъ отношеніе P включаетъ различіе ($P \supset J$), то члены ряда должны быть различными; этому какъ будто бы противорѣчитъ существованіе „рядовъ съ повтореніями“, напр.:

$$a, b, c, d, b, a, e, f \text{ [1]}.$$

На самомъ дѣлѣ повторяющіеся элементы (a и b) могутъ быть отличены въ каждомъ изъ своихъ новыхъ появленій отъ предыдущихъ съ помощью указанія ихъ положенія въ

---

[1] Pr. M. v. II, p. 513.

нашемъ ряду. Другими словами, выписанная послѣдовательность буквъ не является сама по себѣ рядомъ; она становится таковымъ лишь благодаря одно-многозначному отношенію ея членовъ съ членами другого уже свободнаго отъ повтореній ряда; послѣднимъ здѣсь является рядъ различныхъ положеній на прямой линіи, которыя можно обозначить номерами:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Такимъ образомъ, основные ряды свободны отъ повтореній, и первый признакъ не можетъ возбуждать никакихъ сомнѣній.

2) Транзитивность есть существенное свойство порождающаго рядъ отношенія; въ силу его мы можемъ, напримѣръ, утверждать, что если x предшествуетъ y, а y предшествуетъ z, то x предшествуетъ z. Однако иногда оказывается возможнымъ получить рядъ, исходя по всей видимости изъ отношенія, не обладающаго свойствомъ транзитивности. Возьмемъ, напримѣръ, отношеніе сына къ отцу, которое, какъ мы видѣли, интранзитивно; тѣмъ не менѣе для всякаго даннаго лица мужескаго пола можно получить опредѣленный рядъ лицъ, расположенныхъ по восходящей послѣдовательности его предковъ, при чемъ отъ одного члена ряда переходимъ къ другому, непосредственно за нимъ слѣдующему, съ помощью даннаго отношенія. На самомъ дѣлѣ полученный рядъ собственно не является полемъ исходнаго отношенія; его опредѣляетъ совсѣмъ иное отношеніе, а именно: „x есть потомокъ y-а по прямой мужской линіи“; послѣднее является, конечно, производнымъ отъ даннаго. Такія производныя отношенія наши авторы называютъ „ancestral relations“ [1]), къ опредѣленію которыхъ можно подойти слѣдующимъ путемъ. Возьмемъ отношеніе R и опредѣлимъ различныя его степени, что возможно лишь въ случаѣ нетранзитивности R; затѣмъ введемъ отношеніе Q, которое есть не что иное, какъ логическая сумма различныхъ степеней R; такъ что утвержденіе „$x\,Q\,y$“ сводится къ тому, что между

[1]) Pr. M. v. I, p. 316; §§ 90 и 91.

x и y имѣетъ мѣсто отношеніе, равное нѣкоторой степени отношенія R, это Q и будетъ „ancestral relation“. Оказывается, что во многихъ случаяхъ, когда R не обладаетъ свойствами отношенія, порождающаго рядъ, Q уже будетъ таковымъ.

3) Свойство связности необходимо присоединить къ двумъ другимъ для того, чтобы отношеніе P порождало одинъ единственный рядъ. Возьмемъ, напримѣръ, совокупность параллельныхъ прямыхъ и подъ отношеніемъ P будемъ понимать отношеніе предшествованія (въ данномъ направленіи) между точками, принадлежащими одной и той же прямой нашей совокупности. Очевидно, что это P асимметрично и транзитивно; но оно не обладаетъ свойствомъ связности, ибо не соотноситъ любыя двѣ точки своего поля въ случаѣ, если онѣ принадлежатъ различнымъ прямымъ; и дѣйствительно, при данныхъ условіяхъ мы получаемъ не единый рядъ, а цѣлую совокупность рядовъ. Но стоитъ намъ ограничиться одной опредѣленной линіей, какъ отношеніе становится связнымъ, и мы приходимъ къ единому ряду.

Въ предшествующемъ заключается самая общая характеристика отношеній, порождающихъ ряды; присоединяя сюда тѣ или другіе спеціальные признаки, мы получимъ различные ряды, обладающіе особыми свойствами.

Прежде всего ряды отличаются другъ отъ друга тѣмъ, что иные имѣютъ начало, или конецъ, или и то и другое, другіе же—не имѣютъ. Если P есть отношеніе, порождающее данный рядъ, то началомъ его называется такой элементъ x, что не существуетъ никакого элемента y, для котораго имѣло бы мѣсто утвержденіе yPx; другими словами, начало есть такой элементъ, который принадлежитъ области даннаго отношенія, но не входитъ въ составъ его сообласти. Изъ связности отношенія вытекаетъ, что начало можетъ быть только одно, такъ какъ если бы ихъ было два (x_1 и x_2), то въ силу связности отношенія имѣли бы

$$x_1 P x_2 . \vee . x_2 P x_1,$$

что невозможно; но, конечно, рядъ можетъ совсѣмъ не имѣть начала (напр., раціональныя числа, расположенныя въ по-

рядкѣ возрастающей величины). Подобнымъ же образомъ опредѣляется и конецъ ряда: это есть такой элементъ, который принадлежитъ сообласти отношенія, но не его области; на основаніи теоремы 2 заключаемъ, что конецъ ряда, порождаемаго отношеніемъ P, есть начало ряда, въ основу котораго положено отношеніе $\breve{P}$.

Теор. 17_1. $D'P \supset \mathcal{C}'P$ есть необходимое и достаточное условіе отсутствія начала.

Въ самомъ дѣлѣ, указанное подчиненіе между классами и говоритъ намъ, что всякій членъ области отношенія является членомъ и его сообласти; а это эквивалентно утвержденію, что рядъ не имѣетъ начала.

Подобнымъ же образомъ доказывается и слѣдующее предложеніе:

Теор. 17_2. $D'P \supset D'P$ есть условіе, необх. и дост. для отсутствія конца.

Теор. 18. $D'P = \mathcal{C}'P$ есть условіе необх. и дост. для того, чтобы рядъ не имѣлъ ни начала, ни конца.

Очень важное различіе рядовъ однихъ отъ другихъ заключается въ томъ, что для однихъ можно говорить о непосредственномъ предшествованіи членовъ (напр.: рядъ цѣлыхъ чиселъ), для другихъ—нельзя (напр.: рядъ раціональныхъ чиселъ. Будемъ первые ряды называть *раздѣльными*, а вторые—*слитными* [1]); послѣдніе характеризуются тѣмъ, что между [2]) каждыми двумя ихъ членами имѣются другіе члены.

---

[1]) Во II-омъ томѣ Principia находимъ лишь упоминаніе объ этомъ различіи (p. 515), которое будетъ подробно разобрано въ III-мъ, еще не вышедшемъ въ свѣтъ. Что касается терминологіи, то тамъ говорится о рядѣ „discrete“ и „compact“; на стр. 36 (vol. I) второе названіе поясняется нѣмецкимъ „überall dicht“. На самомъ дѣлѣ это не совсѣмъ такъ; послѣдній терминъ у Г. Кантора обозначаетъ извѣстное свойство совокупности по отношенію къ другой, обладающей полной непрерывностью, тогда какъ „compact“ выражаетъ свойство ряда, разсматриваемаго независимо отъ какой либо иной совокупности. Сюда скорѣе подойдетъ канторовское „in sich dicht“ (см. Math. Ann. Bd. 23 статью G. Cantor'a „Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten“, § 17) Мы переводимъ „compact“ словомъ „слитный“.

[2]) Понятіе „между“ будетъ разобрано ниже.

Формальное опредѣленіе отношенія, порождающаго слитный рядъ, помимо трехъ основныхъ указанныхъ выше признаковъ, пополняется еще такимъ:

$$P \supset P^2,$$

такъ что полное опредѣленіе подобнаго отношенія сводится къ тому, что

$$P \supset J . P^2 = P . P \varepsilon cnx,$$

ибо

$$P^2 \supset P . P \supset P^2 : \equiv . P^2 = P.$$

Дѣйствительно, при наличіи условія $P \supset P^2$ нельзя говорить о „непосредственномъ предшествованіи“, такъ какъ

$$x P y . \supset . x P^2 y,$$

$$x P^2 y . \equiv : (\exists z) . x P z . z P y,$$

откуда

$$x P y . \supset : (\exists z) . x P z . z P y,$$

т.-е., x является членомъ, предшествующимъ другому, который предшествуетъ элементу y.

Теор 19. $P \supset P^2 . \equiv : . x P y . \supset : (\exists z) . x P z . z P y.$

Въ с. д., на основаніи общей теоріи отношеній пишемъ:

$$P \supset P^2 . \equiv : x P y . \supset . x P^2 y$$

и повторяемъ только что приведенныя разсужденія.

Теор 20. $P \supset P^2 . \equiv . \breve{P} \supset \breve{P}^2,$

т.-е., если P порождаетъ слитный рядъ, то таковымъ же свойствомъ обладаетъ и $\breve{P}$. Дѣйствительно,

$$P \supset P^2 . \equiv : . x P y . \supset : (\exists z) . x P z . z P y,$$

$$P \supset P^2 . \equiv : . y \breve{P} x . \supset : (\exists z)\ y \breve{P} z . z \breve{P} x . : \equiv . \breve{P} \supset \breve{P}^2,$$ ч. и т. д.

Наконецъ, чтобы отъ слитнаго ряда перейти къ ряду *непрерывному* въ современномъ смыслѣ этого слова, надо присоединить еще одно условіе для порождающаго рядъ отношенія,—условіе, выражающее сущность такъ-наз. аксіомы Дедекинда [1]). Въ настоящей статьѣ свойство непрерывности намъ не потребуется; а потому ограничиваемся этимъ бѣглымъ замѣчаніемъ.

Въ вышеизложенномъ заключается все необходимое для введенія идеи порядка въ любой отдѣлъ математики; оправдать это утвержденіе можно, конечно, фактическимъ рѣшеніемъ такой задачи, что мы и намѣрены сдѣлать, ограничиваясь областью геометріи. Другой возможный путь заключается въ анализѣ идеи порядка, вскрывающемъ ея первооснову; это—тотъ путь, которымъ идетъ Рессель въ своей первой работѣ [2]). Прежде всего англійскій ученый задается цѣлью перечислить типическіе способы, при помощи которыхъ въ различныхъ отдѣлахъ математики производится расположеніе соотвѣтственныхъ элементовъ, т.-е., вводится идея порядка. Такихъ способовъ оказывается шесть, но ихъ можно свести только къ двумъ различнымъ группамъ; въ первой то, что́ Рессель называетъ „ординальнымъ элементомъ“, состоитъ изъ трехъ объектовъ, при чемъ объ одномъ изъ нихъ утверждается, что онъ лежитъ *между* двумя другими; во второй мы всегда имѣемъ дѣло съ четырьмя объектами и разсматриваемъ взаимное *раздѣленіе двухъ паръ*. Первый характеръ расположенія присущъ такъ-наз. открытымъ рядамъ (напр., прямой обычной геометріи), а второй—закрытымъ (напр., окружности, прямой проективной геометріи). Подвергая подробному анализу то и другое порожденіе ряда, Рессель приходитъ къ замѣчательному выводу, что *въ основѣ всякаго расположенія элементовъ лежитъ извѣстное асимметричное и транзитивное отношеніе;* послѣднее должно быть кромѣ того связнымъ, если всѣ элементы располагаются въ одинъ единственный рядъ. Такимъ образомъ, разница

---

[1]) Pr. M vol. II, Part V, section B (въ особенности § 214).

[2]) Pr. p. 199—238; см. также изложеніе Couturat „Les Principes etc“ p. 68—75.

между открытымъ и закрытымъ рядомъ по-видимому исчезаетъ; но дѣло въ томъ, что въ первомъ случаѣ упомянутое отношеніе имѣетъ мѣсто между двумя элементами безотносительно къ остальнымъ, тогда какъ во второмъ оно существеннымъ образомъ связано съ тремя фиксированными элементами (см. ниже). Послѣднее обстоятельство ведетъ еще къ слѣдующему болѣе наглядному различію: открытый рядъ или совсѣмъ не имѣетъ начала, или имѣетъ одно вполнѣ опредѣленное, тогда какъ въ закрытомъ ряду начало произвольно; разсѣкая рядъ въ любомъ мѣстѣ, что́ связано съ выборомъ вышеуказанныхъ трехъ элементовъ, можно любой его членъ превратить въ начальный. Мы видимъ, что по концепціи Весселя рядомъ можно назвать лишь открытый рядъ; что же касается до такъ-наз. закрытаго ряда, то онъ превращается въ рядъ чисто формальнымъ образомъ; но совпаденіе формальныхъ свойствъ въ математикѣ всегда уполномачиваетъ насъ подводить различные объекты подъ одну и ту же категорію.

Въ слѣдующей статьѣ мы пойдемъ путемъ синтеза; ограничиваясь областью геометріи, мы покажемъ, какъ исходя изъ отношенія, надѣленнаго особыми свойствами, можно ввести въ нашу науку идею порядка. Элементы, съ которыми придется оперировать, будемъ называть „точками“; ихъ совокупность составитъ особый классъ, который будемъ обозначать черезъ G и иногда называть „прямою“; кромѣ того, у насъ будутъ встрѣчаться нѣкоторые классы, подчиненные G, съ именемъ „лучей“ и „отрѣзковъ“. Однако, какъ всякая формальная теорія, такъ и предстоящее изслѣдованіе допускаетъ различныя истолкованія; такъ, подъ „точками“ можно понимать прямыя, параллельныя данной, подъ „прямой“ — ихъ пучекъ, подъ „отрѣзкомъ“ — полосу; возможенъ и рядъ другихъ истолкованій, выходящихъ даже за предѣлы геометріи, такъ что наша терминологія не повредитъ общности изслѣдованія [1]). Допуская, что между элементами класса G

[1]) Мы взяли пучекъ параллельныхъ прямыхъ, чтобы получить открытый рядъ; вообще же пучекъ прямыхъ представляетъ изъ себя закрытый рядъ, которымъ мы тоже займемся нѣсколько ниже.

существуетъ извѣстное отношеніе, свойства котораго дадутъ содержаніе постулатамъ нашей теоріи, мы намѣтимъ путь для построенія понятій „между“ и „раздѣленіе паръ“ съ ихъ основными свойствами.

Введеніе идеи порядка въ геометрію.

1. Идея порядка въ геометріи выражается въ расположеніи точекъ на прямой, на плоскости и въ пространствѣ, въ расположеніи прямыхъ на плоскости (напр.: расположеніе прямыхъ въ пучкѣ) и т. д. Наибольшій принципіальный интересъ представляетъ расположеніе точекъ прямой; остальные случаи въ значительной степени сводятся къ указанному. Какъ бы то ни было, въ настоящемъ параграфѣ мы ставимъ себѣ цѣлью рѣшеніе именно этой задачи.

Расположеніе точекъ на прямой достигается обычно съ помощью понятій „между“ или „отрѣзокъ“. Между ними имѣется тѣсная связь; нетрудно видѣть, что утвержденіе: „точка A лежитъ между точками B и C“ эквивалентно такому: „A есть внутренняя точка отрѣзка BC“. Въ выборѣ относящихся сюда предложеній мы основываемся на слѣдующихъ работахъ. Прежде всего надо упомянуть о статьяхъ проф. Пеано [1]), въ которыхъ итальянскій геометръ весьма тщательно перечисляетъ необходимые съ его точки зрѣнія постулаты и фактически достигаетъ расположенія точекъ на прямой (затѣмъ дѣло идетъ о плоскости и пространствѣ, что̀ мы оставляемъ сейчасъ въ сторонѣ). Система Пеано подверглась переработкѣ и упрощенію со стороны другого итальянскаго ученаго — Вайляти [2]); послѣдній, исходя изъ отношенія, надѣленнаго свойствами асимметричности, тран-

[1]) G Peano „Sui fondamenti della geometria“, Rivista di Matematica v. IV, p. 51; см. также его же „I principi di geometria logicamente esposti“ Torino 1889. Аксіомы и теоремы Пеано (въ несимволической формѣ) перечислены въ книгѣ пр.-доц. Кагана „Основанія геометріи“ т. II, стр. 497 и слѣд.

[2]) G. Vailati „Sui principi fondamentali della geometria della retta“, Rivista di Matematica v. II, p. 71—75.

зитивности и связности, опредѣлялъ понятіе „между“, которое являлось первоначальнымъ у Пеано, и доказывалъ бо́льшую часть постулатовъ своего соотечественника. Ниже будетъ указано опредѣленіе Вайляти, и наше по существу совпадаетъ съ нимъ; мы только предпочитаемъ сначала ввести понятіе луча и положить его въ основу послѣдующаго; подобный путь намъ представляется наиболѣе естественнымъ, поскольку прямая разсматривается, какъ поле *асимметричнаго* отношенія.—Съ нѣсколько иной точки зрѣнія развивается теорія Гильберта [1]); у послѣдняго число соотвѣтственныхъ аксіомъ меньше, чѣмъ у Пеано; но за то расположеніе точекъ на прямой достигается при помощи построеній на плоскости; именно, весьма существенное значеніе имѣетъ т.-наз. постулатъ Паша, сводящійся къ тому, что прямая, пересѣкающая одну изъ сторонъ треугольника, пересѣчетъ и другую. Самый ходъ разсужденія у Гильберта лишь намѣченъ; подробныя доказательства, отчасти принадлежащія Муру, можно найти въ книгѣ Гальстеда [2]). Почти всѣ они основаны на постулатѣ Паша и требуютъ немалаго напряженія вниманія и воображенія; поэтому мы считаемъ нелишнимъ привести въ дальнѣйшемъ доказательства важнѣйшихъ изъ этихъ теоремъ, отличающіяся подчасъ чисто механическими пріемами счисленія и не требующія постулата Паша.—Наконецъ, мы будемъ имѣть также въ виду нѣкоторыя предложенія той главы книги В. Ф. Кагана, которая посвящена „расположенію точекъ на прямолинейномъ образѣ“ [3]).

Такимъ образомъ, мы имѣемъ передъ собою совокупность предложеній (частью принятыхъ въ качествѣ предпосылокъ, частью доказанныхъ), которыя рѣшаютъ вопросъ о расположеніи точекъ на прямой евклидовой геометріи. Наша задача—доказать всѣ эти предложенія, исходя единственно изъ свойствъ порождающаго рядъ отношенія и изъ общихъ за-

---

[1]) D. Hilbert „Grundlagen der Geometrie“.

[2]) Halsted Rational geometry, New-York 1907; для насъ особенно интересенъ Appendix I. Въ общемъ тѣмъ же духомъ проникнуты и разсужденія Veblen'a: „The Foundations of Geometry (Monographs on topics of modern mathematics, ed. by Young.)“.

[3]) Каганъ „Основанія геометріи“, т. I, стр. 106 и сл.

коновъ математической логики; руководящей нитью намъ служитъ соображеніе, что идея порядка всегда основывается на нѣкоторомъ асимметричномъ и транзитивномъ отношеніи. Сначала мы будемъ имѣть въ виду лишь самыя общія свойства порождающаго рядъ отношенія; однако впослѣдствіи придется сдѣлать добавочныя допущенія, чтобы получить полное рѣшеніе вопроса.

На основаніи изложеннаго въ предыдущей статьѣ, наша исходная точка заключается въ нижеслѣдующемъ.

Данъ классъ G („прямая“) съ неограниченнымъ количествомъ элементовъ („точки“); между послѣдними существуетъ отношеніе P („предшествуетъ“), обладающее свойствами асимметричности, транзитивности и связности, которыя и даютъ содержаніе постулатамъ послѣдующей теоріи. Условившись обозначать точки посредствомъ большихъ буквъ латинскаго алфавита: A, B, $C\ldots$ X, Y, $Z,\ldots$ (конечно, буквы G и P нельзя употреблять въ этомъ значеніи), мы формулируемъ упомянутые постулаты слѣд. образомъ:

I. $YPX.\supset.-(Y\breve{P}X)$

II. $XPY.YPZ:\supset.XPZ$

III. $X,Y\varepsilon G.\supset:YPX.\vee.Y=X.\vee.Y\breve{P}X.$

На основаніи теор. 8 (см. стр. 129) заключаемъ, что отношеніе P обладаетъ аліорелятивностью, т. е., получаемъ первое предложеніе:

Теор. 1. $-(XPX)$ (также и $-(X\breve{P}X)$);

послѣднее же свойство P, въ связи съ постулатомъ I, даетъ намъ

Теор. 2. Каждое изъ допущеній:

$$YPX,\quad Y=X,\quad Y\hat{P}X$$

исключаетъ два другихъ.

Такъ какъ мы будемъ имѣть дѣло исключительно съ элементами класса G, то предпосылки, подобныя предложе-

нію $X, Y \varepsilon G$, въ дальнѣшемъ будутъ бо̀льшею частью опускаться. Какъ непосредственное слѣдствіе постулата III, отмѣтимъ еще

Теор. 3. $X \neq Y . \supset : YPX \vee Y\breve{P}X.$

Такимъ образомъ, если мы выдѣлимъ изъ класса G какой-нибудь элементъ Y, то всѣ остальные разбиваются на двѣ группы; это замѣчаніе приводитъ насъ къ опредѣленіямъ:

Опр. 1.

$$Y_P = \hat{X}\ \{YPX\}\ Df,$$

$$Y_{\breve{P}} = \hat{X}\ \{Y\breve{P}X\}\ Df$$

Если мы теперь вспомнимъ опредѣленіе класса вообще, то сейчасъ же получимъ предложенія:

Теор. 4. $X \varepsilon Y_P . \equiv . YPX,$

$$X \varepsilon Y_{\breve{P}} . \equiv . Y\breve{P}X,$$

и оба утвержденія не совмѣстны (пост. I).

Всматриваясь въ наши опредѣленія и предпосылки, нетрудно замѣтить, что онѣ допускаютъ замѣну P и $\breve{P}$ одного на мѣсто другого; что касается до постулатовъ, то это утвержденіе вытекаетъ изъ теоремы 16-ой предыдущей статьи. Отсюда слѣдуетъ, что во всякомъ доказанномъ предложеніи можно произвести указанную замѣну и получить истинное предложеніе, такъ что работа сокращается на половину.

Теор 5. $Y\text{-}\varepsilon Y_P$ и $Y\text{-}\varepsilon Y_{\breve{P}}$.

Въ с д.,

$Y \varepsilon Y_P \equiv . YPY$, что невозможно (теор. 1).

Теор. 6. $X \neq Y\ X\text{-}\varepsilon Y_P : \equiv . X \varepsilon Y_{\breve{P}}.$

Дѣйствительно, на основаніи теор. 15 логики отношеній имѣемъ:

(1) .. $P \varepsilon cnx . P^2 \supset J . X, Y \varepsilon G \cdot \supset : . X \neq Y . - (YPX) . \equiv . Y\breve{P}X;$

далѣе теор. 4 говоритъ намъ, что

$$-(YPX).\equiv.X\text{-}\varepsilon Y_P$$
$$Y\breve{P}X.\equiv X\varepsilon Y_{\breve{P}};$$

такъ какъ, наконецъ, предпосылки формулы (1) у насъ выполнены, то мы и убѣждаемся въ истинности теоремы.

Теор. 7. $G.=.Y_{\breve{P}}.\vee.Y.\vee.Y_P$

Въ с. д., комбинируя пост. III съ теор. 4, имѣемъ:

$$X,Y\varepsilon G.\supset.X\varepsilon Y_P.\vee.X=Y.\vee.X\varepsilon Y_{\breve{P}},$$

такъ что, считая точку Y принадлежащей классу G, можемъ написать:

(1)... $X\varepsilon G.\supset:X\varepsilon Y_P.\vee.X=Y.\vee.X\varepsilon Y_{\breve{P}};$

обратно, пусть дано, что

$$X\varepsilon Y_P.\vee.X=Y.\vee.X\varepsilon Y_{\breve{P}};$$

вспоминая, что по самому опредѣленію

$$Y_P\supset G \quad \text{и} \quad Y_{\breve{P}}\supset G,$$

заключаемъ къ слѣдованію

(2)... $X\varepsilon Y_P.\vee.X=Y.\vee.X\varepsilon Y_{\breve{P}}:\supset.X\varepsilon G;$

далѣе изъ формулъ (1) и (2) вытекаетъ эквивалентность:

$$X\varepsilon G.\equiv:X\varepsilon Y_P.\vee.X=Y.\vee.X\varepsilon Y_{\breve{P}},$$

которая и показываетъ, что G есть логическая сумма классовъ Y_P, $Y_{\breve{P}}$ и точки Y.

Введенные нами подклассы Y_P и $Y_{\breve{P}}$ будемъ называть „лучами, на которые дѣлится прямая G посредствомъ точки Y“ (сама эта точка ни къ одному изъ указанныхъ лучей не принадлежитъ). Лучи Y_P и $Y_{\breve{P}}$ будемъ называть противо-

положными одинъ по отношенію къ другому, имѣя въ виду ихъ связь со взаимно обратными отношеніями [1]).

Теор 8. $Z \varepsilon Y_P . \equiv . Y \varepsilon Z_{\breve{P}}$, $Z \varepsilon Y_{\breve{P}} . \equiv . Y \varepsilon Z_P$

Въ с. д.,

$$Z \varepsilon Y_P . \equiv . YPZ . \equiv . Z\breve{P}Y . \equiv . Y \varepsilon Z_{\breve{P}} \qquad \text{(теор. 4);}$$

для доказательства 2-го предложенія нужно только вспомнить, что

$$\breve{\breve{P}} = P \text{ (см. стр. 123).}$$

Каждая точка вполнѣ опредѣляетъ оба соотвѣтственныхъ луча, что̀ слѣдуетъ изъ

Теор. 9. $Y = Z \equiv . Y_P = Z_P .$

1) $Y = Z . \supset . Y_P = Z_P ,$

такъ какъ

$$Y = Z . \supset : YPX . \equiv . ZPX \text{ (по опр. тождества)}$$
$$Y = Z . \supset : X \varepsilon Y_P . \equiv . X \varepsilon Z_P \qquad \text{(теор. 4).}$$

2) $Y_P = Z_P . \supset . Y = Z;$

дѣйствительно, допустимъ, что $Y \neq Z$; тогда

$$Y \varepsilon Z_P . \vee . Y \varepsilon Z_{\breve{P}} \qquad \text{(теор. 3 и 4)}$$

A) $Y \varepsilon Z_P . Y_P = Z_P : \supset . Y \varepsilon Y_P ,$ что невозможно;

B) $Y \varepsilon Z_{\breve{P}} . \equiv . Z \varepsilon Y_P \qquad \text{(теор. 8)}$

$Z \varepsilon Y_P . Y_P = Z_P : \supset . Z \varepsilon Z_P ,$ что невозможно.

Формулы (1) и (2) доказываютъ теорему. Точно такъ же получаемъ:

$$Y = Z . \equiv . Y_{\breve{P}} = Z_{\breve{P}};$$

а отсюда уже выводимъ

Слѣдствіе. $Y_P = Z_P . \equiv . Y_{\breve{P}} = Z_{\breve{P}} .$

---

[1]) Собственно говоря, было бы правильнѣе назвать лучами тѣ классы, которые получаются изъ указанныхъ выше посредствомъ присоединенія самой точки Y; но въ настоящей статьѣ можно избѣжать этого усложненія.

Теор 10. $Z \varepsilon Y_P . \equiv : Z \neq Y . Z_P \supset Y_P ,$

$Z \varepsilon Y_{\breve{P}} . \equiv : Z \neq Y . Z_{\breve{P}} \supset Y_{\breve{P}} .$

1) $Z \varepsilon Y_P . \supset : Z \neq Y . Z_P \supset Y_P ;$

что $Z \neq Y$, мы уже знаемъ (теор. 5); далѣе:

$$Z \varepsilon Y_P . \equiv . YPZ,$$

$Z \varepsilon Y_P . X \varepsilon Z_P : \equiv : YPZ . ZPX : \supset . YPX$ (пост. II).

$Z \varepsilon Y_P . X \varepsilon Z_P : \supset . X \varepsilon Y_P$

$Z \varepsilon Y_P . \supset : X \varepsilon Z_P . \supset . X \varepsilon Y_P$ [1])

$Z \varepsilon Y_P . \supset . Z_P \supset Y_P .$

2) $Z \neq Y . Z_P \supset Y_P : \supset . Z \varepsilon Y_P ;$

въ с. д., при $Z \neq Y$ имѣемъ (теор. 3, 4 и 8):

$$Y \varepsilon Z_P . \vee . Z \varepsilon Y_P ;$$

но

$Y \varepsilon Z_P . Z_P \supset Y_P : \supset . Y \varepsilon Y_P ,$ что невозможно;

слѣд., остается допустить:

$Z \varepsilon Y_P ,$ ч. и т д.

Теор. 11. $Z_P \supset Y_P . \equiv Y_{\breve{P}} \supset Z_{\breve{P}} .$

Если $Z = Y$, то предложеніе вытекаетъ изъ теор. 9, если же $Z \neq Y$, то (теор. 10)·

$Z_P \supset Y_P . \equiv . Z \varepsilon Y_P . \equiv . Y \varepsilon Z_{\breve{P}}$ (теор 8)

$Z_P \supset Y_P . \equiv Y_{\breve{P}} \supset Z_{\breve{P}}$ (теор 10)

---

[1]) Формальнымъ основаніемъ послѣдняго заключенія служитъ слѣд. предложеніе, которое мы находимъ въ „Principia“ подъ номеромъ 4.87:

$$pq . \supset . r : \equiv : p . \supset . q \supset r .$$

Этимъ предложеніемъ мы будемъ часто пользоваться.

Опр. 2. Если точки A и B принадлежатъ одному и тому же лучу относительно точки Y, то говорятъ, что A и B лежатъ *по одну сторону* отъ Y; если же A и B принадлежатъ различнымъ лучамъ, то говорятъ, что онѣ лежатъ *по разныя стороны* отъ Y.

Чтобы получить удобныя обозначенія, мы опредѣлимъ сейчасъ нѣкоторыя новыя части класса G, а затѣмъ вернемся къ понятію стороны на прямой.

Опр. 3. Пусть A и B — различныя точки прямой G; мы опредѣляемъ:

$$(AB) = \hat{X}\{X \varepsilon A_P \,.\, X \varepsilon B_{\breve{P}} : \vee : X \varepsilon A_{\breve{P}} \,.\, X \varepsilon B_P\} \; Df;$$

т. е., (AB) есть совокупность точекъ, принадлежащихъ одновременно или лучамъ A_P и $B_{\breve{P}}$, или лучамъ $A_{\breve{P}}$ и B_P; мы увидимъ ниже, что всегда имѣетъ мѣсто одинъ и только одинъ случай въ зависимости отъ того, какое отношеніе существуетъ между A и B: APB или $A\breve{P}B$. Вспоминая теорему 4, убѣждаемся, что приведенное опредѣленіе эквивалентно такому:

Опр. 3а.

$$(AB) = \hat{X}\{APX \;\; XPB : \vee : BPX \,.\, XPA\} \; Df,$$

а это есть опредѣленіе Вайляти (см. выше).

Опр 4.

$$[AB] .= : A \,.\vee.\, (AB) \,.\vee.\, B \; Df.$$

Для опредѣленныхъ так. обр. подклассовъ введемъ особые термины, а именно: совокупность точекъ $[AB]$ будемъ называть „отрѣзкомъ“ прямой G, опредѣляемымъ точками A и B; двѣ послѣднія точки—„концами отрѣзка“, а совокупность (AB)—„внутренними точками отрѣзка“.

Символы

$$C \varepsilon (AB), \quad C \varepsilon [AB]$$

выражаютъ, слѣдовательно, принадлежность точки C къ числу внутреннихъ точекъ отрѣзка AB, или къ числу точекъ отрѣзка AB.

Опр. 5. Фраза: „Точка C лежитъ *между* точками A и B“ выражаетъ лишь, что $C \varepsilon (AB)$.

Теор. 12. $X \varepsilon (AB) . \equiv :. X \varepsilon A_P . X \varepsilon B_{\breve{P}} : \vee : X \varepsilon A_{\breve{P}} . X \varepsilon B_P$;

теорема вытекаетъ изъ опр. 3 и изъ теоріи классовъ.

Теор. 13. $APB . \supset :. X \varepsilon (AB) . \equiv : X \varepsilon A_P . X \varepsilon B_{\breve{P}}$

$A \breve{P} B . \supset :. X \varepsilon (AB) . \equiv : X \varepsilon A_{\breve{P}} . X \varepsilon B_P .$

Въ с. д., имѣя въ виду доказать первое утвержденіе теоремы, допустимъ, что

$$(\exists X) . X \varepsilon A_{\breve{P}} . X \varepsilon B_P ;$$

тогда

$$(\exists X) . X \varepsilon A_{\breve{P}} . X \varepsilon B_P : \equiv : (\exists X) . BPX . XPA,$$

$(\exists X) . BPX . XPA : \supset . BPA$, что невозможно (пост. I).

Слѣд., наше допущеніе невозможно, откуда и вытекаетъ теорема.

Теор. 14. $(AA) = \wedge$ (нулевой классъ).

Въ с. д.,

$$X \varepsilon (AA) . \equiv :. X \varepsilon A_P . X \varepsilon A_{\breve{P}} : \vee : X \varepsilon A_{\breve{P}} . X \varepsilon A_P$$

$X \varepsilon (AA) . \equiv : X \varepsilon A_P . X \varepsilon A_{\breve{P}}$ (законъ тавтологіи);

$X \varepsilon A_P . X \varepsilon A_{\breve{P}} : \equiv : APX . A \breve{P} X$, что невозможно (пост. I).

Теор. 15. $A \text{-} \varepsilon (AB)$, $B \text{-} \varepsilon (AB)$.

Дѣйствительно,

$$A \varepsilon (AB) . \equiv :. A \varepsilon A_P . A \varepsilon B_{\breve{P}} : \vee : A \varepsilon A_{\breve{P}} . A \varepsilon B_P ,$$

но ни $A \varepsilon A_P$, ни $A \varepsilon A_{\breve{P}}$ не могутъ имѣть мѣста (теор. 5). Также доказывается и 2-е утвержденіе.

Теор. 16. $(AB) = (BA)$.

Предложеніе непосредственно вытекаетъ изъ сдѣланныхъ опредѣленій и изъ перемѣстительнаго закона, которому подчинены дѣйствія логическаго сложенія и умноженія.

Теперь настало время связать понятіе „стороны“ съ понятіемъ „между“.

Теор. 17. Утвержденіе, что A и B лежатъ по разныя стороны отъ C, эквивалентно утвержденію:

$$C \varepsilon (AB).$$

Въ с. д.,

$$C \varepsilon (AB) . \equiv : . C \varepsilon A_P . C \varepsilon B_{\breve{P}} : \vee : C \varepsilon A_{\breve{P}} . C \varepsilon B_P ;$$

на основаніи теор. 8 можемъ послѣднюю формулу переписать такъ:

$$C \varepsilon (AB) . \equiv : . A \varepsilon C_{\breve{P}} . B \varepsilon C_P : \vee : A \varepsilon C_P . B \varepsilon C_{\breve{P}},$$

а каждое изъ слагаемыхъ послѣдней суммы говоритъ, что A и B принадлежатъ различнымъ лучамъ по отношенію къ точкѣ C, ч. и т. д. Так. обр., символъ $C \varepsilon (AB)$ будетъ обозначать также, что A и B лежатъ по разныя стороны отъ C.

Теор. 18. Утвержденіе, что A и B лежатъ по одну сторону отъ C, эквивалентно утвержденію:

$$C \dot{+} A . C \dot{+} B . C - \varepsilon (AB).$$

Два первыхъ допущенія необходимы, чтобы отличить этотъ случай отъ того, который былъ разсмотрѣнъ въ теор. 15; въ самомъ дѣлѣ, $A - \varepsilon (AB)$ нельзя истолковать въ томъ смыслѣ, что A и B лежатъ по одну сторону отъ A. Переходимъ къ доказательству.

Утвержденіе, что A и B лежатъ по одну сторону отъ C, сводится къ раздѣленію:

(1)... $A \varepsilon C_P . B \varepsilon C_P : \vee : A \varepsilon C_{\breve{P}} . B \varepsilon C_{\breve{P}}$ {опр. 2};

съ другой стороны утвержденіе, что $C \varepsilon (AB)$ сводится на основаніи предыдущаго къ такому раздѣленію:

(2)... $A \varepsilon C_{\breve{P}} . B \varepsilon C_P : \vee : A \varepsilon C_P . B \varepsilon C_{\breve{P}}$;

руководствуясь теор. 4, нетрудно убѣдиться, что ни одинъ изъ двухъ возможныхъ случаевъ раздѣленія (1) не можетъ быть совмѣстнымъ ни съ однимъ изъ случаевъ раздѣленія (2); такъ что оба утвержденія, съ которыми мы сей-

часъ имѣли дѣло, оказываются несовмѣстными. Далѣе, какъ легко видѣть, они исчерпываютъ всевозможные случаи; а такъ какъ они являются несовмѣстными и единственно возможными, то утвержденіе 1-го эквивалентно [1]) отрицанію 2-го, ч. и тр. д. Так. обр., символъ $C\text{-}\varepsilon(AB)$ при условіи отличія C отъ A и B будетъ обозначать также, что A и B лежатъ по одну сторону отъ C.

Читатель обратилъ, вѣроятно, вниманіе на то, что въ формулировкѣ 2 послѣднихъ теоремъ мы менѣе пользовались символизмомъ, чѣмъ въ остальныхъ; причина та, что онѣ служатъ основаніемъ дальнѣйшаго использованія символовъ.

Теор. 19. $C\varepsilon(AB)\,.\,\supset : A\text{-}\varepsilon(BC).B\text{-}\varepsilon(AC)$.

Имѣемъ:

$$C\varepsilon(AB).\equiv :.C\varepsilon A_P\,.C\varepsilon B_{\breve{P}} :\vee: C\varepsilon A_{\breve{P}}.C\varepsilon B_P;$$

$$C\varepsilon A_P\,.C\varepsilon B_{\breve{P}} : \equiv : APC.CPB : \supset .APB.\equiv .B\varepsilon A_P$$

$$C\varepsilon A_P\,.B\varepsilon A_P : \supset .A\text{-}\varepsilon(BC)$$ (опр. 2, теор. 18),

такъ что

(1)... $$C\varepsilon A_P\,.\,C\varepsilon B_{\breve{P}} : \supset .A\text{-}\varepsilon(BC).$$

Точно также

$$C\varepsilon A_{\breve{P}}.C\varepsilon B_P : \equiv : CPA.BPC : \supset .BPA.\equiv .A\breve{P}B.\equiv .B\varepsilon A_{\breve{P}}$$

$$C\varepsilon A_{\breve{P}}.B\varepsilon A_{\breve{P}} : \supset .A\text{-}\varepsilon(BC)$$

(2)... $$C\varepsilon A_{\breve{P}}.C\varepsilon B_P : \supset .A\text{-}\varepsilon(BC);$$

составляя логическую сумму предложеній (1) и (2), имѣемъ [2])

$$C\varepsilon A_P\,.C\varepsilon B_{\breve{P}} :\vee: C\varepsilon A_{\breve{P}}.C\varepsilon B_P\,.\,: \supset .A\text{-}\varepsilon(BC),$$

т.-е.,

(3)... $$C\varepsilon(AB).\ \supset .A\text{-}\varepsilon(BC).$$

Далѣе:

$$C\varepsilon(AB).\equiv .C\varepsilon(BA)$$ (теор. 16)

---

[1]) Формальное основаніе этого заключенія: если p и q несовмѣстны, то $p\supset -q$; если они единственно возможны, то имѣемъ $p\vee q$; но $p\vee q.\equiv .-p\supset q$ (по опред. слѣдованія), а $-p\supset q\,.\supset .-q\supset p$ (по правиламъ обращенія); наконецъ, $p\supset -q.-q\supset p : \supset : p.\equiv .-q$.

[2]) Рг. М. 3·48: $p\supset r\ q\supset s\cdot\supset : p\vee q\,.\supset .r\vee s$; кромѣ того — законъ тавтологіи въ формѣ $p\vee p.\equiv .p$.

$$C\varepsilon(BA).\supset.B\text{-}\varepsilon(AC) \qquad \text{(формула (3))},$$

такъ что

(4)... $$C\varepsilon(AB).\supset.B\text{-}\varepsilon(AC);$$

Наконецъ (3) и (4) даютъ намъ [1]):

$$C\varepsilon(AB).\supset:A\text{-}\varepsilon(BC).B\text{-}\varepsilon(AC), \qquad \text{ч. и т. д.}$$

Слѣдствіе. Каждое изъ трехъ утвержденій:

$$A\varepsilon(BC),\quad B\varepsilon(AC),\quad C\varepsilon(AB)$$

исключаетъ два остальныхъ.

Слѣдующія 3 теоремы дадутъ намъ простыя правила для комбинаціи утвержденій вида:

$$C\varepsilon(AB) \text{ и } C\text{-}\varepsilon(AB);$$

вмѣстѣ съ предыдущей онѣ позволятъ намъ весьма легко— почти механически — установить цѣлый рядъ предложеній, относящихся къ понятіямъ „между“ и „сторона на прямой“.

Теор. 20. $C\varepsilon(AB).C\text{-}\varepsilon(AA'):\supset.C\varepsilon(A'B).$

Въ с. д.,

$$C\varepsilon(AB).\equiv:.C\varepsilon A_P.C\varepsilon B_{\breve{P}}:\vee:C\varepsilon A_{\breve{P}}.C\varepsilon B_P,$$

или

$$C\varepsilon(AB).\equiv:.A\varepsilon C_{\breve{P}}.B\varepsilon C_P:\vee:A\varepsilon C_P.B\varepsilon C_{\breve{P}};$$

обозначая слагаемыя правой части черезъ p и q, мы запишемъ эту формулу короче:

(1)... $$C\varepsilon(AB).\equiv.p\vee q.$$

Далѣе:

$$C\text{-}\varepsilon(AA').\equiv:.A\varepsilon C_P.A'\varepsilon C_P:\vee:A\varepsilon C_{\breve{P}}.A'\varepsilon C_{\breve{P}},$$

или

(2)... $$C\text{-}\varepsilon(AA').\equiv.r\vee s,$$

---

[1]) Pr. M. 3·47: $p\circ r.q\circ s:\supset:pq.\supset.rs.$

гдѣ r и s суть слагаемыя правой части. Формулы (1) и (2) даютъ [1]):

$$C\varepsilon(AB).C\text{-}\varepsilon(AA'):\equiv\cdot p\vee q.r\vee s;$$

въ параграфѣ, посвященномъ логикѣ предложеній, было указано, что

$$p\vee q.r\vee s:\equiv:pr.\vee.ps.\vee.qr.\vee.qs \text{ (см. стр. 102);}$$

но произведенія pr и qs невозможны, такъ какъ они приводятъ къ

$$A\varepsilon C_{\breve{P}}.A\varepsilon C_P;$$

слѣдовательно, остается разсмотрѣть двѣ комбинаціи:

$$ps \text{ и } qr.$$

1) $$A\varepsilon C_{\breve{P}}.B\varepsilon C_P.A'\varepsilon C_{\breve{P}}:\supset.C\varepsilon(A'B),$$

т. е.,

$$ps.\supset.C\varepsilon(A'B);$$

2) $$A\varepsilon C_P.B\varepsilon C_{\breve{P}}.A'\varepsilon C_P:\supset.C\varepsilon(A'B),$$

т. е.,

$$qr.\supset.C\varepsilon(A'B).$$

Отсюда получаемъ:

$$ps.\vee.qr:\supset.C\varepsilon(A'B),$$

а такъ какъ

$$C\varepsilon(AB).C\text{-}\varepsilon(AA'):\equiv:ps.\vee.qr,$$

то теорема доказана.

Теор. 21. $C\varepsilon(AB).C\varepsilon(AA'):\supset.C\text{-}\varepsilon(A'B).$

Имѣемъ:

$$C\varepsilon(AA')\equiv:.A\varepsilon C_{\breve{P}}.A'\varepsilon C_P:\vee:A\varepsilon C_P.A'\varepsilon C_{\breve{P}}$$

подобно тому, какъ выше было представлено $C\varepsilon(AB)$; обозначая слагаемыя правой части черезъ r_1 и s_1, пишемъ:

$$C\varepsilon(AA').\equiv.r_1\vee s_1;$$

---

[1]) Pr. M 4·38, утверждающее возможность почленнаго перемноженія эквивалентностей

по прежнему

$$C\varepsilon(AB) . \equiv . p \vee q .$$

Отсюда

$$C\varepsilon(AB) . C\varepsilon(AA') :\equiv : p \vee q . r_1 \vee s_1 :\equiv \cdot pr_1 . \vee . ps_1 . \vee . qr_1 . \vee . qs_1 ;$$

но комбинаціи ps_1 и qr_1 невозможны, а

$$pr_1 .\equiv : A \varepsilon C_{\breve{P}} . B \varepsilon C_P . A' \varepsilon C_P : \supset . C\text{-}\varepsilon(A'B)$$

$$qs_1 .\equiv : A \varepsilon C_P . B \varepsilon C_{\breve{P}} . A' \varepsilon C_{\breve{P}} : \supset . C\text{-}\varepsilon(A'B),$$

откуда и вытекаетъ, что

$$C\varepsilon(AB) . C\varepsilon(AA') :\equiv : pr_1 . \vee . qs_1 : \supset . C\text{-}\varepsilon(A'B),$$ ч. и т. д.

Теор. 22. $C\text{-}\varepsilon(AB) . C\text{-}\varepsilon(A'B) : \supset . C\text{-}\varepsilon(AA')$.

Переставляя въ теор. 20 буквы A' и B одну на мѣсто другой, пишемъ

(1)... $$C\varepsilon(AA') . C\text{-}\varepsilon(AB) . \supset . C\varepsilon(A'B);$$

вообще извѣстно, что

$$pq . \supset . r \cdot \supset \cdot . p . \text{-} r : \supset . \text{-} q \ ^{1});$$

полагая

$$p = C\text{-}\varepsilon(AB), \quad q = C\varepsilon(AA'), \quad r = C\varepsilon(A'B),$$

отъ формулы (1) заключаемъ къ формулѣ:

$$C\text{-}\varepsilon(AB) . C\text{-}\varepsilon(A'B) \ \supset . C\text{-}\varepsilon(AA')$$, ч. и т. д.

Всматриваясь въ послѣднія 3 теоремы, мы замѣчаемъ, что предложенія встрѣчающагося тамъ типа можно весьма просто комбинировать по два; именно, если у двухъ предложеній имѣется по двѣ общихъ буквы, изъ коихъ одна непремѣнно является предшествующей знаку ε или $\text{-}\varepsilon$, то ихъ одновременное утвержденіе даетъ мѣсто новому предложенію того же типа, при чемъ отдѣльно стоящая буква остается той же самой, а слѣдующая за связкой пара буквъ составляется при отбрасываніи другой общей буквы; что же касается до

---

1) Pr. M. 3·37.

знаковъ ε и $-\varepsilon$, то они комбинируются, какъ знаки $-$ и $+$ при умноженіи, т.-е., оба ε даютъ $-\varepsilon$, оба $-\varepsilon$ даютъ $-\varepsilon$, одинъ ε и одинъ $-\varepsilon$ даютъ ε. Мы получаемъ, так. обр., механическія правила счисленія, которыя, въ связи съ теор. 19, позволяютъ весьма легко доказать рядъ предложеній, характеризующихъ понятія „между“ или „сторона на прямой“.

Теор. 23. 1) $C\varepsilon(AB) . D\varepsilon(AC) : \supset . C\varepsilon(BD)$,

2) $C\varepsilon(AB) . D\varepsilon(AC) : \supset . D\varepsilon(AB)$.

1) $D\varepsilon(AC) . \supset . C-\varepsilon(AD)$ (теор. 19)

$C\varepsilon(AB) . C-\varepsilon(AD) : \supset . C\varepsilon(BD)$, ч. и т. д.

2) $C\varepsilon(BD) . \supset . D-\varepsilon(BC)$

$D\varepsilon(AC) . D-\varepsilon(BC) : \supset . D\varepsilon(AB)$, ч. и т. д.

Слѣд. $C\varepsilon(AB) . \supset . (AC) \supset (AB)$.

Дѣйствительно,

$C\varepsilon(AB) . X\varepsilon(AC) : \supset . X\varepsilon(AB)$,

или

$C\varepsilon(AB) . \supset : X\varepsilon(AC) . \supset . X\varepsilon(AB)$ [1]),

откуда

$C\varepsilon(AB) . \supset . (AC) \supset (AB)$, ч. и т. д.

Также доказывается, что

$C\varepsilon(AB) . \supset . (BC) \supset (AB)$.

Теор. 24. $C\varepsilon(AB) . \supset : B\varepsilon(AD) . \equiv . B\varepsilon(CD)$.

1) $C\varepsilon(AB) . \supset . B-\varepsilon(AC)$

$B-\varepsilon(AC) . B\varepsilon(AD) : \supset . B\varepsilon(CD)$,

такъ что

$C\varepsilon(AB) . B\varepsilon(AD) : \supset . B\varepsilon(CD)$,

или

(1)... $C\varepsilon(AB) . \supset : B\varepsilon(AD) . \supset . B\varepsilon(CD)$.

2) $B-\varepsilon(AC) . B\varepsilon(CD) : \supset . B\varepsilon(AD)$,

---

[1]) См. прим. къ теор. 10.

такъ что

$$C\varepsilon(AB).B\varepsilon(CD):\supset.B\varepsilon(AD),$$

или

(2)... $$C\varepsilon(AB).\supset:B\varepsilon(CD).\supset.B\varepsilon(AD).$$

Формулы (1) и (2) доказываютъ теорему.

Теор. 25. $C\varepsilon(AB).\supset:X\varepsilon(AC).\supset.X\text{-}\varepsilon(CB).$

$$X\varepsilon(AC).\supset.C\text{-}\varepsilon(AX) \qquad \text{(теор. 19)}$$

$$C\varepsilon(AB).X\varepsilon(AC):\supset:C\varepsilon(AB).C\text{-}\varepsilon(AX)$$

$$C\varepsilon(AB).C\text{-}\varepsilon(XA):\supset.C\varepsilon(BX)$$

$$C\varepsilon(BX).\supset.X\text{-}\varepsilon(BC),$$

такъ что

$$C\varepsilon(AB).X\varepsilon(AC):\supset.X\text{-}\varepsilon(BC),$$

или

$$C\varepsilon(AB).\supset:X\varepsilon(AC).\supset.X\text{-}\varepsilon(BC), \qquad \text{ч. и т. д.}$$

Теор. 26. $A\neq B.A\neq C.B\neq C:\supset:A\varepsilon(BC).\vee.B\varepsilon(AC).\vee.C\varepsilon(AB);$

другими словами, мы желаемъ доказать, что изъ 3 различныхъ точекъ прямой одна и только одна[1]) лежитъ между 2 другими (Гильбертъ, аксіома II_3). Для доказательства этой теоремы придется исходить изъ начальныхъ понятій настоящаго параграфа; мы предпочитаемъ даже здѣсь не основываться на понятіи луча (что̀, конечно, вполнѣ возможно), а непосредственно имѣть дѣло съ самимъ отношеніемъ P, при чемъ будемъ исходить изъ опредѣленія отрѣзка по Вайляти (опр. 3а).

Послѣднее сейчасъ же даетъ:

(1)... $$X\varepsilon(AB).\equiv:.APX.XPB:\vee:A\breve{P}X.X\breve{P}B;$$

доказательство же будетъ состоять въ перечисленіи всевозможныхъ случаевъ отношенія P между тремя различными точками и въ указаніи, что всегда имѣетъ мѣсто одно изъ 3

---

[1]) Въ нашей формулѣ утвержденія о „только одной точкѣ“ еще не содержится: однако если мы ее докажемъ, то это утвержденіе будетъ вытекать изъ слѣдствія теор. 19.

слагаемыхъ нашей теоремы [1]). Доказательство располагается въ слѣд. таблицѣ:

I) APB

1) BPC . . . . . $APB.BPC : \supset . B\varepsilon(AC)$

2) CPB

α) APC . . . . . $APC.CPB : \supset . C\varepsilon(AB)$

β) CPA . . . . . $CPA.APB : \supset . A\varepsilon(BC)$

II) BPA

1) APC . . . . . $. . . . BPA\ APC : \supset . A\varepsilon(BC)$

2) CPA

α) BPC . . . . . $BPC.CPA : \supset . C\varepsilon(AB)$

β) CPB . . . . . $CPB.BPA : \supset . B\varepsilon(AC)$.

Въ приведенной таблицѣ систематически перечислены всѣ 6 возможныхъ случаевъ, и въ каждомъ изъ нихъ имѣетъ мѣсто одно изъ предложеній:

$$A\varepsilon(BC),\quad B\varepsilon(AC),\quad C\varepsilon(AB),\qquad \text{ч. и т. д.}$$

Съ помощью этой теоремы мы выведемъ рядъ другихъ.

Теор. 27. $Z\varepsilon Y_P . \supset : . Y_P . = : (YZ) \vee . Z . \vee . Z_P$

$$Z\varepsilon Y_{\breve{P}} . \supset : . Y_{\breve{P}} . = : (YZ) . \vee\ Z \vee . Z_{\breve{P}}.$$

Докажемъ только первое утвержденіе. Возьмемъ какую-нибудь точку X, принадлежащую лучу Y_P

$$X\varepsilon Y_P;$$

тогда

$$X = Z . \vee . X \neq Z,$$

и займемся далѣе послѣднимъ случаемъ. Имѣемъ:

(1)... $X\varepsilon Y_P . Z\varepsilon Y_P : \supset . Y\text{-}\varepsilon(XZ)$ (опр. 2, теор. 18);

---

[1]) Формальное основаніе будетъ таково: если $p . \equiv . q \vee r$ (имѣемъ въ виду эквивалентность (1)), то $q \supset p$ и $r \supset p$. Въ самомъ дѣлѣ, $p . \equiv . q \vee r : \supset : q \vee r . \supset . p$; но $q . \supset . q \vee r$ (Pr. M. 2·2); слѣд., $q \supset p$ въ нашемъ случаѣ. Также доказывается, что и $r \supset p$.

для 3 различныхъ точекъ X, Y, Z на основаніи теор. 26 получаемъ:

$$X \varepsilon (YZ) . \vee . Z \varepsilon (YX) . \vee . Y \varepsilon (XZ),$$

при чемъ послѣдній случай сейчасъ же отбрасываемъ (см. (1)). Остановимся на второмъ; мы знаемъ, что

$$X \varepsilon Y_P . \equiv . YPX \qquad \text{(теор. 4)},$$

но

$$YPX . \supset : Z \varepsilon (YX) . \equiv : Z \varepsilon Y_P . Z \varepsilon X_{\breve{P}} \qquad \text{(теор. 13)}$$

$$Z \varepsilon X_{\breve{P}} . \equiv X \varepsilon Z_P \qquad \text{(теор. 8)},$$

такъ что

$$X \varepsilon Y_P . Z \varepsilon (YX) : \supset . X \varepsilon Z_P .$$

Соединяя разсмотрѣнныя предположенія вмѣстѣ, пишемъ:

$$Z \varepsilon Y_P . X \varepsilon Y_P : \supset : X = Z . \vee . X \varepsilon (YZ) . \vee . X \varepsilon Z_P$$

или

$$(2) \ldots \quad Z \varepsilon Y_P . \supset : . X \varepsilon Y_P . \supset : X \varepsilon (YZ) . \vee . X = Z . \vee . X \varepsilon Z_P ;$$

обратно имѣемъ

$$(3) \ldots \qquad Z \varepsilon Y_P . X = Z : \supset . X \varepsilon Y_P ;$$

$$Z \varepsilon Y_P . \supset . Z_P \supset Y_P \qquad \text{(теор. 10)}$$

$$(4) \ldots \qquad Z \varepsilon Y_P . X \varepsilon Z_P : \supset . X \varepsilon Y_P ;$$

$$Z \varepsilon Y_P . \equiv YPZ$$

$$Z \varepsilon Y_P . X \varepsilon (YZ) : \equiv : X \varepsilon Y_P . X \varepsilon Z_{\breve{P}} \qquad \text{(теор. 13)}$$

$$(5) \quad . \qquad Z \varepsilon Y_P . X \varepsilon (YZ) : \supset . X \varepsilon Y_P ;$$

формулы (3), (4) и (5) даютъ намъ:

$$(6) \ldots \quad Z \varepsilon Y_P . \supset : . X \varepsilon (YZ) . \vee . X = Z . \vee . X \varepsilon Z_P : \supset . X \varepsilon Y_P ;$$

слѣдованія (2) и (6) влекутъ за собой эквивалентность:

$$Z \varepsilon Y_P . \supset : . X \varepsilon Y_P . \equiv : X \varepsilon (YZ) . \vee . X = Z . \vee . X \varepsilon Z_P ,$$

а отсюда уже вытекаетъ:

$$Z \varepsilon Y_P . \supset : . Y_P . = : (YZ) . \vee . Z . \vee . Z_P , \qquad \text{ч. и т. д.}$$

Теор. 28. $A,B \varepsilon G.APB : \supset :. G. = : A_{\breve{P}} . \vee . [AB] . \vee . B_P$

$A,B \varepsilon G.A\breve{P}B : \supset :. G = : A_P . \vee . [AB] . \vee . B_{\breve{P}}.$

Имѣемъ, что

$$G = : A_{\breve{P}} . \vee . A . \vee . A_P \qquad \text{(теор. 7);}$$

кромѣ того

$$APB . \equiv . B \varepsilon A_P,$$

но тогда (см. теор. 27)

$$B \varepsilon A_P \ . \ \supset : \ A_P \ . = : (AB) . \vee . B . \vee . B_P,$$

такъ что

$$G \ . = : A_{\breve{P}}^{\breve{P}} . \vee \ A . \vee \ (AB) . \vee . B . \vee . B_P;$$

остается вспомнить опр. 4, чтобы получить доказательство теоремы.

Теор 29. $C,D \varepsilon (AB) \ . \ \supset : D = C . \vee . D \varepsilon (AC) . \vee . D \varepsilon (BC).$

Сначала мы отмѣтимъ, что или $D = C$, или $D \neq C$, и остановимся на послѣднемъ предположеніи; тогда для 3 различныхъ точекъ A, C, D имѣемъ (теор. 26):

$$A \varepsilon (CD) . \vee \ C \varepsilon (AD) . \vee . D \varepsilon (AC).$$

Первое нужно отбросить, такъ какъ

$$C \varepsilon (AB) \ . \ \supset . A - \varepsilon (BC)$$

$$D \varepsilon (AB) \ . \ \supset \ A - \varepsilon (BD) \qquad \text{(теор. 19).}$$

$$C, D \varepsilon (AB) \ \supset : A - \varepsilon (BC) \ A - \varepsilon (BD) : \supset . A - \varepsilon (CD) \ \text{(теор. 22).}$$

Третій случай $D \varepsilon (AC)$ представляетъ уже изъ себя одинъ изъ искомыхъ; остается разсмотрѣть второй:

$$C \varepsilon (AD) \ . \ \supset . D - \varepsilon (AC)$$

$$D - \varepsilon (AC) . D \varepsilon (AB) \ \supset . D \varepsilon (BC) \qquad \text{(теор. 20).}$$

Такимъ обр., получаемъ

$$D \neq C \ . \ \supset \ D \varepsilon (AC) . \vee . D \varepsilon (BC)$$

и теор 25 показываетъ. что оба эти случая несовмѣстны; собирая же все вмѣстѣ, можемъ написать

$$C.D\varepsilon(AB).\supset\cdot D=C\vee.D\varepsilon(AC)\vee.D\varepsilon(BC),\text{ ч и т. д.}$$

Слѣд. $C.D\varepsilon(AB).\supset(CD)\supset(AB)$

Обращаемся къ тремъ слагаемымъ предыдущей теоремы; если $D=C$, то $(CD)=\wedge$, и предложеніе можно считать доказаннымъ на томъ основаніи. что нулевой классъ содержится во всякомъ другомъ. Если же имѣетъ мѣсто 2-е допущеніе.

то $D\varepsilon(AC).\supset.(CD)\supset(AC)$ (слѣд изъ теор 23);

но

$$C\varepsilon(AB)\ \supset.(AC)\supset(AB),$$

такъ что

$$D\varepsilon(AC).\supset(CD)\supset(AB).$$

Наконецъ,

$$D\varepsilon(BC).\supset(CD)\supset(BC)$$

$$C\varepsilon(AB).\supset.(BC)\supset(AB)$$

$$D\varepsilon(BC).\supset.(CD)\supset(AB).$$

Собирая всѣ случаи, мы и убѣждаемся въ справедливости предложенія.

Теор. 30 $C\varepsilon(AB).\supset..(AB).=(AC).\vee.C.\vee(CB).$

Замѣняя въ теор. 29 букву D буквой X и пользуясь уже не разъ примѣнявшимся преобразованіемъ, пишемъ

(1). . $C\varepsilon(AB).\supset:.X\varepsilon(AB)\supset X=C.\vee X\varepsilon(AC).\vee.X\varepsilon(CB)$;

нетрудно убѣдиться въ справедливости такой формулы.

(2) .. $C\varepsilon(AB).\supset\cdot.X=C\vee X\varepsilon(AC).\vee X\varepsilon(CB)\cdot\supset.X\varepsilon(AB)$;

въ случаѣ $X=C$ это очевидно, далѣе·

$$X\varepsilon(AC).C\varepsilon(AB).\supset.X\varepsilon(AB)\qquad\text{(теор. 23)}$$

$$X\varepsilon(CB).C\varepsilon(AB)\ \supset.X\varepsilon(AB).$$

Формулы же (1) и (2) даютъ [1]) намъ

$$C\varepsilon(AB) \,.\, \supset .. X\varepsilon(AB) \equiv \cdot X{=}C. \vee . X\varepsilon(AC). \vee X\varepsilon(CB),$$

откуда и слѣдуетъ теорема.

Обращаемъ вниманіе читателя на то, что для указанія дѣйствія сложенія мы всегда пользуемся знакомъ $\vee$. а не $\dot{+}$; это необходимо, потому что мы имѣемъ здѣсь дѣло съ логической суммой, которая подчиняется закону тавтологіи, тогда какъ для суммы алгебраической этотъ законъ не имѣетъ мѣста (см. выше).

Теор 31. $C\varepsilon(AB).C\varepsilon(AD) \supset D{=}B \vee D\varepsilon(CB). \vee B\varepsilon(CD).$

Начинаемъ съ раздѣленія или $D{=}B$, или $D \neq B$, и останавливаемся на послѣднемъ предположеніи; имѣемъ·

$$C\varepsilon(AB).C\varepsilon(AD) \supset C\text{-}\varepsilon(BD) \qquad \text{(теор. 21)};$$

если теперь обратимъ вниманіе на 3 точки B, C, D и вспомнимъ. что три случая теор. 26 несовмѣстны и единственно возможны, то придемъ къ заключенію

$$C\text{-}\varepsilon(BD) \,.\, \supset : B\varepsilon(CD). \vee .D\varepsilon(BC);$$

собирая эти разсужденія, получаемъ доказательство теоремы.

Теор. 32 Четыре любыхъ точки прямой всегда можно обозначить буквами A, B, C, D такъ, что

$$B\varepsilon(AC).B\varepsilon(AD) \text{ и } C\varepsilon(AD).C\varepsilon(BD)\ [2]).$$

---

[1]) Если $p \supset .q \supset r$ и $p.\supset .r \supset q$, то $p.\supset .q \equiv r$.

[2]) Это предложеніе было принято въ качествѣ аксіомы Гильбертомъ въ 1-мъ изданіи его книги, но затѣмъ было доказано Муромъ на основаніи другихъ аксіомъ Гильберта (см. книгу Гальстеда, прил. 1). Мы полагаемъ, что доказательство значительно упрощается, если непосредственно исходить изъ свойствъ отношенія P. — Формулировка этой и нѣкоторыхъ другихъ теоремъ можетъ навести читателя на мысль, что мы иногда отказываемся отъ символизма вслѣдствіе его безсилія или сложности; но дѣло въ томъ, что мы сознательно избрали путь компромисса между обычнымъ и символическимъ изложеніемъ, такъ какъ послѣдовательное проведеніе послѣдняго, при почти полномъ незнакомствѣ съ нимъ у насъ, потребовало бы длинныхъ предварительныхъ разсужденій и увеличило бы и безъ того разросшуюся 2-ю статью.

Пусть $X, Y, Z, U \varepsilon G$; докажемъ прежде всего, что среди этихъ четырехъ точекъ имѣется такая, что всѣ остальныя стоятъ къ ней въ отношеніи P Возьмемъ сначала X и Y; тогда

(1)... $$XPY.\vee.YPX;$$

послѣдующій членъ этого отношенія обозначимъ черезъ V, такъ что $V=Y$, или $V=X$ въ зависимости отъ того, какое слагаемое логической суммы (1) имѣетъ мѣсто. Беремъ далѣе V и Z и обозначаемъ черезъ W первую или вторую точку, смотря по тому будетъ ли ZPV, или VPZ; наконецъ. ту изъ точекъ W и U, которая является послѣдующимъ членомъ отношенія P, назовемъ D. Послѣдняя и будетъ искомой какъ это вытекаетъ изъ транзитивности P; ея единственность слѣдуетъ изъ асимметричности нашего отношенія.

Обозначимъ теперь 3 оставшихся точки черезъ X_1, Y_1, Z_1. по способу, совершенно подобному только что изложенному, убѣдимся, что среди нихъ имѣется одна и только одна, къ которой двѣ другія стоятъ въ отношеніи P; эту точку обозначимъ черезъ C. Наконецъ изъ 2 оставшихся точекъ назовемъ буквой B ту, которая является послѣдующимъ членомъ отношенія P, а буквой A — ту, которая служитъ его предшествующимъ членомъ. Мы утверждаемъ, что полученное обозначеніе и есть искомое. Въ самомъ дѣлѣ, если взять наши точки въ порядкѣ:

$$A, B, C, D,$$

то всякая точка (за исключеніемъ, конечно, D) стоитъ къ любой за ней слѣдующей въ отношеніи P; отсюда.

$$APB.BPC:\supset . B\varepsilon(AC)$$

$$APB\ BPD:\supset . B\varepsilon(AD)$$

$$APC.CPD:\supset . C\varepsilon(AD)$$

$$BPC.CPD:\supset . C\varepsilon(BD),$$ ч. и т. д.

Мы исходили изъ отношенія P; но съ такимъ же успѣхомъ можно было положить въ основу отношеніе $\breve{P}$, которое также обладаетъ свойствами асимметричности и транзитив-

ности; нетрудно видѣть, что тогда мы пришли бы какъ разъ къ обратному обозначенію, т. е., ту точку, которая прежде была названа буквой A, теперь пришлось бы назвать буквой D, и т. д. Это новое обозначеніе удовлетворило бы всѣмъ требованіямъ теоремы; но кромѣ двухъ указанныхъ случаевъ никакой иной невозможенъ, такъ какъ въ силу опредѣленія Вайляти (опр. 3а) имѣемъ:

$$X\varepsilon(AB).\equiv:.APX.XPB:\vee:A\breve{P}X.X\breve{P}B,$$

другими словами, отношеніе „между“ сводится либо къ отношенію P, либо къ обратному отношенію $\breve{P}$. Послѣднее замѣчаніе оправдываетъ утвержденіе Гильберта, что кромѣ первоначальнаго обозначенія существуетъ только одно, а именно обратное, обладающее тѣми же свойствами.

Доказанная только что теорема весьма часто формулируется совершенно въ иномъ духѣ, напр.: „если 4 точки лежатъ на одной прямой, то каждая изъ нихъ или раздѣляетъ двѣ пары, образованныя изъ остальныхъ, или ни одной“ [1]). Легко замѣтить, что оба предложенія равносильны; для этого стоитъ только подчеркнуть, что изъ 4 точекъ двѣ (именно, обозначенныя буквами A и D) не лежатъ между какими-либо двумя изъ числа данныхъ, тогда какъ изъ двухъ другихъ (B и C) каждая раздѣляетъ по двѣ пары.

Теорема 32-я безъ труда обобщается на случай какого угодно конечнаго числа точекъ; доказательство естественно основывается на принципѣ математической индукціи, какъ это и дѣлаетъ Гальстедъ.

Мы доказали рядъ теоремъ, относящихся къ расположенію точекъ на прямой; однако мы еще не исчерпали предмета. Прежде всего надо отмѣтить, что нами введены нѣкоторые классы точекъ (лучи и отрѣзки); но существованіе этихъ классовъ доказано не было, такъ что не исключена возможность, что нѣкоторые изъ нихъ окажутся нулевыми (правильность теоремъ, касающихся этихъ классовъ, тѣмъ не менѣе не нарушится, ибо однѣ—носятъ условный характеръ, въ дру-

[1]) Killing u. Hovestadt „Handbuch des mathem. Unterrichts“ B. I, p. 8. См. также Каганъ, l. c., т. I, стр. 111.

гпхъ—дѣло идетъ о тождествѣ и подчиненіи классовъ). Нужныя для полнаго осуществленія нашей цѣли предложенія мы находимъ среди аксіомъ Пеано; формулируемъ ихъ, а о доказательствѣ съ нашей точки зрѣнія скажемъ нѣсколько ниже.

Теор. 33. $A \dot{+} B . \supset : (\exists X) . X \varepsilon (AB)$,

другими словами, при различныхъ A и B классъ (AB) существуетъ.

Теор. 34. $A \dot{+} B \supset : (\exists X) . B \varepsilon (AX)$;

отсюда. переставляя A и B, получаемъ

Слѣд. $A \dot{-} B . \supset : (\exists X) . A \varepsilon (BX)$.

Если теор. 34 перепишемъ подробнѣе:

$$A \dot{+} B . \supset : : (\exists X) : . B \varepsilon A_P . B \varepsilon X_{\breve{P}} : \vee : B \varepsilon A_{\breve{P}} . B \varepsilon X_P ,$$

или

$$A \dot{+} B . \supset \cdot : (\exists X) : . A \varepsilon B_{\breve{P}} . X \varepsilon B_P : \vee : A \varepsilon B_P . X \varepsilon B_{\breve{P}},$$

то убѣдимся, что изъ нея вытекаетъ существованіе обоихъ лучей B_P и $B_{\breve{P}}$ (въ 1-мъ случаѣ X принадлежитъ B_P, $A . . B_{\breve{P}}$, а во 2-мъ—наоборотъ); слѣдствіе изъ теор. 34 сдѣлаетъ то же самое для лучей A_P и $A_{\breve{P}}$.

Итакъ предложенія 33 и 34 установятъ существованіе отрѣзковъ и лучей; но какъ же обстоитъ дѣло съ доказательствомъ самихъ этихъ теоремъ, тѣмъ болѣе, что онѣ и сами по себѣ необходимы въ системѣ обычной геометріи? Нетрудно убѣдиться, что доказательства нельзя достигнуть съ помощью однихъ только постулатовъ I, II и III. Въ самомъ дѣлѣ, будемъ подъ G понимать совокупность цѣлыхъ положительныхъ чиселъ, а P истолкуемъ, какъ отношеніе „меньше“; при такомъ истолкованіи основныхъ понятій постулаты I, II, III остаются въ силѣ. Что же касается до предложенія 33, то оно не будетъ имѣть мѣста, если за A и B взять два послѣдовательныхъ цѣлыхъ числа; точно также теор. 34 не оправдывается, если положить $B = 1$ и $A = 2$. Слѣдовательно, чтобы овладѣть предметомъ полностью, необходимо пополнить

систему предпосылокъ: для выясненія того, какъ это сдѣлать, произведемъ анализъ теор. 33 и 34. Предпосылкой первой изъ нихъ является $A \neq B$; но при такомъ допущеніи можетъ быть какъ APB, такъ и BPA; разсмотримъ отдѣльно эти случаи. Въ первомъ имѣемъ:

$$A \neq B . APB : \supset : (\exists X) . X \varepsilon (AB) . APB;$$

но

$$APB \; X \varepsilon (AB) . \equiv : APX . XPB \quad \text{(теор. 13 при нѣкоторомъ преобразованіи)},$$

такъ что, отбрасывая излишнее теперь допущеніе $A \neq B$, пишемъ.

$$APB . \supset : (\exists X) . APX . XPB$$

$$(\exists X) . APX . XPB : \equiv . AP^2B,$$

откуда

$$APB . \supset . AP^2B;$$

точно также находимъ, что

$$BPA . \supset . BP^2A;$$

т. е., предложеніе 33 требуетъ, чтобы

$$P \supset P^2,$$

что̀ обозначаетъ *слитность* ряда G. Обратно, допуская, что отношеніе P порождаетъ слитный рядъ, нетрудно доказать предложеніе 33; стоитъ только вспомнить теор. 19 предыдущей статьи, которую теперь можно переписать такъ:

$$P \supset P^2 . \equiv : . APB . \supset : (\exists X) . X \varepsilon (AB);$$

а слѣдующая за ней теор. 20 говоритъ, что то же самое будетъ и въ случаѣ $A\breve{P}B$.

Переходимъ къ предложенію 34; опять-таки, дѣлая различныя допущенія объ отношеніи между A и B, имѣемъ:

$$A \neq B . APB : \supset : (\exists X) . B \varepsilon (AX) . APB$$

$$B \varepsilon (AX) . APB : \equiv : APB . BPX,$$

ибо слагаемое $A\breve{P}B.B\breve{P}X$ теперь невозможно; далѣе:

$$\vdash A \neq B.APB : \supset : (\exists X).APB.BPX,$$

или короче:

$$APB. \supset : (\exists X).BPX,$$

т.-е., всякая точка B, которая является членомъ сообласти P, войдетъ и въ его область. Точно также:

$$BPA \supset (\exists X).XPB,$$

т.-е., всякая точка области принадлежитъ и сообласти отношенія P. Так. обр., теорема 34 приводитъ насъ къ требованіямъ:

$$\mathcal{C}'P \supset D'P \quad \text{и} \quad D'P \supset \mathcal{C}'P,$$

откуда слѣдуетъ, что должно быть

$$D'P = \mathcal{C}'P;$$

другими словами требуется, чтобы рядъ G не имѣлъ ни начала, ни конца (2-я ст., теор. 18). Обратно, допуская, что область P тождественна съ его сообластью, мы сейчасъ же докажемъ теор. 34. Дѣйствительно, пусть

$$APB, \quad \text{т. е.,} \quad B \varepsilon \mathcal{C}'P;$$

но тогда и

$$B \varepsilon D'P;$$

далѣе:

$$B \varepsilon D'P. \equiv : (\exists X).BPX$$

$$APB.BPX : \supset . B \varepsilon (AX);$$

пусть теперь

$$BPA, \quad \text{т. е.,} \quad B \varepsilon D'P;$$

тогда

$$B \varepsilon D'P. \equiv . B \varepsilon \mathcal{C}'P. \equiv : (\exists X)\ XPB$$

$$XPB.BPA : \supset . B \varepsilon (AX), \text{ ч. и т. д.}$$

Итакъ, вопросъ выясненъ: систему постулатовъ нужно дополнить двумя:

IV. $$P \supset P^2$$

V. $$D`P = C`P.$$

Основываясь на вновь сдѣланныхъ допущеніяхъ, можно доказать и слѣд. предложенія:

Теор. 35. Классъ (AB) содержитъ неограниченно большое число точекъ (если, конечно, $A \neq B$).

Вь с. д,

$$A \neq B . \supset : (\exists C) . C \varepsilon (AB) . C \neq A \quad \text{(теор. 33 и 15)}$$

$$A \neq C . \supset : (\exists D) . D \varepsilon (AC) . D \neq C . D \neq A$$

$$C \varepsilon (AB) . D \varepsilon (AC) : \supset . D \varepsilon (AB) \qquad \text{(теор. 23)}$$

$$D \neq A . \supset : (\exists F) . F \varepsilon (AD) . F \neq A . F \neq D$$

$$D \varepsilon (AB) . F \varepsilon (AD) : \supset F \varepsilon (AB);$$

это F не можетъ $= C$, такъ какъ

$$F \varepsilon (AD) . \supset . F - \varepsilon (DB) \qquad \text{(теор. 25)},$$

а $C \varepsilon (BD)$ (см. теор. 23_1). Продолжая эти разсужденія, мы получаемъ безконечный рядъ различныхъ точекъ:

$$C,\ D,\ F, \ldots$$

принадлежащихъ (AB), ч. и т. д

Теор. 36. $X \varepsilon (AC) . \supset_X . X - \varepsilon (CB) : \supset . C \varepsilon (AB)$,

при чемъ точки A, B, C считаемъ различными (мы подчеркиваемъ здѣсь, что служащее предпосылкой слѣдованіе должно имѣть мѣсто при всякомъ X).

Настоящее предложеніе является обратнымъ по отношенію къ теор. 25-й; ранѣе его нельзя было доказать, такъ какъ оно невѣрно для раздѣльнаго ряда. Въ с. д., пусть A пред-

шествуетъ B, а C непосредственно слѣдуетъ за B [1]); тогда слѣдованіе $X\varepsilon(AC).\supset.X\text{-}\varepsilon(CB)$ будетъ вѣрнымъ при всякомъ X, какъ это легко провѣрить по прилагаемой схемѣ; между тѣмъ въ данномъ случаѣ $B\varepsilon(AC)$ Переходимъ къ доказательству въ случаѣ слитнаго ряда. Имѣемъ (теор. 26):

$$A\varepsilon(BC).\vee.B\varepsilon(AC)\vee.C\varepsilon(AB),$$

въ первомъ случаѣ

$$A\varepsilon(BC).\supset.(AC)\supset(BC) \qquad \text{(сл теор. 23).}$$

такъ что

$$X\varepsilon(AC).\supset_X.X\varepsilon(BC), \text{ что противорѣчитъ}$$

заданію.

Во второмъ—найдемъ прежде всего (теор. 33) точку D, принадлежащую (BC) [2]):

$$(\exists D).D\varepsilon(BC);$$

далѣе

$$B\varepsilon(AC)\supset:(BC)\supset(AC) \qquad \text{(сл. теор. 23),}$$

$$D\varepsilon(BC).\supset.D\varepsilon(AC);$$

но по нашимъ условіямъ:

$$D\varepsilon(AC).\supset.D\text{-}\varepsilon(BC),$$

откуда

$$D\varepsilon(BC).\supset.D\text{-}\varepsilon(BC), \text{ что указываетъ на}$$

невозможность нашего допущенія. Остается третій случай, именно $C\varepsilon(AB)$, который и доказываетъ теорему.

Слѣд. Въ случаѣ слитнаго ряда

$$C\varepsilon(AB).\equiv:X\varepsilon(AC)\ \supset_X.X\text{-}\varepsilon(BC).$$

---

[1]) Поясненіемъ можетъ служить слѣд. схема:

. . . . . .
A B C

[2]) Въ случаѣ раздѣльнаго ряда мы не можемъ утверждать этого.

Доказательство заключается въ сопоставленіи теоремъ 25-й и 36-й

Мы полагаемъ, что въ предшествующемъ изложено все существенное, относящееся къ вопросу о расположеніи точекъ на прямой. Мы могли бы также ввести понятіе о *направленіи* или *смыслѣ* отрѣзка, условившись отрѣзокъ $[AB]$ наз. положительнымъ въ случаѣ, если имѣетъ мѣсто APB, и—отрицательнымъ при $A\breve{P}B$; однако это понятіе получаетъ свое полное значеніе лишь въ связи съ ученіемъ о конгруенціи; поэтому здѣсь мы удовольствуемся простымъ упоминаніемъ.

Въ заключеніе мы остановимся на системѣ нашихъ постулатовъ, разсматривая ихъ съ обще-логической точки зрѣнія. Прежде всего является вопросъ о *согласуемости* аксіомъ; ея доказательство устраняетъ навсегда возможность прійти къ противорѣчивымъ слѣдствіямъ изъ данныхъ предпосылокъ. Чтобы добиться этого по отношенію къ нашимъ постулатамъ I—V и притомъ независимо отъ всякихъ геометрическихъ соображеній, возьмемъ въ качествѣ класса G совокупность раціональныхъ чиселъ, а P истолкуемъ, какъ отношеніе „меньше“. Такъ какъ при помощи послѣдняго отношенія всѣ раціональныя числа располагаются въ единый слитный рядъ, не имѣющій ни начала, ни конца, то нетрудно видѣть, что всѣ 5 постулатовъ при такомъ ариѳметическомъ истолкованіи класса G и отношенія P оказываются выполненными. Отсюда вытекаетъ ихъ согласуемость при условіи, конечно, что ариѳметика считается обоснованной, а ея предпосылки — свободными отъ противорѣчія. Нѣтъ надобности останавливаться на вопросѣ о *достаточности* вышеуказанныхъ 5 постулатовъ: все предшествующее изложеніе было направлено къ тому, чтобы убѣдить читателя въ этомъ путемъ фактическаго доказательства предложеній, которыя являются основными въ вопросѣ введенія идеи порядка въ геометрію (именно, въ частномъ случаѣ евклидовой прямой). Мы должны теперь перейти къ установленію *необходимости* нашихъ аксіомъ для указанной цѣли; другими словами, мы должны доказать ихъ *взаимную независимость*. Разсужденіе естественно дѣлится на 5 частей по числу постулатовъ.

1) Будемъ подъ классомъ G понимать по-прежнему совокупность раціональныхъ чиселъ, а подъ P — отношеніе „меньше или равно ($\leqq$)“; это значитъ, что

$$YPX.\equiv:Y<X.\vee.\ Y=X,$$

т. е., P имѣетъ мѣсто между 2 числами класса G всякій разъ, когда или 1-е меньше 2-го, или 1-е равно 2-му. Говорить объ асимметричности P нельзя; все, что мы можемъ, это — утверждать его несимметричность. Разсмотримъ, возможно-ли одновременное существованіе YPX и $Y\breve{P}X$, или нѣтъ. Утвержденіе $Y\breve{P}X$ эквивалентно XPY, а для послѣдняго, въ силу сдѣланныхъ условій, пишемъ.

$$XPY.\equiv:X<Y.\vee.X=Y:\equiv:Y>X.\vee.Y=X,$$

ибо

$$X<Y.\equiv\ Y>X,$$

такимъ образомъ произведеніе

$$YPX.\,Y\breve{P}X$$

сводится къ одновременному утвержденію 2 раздѣленій:

$$Y<X.\vee\ Y=X\quad\text{и}\quad Y>X.\vee\ Y=X,$$

и мы видимъ, что иногда это возможно (именно, когда въ обоихъ случаяхъ имѣютъ мѣсто 2-я слагаемыя), иногда же— нѣтъ (въ остальныхъ 3 случаяхъ); а отсюда вытекаетъ, что наше отношеніе ни симметрично, ни асимметрично; оно будетъ несимметричнымъ. Такимъ образомъ, 1-й постулатъ не выполняется при указанномъ истолкованіи G и P; остальные же выполняются. Дѣйствительно, если X меньше либо равно Y, а Y меньше либо равно Z, то это же самое можно сказать и объ отношеніи X къ Z, т. е., P является транзитивнымъ; также легко устанавливается, что P обладаетъ связностью и что

$$XPY.\supset:(\exists Z).XPZ.ZPY,\ \text{т. е},\ P\supset P^2;$$

наконецъ, для всякаго раціональнаго числа X можно найти такія числа X_1 и X_2, что

$$X_1PX\quad\text{и}\quad XPX_2,$$

другими словами:

$$D'P = G'P.$$

Мы получаемъ доказательство независимости 1-го постулата отъ остальныхъ.

2) Возьмемъ въ качествѣ класса G совокупность обыкновенныхъ комплексныхъ чиселъ съ модулемъ, равнымъ единицѣ; комплексное число съ аргументомъ φ будемъ обозначать черезъ (φ) $\{$такъ что $(\varphi) = e^{i\varphi}\}$. Отсюда вытекаетъ, что $(\varphi) = (\varphi_1)$, если φ и φ_1 отличаются на кратное 2π; другими словами, мы всегда въ правѣ распорядиться кратными 2π для выбора подходящаго значенія φ. Для опредѣленія P введемъ еще вспомогательныя числа Θ, которыя удовлетворяютъ условію

$$0 < \Theta \leqslant 1;$$

различныя числа этой послѣдней совокупности обозначаемъ буквой Θ съ различными значками. При этихъ обозначеніяхъ мы говоримъ, что комплексныя числа (φ) и (φ_1) стоятъ въ отношеніи P:

$$(\varphi)\, P\, (\varphi_1),$$

если

$$\varphi_1 = \varphi + \Theta\pi$$

при подходящемъ выборѣ значеній для аргументовъ данныхъ чиселъ; случай $\Theta = 1$ требуетъ (для асимметричности) добавочнаго условія, заключающагося въ томъ, что за предшествующій членъ отношенія P беремъ комплексное число, которому въ предѣлахъ отъ 0 до 2π соотвѣтствуетъ меньше значеніе аргумента по сравненію съ другимъ; т. е., если

$$0 \leqslant \varphi,\ \varphi_1 < 2\pi \quad \text{и} \quad \varphi_1 = \varphi + \pi,$$

то имѣемъ

$$(\varphi)\, P\, (\varphi_1).$$

Чтобы доказать пост. I, ставимъ вопросъ о возможности одновременнаго утвержденія

$$(\varphi)\, P\, (\varphi_1) \quad \text{и} \quad (\varphi)\, \breve{P}\, (\varphi_1),$$

или

$$(\varphi)\,P(\varphi_1) \quad \text{и} \quad (\varphi_1)\,P(\varphi).$$

Въ общемъ случаѣ имѣемъ:

$$(\varphi)\,P(\varphi_1).\equiv.\,\varphi_1 = \varphi + \Theta\pi \text{ и } (\varphi_1)\,P(\varphi).\equiv.\,\varphi = \varphi_1 + \Theta'\pi,$$

при одновременномъ утвержденіи получаемъ:

$\Theta + \Theta' = 0$, или вообще $(\Theta + \Theta')\pi = 2\varkappa\pi$, гдѣ $\varkappa$ — цѣлое, ибо φ и φ_1 могутъ имѣть различныя значенія въ обѣихъ формулахъ; отсюда $\Theta + \Theta' = 2\varkappa$, что невозможно, такъ какъ Θ и Θ' суть положительныя правильныя дроби.

Въ частномъ же случаѣ имѣемъ:

$$0 \leqslant \varphi,\ \varphi_1 < 2\pi \quad \text{и} \quad \varphi_1 = \varphi + \pi,$$

по разъ $\varphi < \varphi_1$, то φ_1 не можетъ быть $< \varphi$, такъ что и здѣсь оба утвержденія несовмѣстны. Итакъ, мы пришли къ заключенію:

$$(\varphi)\,P(\varphi_1).\supset\ -\{(\varphi)\breve{P}(\varphi_1)\},$$

что и доказываетъ пост. I, т. е., асимметричность P. Свойствомъ же транзитивности P не обладаетъ; въ с. д., изъ того, что

$$(\varphi)\,P(\varphi_1) \quad \text{и} \quad (\varphi_1)\,P(\varphi_2),$$

не слѣдуетъ непремѣнно, что и

$$(\varphi)\,P(\varphi_2);$$

дѣйствительно, если

$$\varphi_1 = \varphi + \Theta\pi \quad \text{и} \quad \varphi_2 = \varphi_1 + \Theta'\pi,$$

то

$$\varphi_2 = \varphi + (\Theta + \Theta')\pi,$$

а $(\Theta + \Theta')$ можетъ оказаться > 1. Пост. II не имѣетъ мѣста при настоящемъ истолкованіи G и P; остальные же, равно какъ и первый, выполняются. Переходимъ къ доказательству связности P; если (φ) и (φ_1) — два различныхъ числа, то въ качествѣ ихъ аргументовъ можно всегда выбрать такія числа φ и φ_1, что разность $(\varphi_1 - \varphi)$ не будетъ равняться нулю и

численно не превзойдетъ π; а отсюда уже нетрудно заключить, что будетъ имѣть мѣсто либо $(\varphi)P(\varphi_1)$, либо $(\varphi_1)P(\varphi)$, ч. и т. д.

На очереди стоитъ IV-й постулатъ; пусть намъ дано, что $(\varphi)P(\varphi_1)$ или, что то же самое, $\varphi_1 = \varphi + \Theta\pi$; полагаемъ $\Theta = \Theta' + \Theta''$, гдѣ Θ' и Θ'' лежатъ между 0 и 1. тогда

$$\varphi_1 = \{\varphi + \Theta'\pi\} + \Theta''\pi = \varphi_2 + \Theta''\pi, \text{ гдѣ } \varphi_2 = \varphi + \Theta'\pi,$$

и это φ_2 всегда существуетъ. Итакъ:

$$(\varphi)P(\varphi_1).\supset:\{\exists(\varphi_2)\}.(\varphi)P(\varphi_2).(\varphi_2)P(\varphi_1), \text{ ч. и т. д.}$$

Наконецъ, послѣдній постулатъ вытекаетъ изъ того очевиднаго обстоятельства, что для всякаго φ найдутся такія числа φ_1 и φ_2, что

$$\varphi = \varphi_1 + \Theta\pi \quad \text{и} \quad \varphi_2 = \varphi + \Theta'\pi.$$

Мы доказали, что пост. II не зависитъ отъ остальныхъ.

3) Будемъ понимать подъ G совокупность обыкновенныхъ комплексныхъ чиселъ, а подъ P то отношеніе между числами $x_1 + iy_1$ и $x_2 + iy_2$, которое имѣетъ мѣсто при условіи, что $x_1 = x_2$ и $y_1 < y_2$; такъ что

$$\{x_1 + iy_1\}P\{x_2 + iy_2\}.\equiv:x_1 = x_2.y_1 < y_2.$$

Очевидно, что P асимметрично, транзитивно, порождаетъ слитные ряды, не имѣющіе ни начала, ни конца; но все дѣло въ томъ, что оно не порождаетъ единаго ряда. Возьмемъ, въ самомъ дѣлѣ, числа $x + iy$ и $x' + iy'$, гдѣ $x \neq x'$, оба они несомнѣнно принадлежатъ полю отношенія P, но между ними нѣтъ ни отношенія P, ни отношенія $\breve{P}$. Эти разсужденія и доказываютъ независимость III-го постулата.

4) Для того, чтобы установить независимость IV-го постулата, достаточно взять въ качествѣ G совокупность цѣлыхъ чиселъ, а подъ P понимать отношеніе „меньше“. Очевидно, что пост. I—III и V выполнены, а IV—нѣтъ, ибо мы имѣемъ раздѣльный рядъ и можемъ говорить объ элементѣ, непосредственно слѣдующемъ за даннымъ.

5) Наконецъ, для доказательства независимости V-го постулата будемъ подъ G понимать совокупность вещественныхъ чиселъ x, удовлетворяющихъ условію:

$$0 \leqslant x \leqslant 1,$$

а подъ P — отношеніе „меньше“. Получается слитный рядъ, имѣющій начало и конецъ, такъ что одинъ лишь постулатъ V оказывается невыполненнымъ. Совокупность вещественныхъ чиселъ $y \geqslant 1$ представила бы намъ примѣръ ряда съ началомъ, но безъ конца; а числа $z \leqslant 1$ расположились бы въ рядъ, не имѣющій начала, но имѣющій конецъ.

Наша цѣль достигнута, въ заключеніе укажемъ, что число постулатовъ формально (а не по существу) можно свести къ 4. дѣйствительно, совокупность постулатовъ II и IV эквивалентна тождеству $P = P^2$ (см. исчисленіе отношеній § 7).

Так. обр., наши предпосылки можно переписать такъ:

I.	$P^2 \supset J$ (см. теор. 7 предыд. ст.).
II.	$P^2 = P$
III.	$P \varepsilon \mathit{cnx}$
IV.	$D`P = C`P.$

другими словами, для расположенія точекъ на прямой евклидовой геометріи необходимо и достаточно допустить, что *прямая есть слитный рядъ точекъ, не имѣющій ни начала, ни конца*.

2 Переходимъ къ расположенію элементовъ въ т.-наз. закрытомъ ряду, примѣромъ котораго могутъ служить точки окружности. Здѣсь уже не примѣнимо разобранное выше отношеніе „между“, какъ въ этомъ можно наглядно убѣдиться на указанной иллюстраціи. Взявъ на окружности 3 точки, мы не имѣемъ возможности утверждать, что одна изъ нихъ лежитъ между двумя другими. въ самомъ дѣлѣ, 2 точки окружности дѣлятъ ее на 2 различныхъ отрѣзка, и потому приведенное выше утвержденіе теряетъ опредѣленный смыслъ. Однако, какъ показываетъ непосредственная интуиція, между 4 элементами закрытаго ряда уже возможно опредѣленное отно-

шеніе, а именно: раздѣленіе двухъ паръ, образованныхъ данными элементами. основываясь на интуиціи, мы можемъ формулировать основныя свойства указаннаго отношенія, которыя затѣмъ въ качествѣ постулатовъ могутъ послужить исходной точкой формальнаго изслѣдованія. Вайляти указалъ [1]), что нижеслѣдующихъ постулатовъ достаточно для расположенія элементовъ закрытаго ряда въ извѣстномъ порядкѣ. Будемъ по-прежнему обозначать большими буквами элементы нашего закрытаго ряда, а ихъ совокупность назовемъ черезъ G; условившись, наконецъ, символомъ

$$AB \mid CD$$

выражать тотъ фактъ, что пара A и B раздѣляется парой C и D, можемъ слѣд. образомъ формулировать постулаты Вайляти:

1) $$AB \mid CD \equiv CD \mid AB$$

2) $$AB \mid CD . \equiv . AB \mid DC$$

3) $$AB \mid CD . \supset . - (AC \mid BD)$$

4) $$A, B, C, D \varepsilon G \supset : AB \mid CD . \vee . AC \mid BD \vee . AD \mid BC$$

5) $$AB \mid CD \; AC \mid BF \supset AC \mid DF.$$

Вайляти ничего не утверждалъ о различіи 4 точекъ, между которыми имѣетъ мѣсто отношеніе „раздѣленія паръ“:

---

[1]) Въ V-мъ томѣ журнала „Rivista di Matematica“ имѣются 2 статьи Вайляти; въ первой (p. 75—78) онъ указываетъ 7 постулатовъ, которые затѣмъ во второй (p. 183—185) сводятся къ 5, приводимымъ въ текстѣ; въ концѣ послѣдней статьи цитируется принадлежащее Padoa доказательство послѣдовательной независимости этихъ 5 постулатовъ. Мы сочли необходимымъ уклониться отъ обозначенія Вайляти $AB \,||\, CD$, ибо знакъ $||$ уже имѣетъ въ геометріи вполнѣ опредѣленное значеніе. Нужно еще замѣтить, что Вайляти имѣетъ въ виду самыя общія свойства „раздѣленія паръ“, которыя одинаково примѣнимы какъ къ слитному, такъ и къ раздѣльному ряду (лишь бы послѣдній содержалъ не менѣе 5 членовъ) Случаемъ слитнаго ряда мы займемся ниже.

къ этому вопросу вернулся Падоа [1]), который и пришелъ къ выводу, что допущеніе тождества точекъ, входящихъ въ различныя пары, раздѣляющія другъ друга, невозможно въ силу постулата 3-го (въ связи, конечно, съ 2 первыми) Однако Падоа усумнился въ возможности доказать это для точекъ одной и той же пары и имѣлъ къ тому, какъ намъ кажется, полное основаніе; въ с. д., допустивъ возможность $AB \mid XX$ и примѣнивъ къ этому утвержденію перечисленные выше постулаты, мы получимъ въ общемъ 12 формулъ, и легко убѣдиться, что въ нихъ не заключается противорѣчій. Итакъ, для полной характеристики отношенія раздѣленія паръ, къ постулатамъ Вайляти надо присоединить еще одинъ, а именно:

6) $$-(AB \mid XX),$$

откуда уже слѣдуютъ и остальные случаи, т.-е.:

$$-(XX \mid AB) \quad \text{и} \quad -(XX \mid AA).$$

Хотя къ элементамъ закрытаго ряда неприложимо отношеніе „между“, раздѣленіе паръ имѣетъ мѣсто и среди элементовъ открытаго ряда; въ сказанномъ можно убѣдиться интуитивно, взявъ въ качествѣ G прямую евклидовой геометріи. Разъ это такъ, то постулатовъ, характеризующихъ отношеніе P, должно быть достаточно для доказательства аксіомъ Вайляти, конечно, при подходящемъ опредѣленіи символа $AB \mid CD$. Мы намѣрены провести это доказательство, основываясь исключительно на первоначальныхъ трехъ постулатахъ, т е , допуская лишь, что между элементами класса G существуетъ асимметричное, транзитивное и связное отношеніе P. Рѣшивъ указанную задачу, мы установимъ, что для открытаго ряда отношеніе раздѣленія паръ всецѣло сводится къ разобранному раньше.

Итакъ, начинаемъ съ опредѣленія термина „раздѣленіе паръ“:

---

[1]) A. Padoa „Di alcune proposizioni fondamentali relative al mutuo separarsi di coppie di punti“; Revue de Mathématiques (Riv. di Mat.) t VI, p. 35.

Опр 6.

$$AB \mid CD . \equiv : . APC . CPB . BPD : \vee : APD . DPB . BPC :$$

$$\vee : BPD . DPA . APC : \vee : BPC\ CPA\ APD : \vee : A\breve{P}C . C\breve{P}B . B\breve{P}D :$$

$$\vee : A\breve{P}D\ D\breve{P}B . B\breve{P}C : \vee : B\breve{P}D . D\breve{P}A\ A\breve{P}C : \vee : B\breve{P}C\ C\breve{P}A . A\breve{P}D .$$

Нетрудно заключить на основаніи свойствъ отношенія P, что точки A, B, C, D всѣ должны быть различными между собой, такъ что добавочный 6-ой постулатъ уже доказанъ

Мы видимъ, что раздѣленіе паръ есть отношеніе значительно болѣе сложнаго характера, чѣмъ отношеніе „между“, особенно при его составленіи съ помощью P Рессель [1]) въ качествѣ характеристики отношенія $AB \mid CD$ указываетъ только 3 случая, которые сейчасъ же превращаются въ 6, такъ какъ асимметричное отношеніе, о которомъ онъ говоритъ, можетъ быть либо P, либо $\breve{P}$. Однако, по нашему мнѣнію, безъ присоединенія еще 2 случаевъ не обойтись; это обнаруживается, напр , при доказательствѣ 2-го изъ постулатовъ Вайляти. Мы убѣдились, что опредѣленіе 6-е уже само по себѣ даетъ возможность доказать всѣ аксіомы итальянскаго геометра, и хотя постулаты 3-й и 5-й требуютъ разсмотрѣнія 64 различныхъ предположеній, однако разсужденія весьма просты и протекаютъ почти механически.

Тѣмъ не менѣе дѣло можно упростить, если воспользоваться уже введеннымъ символомъ $X\varepsilon\,(AB)$ въ томъ истолкованіи, которое далъ ему Вайляти (см. опр 3а). Въ с. д., возьмемъ 1-е и 5-е. 4-е и 8-е слагаемыя правой части опр. 6 и докажемъ, что ихъ сумма эквивалентна произведенію:

$$C\varepsilon\,(AB) . D - \varepsilon\,(AB),$$

имѣемъ:

$$C\varepsilon\,(AB) . \equiv : . APC . CPB : \vee : A\breve{P}C . C\breve{P}B \text{ (теор 12 и 4)}$$

$$D - \varepsilon\,(AB) . \equiv : . APD . BPD : \vee : A\breve{P}D . B\breve{P}D \text{ (теор. 18 и 4)}$$

---

[1]) Pr. p. 200

$$C\varepsilon(AB).D\text{-}\varepsilon(AB):\equiv:.APC\ CPB.APD.BPD:$$
$$\vee\ APC.CPB.A\breve{P}D.B\breve{P}D:$$
$$\vee:A\breve{P}C.C\breve{P}B\ APD.BPD:$$
$$\vee\ A\breve{P}C.C\breve{P}B.A\breve{P}D.B\breve{P}D.$$

Разсмотримъ отдѣльно 4 слагаемыя правой части:

1) $APC.CPB\ APD\ BPD:\equiv:APC\ CPB\ BPD,$

ибо APD тогда слѣдуетъ изъ транзитивности P; так обр.

$APC.CPB.APD.BPD:\equiv$ 1-му слагаемому опр. 6;

2) $APC.CPB.A\breve{P}D\ B\breve{P}D\ \equiv:B\breve{P}C\ C\breve{P}A.A\breve{P}D\ B\breve{P}D.$

$\equiv\cdot B\breve{P}C.C\breve{P}A.A\breve{P}D:\equiv$ 8-му слагаемому опр. 6;

3) $A\breve{P}C\ C\breve{P}B\ APD.BPD:\equiv:CPA.BPC.APD.BPD$

$\equiv:BPC.CPA\ APD:\equiv$ 4-му слагаемому опр 6;

4) $A\breve{P}C.C\breve{P}B.A\breve{P}D.B\breve{P}D:\equiv$ 5-му слагаемому опр. 6.

Наше утвержденіе доказано, точно также устанавливается, что случаи 2 и 6, 3 и 7 въ суммѣ эквивалентны произведенію

$$D\varepsilon(AB).C\text{-}\varepsilon(AB).$$

Мы приходимъ так обр. къ предложенію:

Теор. 37. $AB|CD.\equiv.\ C\varepsilon(AB)\ D\text{-}\varepsilon(AB):\vee:D\varepsilon(AB).C\text{-}\varepsilon(AB),$

что вполнѣ согласуется съ нашимъ представленіемъ объ этомъ отношеніи. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ проще исходить изъ послѣдней эквивалентности, чѣмъ основываться непосредственно на опредѣленіи 6-мъ.

Переходимъ къ доказательству постулатовъ Вайляти.

Теор 38. $AB \mid CD . \equiv . CD \mid AB.$

Обратимся снова къ опр 6, но скомбинируемъ иначе его слагаемыя, а именно: сначала 3 и 7, 4 и 8, а потомъ 1 и 5, 2 и 6; совершенно аналогично предыдущему получимъ:

$$AB \mid CD \equiv :. A\varepsilon(CD) . B - \varepsilon(CD) : \vee : B\varepsilon(CD) . A - \varepsilon(CD),$$

на основаніи теор 37 имѣемъ:

$$A\varepsilon(CD) . B - \varepsilon(CD) : \vee : B\varepsilon(CD) . A - \varepsilon(CD) . : \equiv . CD \mid AB,$$

откуда

$$AB \mid CD . \equiv . CD \mid AB, \text{ ч и т д}$$

Теор. 39 $AB \mid CD . \equiv . AB \mid DC.$

Предложеніе вытекаетъ изъ теор. 37 и изъ перемѣстительнаго закона логической суммы

Слѣдствіе. Изъ 2 послѣднихъ предложеній вытекаетъ, что формула $AB \mid CD$ эквивалентна 7 другимъ, которыя получаются изъ нея посредствомъ перестановокъ буквъ въ отдѣльныхъ парахъ и перестановокъ самихъ паръ.

Теор 40 $AB \mid CD . \supset - \{AC \mid BD\}.$

Имѣемъ:

$$AC \mid BD . \equiv :. B\varepsilon(AC) . D - \varepsilon(AC) : \vee : D\varepsilon(AC) . B - \varepsilon(AC);$$

допустимъ, въ противность теоремѣ, что $AB \mid CD$ и $AC \mid BD$ совмѣстны; тогда ихъ одновременное утвержденіе даетъ мѣсто 4 различнымъ случаямъ, которые и разсмотримъ отдѣльно:

1) $C\varepsilon(AB) . D - \varepsilon(AB) . B\varepsilon(AC) . D - \varepsilon(AC)$, что невозможно, ибо одновременно не можетъ быть:

$$C\varepsilon(AB) \quad \text{и} \quad B\varepsilon(AC) \qquad \text{(теор. 19);}$$

2) $C\varepsilon(AB) . D - \varepsilon(AB) . D\varepsilon(AC) . B - \varepsilon(AC);$ тогда

$$C\varepsilon(AB) \; D\varepsilon(AC) : \supset . D\varepsilon(AB) \qquad \text{(теор. } 23_2\text{)},$$

что невозможно, такъ какъ намъ дано $D - \varepsilon(AB)$,

3) $D\varepsilon(AB).C - \varepsilon(AB).B\varepsilon(AC).D - \varepsilon(AC)$; тогда

$B\varepsilon(AC)\ D\varepsilon(AB) : \supset\ D\varepsilon(AC)$ (теор. 23_2),

что невозможно, ибо $D - \varepsilon(AC)$;

4) $D\varepsilon(AB)\ .\ C\text{-}\varepsilon(AB)\ .\ D\varepsilon(AC)\ .\ B - \varepsilon(AC)$; тогда

$C\text{-}\varepsilon(AB)\ .\ B\text{-}\varepsilon(AC) : \supset\ .A\varepsilon(BC)$ (теор. 26)

$A\varepsilon(BC)\ .\ D\varepsilon(AB) : \supset\ .\ D\text{-}\varepsilon(AC)$ (теор. 25),

что невозможно, ибо намъ дано $D\varepsilon(AC)$.

Итакъ допущеніе совмѣстности $AB \mid CD$ и $AC \mid BD$ приводитъ насъ къ противорѣчію, откуда и вытекаетъ справедливость теор 40.

Слѣдствіе. $AB \mid CD.\ \supset .-(AD \mid BC)$.

Въ с. д., $AB \mid CD. \equiv . AB \mid DC$ (теор. 39)

$AB \mid DC.\ \supset .-(AD \mid BC)$ (теор. 40).

Теор. 41. $A, B, C, D\varepsilon G . \supset : AB \mid CD . \vee . AC \mid BD . \vee . AD \mid BC.$

Имѣемъ:

$A, B, C\varepsilon G . \supset : C\varepsilon(AB) . \vee . A\varepsilon(BC) . \vee\ B\varepsilon(AC)$ (теор 26 [1])

и разсмотримъ всѣ 3 предположенія отдѣльно, присоединяя къ каждому изъ нихъ еще различныя допущенія о положеніи точки D; именно, мы будемъ различать случаи, принадлежитъ ли D соотвѣтственному классу, обозначаемому съ помощью простыхъ скобокъ, или нѣтъ.

I) $C\varepsilon(AB)$

1) $D - \varepsilon(AB)$ . . . . . $C\varepsilon(AB).D - \varepsilon(AB) : \supset . AB \mid CD.$

2) $D\varepsilon(AB)$

$C \neq D . C, D\varepsilon(AB) : \supset : D\varepsilon(AC) \vee . D\varepsilon(CB)$ (теор. 29)

α) $D\varepsilon(AC)$

$C\varepsilon(AB) . \supset\ B - \varepsilon(AC)$ (теор. 19)

$D\varepsilon(AC) . B - \varepsilon(AC) : \supset$ . . . . . $AC \mid BD.$

---

[1]) Всѣ 4 точки мы считаемъ различными.

$\beta)\ D\varepsilon(CB)$

$C\varepsilon(AB).\supset.A\text{-}\varepsilon(BC)$

$D\varepsilon(CB)\ A\text{-}\varepsilon(CB)\cdot\supset\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ AD|BC.$

II) $A\varepsilon(BC)$; нетрудно прійти къ заключенію, что этотъ случай получается изъ предыдущаго перестановкой буквъ A и C одной на мѣсто другой:

1) $D\text{-}\varepsilon(BC).\ .\ .\ .\ .\ .\ A\varepsilon(BC).D\text{-}\varepsilon(BC):\supset.AD|BC.$

2) $D\varepsilon(BC)$

$A\mp D.A,D\varepsilon(BC):\supset:D\varepsilon(AC).\vee.D\varepsilon(AB)$

$\alpha)\ D\varepsilon(AC)$

$A\varepsilon(BC).\supset.B\text{-}\varepsilon(AC)$

$D\varepsilon(AC)\ B\text{-}\varepsilon(AC).\supset\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ AC|BD.$

$\beta)\ D\varepsilon(AB)$

$A\varepsilon(BC).\supset.C\text{-}\varepsilon(AB)$

$D\varepsilon(AB).C\text{-}\varepsilon(AB)\cdot\supset.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ AB|CD.$

III) $B\varepsilon(AC)$; этотъ случай получается изъ 1-го перестановкой буквъ B и C, а именно:

1) $D\text{-}\varepsilon(AC)\ .\ .\ .\ .\ .\ B\varepsilon(AC).D\text{-}\varepsilon(AC):\supset.AC|BD.$

2) $D\varepsilon(AC)$

$\alpha)\ D\varepsilon(AB).C\text{-}\varepsilon(AB):\supset\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ AB|CD.$

$\beta)\ D\varepsilon(BC).A\text{-}\varepsilon(BC)\ \supset\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ AD|BC.$

Дѣйствительно, мы разсмотрѣли всевозможные случаи и всегда приходили къ одному изъ предложеній:

$AB|CD$, или $AC|BD$, или $AD|BC$, ч. и т. д.

Добавимъ, что въ силу теор. 40 всѣ 3 случая теор. 41 другъ съ другомъ несовмѣстны.

Теор. 42. $AB|CD.AC|BF\cdot\supset.AC|DF.$

Имѣемъ:

$$AB|CD.\equiv\quad C\varepsilon(AB).D-\varepsilon(AB)\ \vee\ D\varepsilon(AB)\ C-\varepsilon(AB).$$

$$AC|BF.\equiv\cdot\ B\varepsilon(AC).F-\varepsilon(AC):\ \vee:F\varepsilon(AC).B-\varepsilon(AC);$$

слѣд., одновременное утвержденіе обоихъ раздѣленій ведетъ къ 4 различнымъ случаямъ, которые и разсмотримъ отдѣльно.

1) $C\varepsilon(AB).D-\varepsilon(AB).B\varepsilon(AC)\ F-\varepsilon(AC)$, что невозможно, ибо одновременно не можетъ быть $C\varepsilon(AB)$ и $B\varepsilon(AC)$;

2) $$C\varepsilon(AB).D-\varepsilon(AB).F\varepsilon(AC).B-\varepsilon(AC)$$

$$C\varepsilon(AB).\supset.(AC)\supset(AB) \qquad \text{(сл. теор. 23)}$$

или

$$X\varepsilon(AC).\supset.X\varepsilon(AB);$$

по закону обращенія:

$$X-\varepsilon(AB).\supset.X-\varepsilon(AC);$$

слѣд.,

$$D-\varepsilon(AB).\supset.D-\varepsilon(AC);$$

$$F\varepsilon(AC).D-\varepsilon(AC).\supset.AC|DF,\ \text{ч. и т. д.}$$

3) $$D\varepsilon(AB)\ C-\varepsilon(AB).B\varepsilon(AC).F-\varepsilon(AC)$$

$$B\varepsilon(AC).D\varepsilon(AB):\supset.D\varepsilon(AC) \qquad \text{(теор. } 23_2\text{)}$$

$$D\varepsilon(AC).F-\varepsilon(AC):\supset.AC|DF,\ \text{ч. и т. д.}$$

4) $$D\varepsilon(AB).C-\varepsilon(AB).F\varepsilon(AC).B-\varepsilon(AC)$$

$$C-\varepsilon(AB).B-\varepsilon(AC)\ \supset.A\varepsilon(BC) \qquad \text{(теор. 26)}$$

$$A\varepsilon(BC).D\varepsilon(AB)\ \supset.D-\varepsilon(AC) \qquad \text{(теор. 25)}$$

$$F\varepsilon(AC).D-\varepsilon(AC):\supset.AC|DF,\ \text{ч. и т. д.}$$

Итакъ, изъ 4 случаевъ возможны только 3 и всѣ они ведутъ къ раздѣленію паръ A, C и D, F.

Слѣдствіе. $AB|CD.AC|BF:\supset.AB|DF.$

Предложеніе слѣдуетъ изъ перемѣстительнаго закона логическаго умноженія и изъ только что доказанной теоремы. Полученныя формулы можно, конечно, соединить въ одну:

$$AB|CD.AC|BF:\supset:AB|DF\ AC|DF.$$

Въ дальнѣйшемъ намъ часто придется основываться на 5-омъ постулатѣ Вайляти; поэтому будетъ нелишнимъ пояснить его слѣд. словеснымъ правиломъ: предпосылка состоитъ изъ 2 предложеній, утверждающихъ каждое раздѣленіе 2 паръ, при чемъ 1-ая буква—одна и та же въ обоихъ предложеніяхъ, а 2-ая и 3-я мѣняются только мѣстами при переходѣ отъ одного къ другому; въ качествѣ же заключенія получается также раздѣленіе 2 паръ, при чемъ 1-ой парой можетъ послужить любая изъ первыхъ паръ предпосылокъ, а 2-ая пара составляется изъ тѣхъ (послѣднихъ по порядку) буквъ, которыми отличаются наши предпосылки одна отъ другой.

Наша ближайшая цѣль достигнута: постулаты Вайляти доказаны для открытаго ряда, при чемъ въ основу были положены самыя общія свойства отношенія, порождающаго рядъ.

Однако, прежде чѣмъ итти дальше, докажемъ еще 2 предложенія, которыя первоначально Вайляти отнесъ къ числу постулатовъ и которыя весьма важны для характеристики отношенія „раздѣленіе паръ“; обращаемъ вниманіе читателя на то, что доказательство это единственно основано на 5 постулатахъ Вайляти (въ связи, конечно, съ общей логикой).

Теор. 43. $AB|CD\ AB|CF:\supset -\{AB|DF\}.$

Возьмемъ 4 точки A, C, D, F и на осн. теор. 41 напишемъ:

$$AC|DF\ \vee.AD|CF.\vee.AF|CD;$$

разсмотримъ отдѣльно эти 3 случая:

1) $AC|DF$

$AB|CD.\equiv.CD|AB;\ AC|DF.\equiv.CA|DF$ (сл. теор. 39)

$CD|AB.CA|DF:\supset.CA|BF$ (теор. 42),

но послѣднее заключеніе несовмѣстно съ даннымъ намъ предложеніемъ $AB|CF$, что указываетъ на невозможность 1-го случая.

2) $AD|CF$

$$DA|CF.DC|AB:\supset.DA|BF$$

$$DA|BF.\supset.-\{AB|DF\} \qquad \text{(теор. 40).}$$

3) $AF|CD$

$$FA|CD.FC|AB:\supset.FA|BD$$

$$FA|BD.\supset.-\{AB|DF\},\ \text{ч. и т. д.}$$

Теор. 44. $AB|CD.AC|BF:\supset.CD|BF.$

На осн. теор. 42 имѣемъ:

$$AB|CD.AC|BF:\supset\cdot AC|DF\ AB|DF,$$

возьмемъ теперь точки B, C, D, F и на осн. теор. 41 различимъ 3 случая:

$$BC|DF\vee.BD|CF.\vee.BF|CD.$$

Первый изъ нихъ невозможенъ, такъ какъ

$$DF|AC.DF|AB:\supset.-\{DF|BC\} \qquad \text{(теор. 43);}$$

второй—также невозможенъ, ибо допустивъ $BD|FC$, имѣемъ:

$$FC|DB.FD|CA:\supset.FC|AB,$$

что противорѣчитъ данному намъ $AC|BF$. Остается, слѣд., третій, который и доказываетъ теорему. По поводу ея формулировки замѣтимъ, что предпосылки тождественны съ предпосылками теор. 42; а заключеніе утверждаетъ отношеніе раздѣленія между вторыми парами нашихъ предпосылокъ.

Нѣсколько выше мы видѣли, что всякое порождающее рядъ отношеніе можетъ привести насъ къ отношенію раздѣленія паръ съ его характерными свойствами; Вайляти [1]) до-

---

[1]) Vailati „Sulle relazioni di posizione tra punti d'una linea chiusa"; Rivista di Matematica v. V, p. 75. См. также: Padoa „Di alcune proposizioni fondamentali relative al mutuo separarsi di coppie di punti", Revue de Mathématiques t. VI, p. 35; Russell „Principles", p. 215.

казалъ обратное предложеніе. Онъ исходилъ изъ нѣкоторой совокупности, между элементами которой существуетъ отношеніе раздѣленія паръ, обладающее указанными выше свойствами. Итальянскій геометръ беретъ 5 точекъ (A, B, C, D, F) и разсматриваетъ 3 изъ нихъ (A, B, C), какъ данныя, а 2 остальныхъ—какъ перемѣнныя; тогда получается въ общемъ 12 различныхъ случаевъ (о чемъ подробнѣе ниже), смотря по тому, какъ дѣлятся наши 5 точекъ на пары, раздѣляющія другъ друга; 6 изъ этихъ случаевъ отличаются отъ 6 другихъ тѣмъ, что точки D и F переставлены одна на мѣсто другой. Если имѣетъ мѣсто одно изъ слѣд. 6 расположеній.

$$AB|CF.AF|BD:\vee\cdot AB|DF.AF|BC:\vee:AB|CD.AC|BF.$$

$$\vee:AD|CF.AC|BD:\vee:AD|BC.AC|DF:\vee:AD|BF.AF|DC,$$

то мы говоримъ, что между D и F имѣетъ мѣсто отношеніе

$$F\,S_{ABC}\,D$$ [1]);

на основаніи формальныхъ свойствъ раздѣленія паръ Вайляти доказываетъ, что отношеніе S_{ABC} обладаетъ асимметричностью и транзитивностью; о связности онъ ничего не говоритъ, но и это свойство можно доказать, исходя изъ его 5 постулатовъ. Въ с. д., выше приведено было значеніе символа $F\,S_{ABC}\,D$ (обозначимъ эту логическую сумму черезъ I и отдѣльныя ея слагаемыя будемъ указывать арабскими цифрами); переставляя буквы F и D, найдемъ значеніе символа $D\,S_{ABC}\,F$, а именно:

$$AB|CD.AD|BF:\vee:AB|DF.AD|BC:\vee:AB|CF.AC|BD$$

$$\vee:AF|CD.AC|BF:\vee:AF|BC.AC|FD:\vee:AF|BD.AD|FC$$

(это выраженіе обозначимъ черезъ II). Намъ надо установить, что какія бы точки D и F (отличныя отъ A, B, C) мы ни взяли, онѣ вмѣстѣ съ 3 данными точками A, B, C дадутъ одну изъ указанныхъ 12 комбинацій. При доказательствѣ мы

[1]) Его можно читать такъ: „F слѣдуетъ за D въ направленіи ABC“; опредѣленіе упрощено согласно указанію Padoa (l. c.).

будемъ основываться на постулатахъ Вайляти и на всѣхъ ихъ слѣдствіяхъ, въ томъ числѣ и на теор. 43 и 44.

Прежде всего отмѣчаемъ, что 4 точки A, B, C, D даютъ мѣсто одному изъ слѣд. 3 случаевъ:

$$AB|CD.\vee.AC|BD\vee.AD|BC \qquad \text{(4-й пост.)},$$

которые и разсматриваемъ отдѣльно.

1) $AB|CD$

Беремъ точки A, B, D, F и снова различаемъ 3 предположенія:

$$AD|BF.\vee.AF|BD.\vee.AB|DF;$$

α) $AD|BF$

$AB|CD.AD|BF$ даетъ намъ II слаг. № 1.

β) $AF|BD$

Имѣемъ:

$$AB|CD.\equiv.BA|DC$$

$$AF|BD\equiv.BD|AF$$

$$BA|DC.BD|AF:\supset.BA|CF \qquad \text{(пост. 5)}$$

$AB|CF.AF|BD$ даетъ намъ I № 1.

γ) $AB|DF$

Здѣсь придется принять во вниманіе расположеніе точекъ A, B, C, F; имѣемъ 3 случая:

γ_1) $AF|BC$

$AB|DF.AF|BC$ даетъ I № 2;

γ_2) $AC|BF$

$AB|CD.AC|BF$ даетъ I № 3;

γ_3) $AB|CF$ невозможно, такъ какъ

$$AB|CD.AB|DF:\supset.-\{AB|CF\} \qquad \text{(теор. 43)}.$$

2) $AC|BD$

Беремъ точки A, C, D, F и различаемъ 3 предположенія:

$$AD|CF \vee .AF|CD. \vee .AC|DF;$$

α) $AD|CF$

$AC|BD.AD|CF$ даетъ I № 4;

β) $AF|CD$

$CA|DB.CD|AF : \supset .CA|BF$ (пост. 5)

$AF|CD.AC|BF$ даетъ II № 4.

γ) $AC|DF.$

Здѣсь придется принять во вниманіе расположеніе точекъ A, B, C, F; имѣемъ 3 случая:

γ_1) $AF|BC$

$AF|BC.AC|DF$ даетъ II № 5;

γ_2) $AB|CF$

$AC|BD.AB|CF$ даетъ II № 3;

γ_3) $AC|BF$ невозможно, такъ какъ

$AC|BD.AC|DF : \supset .- (AC|BF)$ (теор. 43).

3) $AD|BC$

Беремъ точки A, B, D, F и снова различаемъ 3 предположенія:

$$AB|DF. \vee .AF|BD. \vee .AD|BF;$$

α) $AB|DF$

$AD|BC.AB|DF$ даетъ II № 2;

β) $AF|BD$

$$DA|BC.DB|AF:\supset.DA|CF. \qquad \text{(пост. 5)}$$

$AF|BD.AD|CF$ даетъ II № 6;

$\gamma)$ $AD|BF$

Здѣсь придется принять во вниманіе расположеніе точекъ A, C, D, F; имѣемъ 3 случая:

$\gamma_1)$ $AF|DC$

$AD|BF.AF|DC$ даетъ I № 6;

$\gamma_2)$ $AC|DF$

$AD|BC.AC|DF$ даетъ I № 5;

$\gamma_3)$ $AD|CF$ невозможно, такъ какъ

$$AD|BC.AD|BF:\supset.-\{AD|CF\} \qquad \text{(теор. 43).}$$

Мы разсмотрѣли, так. обр., всевозможныя предположенія и убѣдились, что въ каждомъ изъ нихъ имѣемъ дѣло съ однимъ изъ слагаемыхъ суммъ I или II; замѣтимъ, что ни одно изъ слагаемыхъ не оказалось пропущеннымъ и ни одно не повторилось два раза. Однако для того, чтобы свойство связности не имѣло никакихъ исключеній, необходимо условиться объ отношеніи между точками F и D, когда одна или обѣ эти точки совпадаютъ съ основными точками A, B, C; въ с. д. въ этихъ случаяхъ вышеприведенное опредѣленіе отношенія $FS_{ABC}D$ теряетъ смыслъ. Вслѣдствіе изложеннаго дополнительно полагаемъ.

$XS_{ABC}A$, гдѣ X—любая точка,

$$XS_{ABC}B.\equiv.AX|BC.\vee.AC|BX, BS_{ABC}X.\equiv.AB|CX$$

$$XS_{ABC}C.\equiv.AC|BX; CS_{ABC}X.\equiv AX|BC.\vee.AB|CX$$

$CS_{ABC}B$.

Необходимость условій перваго и послѣдняго была указана Пери [1]); намъ кажется, что здѣсь, гдѣ дѣло идетъ о дока-

[1]) См. Russell Pr. p. 215; ниже какъ разъ постулируются подобныя утвержденія.

зательствѣ связности нашего отношенія, надо сюда присоединить и другія условія; какъ легко убѣдиться, эти условія не противорѣчатъ асимметричности и транзитивности отношенія S_{ABC}.

Теперь S_{ABC} обладаетъ всѣми основными свойствами отношенія, порождающаго рядъ.

Выводъ изъ предыдущихъ разсужденій будетъ таковъ: *существованіе между элементами класса G отношенія, порождающаго рядъ, есть условіе необходимое и достаточное для того, чтобы между элементами этого класса имѣло мѣсто отношеніе раздѣленія паръ, охарактеризованное постулатами Вайляти*

Только въ случаѣ т.-наз. закрытаго ряда указанное отношеніе существенно связано съ 3 опредѣленными элементами, что̀ не имѣетъ мѣста для открытаго ряда. Въ частности элементъ A можно считать началомъ ряда (разсматриваемаго въ связи съ отношеніемъ, обратнымъ введенному выше) или его концомъ (въ связи съ самимъ отношеніемъ S_{ABC}); но точка A — произвольна, а потому и началомъ закрытаго ряда можетъ условно служить любой изъ его членовъ, что опять-таки невозможно для открытаго ряда (см. выше).

Путь, указанный Вайляти для формальнаго превращенія закрытаго ряда въ открытый, вполнѣ соотвѣтствуетъ даннымъ нашей непосредственной интуиціи о такихъ рядахъ. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ какую-нибудь замкнутую линію, напр., окружность; если я просто задамъ на ней 2 точки, то нельзя утверждать, что одна изъ нихъ предшествуетъ другой. Съ цѣлью получить эту возможность отмѣтимъ на окружности произвольную точку A_1, которая уже останется неприкосновенной въ теченіи дальнѣйшаго изслѣдованія и которую затѣмъ можно принять за начало открытаго ряда. Сдѣланнаго однако еще мало, чтобы можно было говорить о предшествованіи и слѣдованіи точекъ; надо еще выбрать направленіе (одно изъ двухъ возможныхъ), въ которомъ мы намѣрены пробѣгать ихъ рядъ. Направленіе можно указать заданіемъ другихъ точекъ, при чемъ одной такой точки для окружности еще не достаточно, двѣ же рѣшаютъ вопросъ безъ всякихъ неясностей. Итакъ, указавъ еще 2 точки B_1 и C_1, можно

остановиться на одномъ изъ двухъ направленій: $A_1B_1C_1$ или $A_1C_1B_1$; выберемъ первое Тогда получается возможность утверждать, что изъ 2 любыхъ точекъ „одна предшествуетъ другой въ направленіи $A_1B_1C_1$“. Изложеннымъ путемъ мы и въ случаѣ закрытаго ряда приходимъ къ отношенію, обладающими тѣми же свойствами, что и отношеніе, порождающее открытый рядъ.

Так. обр., для расположенія точекъ т.-наз. закрытаго ряда имѣется 2 пути. Первый, отличающійся формальнымъ характеромъ, но сводящій новое изслѣдованіе къ уже продѣланному раньше, состоитъ въ постулированіи (на основаніи теоремы Вайляти) среди элементовъ закрытаго ряда (класса G) отношенія T, порождающаго рядъ и существеннымъ образомъ связаннаго съ 3 выбранными элементами A_1, B_1, C_1. Указанная связь состоитъ въ томъ, что

$$X \varepsilon G . \supset . A_1 T X \quad \text{и} \quad B_1 T C_1 \ ^1);$$

и свойства асимметричности, транзитивности и связности даются первыми 3 постулатами, совершенно подобными приведеннымъ въ началѣ предыдущаго параграфа. Мы уже знаемъ, что этихъ свойствъ достаточно для дедукціи постулатовъ Вайляти, характеризующихъ отношеніе раздѣленія паръ; мы придемъ, так образ., къ общимъ свойствамъ послѣдняго отношенія, которыя одинаково имѣютъ приложеніе какъ къ слитному, такъ и къ раздѣльному ряду (лишь бы во 2-мъ случаѣ классъ G содержалъ не менѣе 5 членовъ). Если же мы поставимъ себѣ задачу построить и изучить слитные ряды, то мы должны, какъ и прежде, пополнить систему предпосылокъ утвержденіемъ, что

$$\text{IV.} \quad T \supset T^2;$$

наконецъ, придется еще принять (теор. 17_2 пред. ст.), что

$$\text{V.} \quad G`T \supset D`T;$$

---

[1]) Чтобы связать эти обозначенія съ предыдущими, укажемъ, что T можно приравнять $S_{A_1B_1C_1}$. Вышеупомянутое „постулированіе“ во многихъ случаяхъ замѣняется доказательствомъ существованія подобнаго отношенія.

послѣдній постулатъ отличается отъ соотвѣтствующаго постулата предыдущаго параграфа, ибо теперь мы разсматриваемъ рядъ, имѣющій начало $\{A_1\}$. Постулаты IV' и V' необходимы для доказательства слѣд. предложенія, характеризующаго закрытый слитный рядъ:

Теор. 45. $A, B \varepsilon G \;\; A =\!|\!= B : \supset : (\exists X, Y).\, AB \,|\, XY.$

Въ с. д.,

$$A =\!|\!= B \;.\; \supset : (\exists X).\, X \varepsilon (AB)$$

на основаніи теор. 33, доказательство которой не зависѣло отъ пост. V'. Далѣе имѣемъ:

$$ATB \vee BTA;$$

1) $ATB . \supset : (\exists Y).\, BTY$ (пост. V')

$ATB . BTY : \supset . B \varepsilon (AY)$ (опр. 3a)

$B \varepsilon (AY) \;.\; \supset . Y\text{-}\varepsilon (AB)$ (теор. 19);

2) $BTA \;.\; \supset : (\exists Y).\, ATY$

$BTA . ATY : \supset . A \varepsilon (BY)$

$A \varepsilon (BY) . \supset \;.\; Y\text{-}\varepsilon (AB);$

итакъ,

$$A =\!|\!= B . \supset : (\exists Y).\, Y\text{-}\varepsilon (AB);$$

тогда

$$A =\!|\!= B . \supset : (\exists X, Y) \;\; X \varepsilon (AB) \;\; Y\text{-}\varepsilon (AB)$$

$$A =\!|\!= B . \supset : (\exists X, Y).\, AB \,|\, XY \qquad \text{(теор. 37 [1]).}$$

Второй путь для изслѣдованія закрытаго ряда—путь, не прибѣгающій къ формальному превращенію даннаго ряда въ

---

[1]) При доказательствѣ теор. 37 мы основывались лишь на первыхъ трехъ постулатахъ.— Если отбросить пост. V, т. е., допустить существованіе конца у нашего ряда, то доказательство падаетъ; дѣйствительно, теорема не имѣетъ мѣста, если за A взять начало ряда, а за B—конецъ Подобное же имѣетъ мѣсто и при отбрасывании пост. IV'.

открытый, но за то требующій болѣе сложныхъ предпосылокъ—состоитъ въ непосредственномъ постулированіи среди элементовъ класса G отношенія раздѣленія паръ, охарактеризованнаго постулатами Вайляти. Если мы пожелаемъ имѣть дѣло со слитнымъ рядомъ, то придется постулировать еще предложеніе, только что доказанное подъ именемъ теор. 45, такъ какъ оно есть новое допущеніе, не вытекающее изъ уже сдѣланныхъ шести. Въ с. д, возьмемъ закрытый рядъ съ конечнымъ числомъ элементовъ (не менѣе 5); постулаты Вайляти будутъ выполнены, а предложеніе 45-е — нѣтъ, въ чемъ нетрудно убѣдиться, если взять за A и B два рядомъ стоящихъ элемента. Так. обр., теор. 45 даетъ содержаніе 7-му постулату разсматриваемой теоріи; и этихъ 7 постулатовъ будетъ достаточно, какъ мы постараемся выяснить, установивъ понятіе отрѣзка.

Изъ предыдущаго видно, что въ случаѣ закрытаго ряда для полнаго опредѣленія отрѣзка двухъ точекъ недостаточно; а съ помощью трехъ, какъ сейчасъ убѣдимся, задача рѣшается вполнѣ. Пусть намъ даны 2 различныя точки A и B класса G; тогда, на основаніи только что введеннаго 7-го постулата, существуютъ такія 2 точки M и N, что

$$(*) \quad AB \mid MN.$$

Теперь мы опредѣляемъ:

Опр. 7 $$(AB)_M = \hat{X} \{ AB \mid MX \} \; Df$$

$$(AB)_N = \hat{X} \{ AB \mid NX \} \; Df;$$

Опр. 8 $$[AB]_M . = : A . \vee . (AB)_M . \vee . B \; Df$$

$$[AB]_N . = . A . \vee . (AB)_N . \vee \; B \; Df$$ [1]);

---

[1]) Опредѣленіе 8 имѣетъ свое оправданіе въ томъ, что точки A и B не принадлежатъ къ классамъ, введеннымъ въ опр 7, такъ какъ 4 элемента въ раздѣленіи $AB \mid MX$ или $AB \mid NX$ должны быть различными. Чтобы не умножать числа теоремъ, укажемъ еще на очевидное обстоятельство, что

$$(AB)_M = (BA)_M \text{ и т д},$$

откуда слѣдуетъ, что и

$$[AB]_M = [BA]_M \text{ и т. д.}$$

классы $[AB]_M$ и $[AB]_N$ и суть тѣ два отрѣзка, которые точками A и B выдѣляются изъ класса G. Таково *проективное* опредѣленіе отрѣзка; для его выясненія докажемъ слѣд. предложенія:

Теор. 46. $X \neq A . X \neq B : \supset : X \varepsilon (AB)_M . \vee . X \varepsilon (AB)_N$,

т. е., всякая точка класса G попадаетъ въ одинъ изъ опредѣленныхъ выше подклассовъ. Пусть X будетъ отличнымъ также отъ M и N, ибо въ противномъ случаѣ теорема очевидна (опр 7 и (*)). Тогда для 4 точекъ A, B, M, X на основаніи 4-го пост. Вайляти имѣемъ одинъ изъ 3 случаевъ:

$$AB \mid MX . \vee . AM \mid BX . \vee . AX \mid BM;$$

1) $$AB \mid MX . \equiv X \varepsilon (AB)_M \qquad \text{(опр. 7)};$$

2) $AM \mid BX$ и кромѣ того всегда еще имѣемъ (*);

$$AM \mid BX . AB \mid MN : \supset AB \mid NX \qquad \text{(5-й пост.)}$$

$$AB \mid NX . \equiv X \varepsilon (AB)_N \qquad \text{(опр. 7)};$$

3) $$AX \mid BM$$

$$BM \mid AX . BA \mid MN : \supset . BA \mid NX \qquad \text{(5 пост.)}$$

$$BA \mid NX . \equiv X \varepsilon (AB)_N .$$

Итакъ, мы разсмотрѣли всевозможныя предположенія и убѣдились въ справедливости теоремы.

Слѣдствіе $X - \varepsilon (AB)_M . \supset . X \varepsilon (AB)_N$

при условіяхъ теор. 46.

Теор 47. $X \varepsilon (AB)_M . \supset . X - \varepsilon (AB)_N$,

т. е., X можетъ принадлежать только одному изъ названныхъ классовъ.

Въ с. д.,

$$X \varepsilon (AB)_M . X \varepsilon (AB)_N : \equiv : AB \mid MX . AB \mid NX$$

$$AB \mid MX . AB \mid NX : \supset . - \{AB \mid MN\} \qquad \text{(теор. 43)},$$

что противорѣчитъ (*).

Теор. 48. Классы $(AB)_M$ и $(AB)_N$ не суть нулевые.
Дѣйствительно, на основаніи (*)

$$N\varepsilon(AB)_M \quad \text{и} \quad M\varepsilon(AB)_N,$$

при чемъ такія M и N существуютъ (см. выше).

Теор. 49. $N, C\varepsilon(AB)_M : \supset . (AB)_C = (AB)_N .$

Пусть точка X такова, что

$$AB \mid CX:$$

тогда

$$AB \mid CM . AB \mid CX . \supset . — \{AB \mid MX\}$$

т.-е ,

$$C\varepsilon(AB)_M . X\varepsilon(AB)_C : \supset . X - \varepsilon(AB)_M$$

$$X - \varepsilon(AB)_M . \supset . X\varepsilon(AB)_N \qquad \text{(сл. теор. 46),}$$

такъ что при указанныхъ условіяхъ

$$X\varepsilon(AB)_C . \supset . X\varepsilon(AB)_N .$$

Обратно, пусть

$$AB \mid NX;$$

тогда

$$AB \mid NM \; AB \mid NX : \supset . — \{AB \mid MX\},$$

т -е ,

$$N\varepsilon(AB)_M . X\varepsilon(AB)_N : \supset . X - \varepsilon(AB)_M$$

$$X - \varepsilon(AB)_M . AB \mid MC : \supset X\varepsilon(AB)_C \quad \text{(сл. теор. 46),}$$

такъ что при указанныхъ условіяхъ

$$X\varepsilon(AB)_N . \supset . X\varepsilon(AB)_C ,$$

а это вмѣстѣ съ предыдущимъ и доказываетъ теорему.

Теор. 50. $C\varepsilon(AB)_M . \supset :. (AB)_M . = . (AC)_B . \vee . C . \vee . (BC)_A .$
Въ с. д.,

$$(**)\; C\varepsilon(AB)_M . \equiv . AB \mid MC,$$

и пусть

$$X\varepsilon(AB)_M , \text{ т е., } AB \mid MX;$$

тогда или $X = C$, или $X \neq C$. Остановимся на послѣднемъ предположеніи; для 4 точекъ A, B, C, X имѣемъ 3 случая:

1) $AB \mid CX$ .. невозможно, ибо

$$AB \mid MC . AB \mid MX : \supset . - \{AB \mid CX\} \qquad \text{[теор. 43]:}$$

2) $$AC \mid BX . \equiv . X \varepsilon (AC)_B ,$$

3) $$AX \mid BC . \equiv . X \varepsilon (BC)_A ;$$

Итакъ,

$$C \varepsilon (AB)_M . \supset . X \varepsilon (AB)_M . \supset : X = C \vee . X \varepsilon (AC)_B . \vee . X \varepsilon (BC)_A .$$

Обратно, пусть

$$X = C . \vee . X \varepsilon (AC)_B . \vee . X \varepsilon (BC)_A ,$$

въ первомъ случаѣ имѣемъ

$$X = C . \supset . X \varepsilon (AB)_M ,$$

а въ двухъ остальныхъ:

$$X \varepsilon (AC)_B . \vee . X \varepsilon (BC)_A : \equiv : AC \mid BX . \vee . AX \mid BC : \supset . - \{AB \mid CX\}$$

[пост. 3], т. е., мы приходимъ къ $X - \varepsilon (AB)_C$; но

$$X - \varepsilon (AB)_C . \supset . X \varepsilon (AB)_M$$

въ силу (**) и слѣдствія теор. 46. Послѣднія разсужденія даютъ намъ:

$$C \varepsilon (AB)_M . \supset : . X = C \vee X \varepsilon (AC)_B . \vee . X \varepsilon (BC)_A \supset . X \varepsilon (AB)_M ,$$

откуда, въ связи съ предыдущимъ, вытекаетъ эквивалентность:

$$C \varepsilon (AB)_M . \supset : . X \varepsilon (AB)_M . \equiv X \varepsilon (AC)_B . \vee . X = C . \vee . X \varepsilon (BC)_A ,$$

которая и доказываетъ теорему.

Слѣдствіе. $C \varepsilon (AB)_M . \supset : . (AB)_M . = : (AC)_M . \vee . C . \vee . (BC)_M .$

Пусть

$$X \varepsilon (AC)_B , \text{ т. е., } AC \mid BX ;$$

Кромѣ того имѣемъ

$$AB \mid CM.$$

далѣе

$$AC \mid BX . AB \mid CM : \supset . AC \mid XM \qquad \text{(5-ый пост.)}$$

т. е.,

$$M \varepsilon (AC)_X ;$$

съ другой стороны

$$AC \mid BX . \equiv . B \varepsilon (AC)_X ;$$

теперь можемъ написать:

$$B, M \varepsilon (AC)_X . \supset . (AC)_B = (AC)_M \qquad \text{(теор. 49).}$$

Точно также доказывается, что и

$$(BC)_1 = (BC)_M ,$$

откуда и слѣдуетъ наше утвержденіе.

Мы ограничимся этими существенными чертами чисто проективнаго опредѣленія отрѣзка.

Возвращаясь снова къ точкѣ зрѣнія 1-го пути для расположенія элементовъ закрытаго ряда, отмѣтимъ, что при помощи охарактеризованнаго выше отношенія T можно прійти къ опредѣленію отрѣзка (т. е., классовъ (AB) и $[AB]$) совершенно аналогично тому, что мы имѣли въ случаѣ открытаго ряда и отношенія P; вообще всѣ разсужденія предыдущаго параграфа формально можно будетъ перенести сюда съ той только разницей, что теперь рядъ имѣетъ начало (точку A_1), а раньше этой особенности не было. Однако постулатъ V имѣетъ иную формулировку, чѣмъ раньше, а потому слѣдуетъ посмотрѣть, не потеряютъ ли теперь силы нѣкоторыя изъ нашихъ теоремъ. Впервые постулатъ V оказался необходимымъ при доказательствѣ теор. 34; и дѣйствительно, если мы теперь подъ точкой A будемъ понимать начало нашего ряда, то слѣдствіе разсматриваемой теоремы придется отбросить. Къ этому и сведутся всѣ наши потери, такъ какъ пост. V въ первоначальной формулировкѣ появляется здѣсь не только въ первый, но и въ послѣдній разъ. Въ частности всѣ постулаты Вайляти и нашъ 7-ой постулатъ будутъ имѣть мѣсто при такой концепціи (именно, ихъ можно тогда до-

казать), вслѣдствіе чего мы въ состояніи и въ этомъ случаѣ ввести классы $(AB)_M$, $[AB]_M$ и т. д.; мы будемъ даже въ болѣе выгодномъ положеніи, чѣмъ въ только что проведенныхъ разсужденіяхъ, такъ какъ къ нашимъ услугамъ будетъ значительное число предложеній, въ особенности теор. 37, связывающая понятія „между“ и „раздѣленіе паръ“. Благодаря тому, что теперь нашъ рядъ имѣетъ начало, указанную связь въ общемъ случаѣ можно выразить весьма простымъ образомъ, а именно:

$$AB\ \ A_1X \equiv .X\varepsilon(AB):$$

въ с д., такъ какъ A_1 есть начало, то всегда имѣемъ:

$$A_1TA\ \ A_1TB,$$

откуда слѣдуетъ, что для любыхъ точекъ A и B (отличныхъ, конечно, отъ A_1) придется утверждать

$$A_1 - \varepsilon(AB);$$

остается вспомнить теор. 37, чтобы убѣдиться въ справедливости сказаннаго.

Вышеприведенныя соображенія не только убѣждаютъ насъ въ томъ, что первый путь вполнѣ законенъ, но и довольно рѣшительно свидѣтельствуютъ въ пользу его преимуществъ.

Философія математики въ работахъ А. Пуанкарэ [1]).

Мм. Гг.! Въ эпохи, болѣе отдаленныя отъ насъ, не рѣдкостью было встрѣтить ученаго, который, перефразируя извѣстныя слова, могъ бы сказать: „Наука—это я!“ Послѣднимъ, имѣвшимъ такое право въ полной мѣрѣ, былъ Лейбницъ, и мы еще слышимъ отзвуки этихъ гордыхъ словъ у М. В. Ломоносова. Все возрастающая спеціализація отдѣльныхъ наукъ, все наростающій объемъ нашего знанія дѣлаютъ мало вѣроятнымъ появленіе въ настоящее время ученаго такого всеобъемлющаго типа; и если мы видимъ, что Пуанкарэ охватилъ всего лишь область физико-математическихъ наукъ, то мы готовы преклониться передъ его геніемъ. Нуженъ цѣлый рядъ докладовъ для выясненія того, чѣмъ онъ былъ для той или другой отдѣльной науки; но, конечно, кто такъ много зналъ и такъ много творилъ, не могъ удержаться отъ подведенія нѣкоторыхъ общихъ итоговъ своей дѣятельности. Исключительная универсальность Пуанкарэ неизбѣжно влекла его на путь еще болѣе широкихъ изслѣдованій—на путь философскаго синтеза; и, дѣйствительно, какъ въ отдѣльныхъ мемуарахъ, такъ и въ трехъ извѣстныхъ книгахъ, посвященныхъ болѣе общимъ вопросамъ, Пуанкарэ изложилъ свою философію знанія. Я не ставлю себѣ широкой задачи разсмотрѣть всѣ относящіяся сюда воззрѣнія знаменитаго французскаго математика; моя цѣль скромнѣе. Какъ ни была многообразна его дѣятельность, однако онъ былъ математикомъ par excellence, и таковымъ остался въ своихъ философскихъ работахъ: на

---

[1]) Докладъ, читанный въ засѣданіяхъ Научно-Техническаго кружка при Политехническомъ Институтѣ и отдѣла математики при Педагогическомъ Музеѣ военно-учебныхъ заведеній.

первомъ мѣстѣ у него стоитъ философія математики и въ значительной степени опредѣляетъ все остальное. Вотъ именно эту сторону вопроса я и буду имѣть честь разобрать передъ вами [1]).

Когда говорятъ о философскомъ значеніи математики, то въ первую голову имѣютъ въ виду геометрію; такъ поступали философы, начиная съ Платона, запрещавшаго не-геометрамъ входъ въ академію, и кончая Кантомъ, сдѣлавшимъ геометрію исходной точкой своихъ построеній. Причина такого предпочтенія заключается, какъ кажется, въ томъ, что геометрія сложилась въ научную систему еще въ то время, когда о современномъ анализѣ не было и помину. Въ XIX-мъ вѣкѣ въ этой наукѣ произошли событія, которыя снова и надолго приковали къ ней вниманіе философовъ; мы имѣемъ въ виду открытіе неевклидовыхъ системъ. Нашъ великій соотечественникъ Н. И. Лобачевскій и венгерецъ I. Больяи еще въ первой половинѣ истекшаго столѣтія опубликовали свои работы; но признаніе послѣднія получили значительно позже, именно въ концѣ 60-хъ годовъ Когда Пуанкарэ сталъ молодымъ, подававшимъ большія надежды ученымъ, неевклидовы геометріи составляли уже особый отдѣлъ математики, и въ силу философскихъ склонностей своего ума онъ не могъ пройти мимо дисциплинъ, обѣщавшихъ богатую жатву въ этомъ отношеніи.

Теоремы геометріи Лобачевскаго, казалось, противорѣчатъ нашему непосредственному представленію пространства; вопросъ, конечно, въ томъ, можно ли говорить здѣсь о дѣйствительномъ противорѣчіи, или послѣднее просто

---

[1]) Кромѣ книгъ: „Наука и гипотеза“, „Цѣнность науки“, „Наука и методъ“, мы имѣемъ здѣсь въ виду слѣд. мемуары Пуанкарэ: „Théorie des groupes fuchsiens“ (Acta Mathematica I), „Mémoire sur les groupes kleinéens“ (Acta Math. III), „Sur les hypothèses fondamentales de la Géométrie“ (Bulletin de la Société Mathématique de France XV), „Les géométries non Euclidiennes“ (Revue générale des Sciences II), „Hilbert Les fondements de la Géométrie“ (Bulletin des Sciences Mathématiques XXVI). Цѣлый рядъ статей по различнымъ вопросамъ философіи математики былъ помѣщенъ въ „Revue de Métaphysique et de Morale“; главнѣйшія изъ нихъ можно найти въ посмертномъ сборникѣ „Dernières pensées“ (Paris 1913).

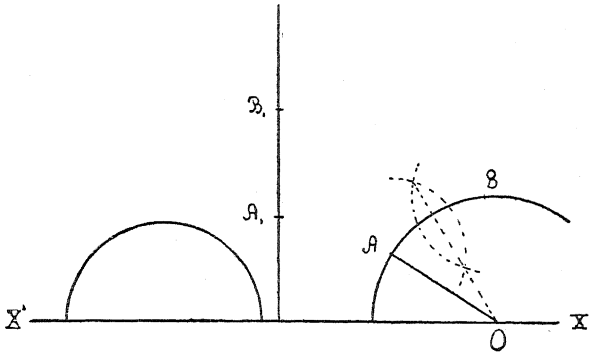
объясняется глубоко укоренившимися привычками. Какъ бы то ни было, неевклидова геометрія прежде всего должна быть безукоризненной съ чисто-логической точки зрѣнія; только при этомъ условіи ее можно причислить къ законнымъ областямъ научнаго знанія; а потому нужно было показать, что, отрицая евклидовъ постулатъ о параллеляхъ, мы тѣмъ самымъ не противорѣчимъ другимъ предпосылкамъ его системы. Правда, Лобачевскій развилъ свою геометрію въ объемѣ школьнаго и даже университетскаго курса и нигдѣ не получилъ противорѣчій; но это не давало гарантій, что какой-либо болѣе проницательный изслѣдователь не вскроетъ таковыхъ и тѣмъ не подорветъ въ корнѣ возможности подобнаго отклоненія отъ великаго геометра древности. Чтобы устранить указанныя сомнѣнія разъ навсегда, нужно было найти систему дѣйствительно существующихъ математическихъ объектовъ, подчиняющихся предложеніямъ неевклидовой геометріи: вѣдь, если вообще отсутствіе противорѣчія есть необходимое условіе существованія, то въ математикѣ это—синонимы. Итальянскій ученый Бельтрами рѣшилъ задачу для геометріи двухъ измѣреній, доказавъ, что на поверхности съ постоянной отрицательной кривизной осуществляется планиметрія Лобачевскаго, если только мы назовемъ „прямыми“ геодезическія линіи этой поверхности. Болѣе простое и болѣе наглядное доказательство принадлежитъ Пуанкарэ; оно настолько просто, что, какъ мы слышали на I-мъ съѣздѣ преподавателей математики, его съ успѣхомъ можно излагать въ старшемъ классѣ средней школы [1]).

Съ цѣлью получить свое истолкованіе планиметріи Лобачевскаго Пуанкарэ беретъ полуплоскость, лежащую выше нѣкоторой прямой X′X (см. черт. 1), и разсматриваетъ совокупность всевозможныхъ полуокружностей съ центрами на этой прямой (какъ предѣльный случай, сюда входятъ прямыя, перпендикулярныя къ X′X). Мы увидимъ, что между указанными образами евклидовой геометріи существуютъ тѣ же отношенія, что и между прямыми геометріи Лобачев-

---

[1]) Докладъ П. А. Долгушина (см. „Труды съѣзда“). Собственно тамъ дѣло идетъ о нѣсколько видоизмѣненномъ методѣ.

скаго; на этомъ основаніи условимся *называть* ихъ „прямыми“ или „псевдо-прямыми“.



Черт. 1.

Основное свойство прямой—опредѣляться 2 точками—здѣсь выполняется, ибо 2 точки вполнѣ опредѣляютъ полуокружность разсматриваемаго типа (см. построенія на черт. 1). Далѣе, такъ-наз. аксіомы расположенія обычной геометріи въ свою очередь сохраняютъ силу, ибо полуокружность, при сдѣланныхъ условіяхъ, является линіей незамкнутой и неограниченной, какъ и прямая евклидовой геометріи (необходимо помнить, что мы разсматриваемъ только тѣ точки, которыя лежатъ выше прямой X/X; о точкахъ же самой этой прямой скажемъ ниже). Наконецъ очевидно, что наша псевдо-прямая обладаетъ свойствомъ непрерывности въ той же мѣрѣ, какъ и обыкновенная прямая. Перечисленныя аксіомы лежатъ въ основѣ геометріи положенія; но для построенія геометріи мѣры необходимо еще развить ученіе о геометрическомъ равенствѣ и параллелизмѣ. Первая задача рѣшается слѣдующимъ образомъ. Выбравъ прямоугольную систему координатъ (прямая X/X будетъ осью x-овъ), мы опредѣлимъ каждую точку нашей полуплоскости съ помощью пары чиселъ (x, y) и, по извѣстному способу, приведемъ въ соотвѣтствіе съ нею комплексное число $z=x+iy$. Пуанкарэ разсматриваетъ далѣе точечное преобразованіе, которое задается формулой:

(1) $$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

гдѣ α, β, γ, δ—вещественныя числа, связанныя соотношеніемъ:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1;$$

наконецъ, онъ называетъ конгруентными такіе геометрическіе образы, которые переходятъ другъ въ друга при помощи преобразованія (1). Такъ какъ подобныя преобразованія образуютъ группу[1]), то 2 фигуры, конгруентныя 3-ей, конгруентны между собой. Преобразованіе (1) есть не что иное, какъ „круговое сопряженіе“, т.-е. оно, вообще говоря, круги переводитъ опять-таки въ круги; кромѣ того, при сдѣланныхъ условіяхъ относительно коэффиціентовъ, точки нашей полуплоскости переходятъ только въ точки этой же полуплоскости, а прямая X′X—въ самоё себя. Такимъ образомъ, посредствомъ преобразованій (1) опредѣленныя выше псевдо-прямыя переходятъ другъ въ друга, т.-е., всѣ псевдопрямыя конгруентны между собой Переводя геометрическіе образы въ другіе, имъ конгруентные по опредѣленію, группа преобразованій (1) играетъ въ разсматриваемой геометріи ту же самую роль, что и группа движеній въ системѣ Евклида (терминъ „движеніе“ употребляется здѣсь, конечно, въ смыслѣ нѣкотораго точечнаго преобразованія, свободнаго отъ всякихъ механическихъ примѣсей); на этомъ основаніи совокупность подстановокъ (1) мы будемъ называть группой движеній въ неевклидовой плоскости Идемъ далѣе. Преобразованіе типа (1), какъ извѣстно, сохраняетъ углы неизмѣнными; такъ что, если подъ угломъ между 2 пересѣкающимися псевдопрямыми понимать уголъ между касательными къ полуокружностямъ въ ихъ общей точкѣ, то у 2 конгруентныхъ фигуръ соотвѣтственные углы будутъ равны. Нѣсколько сложнѣе обстоитъ дѣло съ длинами отрѣзковъ; конечно, кон-

[1]) Система какихъ-либо преобразованій наз. группой при условіи, что преобразованіе, обратное любому изъ данныхъ, принадлежитъ нашей же системѣ и что послѣдовательность 2 любыхъ преобразованій сводится къ одному преобразованію, также принадлежащему данной системѣ.

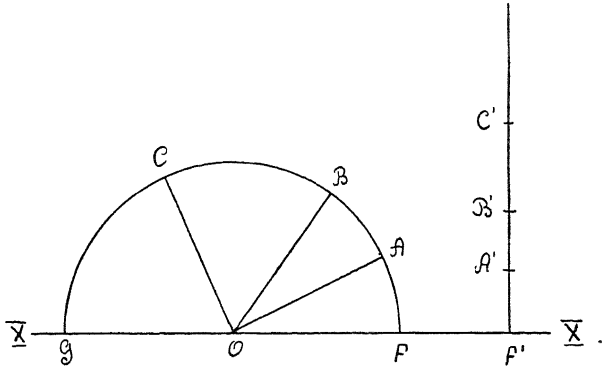
груентнымъ отрѣзкамъ мы припишемъ одну и ту же „длину“, откуда слѣдуетъ, что подъ длиной какого-либо отрѣзка мы должны понимать такую однозначно съ нимъ связанную величину, которая также являлась бы инваріантомъ нашихъ преобразованій (1). Извѣстно, что послѣднему требованію удовлетворяетъ любая функція отъ ангармоническаго отношенія 4 точекъ, а подъ ангармоническимъ отношеніемъ точекъ z_1, z_2, z_3, z_4 понимается слѣд. выраженіе:

$$(z_1.\ z_2,\ z_3,\ z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}.$$

Помимо того, что длина отрѣзка должна быть инваріантомъ по отношенію къ группѣ движеній, ей необходимо присущи еще 2 свойства: 1) длина отрѣзка, концы котораго совпадаютъ, равняется нулю и 2) длины обладаютъ свойствомъ слагаемости, т.-е., если A, B, C суть точки нѣкоторой прямой и B лежитъ между A и C, то должно быть:

$$(AB) + (BC) = (AC)$$

{символомъ (AB) мы обозначаемъ длину отрѣзка AB}. Всѣ эти соображенія приводятъ къ тому, что въ качествѣ длины отрѣзка AB (см. черт. 2) приходится взять логариѳмъ ан-



Черт. 2.

гармоническаго отношенія 4 точекъ, а именно: двухъ концовъ даннаго отрѣзка и точекъ F и G, лежащихъ на пере-

сѣченіи данной полуокружности съ прямой $X'X$. Если углы AOF и BOF обозначить черезъ φ_1 и φ_2, то вычисленіе [1]) показываетъ, что тогда

$$(2)\ . \qquad (AB) = log \frac{tg\ \frac{1}{2}\varphi_2}{tg\ \frac{1}{2}\varphi_1}$$

{замѣтимъ, что для предѣльнаго случая прямой $F'C'$ отсюда получаемъ

$$(A'B') = log \frac{t_2}{t_1},$$

гдѣ t_1 и t_2 суть длины, въ обыкновенномъ смыслѣ этого слова, отрѣзковъ $F'A'$ и $F'B'$}.

При такомъ опредѣленіи, отрѣзки, переходящіе одинъ въ другой при помощи неевклидовыхъ движеній, дѣйствительно имѣютъ одну и ту же „длину“. Далѣе, если A совпадаетъ съ B, то $\varphi_2 = \varphi_1$, и мы находимъ:

$$(AA) = log\, 1 = 0;$$

---

[1]) Если для упрощенія положить $OF = 1$, то 4 точки F A, B, G представятся слѣд комплексными числами.

$$1,\ e^{2i\varphi_1},\ e^{2i\varphi_2}, -1;$$

тогда

$$(B, A, F, G) = \frac{e^{2i\varphi_2} - 1}{e^{2i\varphi_2} + 1} \quad \frac{e^{2i\varphi_1} - 1}{e^{2i\varphi_1} + 1},$$

но

$$\frac{e^{2i\varphi_2} - 1}{e^{2i\varphi_2} + 1} = i\, tg \frac{\varphi_2}{2},$$

какъ въ этомъ легко убѣдиться; точно также

$$\frac{e^{2i\varphi_1} - 1}{e^{2i\varphi_1} + 1} = i\, tg \frac{\varphi_1}{2},$$

откуда

$$(B, A, F, G) = \frac{tg \frac{1}{2}\varphi_2}{tg \frac{1}{2}\varphi_1}.$$

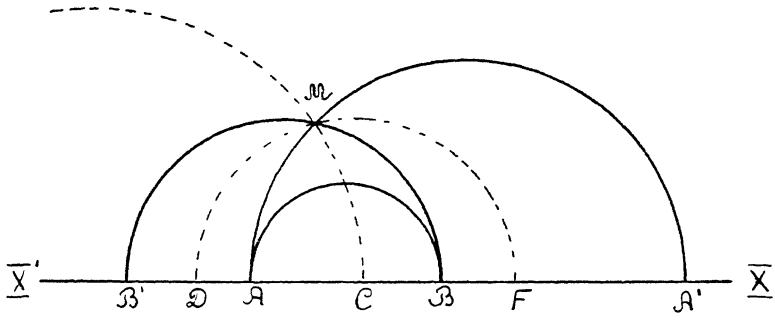
наконецъ, положивъ $\angle COF=\varphi_3$, провѣряемъ свойство слагаемости:

$$(AB)+(BC)=log\frac{tg\frac{1}{2}\varphi_2}{tg\frac{1}{2}\varphi_1}+lg\frac{tg\frac{1}{2}\varphi_3}{tg\frac{1}{2}\varphi_2}=lg\frac{tg\frac{1}{2}\varphi_3}{tg\frac{1}{2}\varphi_1}=(AC).$$

Мы убѣждаемся, что „длина“ отрѣзка нашей псевдо-прямой обладаетъ тѣми же свойствами, что и соотвѣтственное понятіе евклидовой геометріи; вспоминая сказанное раньше объ углахъ, нетрудно прійти къ выводу, что въ разсматриваемой псевдо-планиметріи ученіе о геометрическомъ равенствѣ складывается совершенно такъ же, какъ и въ обыкновенной.

Но если теперь мы перейдемъ къ теоріи параллелей, то встрѣтимся съ весьма существенными различіями. Посмотримъ прежде всего, что будетъ дѣлаться съ „длиной“ отрѣзка AB, если точка B будетъ неограниченно сближаться съ точкой G или A—съ F, другими словами, если φ_2 будетъ стремиться къ предѣлу, равному π, или φ_1—къ предѣлу, равному 0; формула (2) сейчасъ же даетъ, что (AB) будетъ безпредѣльно возрастать. Указанныя соображенія приводятъ насъ къ выводу, что точки прямой $X'X$ являются безконечно-удаленными точками нашей псевдо-плоскости; а это въ свою очередь заставляетъ назвать двѣ псевдо-прямыя параллельными, если соотвѣтственныя полуокружности проходятъ черезъ одну и ту же точку, расположенную на прямой $X'X$; непересѣкающимися мы назовемъ ихъ только тогда, когда онѣ совсѣмъ не имѣютъ общихъ точекъ. Так. обр., термины „параллельныя“ и „непересѣкающіяся“, которые являются синонимами, поскольку дѣло идетъ о прямыхъ евклидовой плоскости, въ нашей псевдо-планиметріи уже перестаютъ быть таковыми. Чтобы еще болѣе подчеркнуть это различіе въ ученіи о параллелизмѣ, поставимъ вопросъ о числѣ псевдо-прямыхъ, проходящихъ черезъ данную точку M (см. черт. 3) и параллельныхъ данной псевдо-прямой AB; согласно опредѣленію, такихъ псевдо-прямыхъ будетъ двѣ: AA' и BB'; всѣ другія псевдо-прямыя, проходящія черезъ точку M, дѣлятся на 2 класса: 1) непересѣкающія AB, которыя располагаются въ

частяхъ $B'MA$ и BMA' нашей полуплоскости, и 2) пересѣкающія AB, которыя лежатъ въ остальныхъ частяхъ полуплоскости; двѣ же параллельныя AA' и BB' являются пограничными между псевдо-прямыми обоихъ классовъ. Мы убѣждаемся,



Черт. 3.

что въ только что построенной псевдо-планиметріи, поскольку дѣло идетъ о параллеляхъ, имѣетъ мѣсто постулатъ Лобачевскаго, а не Евклида

Так. обр., Пуанкарэ показалъ, что среди образовъ евклидовой геометріи можно найти такіе—именно, точки и полуокружности какой-либо полуплоскости,—что между ними существуютъ тѣ же самыя соотношенія, которыя имѣютъ мѣсто между точками и прямыми плоскости Лобачевскаго; планиметрія нашего соотечественника получила реальное и къ тому же весьма простое истолкованіе. Распространеніе подобныхъ соображеній на пространство 3 измѣреній не представляетъ особыхъ затрудненій; достаточно остановиться на тѣхъ его точкахъ, которыя лежатъ по одну сторону нѣкоторой плоскости, и въ качествѣ псевдо-плоскостей взять полусферы, центры которыхъ лежатъ на выбранной нами плоскости, а въ качествѣ псевдо-прямыхъ—полуокружности съ центрами въ той же плоскости и ортогональныя къ ней, и т д.

Теперь логическая состоятельность геометріи Лобачевскаго стоитъ внѣ всякихъ сомнѣній Допустимъ, въ с. д , что мы пришли къ противорѣчію въ неевклидовой геометріи; пере-

ведемъ съ помощью нашего „словаря“ соотвѣтствующія предложенія на языкъ евклидовой геометріи, именно, той ея части, которая занимается изученіемъ шаровъ и круговъ вышеуказанной совокупности; мы имѣемъ на это право, такъ какъ обѣ теоріи исходятъ изъ однѣхъ и тѣхъ же предпосылокъ Между тѣмъ, сдѣлавъ этотъ переводъ, мы получили бы противорѣчіе и въ геометріи Евклида, которую всѣ считаютъ безусловно застрахованной отъ чего-либо подобнаго. Можно, конечно, спросить, на чемъ основано такое убѣжденіе, но это уже будетъ совсѣмъ другой вопросъ. Во всякомъ случаѣ неевклидова геометрія Лобачевскаго попадаетъ въ такое почтенное общество, что ея право на существованіе можно считать доказаннымъ.

Однако, неевклидова геометрія, въ обычномъ смыслѣ этого слова, не исчерпывается системой Лобачевскаго; существуетъ еще система Римана, въ которой отличительной чертой служитъ допущеніе, что 2 прямыя одной и той же плоскости всегда пересѣкаются. Извѣстно, что планиметрія Римана при нѣкоторыхъ условіяхъ осуществляется на поверхности шара; Пуанкарэ пришелъ къ мысли поискать, mutatis mutandis, подобнаго же истолкованія и для геометріи Лобачевскаго. Разсматривая соотношенія между извѣстными образами, расположенными на поверхностяхъ 2-го порядка, французскій ученый думалъ систематически перечислить всевозможныя неевклидовы геометріи двухъ измѣреній, понимая этотъ терминъ въ болѣе широкомъ смыслѣ.

Возьмемъ какую-нибудь поверхность 2-го порядка и будемъ называть „прямыми“ ея плоскія діаметральныя сѣченія, а „окружностями“—остальныя плоскія сѣченія. Далѣе необходимо условиться въ томъ, что понимать подъ угломъ между 2 „прямыми“ и подъ длиной отрѣзка нашей „прямой“. Проведемъ черезъ какую-нибудь точку данной поверхности 2 „прямыя“, т.-е. 2 діаметральныхъ сѣченія; проведемъ къ нимъ касательныя въ общей точкѣ, а также 2 прямолинейныя образующія поверхности, проходящія черезъ данную точку; составимъ ангармоническое отношеніе этихъ 4 прямыхъ, и условимся подъ угломъ между нашими псевдо-прямыми понимать логариѳмъ этого ангармоническаго отношенія, если

только прямолинейныя образующія вещественны; въ противномъ же случаѣ возьмемъ логариѳмъ, дѣленный на i. Что касается длины отрѣзка, то она опредѣляется подобнымъ же образомъ съ помощью логариѳма ангармоническаго отношенія 4 точекъ: обоихъ концовъ отрѣзка и 2 безконечно-удаленныхъ точекъ соотвѣтственнаго діаметральнаго сѣченія. Условившись въ такой терминологіи, мы опять получаемъ какъ-бы словарь, посредствомъ котораго извѣстныя свойства поверхностей 2-го порядка переводятся на языкъ нѣкоторой, вообще говоря неевклидовой, планиметріи; получаемыя так. обр. системы Пуанкарэ называетъ „квадратичными геометріями“. Что же такое представляютъ изъ себя эти послѣднія? Если положить въ основу вышеуказанныхъ построеній эллипсоидъ, то получается геометрія Римана; двуполый гиперболоидъ даетъ геометрію Лобачевскаго; эллиптическій параболоидъ, какъ предѣльный случай обоихъ предыдущихъ, поведетъ къ геометріи Евклида. Однако въ нашемъ распоряженіи еще остается однополый гиперболоидъ съ его различными „вырожденіями“, къ числу которыхъ здѣсь относится и гиперболическій параболоидъ. Эта 4-ая поверхность ведетъ къ весьма своеобразной геометріи; вотъ нѣкоторыя изъ ея теоремъ: 1) разстояніе между 2 точками, расположенными на одной и той же прямолинейной образующей, равно нулю; 2) не всякія 2 прямыя можно привести къ совпаденію при помощи дѣйствительнаго движенія; 3) прямую нельзя совмѣстить самое съ собою никакимъ дѣйствительнымъ вращеніемъ. Достаточно хотя бы скрытымъ образомъ отрицать одно изъ этихъ предложеній, чтобы устранить геометрію однополаго гиперболоида; а такъ какъ они „слишкомъ противорѣчатъ привычкамъ нашего ума“, то и неудивительно, что 4-ая геометрія обычно оставалась въ сторонѣ.

Предыдущія соображенія естественно ведутъ къ вопросу, рѣшеніе котораго уже вполнѣ опредѣляетъ позицію Пуанкарэ въ области принциповъ геометріи. Совершенно очевидно, что̀ нужно постулировать, чтобы изъ числа квадратичныхъ геометрій выдѣлить систему Евклида; рѣчь теперь должна итти о предпосылкахъ, общихъ для всѣхъ квадратичныхъ геометрій; въ случаѣ удачнаго рѣшенія этой задачи мы имѣли бы

полный списокъ аксіомъ геометріи. Приступая къ намѣченному изслѣдованію, нашъ авторъ всецѣло становится на точку зрѣнія теоріи группъ, которая въ то время (1887 г.) была уже разработана С. Ли; норвежскій математикъ съ большимъ успѣхомъ впослѣдствіи примѣнилъ свою теорію къ изслѣдованію началъ геометріи; то же самое сдѣлалъ Пуанкарэ и притомъ, по мнѣнію проф. Кагана, совершенно самостоятельно. Изысканія, основанныя на теоріи группъ, считаютъ точки пространства заданными совокупностью 2 или 3 чиселъ; а такъ какъ при изслѣдованіи *началъ* геометріи никакихъ геометрическихъ свѣдѣній предполагать нельзя, то названные авторы должны разсматривать пространство, какъ извѣстную числовую совокупность; это—ихъ исходная предпосылка. Ограничиваясь по прежнему геометріей 2 измѣреній, Пуанкарэ кладетъ въ основу изслѣдованія слѣд. постулаты: [1]) плоскость имѣетъ 2 измѣренія и [2]) положеніе плоской фигуры въ ея плоскости опредѣляется съ помощью 3 условій. Послѣднее утвержденіе надо понимать въ томъ смыслѣ, что нашъ авторъ разсматриваетъ точечныя преобразованія плоскости, которыя онъ называетъ „движеніями“; если теперь точка (x, y) нѣкоторымъ движеніемъ переводится въ точку (x_1, y_1), то x_1 и y_1 суть функціи отъ x и y, содержащія 3 параметра α, β, γ. Не высказывая этого въ видѣ особой предпосылки, Пуанкарэ все строитъ на томъ, что „движенія“ образуютъ группу, и так. обр. рѣшаетъ свою задачу съ помощью теорій С. Ли. Весьма скоро французскій геометръ приходитъ къ необходимости постулировать еще третье предложеніе, чтобы исключить одну особую систему, не принадлежащую къ числу квадратичныхъ; предложеніе это гласитъ: [3]) если плоская фигура не оставляетъ своей плоскости и если 2 ея точки остаются неподвижными, то она вся остается неподвижной. По мнѣнію автора, трехъ сдѣланныхъ допущеній уже достаточно, чтобы прійти къ квадратичнымъ геометріямъ; имѣются указанія (у проф. Кагана), что Пуанкарэ, не отдѣляя дѣйствительныхъ преобразованій отъ мнимыхъ, просмотрѣлъ въ своихъ изслѣдованіяхъ одну группу, указанную Гельмгольцемъ; для ея исключенія понадобится добавочный постулатъ.

Появившееся въ разсматриваемомъ мемуарѣ понятіе „группы движеній“ характеризуетъ методъ Пуанкарэ во всѣхъ его работахъ, такъ или иначе связанныхъ съ обоснованіемъ геометріи. Мы встрѣчаемъ у него весьма пространныя разсужденія о психологической сторонѣ вопроса, о происхожденіи воспріятія пространства и начальныхъ геометрическихъ свѣдѣній. Намъ указываютъ, что измѣненія, происходящія въ ощущеніяхъ, объясняются двоякимъ способомъ: или измѣненіемъ состоянія тѣлъ, или измѣненіемъ ихъ положенія, къ послѣднему объясненію мы приходимъ тогда, когда можемъ компенсировать происшедшія измѣненія съ помощью перемѣщеній собственнаго тѣла, о которыхъ даетъ намъ знать мускульное чувство. Подмѣчая законы этихъ перемѣщеній, мы строимъ начала геометріи; если воспользоваться уже развитой математической терминологіей, то эти законы можно выразить сжатой фразой: „перемѣщенія образуютъ шестичленную группу“; и вся геометрія, въ ея психологическомъ происхожденіи, есть не что иное, какъ изученіе группы движеній твердыхъ тѣлъ. Переходя уже къ критико-философскому изслѣдованію принциповъ геометріи, Пуанкарэ не покидаетъ своей основной точки зрѣнія. Такъ, за цѣлымъ рядомъ геометрій Римана, связанныхъ съ тѣмъ или другимъ опредѣленіемъ дифференціала дуги, онъ отказывается признать характеръ истинныхъ геометрій на томъ основаніи, что „большинство этихъ опредѣленій несовмѣстимо съ движеніемъ неизмѣняемой фигуры“. Но, конечно, въ подобныхъ отвлеченныхъ изысканіяхъ „движеніе“ теряетъ тотъ эмпирическій характеръ, который обычно присущъ этому понятію. Пуанкарэ, какъ и всѣ современные математики, отдаетъ себѣ полный отчетъ въ формальномъ характерѣ нашей науки; она изучаетъ не предметы, а лишь отношенія между ними, и природа первыхъ безразлична, пока не мѣняются законы послѣднихъ: „математика есть искусство давать одно и то же названіе различнымъ вещамъ“. Геометръ часто прибѣгаетъ къ наглядным пространственнымъ представленіямъ; но онъ пользуется ими только для иллюстраціи: „онъ употребляетъ пространство такъ же, какъ употребляетъ мѣлъ“. Въ умѣ изслѣдователя основъ геометріи и понятіе движенія теряетъ

свой чисто механическій характеръ: оно претворяется въ понятіе точечнаго преобразованія, въ „совершенное сопряженіе“ точекъ пространства, происходящее по опредѣленнымъ законамъ; съ дѣйствительнымъ движеніемъ остается общимъ лишь то, что эти сопряженія образуютъ группу съ извѣстнымъ числомъ инваріантовъ.

Однако нашъ умъ въ состояніи создать группы, обладающія весьма различными свойствами—Ли достаточно выяснилъ этотъ вопросъ,—такъ что существуетъ множество различныхъ геометрій, равно возможныхъ и равно состоятельныхъ съ чисто логической точки зрѣнія. Чѣмъ же руководствуемся мы, когда выбираемъ одну изъ нихъ и кладемъ ее въ основу изученія природы? другими словами, что́ же такое представляютъ изъ себя аксіомы реальной геометрической системы? Приступая къ отвѣту на этотъ вопросъ, Пуанкарэ дѣлитъ изслѣдованіе, какъ истый кантіанецъ: онъ спрашиваетъ, являются-ли аксіомы опытными данными, или аналитическими сужденіями, или, наконецъ, апріорными синтетическими принципами. Первая возможность сейчасъ же устраняется, ибо тогда геометрія не была бы точной наукой; болѣе того, „она немедленно была бы уличена въ ошибкѣ, такъ какъ мы знаемъ, что не существуетъ твердаго тѣла, абсолютно неизмѣннаго“. Устраняются и два послѣднихъ допущенія; если бы одно изъ нихъ было истиннымъ, то мы не могли бы уйти изъ-подъ власти принциповъ геометріи и создать неевклидовы системы; имѣть въ числѣ своихъ предпосылокъ апріорныя синтетическія сужденія—привиллегія анализа, а не геометріи. Едвали послѣдователи критической философіи согласятся съ тѣмъ, чтобы синтетическія, хотя и апріорныя, сужденія ставились на одну доску съ аналитическими, для которыхъ единственнымъ основаніемъ являются законы тождества и противорѣчія; самъ Кантъ, считая аксіомы синтетическими апріорными сужденіями, допускалъ все-таки логическую возможность иныхъ геометрій. Какъ бы то ни было, Пуанкарэ не находитъ отвѣта на свой вопросъ въ числѣ обычныхъ философскихъ рубрикъ; онъ приходитъ къ мысли смотрѣть на аксіомы, какъ на *соглашенія* или *скрытыя опредѣленія*.

Дѣло въ томъ, что выборъ аксіомъ вполнѣ опредѣляетъ ту

или другую группу изъ числа потенціально существующихъ въ нашемъ умѣ; сами по себѣ различныя геометріи истинны, и утверждать истинность только одной, отвергая возможность всѣхъ остальныхъ, такъ же нелѣпо, какъ думать, что только декартовы координаты истинны, остальныя же ложны; выбирая для какого-нибудь вопроса опредѣленную систему координатъ, мы полагаемъ лишь, что она въ данномъ случаѣ удобнѣе всякой другой; подобнымъ же образомъ та или другая геометрія кладется въ основу объясненія природы не въ силу своей исключительной истинности, а вслѣдствіе того, что она представляется намъ *наиболѣе удобной* для указанной цѣли. Слѣдовательно, хотя опытъ и руководитъ нами при выборѣ геометрической системы, но мы остаемся свободными и ограничены лишь необходимостью избѣгать всякаго противорѣчія; и если мы все-таки выбираемъ геометрію Евклида, то именно потому, что считаемъ ее наиболѣе удобной. Основаніемъ для такого убѣжденія служатъ слѣдующіе факты: [1]) геометрія Евклида по самому существу своему проще другихъ, „какъ многочленъ первой степени проще многочлена второй степени“; [2]) „она въ достаточной мѣрѣ согласуется со свойствами реальныхъ твердыхъ тѣлъ“. Но нельзя-ли вообразить себѣ, что при дальнѣйшемъ прогрессѣ научнаго знанія станутъ извѣстными такіе факты, которые заставятъ насъ измѣнить свое отношеніе къ геометріи Евклида? Пуанкарэ не вѣритъ въ возможность этого. Многіе думали, что астрономическія наблюденія могутъ въ концѣ концовъ рѣшить вопросъ объ истинной природѣ пространства. Дѣло въ томъ, что если оно подчиняется геометріи Лобачевскаго, то долженъ существовать извѣстный minimum, ниже котораго не могутъ спускаться величины звѣздныхъ параллаксовъ; въ геометріи же Римана возможны и отрицательные параллаксы. Если астрономія обнаружитъ что-нибудь подобное, то это еще не будетъ значить, что геометрія Евклида оказалась несостоятельной. Въ самомъ дѣлѣ, роль прямой линіи въ астрономіи почти всегда играетъ свѣтовой лучъ, откуда слѣдуетъ, что въ указанномъ случаѣ мы могли бы выбирать между двумя выводами: или отвергнуть геометрію Евклида, или измѣнить законы оптики и принять, что свѣтъ распростра-

няется не въ точности по прямой линіи; нѣчего говорить, что всѣ сочли бы вторую гипотезу болѣе выгодной.

Въ изложенной концепціи основъ геометріи можно подмѣтить своеобразный синтезъ двухъ различныхъ теченій философской мысли. Съ одной стороны чувствуется вліяніе Канта, что становится особенно замѣтнымъ при разсмотрѣніи того положенія, которое Пуанкарэ отводитъ понятію группы въ кругу нашихъ идей. Въ „Наукѣ и гипотезѣ“ читаемъ: „ ...общее понятіе группы существуетъ раньше въ нашемъ умѣ— по крайней мѣрѣ, въ возможности. Оно присуще намъ— не какъ форма нашей чувствительности, но какъ форма нашего разума“. Отсюда явствуетъ, что по крайней мѣрѣ первооснова всѣхъ геометрическихъ истинъ отличается апріорнымъ характеромъ, и понятіе группы возводится въ рангъ кантовскихъ категорій разсудка. Тѣмъ не менѣе признать французскаго ученаго за правовѣрнаго кантіанца нельзя, поскольку дѣло идетъ о принципахъ геометріи: для Канта аксіомы геометріи суть апріорныя синтетическія сужденія, а Пуанкарэ, какъ уже извѣстно, это отрицалъ. Для него окончательный выборъ предпосылокъ геометріи происходитъ на апостеріорныхъ основаніяхъ; въ иномъ мірѣ мы, сохраняя свою духовную организацію, пришли бы и къ иной геометрической системѣ, ибо не вездѣ геометрія Евклида окажется наиболѣе удобной. Черты подобнаго же научнаго оппортунизма мы находимъ и въ ученіи нашего автора о другомъ краеугольномъ понятіи кантовской эстетики: „время должно быть опредѣлено такимъ образомъ, чтобы уравненія механики были сколь возможно просты“. У Пуанкарэ можно встрѣтить еще другія утвержденія, которыя заставятъ содрогнуться правовѣрныхъ кантіанцевъ: онъ допускаетъ возможность при извѣстныхъ условіяхъ представить себѣ четвертое измѣреніе; а въ другомъ мѣстѣ категорически заявляетъ, что у насъ есть интуиція континуума болѣе 3 измѣреній.

Если теперь мы обратимъ вниманіе на тѣ апостеріорныя данныя, которыя рѣшаютъ вопросъ о выборѣ системы геометріи, то вскроемъ другую составную часть концепціи Пуанкарэ; утвержденіе, что нѣтъ единой истинной геометріи, а есть только наиболѣе удобная, невольно заставляетъ вспо-

мнить о философскомъ ученіи, которое Новый свѣтъ въ недавнее время подарилъ Старому „Прагматизмъ“ оцѣниваетъ всякое, въ томъ числѣ и чисто научное, положеніе съ точки зрѣнія потребностей человѣка: истина есть вѣрованіе, удовлетворяющее требованіямъ человѣческой дѣятельности; истина отождествляется съ пользой, какъ ее понимаетъ человѣкъ[1]). Мотивы прагматизма мы несомнѣнно слышимъ въ изложенныхъ выше разсужденіяхъ, и было бы интересно выяснить ихъ отношеніе къ ученіямъ Джемса и Шиллера; но опять-таки причислить Пуанкарэ всецѣло къ прагматистамъ невозможно. Послѣдніе не признаютъ истины, существующей самой по себѣ, независимо отъ человѣческихъ интересовъ; тогда какъ первый допускаетъ апріорныя истины— напр.: общія свойства группы,—которыя довлѣютъ себѣ, а мы только прилагаемъ ихъ сообразно съ нашими интересами.

Какъ ни странно соединеніе идей критической философіи и прагматизма, апріорной первоосновы съ полезностью въ качествѣ критерія истины, приходится однако признать, что развитіе геометріи въ XIX-омъ столѣтіи неуклонно вело къ торжеству именно такой точки зрѣнія. Во времена Канта единственной разработанной системой геометріи была евклидова; теперь мы знаемъ нѣсколько геометрій, которыя можно положить въ основу объясненія природы: ограниченная точность всякаго опыта и наблюденія дѣлаетъ это вполнѣ допустимымъ. Если приходится выбирать между ними, то ничего другого, кромѣ соображеній удобства, выставить нельзя. Передъ лицомъ теоретическаго разума множество геометрій являются истинными; выборъ надо предоставить практическому разуму, если будетъ позволено употребить этотъ терминъ въ иномъ, менѣе высокомъ смыслѣ, чѣмъ его понималъ творецъ критической философіи.

Если мы оставимъ область геометріи и обратимся къ воззрѣніямъ Пуанкарэ на основанія анализа, то увидимъ, что здѣсь уже мотивы кантіанства звучатъ полнѣе и вытѣсняютъ

---

[1]) См. статью Ал. Балабана „Прагматизмъ“ въ № 99 „Вопросовъ Фил. и Псих.“.

своихъ соперниковъ. Такъ, мы встрѣчаемъ въ работахъ разбираемаго автора обстоятельныя изслѣдованія, посвященныя природѣ математическаго разсужденія. Существенной чертой послѣдняго является возможность сосредоточить въ одной формулѣ безчисленное множество силлогизмовъ и, благодаря этому, выполнить задачу, иначе невозможную именно вслѣдствіе своего безконечнаго объема; что же касается средствъ, которыми владѣетъ математикъ для достиженія указанной цѣли, то они заключаются въ особыхъ принципахъ. Первое мѣсто Пуанкарэ отводитъ здѣсь такъ-наз. принципу математической индукціи, гласящему: „если теорема вѣрна для числа 1, и если доказано, что разъ она справедлива для n, то она вѣрна и для n+1,—въ такомъ случаѣ она будетъ справедливой для всѣхъ положительныхъ цѣлыхъ чиселъ".

Что же представляетъ изъ себя это основное предложеніе ариѳметики? Отвѣтъ звучитъ совершенно иначе, чѣмъ въ ученіи объ аксіомахъ геометріи: принципъ математической индукціи есть примѣръ настоящаго синтетическаго апріорнаго сужденія. Доказательство состоитъ въ указаніи, что для насъ невозможно „отвлечься отъ этого положенія и, откинувъ его, построить ложную ариѳметику по аналогіи съ неевклидовой геометріей". Пуанкарэ увѣренъ въ безуспѣшности подобныхъ попытокъ; онъ забываетъ здѣсь о трансфинитной ариѳметикѣ, созданной Г. Канторомъ, гдѣ нѣтъ мѣста принципу математической индукціи и гдѣ вообще законы дѣйствій весьма существеннымъ образомъ отличаются отъ обычныхъ. Въ другихъ мѣстахъ нашъ авторъ не обходитъ молчаніемъ ученія о трансфинитныхъ числахъ, при чемъ его позиція остается все-таки двойственной: съ одной стороны онъ признаетъ заслуги канторизма передъ наукой; съ другой—обвиняетъ послѣдователей Кантора въ томъ, что они допускаютъ актуальную безконечность, а потому и впадаютъ въ противорѣчія; между тѣмъ, въ чемъ же заключается сущность канторизма, какъ не въ признаніи актуальной безконечности?[1])

---

[1]) Въ одной изъ своихъ послѣднихъ работъ („Dernières pensées", ch. V) Пуанкарэ различаетъ 2 направленія въ ученіи о безконечности и ихъ представителей называетъ: „Pragmatistes" и „Cantoriens". Въ основѣ

Какъ бы то ни было, для Пуанкарэ принципъ математической индукціи является безспорно синтетическимъ апріорнымъ сужденіемъ, и его происхожденіе объясняется совершенно въ духѣ Канта: „ ...мы имѣемъ интуицію чистаго числа, ту интуицію, изъ которой вышла вторая изъ только что приведенныхъ мною аксіомъ (здѣсь рѣчь идетъ о принципѣ математической индукціи С. Б.) и которая можетъ дать начало настоящему математическому разсужденію“. Это не та интуиція, которая основывается на „чувствахъ и воображеніи“ и съ которой мы имѣемъ дѣло въ геометріи; послѣдняя не только не можетъ дать строгости, но даже и достовѣрность ея данныхъ сомнительна, какъ показало развитіе анализа въ новѣйшее время; за такой интуиціей сохраняется исключительно наводящая роль: „доказываютъ при помощи логики, изобрѣтаютъ при помощи интуиціи“. Нѣтъ, интуиція чистаго числа совершенно другого характера: чувственная интуиція не достовѣрна, тогда какъ изъ названной первоначально „можетъ вытекать строгая математическая индукція“; здѣсь мы имѣемъ дѣло съ „единственной интуиціей, которая не можетъ обмануть насъ“ и на которой основанъ весь анализъ. Нетрудно видѣть, что „интуиція чистаго числа“ играетъ у Пуанкарэ роль одной изъ кантовскихъ необходимыхъ формъ познанія. Вообще, поскольку дѣло идетъ объ анализѣ, Пуанкарэ всецѣло стоитъ на точкѣ зрѣнія кантовской теоріи математики; онъ рѣшительно не согласенъ съ тѣмъ, что работы новой логико-математической школы подорвали эту теорію.

Упомянутая только что школа ведетъ свое происхожденіе отъ самого Лейбница, но только критическія изысканія второй половины XIX-го вѣка дали твердую почву для ея построеній: только съ того момента, какъ начала геометріи и анализа получили строгое обоснованіе, стало возможнымъ утверждать, что теоремы математики логически вытекаютъ изъ небольшого числа предпосылокъ. Съ другой стороны и

этого расхожденія лежатъ различія въ основныхъ тенденціяхъ человѣческаго ума, въ силу которыхъ мыслители всегда дѣлятся на идеалистовъ и реалистовъ; и нѣтъ надежды привести ихъ къ соглашенію. Симпатіи самого автора замѣтно склоняются на сторону прагматистовъ.

логика, казалось, застывшая въ неподвижности со временъ Аристотеля, въ истекшемъ столѣтіи обнаружила способность къ прогрессу; не безъ вліянія математиковъ былъ расширенъ традиціонный матеріалъ логики путемъ разсмотрѣнія методовъ мысли, весьма обычныхъ въ нашей наукѣ, но не изучавшихся доселѣ логиками; при этомъ логика, заимствуя у математики и внѣшнюю форму, превратилась въ логику символическую. Оба теченія слились въ работахъ современныхъ представителей логико-математической школы, гдѣ въ первую голову надо назвать имена Пеано, Фреге, Рёсселя; эти ученые строятъ одновременно и логику, и основы математики, не дѣлая даже никакого принципіальнаго различія между двумя сторонами своей работы. Рёсселю принадлежитъ положеніе, что во всей математикѣ мы не встрѣчаемъ никакихъ иныхъ принциповъ, за исключеніемъ первоначальныхъ онятій реформированной логики и небольшого числа ея аксіомъ Вотъ съ этимъ-то полнымъ сліяніемъ математики и логики не можетъ согласиться Пуанкарэ и ведетъ съ логико-математической школой въ лицѣ Рёсселя и отчасти Гильберта полемику, подчасъ настолько горячую, что въ предисловіи къ книгѣ „Наука и методъ“ считаетъ нужнымъ извиниться за страстность тона.

Рессель опредѣляетъ понятіе абсолютнаго цѣлаго числа съ помощью своихъ „логическихъ постоянныхъ“, при чемъ не дѣлается никакого различія между конечными и трансфинитными числами. Впослѣдствіи принципъ математической индукціи является однимъ изъ двухъ способовъ выдѣленія конечныхъ цѣлыхъ чиселъ изъ совокупности всѣхъ вообще цѣлыхъ чиселъ, такъ что упомянутый принципъ служитъ какъ бы опредѣленіемъ конечнаго цѣлаго числа. Очевидно, такая концепція совершенно расходится съ воззрѣніями Пуанкарэ, видѣвшаго въ интуиціи чистаго числа первичный элементъ нашей мыслительной способности, а въ принципѣ математической индукціи — непосредственное данное этой интуиціи, лежащее въ основѣ всей математики. Поэтому въ его полемическихъ статьяхъ естественно встрѣчается возраженіе, что сама „новая“ логика зависитъ отъ идеи числа; напр., если мы говоримъ о соотношеніи (relation), то намъ не

избѣжать мысли о *двухъ* объектахъ: его предшествующемъ и послѣдующемъ членѣ. Если это такъ, то тѣмъ болѣе трудно избѣжать заколдованнаго круга при опредѣленіи цѣлаго числа, ибо его опредѣленіе придется дать при помощи нѣкоторой фразы; но „трудно сказать фразу, не вводя въ нее слова „число“, или слова „нѣсколько“, или, наконецъ, какого-либо слова во множественномъ числѣ И вотъ уже готова наклонная плоскость; въ каждое мгновеніе мы рискуемъ впасть въ petitio principii“. Невозможно отрицать справедливость этихъ тонкихъ замѣчаній Пуанкарэ; но едва-ли также допустимо принять безъ оговорокъ его выводъ, что вполнѣ развитое понятіе цѣлаго числа, которое мы находимъ у математика, является первичнымъ понятіемъ, не поддающимся опредѣленію. Исходъ, быть можетъ, придется поискать въ томъ, чтобы признать существованіе болѣе простыхъ идей—напр , идей множества, различія, однозначнаго соотвѣтствія,—которыя входятъ въ составъ развитого понятія числа и которыя равно лежатъ и въ основѣ логики и математики; тогда стало бы понятнымъ близкое соприкосновеніе обѣихъ наукъ въ этомъ пунктѣ, и заколдованный кругъ Пуанкарэ получилъ бы разрѣшеніе.

Однако центръ спора разгорается вокругъ принципа математической индукціи; французскій ученый категорически заявляетъ, что „на принципъ индукціи нельзя смотрѣть, какъ на скрытое опредѣленіе цѣлаго числа“; а это какъ разъ утверждаетъ его англійскій собратъ, имѣя въ виду *конечное* цѣлое число. Подобное опредѣленіе носитъ характеръ такъ-наз. опредѣленій посредствомъ постулатовъ; послѣднія встрѣчаются въ томъ случаѣ, когда о понятіяхъ, подлежащихъ опредѣленію, утверждается лишь, что они удовлетворяютъ извѣстной системѣ первоначальныхъ предложеній, а въ остальномъ пребываютъ совершенно произвольными; такъ, напр., поступаетъ Гильбертъ съ основными понятіями геометріи. Всѣ согласны въ томъ, что для признанія состоятельности такого опредѣленія прежде всего необходимо доказать, что данные постулаты не заключаютъ въ себѣ противорѣчія; Гильбертъ отдаетъ себѣ въ этомъ полный отчетъ и приводитъ требуемое доказательство. Но Гильберту въ его

геометрическихъ работахъ подобное требованіе не доставляетъ какихъ-либо принципіальныхъ затрудненій: къ его услугамъ имѣется ариѳметика и весь анализъ, гдѣ онъ дѣйствительно и почерпаетъ искомое доказательство. Другое дѣло, когда рѣчь идетъ объ основаніяхъ самой ариѳметики; гдѣ найти здѣсь точку опоры? Пуанкарэ говоритъ по этому поводу слѣдующее: „Чтобы установить, что постулаты не содержатъ въ себѣ противорѣчія, нужно разсмотрѣть всѣ предложенія, которыя могутъ быть выведены изъ данныхъ постулатовъ, какъ посылокъ, и показать, что среди этихъ предложеній нѣтъ двухъ, противорѣчащихъ другъ другу. Если число этихъ предложеній конечное, прямая провѣрка возможна. Но такой случай и встрѣчается рѣдко, и интереса не представляетъ. Если же число этихъ предложеній оказывается неограниченнымъ, то прямая провѣрка уже невозможна. Тогда необходимо обратиться къ такимъ способамъ доказательства, въ которыхъ вообще нельзя обойтись безъ принципа полной индукціи, т.-е. того принципа, который именно и надлежитъ провѣрить“. На основаніи изложенныхъ соображеній Пуанкарэ обвиняетъ Росселя и другихъ логиковъ въ томъ, что, когда отъ нихъ требуютъ доказательства отсутствія противорѣчія въ опредѣленіи цѣлаго числа при помощи аксіомы полной индукціи, они отъ этого доказательства отдѣлываются Позиція же Росселя въ разбираемомъ вопросѣ такова. Послѣ того, какъ дано общее опредѣленіе цѣлаго числа—а оно дается съ помощью математической логики и тѣсно связывается съ понятіемъ класса,—надо выдѣлить совокупность конечныхъ цѣлыхъ чиселъ; различающимъ признакомъ послѣднихъ является то, что соотвѣтствующіе имъ классы не могутъ оказаться эквивалентными какой-либо изъ своихъ частей; что это не является общимъ правиломъ, показываетъ хотя бы слѣд. примѣръ: совокупность всѣхъ цѣлыхъ чиселъ эквивалентна совокупности только четныхъ чиселъ, ибо между ними можно установить однозначное соотвѣтствіе; такіе классы даютъ уже начало числамъ трансфинитнымъ. Дѣло теперь сводится къ доказательству, что опредѣленіе конечнаго цѣлаго числа при помощи принципа полной индукціи равносильно только что

приведенному; Пуанкарэ требуетъ этого доказательства отъ логико-математической школы и утверждаетъ, что оба опредѣленія равносильны лишь „въ силу апріорнаго синтетическаго сужденія: нельзя прійти отъ одного къ другому путемъ чисто логическихъ операцій“. Дѣйствительно, покойный нынѣ ученый со своей геніальной интуиціей попадаетъ въ слабое мѣсто изслѣдованій логиковъ; въ своемъ послѣднемъ трудѣ Рессель даетъ доказательство равносильности обоихъ опредѣленій, но оно ему не удается на основаніи только предпосылокъ его символической логики: приходится допустить еще одно предложеніе—такъ-наз. аксіому Цермело. Не знаемъ, была-ли извѣстна Пуанкарэ эта работа, вышедшая незадолго до его смерти; но онъ былъ бы доволенъ признаніемъ, что понадобилась новая аксіома, которую не замедлилъ бы отнести къ числу апріорныхъ синтетическихъ сужденій. Однако торжествовать крушеніе логико-математической школы было бы здѣсь, по нашему мнѣнію, преждевременнымъ. Если бы оказалось, что при доказательствѣ равносильности обоихъ опредѣленій конечнаго цѣлаго числа на самомъ дѣлѣ не обойтись безъ новаго допущенія, то пришлось бы только пополнить систему аксіомъ символической логики еще одной, придавъ ей достаточно общую и отвлеченную форму; и если нашъ авторъ видитъ въ этомъ нарушеніе основной тенденціи логико-математической школы, то только потому, что онъ держится стараго воззрѣнія на логику, какъ на собраніе чисто аналитическихъ сужденій: „Чистая логика всегда привела бы насъ только къ тавтологіи; она не могла бы создать ничего новаго; сама по себѣ она не можетъ дать начало никакой наукѣ“. Въ настоящее время такая точка зрѣнія мало-по-малу оставляется; примѣры тому можно привести и въ заграничной литературѣ, и въ нашей. Законы логики признаются за выраженія основныхъ синтезовъ мысли, и ея предложенія не сводятся болѣе къ безконечному повторенію, что А есть А. Если же признать, что среди первоначальныхъ предложеній логики имѣются синтетическія сужденія, которыя, конечно, будутъ и апріорными, то споръ между Пуанкарэ и Рессельмъ идетъ въ значительной степени о словахъ и о томъ или другомъ расположеніи матеріала.

Въ построеніяхъ логико-математической школы до самаго послѣдняго времени было еще одно, несравненно болѣе слабое мѣсто, которое, конечно, строгій критикъ не обошелъ молчаніемъ. Дѣло въ томъ, что ученіе о трансфинитныхъ числахъ Кантора привело къ нѣкоторому противорѣчію; затѣмъ оказалось, что это противорѣчіе можно формулировать иначе, оставаясь уже исключительно въ области логики; повидимому, виной тому былъ какой-то пробѣлъ въ понятіи класса. Мы не будемъ вдаваться здѣсь въ подробности, которыя сильно увеличили бы и безъ того разросшееся собщеніе; къ тому же и роль Пуанкарэ въ этой области исключительно сводится къ критикѣ. Указанныя противорѣчія заставили Рёсселя не разъ пересматривать свои теоріи, и по этому поводу французскій геометръ даетъ полный просторъ своей ироніи; намъ кажется, что въ послѣдней своей работѣ его англійскій собратъ вступилъ на вѣрный путь для разрѣшенія всѣхъ трудностей. Во всякомъ случаѣ Пуанкарэ правъ, требуя отъ логиковъ, чтобы они прежде всего устранили возможность двухъ взаимно исключающихъ отвѣтовъ на одинъ и тотъ же вопросъ; неправъ онъ лишь, когда утверждаетъ, что „на карту поставлены только канторизмъ и логистика“: если дѣло идетъ о понятіи класса—основномъ понятіи человѣческой мысли,—то въ благополучномъ разрѣшеніи возникающихъ здѣсь противорѣчій заинтересована не только *вся* математика, но и все наше знаніе.

Итакъ, нѣкоторыя теченія современной математической мысли имѣли въ лицѣ Пуанкарэ безпощаднаго критика; нѣтъ нужды прибавлять, что для оправданія своего существованія они должны были выдержать эту критику, которая, устраняя все нежизнеспособное, могла оставить неприкосновеннымъ лишь здоровое ядро: имѣть такого врага лучше, чѣмъ десятокъ иныхъ друзей.

Въ настоящемъ докладѣ мы по мѣрѣ силъ старались изложить философію математики, какъ ее понималъ недавно скончавшійся видный адептъ этой науки. Его мысли въ указанной области потому и возбуждаютъ особенный интересъ, что здѣсь мы наблюдаемъ довольно рѣдкое явленіе: за разрѣшеніе философскихъ вопросовъ берется человѣкъ, стоящій

на вершинѣ современнаго математическаго знанія; вотъ почему съ воззрѣніями Пуанкарэ всегда придется считаться, хотя его философскія работы и не стоятъ на томъ уровнѣ, на которомъ находятся его чисто математическія изслѣдованія.

Какъ мы уже отмѣтили, къ философскимъ вопросамъ покойнаго ученаго привели его обширныя знанія и характерное для него стремленіе къ синтезу различныхъ частей этого знанія. Имѣя въ виду послѣднюю особенность, интересно поставить обратный вопросъ и спросить, не опирался-ли нашъ авторъ гдѣ-либо въ чисто спеціальныхъ работахъ на тѣ построенія, къ которымъ привели его философскія изысканія. Отвѣтъ будетъ утвердительнымъ, если занятія основаніями геометріи, въ томъ числѣ и неевклидовой системой, мы отнесемъ въ область такихъ именно изслѣдованій Такъ, въ мемуарахъ, посвященныхъ теоріи фуксовыхъ и клейновыхъ группъ, Пуанкарэ разсматриваетъ функціи, допускающія линейную подстановку

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

съ которой мы уже имѣли дѣло въ началѣ доклада; Клейнъ называетъ такія функціи автоморфными. „Задача о розысканіи фуксовыхъ группъ“—мы цитируемъ здѣсь подлинникъ—„сводится къ слѣдующей: раздѣлить правильнымъ образомъ плоскость или часть плоскости на безконечное число областей, конгруентныхъ другъ съ другомъ“. Нѣсколько выше два образа называются конгруентными, если они переходятъ другъ въ друга при помощи указанной линейной подстановки. Если мы вспомнимъ принадлежащее тому же автору истолкованіе геометріи Лобачевскаго, то увидимъ, что нужное ему дѣленіе плоскости будетъ дѣленіемъ на конгруентныя области лишь съ точки зрѣнія неевклидовой геометріи; а отсюда ясно, что человѣкъ, владѣющій этимъ новымъ геометрическимъ языкомъ, сумѣетъ извлечь изъ него огромную пользу для рѣшенія поставленнаго вопроса. Пуанкарэ свидѣтельствуетъ объ этомъ въ словахъ, не допускающихъ никакого сомнѣнія: „эта терминологія (рѣчь идетъ о „словарѣ“, о которомъ говорилось въ первой части сообщенія С. Б.) оказала

мнѣ большія услуги въ моихъ изслѣдованіяхъ"; въ другомъ мѣстѣ (въ „Наукѣ и гипотезѣ") читаемъ: „Геометрія Лобачевскаго... можетъ дать мѣсто приложеніямъ; я не имѣю времени говорить здѣсь ни объ этихъ приложеніяхъ, ни о той пользѣ, которую Клейнъ и я извлекли изъ нея для интегрированія линейныхъ уравненій". Мы видимъ здѣсь прекрасную иллюстрацію геніальной способности Пуанкарэ къ синтезированію областей мысли, раздѣленныхъ, по-видимому, непроходимой пропастью: философскія изслѣдованія въ области неевклидовой геометріи онъ заставилъ работать для рѣшенія задачи объ интегрированіи дифференціальныхъ уравненій!

Одинъ изъ величайшихъ нашихъ учителей—Лейбницъ—сказалъ, что математикъ долженъ быть философомъ въ той же мѣрѣ, какъ и философъ—математикомъ. Нѣтъ нужды подчеркивать, какъ рѣдко исполняется требованіе Лейбница, и обѣ стороны повинны въ томъ; самая цѣлесообразность такого совмѣщенія подвергается сомнѣнію. Пуанкарэ—одинъ изъ немногихъ—воплотилъ идеалъ Лейбница; болѣе того, всей своей дѣятельностью онъ явилъ блестящее доказательство въ пользу законности этого идеала.

БИБЛІОТЕКА
Ассоціаціи Естествознанія
КОМ. АКАДЕМІИ.