Р. С Ф. С. Р *Пролетарии всех стран, соединяйтесь!*

А. А. КАУФМАН.

ВВЕДЕНИЕ

В ТЕОРЕТИЧЕСКУЮ СТАТИСТИКУ.

ПОСМЕРТНОЕ ИЗДАНИЕ.

ИЗДАНИЕ
Центрального Статистического Управления.

Р. С Ф. С. Р. *Пролетарии всех стран, соединяйтесь!*

А. А. КАУФМАН.

ВВЕДЕНИЕ
В ТЕОРЕТИЧЕСКУЮ СТАТИСТИКУ.

ПОСМЕРТНОЕ ИЗДАНИЕ.

Издание Центрального Статистического Управления.

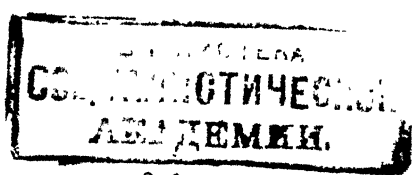
ПЕТРОГРАД.
Гос. трест „Петропечать", типография „Красный Агитатор", 7 рота, 26.
1923

Проф 38

Н А
23

Напечатано в количестве 3.000 экземпляров.

Заведующий Редакц.-Издательским Отделом ЦСУ *В. Массальский.*



384
23

Петроград

Главлит № 1119

ОГЛАВЛЕНИЕ.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Стр.

Существо и сфера применения статистического метода . . . . . 1—55

Существо статистического метода (стр. 1—2) и закона большого числа (стр. 2—3). Сфера приложения статистического метода—в обществоведении и вне его (стр. 3—5). Чем она определяется? (стр 5—6).

Понятие случая (стр. 6). Суб'ективная—об'ективная точка зрения (стр. 6—9); определение Курно (стр. 9—10), Пуанкаре (стр. 11—12); неизбежность элемента суб'ективности (стр. 12—13). Степени случайного—непостижимый и невычислимый случай (стр. 13—15). Понятие случайной причины (стр. 15—16); относительность этого понятия (стр. 16—21).

Типические и индивидуальные явления (стр. 21—24). Индивидуальные явления в мире внешней природы (стр. 24—25); решающее значение точки зрения (стр. 25). Родовые и собирательные понятия (стр. 25—27). Собирательные понятия как сфера приложения статистического метода (стр. 27—29). Взгляд Чупрова (стр. 29—31). Общественные явления, как сфера преимущественного применения статистического метода (стр. 31—33). Статистический метод как суррогат эксперимента (стр. 33—35). Критические и положительные элементы в построении Чупрова (стр. 35—38); отношение к нему Борткевича и Птухи (стр. 38); значение критерия времени и пространства (стр. 38—41). Совокупности реальные и искусственно конструируемые (стр. 41); реальная совокупность с точки зрения статистики (стр. 41—45); смысл искусственных совокупностей (стр. 45); значение момента множественности для родовых и для собирательных понятий (стр. 45—47). Статистический метод в биологии (стр. 47); вариационная статистика (стр. 47); родовые и собирательные понятия по Орженцкому (стр. 47—49). Резюмирующий вывод относительно сферы применения и существа статистического метода (стр. 49). Статистический метод и статистическое искусство (стр. 49—51). Статистический метод и эксперимент (стр. 51—53). Место вопроса о приемах статистического наблюдения—причины обычного компромиссного решения этого вопроса (стр. 53—55).

ГЛАВА ВТОРАЯ.

Стр
Приемы статистического умозаключения . . . . . 56 — 102

Почему ставится вопрос (стр. 56). Производные величины и статистические ряды (стр. 56—57). Виды статистических закономерностей по Майру (стр. 57—58). Значение постоянства и изменений статистических чисел (стр. 58—59); специально о роли постоянства (стр. 59—61); преимущественное значение изменений (стр. 61—62). Характеристика приемов статистического умозаключения у Курно, Вундта (стр. 62—64), Зигварта (стр. 64), Борткевича (стр. 64—65), Чупрова (стр. 65—66). Два основных типа статистического умозаключения (стр 66—68). Методы количественной и качественной группировки (стр. 68—70); их принципиальная близость (стр. 70—72); существенный смысл различия между ними (стр. 72—73); их принципиальная основа в невероятности случайных соответствий (стр. 73—74); симптоматический характер выясняемых зависимостей (стр. 74); большая отчетливость количественного метода (стр. 74—77). Метод параллельных рядов (стр. 77—79). Сопоставление его с предыдущими—меньшая определенность (стр. 79—81), большая широта применения (стр. 81—82). Трудность его применения в чистом виде (стр 82—83); вспомогательные приемы (стр. 83—84). Метод вторичной количественной группировки (стр. 84—87); существенная его аналогия с методом параллельных рядов (стр. 87—88); самостоятельное его значение (стр. 88—91).

Статистическое умозаключение и причинное об'яснение (стр. 91—92)—особенно в случае параллельных рядов (стр. 92—93), в более общем случае (стр. 93). Обычная шаткость причинных об'яснений (стр. 93—97). Место статистического умозаключения в индуктивном процессе (стр. 97—99). Положительная роль статистического метода (стр. 99—102)

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

Статистическая закономерность и естественный закон. Статистический метод и индукция . . . . . 103 — 149

Приводит ли статистический метод к „законам" номографического характера (стр. 103—105). Эмпирический характер статистических закономерностей (стр. 105—108). Их грубо-приблизительный характер—в случае сравнения переписей (стр. 108—110), в случае параллельных рядов (стр. 110—111), при группировках по факториальным признакам (стр. 111—112). Общий смысл статистической закономерности (стр. 112—115).

Обычное представление об отношении статистического метода к индукции (стр. 115—117). Сущность индукции (стр. 117—118). Ея основная предпосылка (стр. 118—119) и основные методы (стр. 119 и 120). Методы сходства (стр. 120—121), разницы (стр. 121—122), трудности применения последнего (стр. 122—123); слабая сторона метода сходства (стр. 123—124); метод сопутствующих изменений (стр. 124—125). Затруднения для применения индукции (стр. 125 и 126). Рюмелин (стр. 126) и Чупров (стр. 126—127). Неполное знание причин и следствий (стр. 127—129). Множественность причин и

Стр.

следствий (стр. 129—130); в частности множественность причин (стр. 130—132), следствий (стр. 132—133), тех и других (стр. 133—134),—самостоятельная роль статистического метода и вероятность как его основа (стр. 134—136). Чрезмерная широта постановки вопроса у Чупрова (стр. 136—137); необходимые ограничения (стр. 137—140). Особое положение сферы социальной статистики (стр. 140—141). Сферы применения индукции и статистического метода (стр. 141—144). Идея вероятности как основа всякого статистического умозаключения (стр. 144—149)

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

Закон большого числа и основы теории вероятностей . . . . . 150 — 190

Житейская формулировка закона большого числа (стр. 150 и 151). Правильность не синоним неизменности (стр. 151—152). Житейское об'яснение закона большого числа (стр. 152—155). Гипотеза исчерпания случая (стр. 155—156). Связь закона большого числа с теорией вероятностей (стр. 156—158), связь последней с теорией статистического метода (стр. 158—159), с понятиями дис'юнктивного и гипотетического суждения (стр. 159—160) Вероятность и причинность (стр. 160). Суб'ективная и об'ективная (стр. 160 — 163), качественная и количественная вероятность (стр. 163—164). Математическая вероятность—понятие и способ выражения (стр. 164—167); случай непрерывных величин (стр. 168). Вероятности половина (стр. 168—170); единица и нуль (стр. 170—173). Физическая невозможность и практическая достоверность (стр. 173—174); роль этих понятий у Курно (стр. 174—176); Суб'ективный элемент в понятии равновозможности (стр. 176—177); равновозможность в осуществлении статистического наблюдения (стр. 177—178). Понятие независимости (стр. 178—179). Принцип отсутствующего и достаточного основания (стр. 179—183); соображения Криса (стр. 183—184); об'ективный элемент равновозможности и принцип отсутствующего основания (стр. 184—186). Об'ективный или суб'ективный характер вероятности (стр. 186—190).

ГЛАВА ПЯТАЯ.

Приемы вычисления вероятностей . . . . . 191 — 227

Вероятности простейших и сложных событий—равновозможные и неравновозможные статочности (стр. 190—192). Простой счет статочностей (стр. 192—194). Формулы комбинаторики: вариации (стр. 194—195), перестановки (стр. 195—197), размещения (стр. 197—198), сочетания (стр. 198—200). Основные теоремы теории вероятностей (стр. 200—202); полная вероятность и теорема сложения (стр. 202—203), сложная вероятность и теорема умножения (стр. 204—207); теорема умножения для зависимых событий (стр. 208—212). Применение теорем к случаю „средней вероятности в собственном смысле" (стр. 212—213). Вопрос об отношении вероятностей к отдельному случаю (стр. 213—218); компенсация „аномалий случая" (стр. 218—219). Вероятность и массовое предсказание (стр. 219—221). Математическое (стр. 221—223) и нравственное ожидание (стр. 223—225). Значение математического ожидания—практическое и научное (стр 225—227).

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

Стр.

Априорная и эмпирическая вероятность. Математическая формулировка закона большого числа (Теорема Бернулли-Лапласа) . . . . . 228 — 286

Априорная и эмпирическая вероятность (стр. 228—230). Познавательное значение и сфера применимости той и другой (стр. 230—232), самостоятельная роль той и другой по Вундту (стр. 232—234). Сфера их применимости (стр. 234—235). Частота и вероятность (стр. 235—240).

Математическая формулировка закона большого числа (стр. 240). Прямое и обращенное положение (стр. 240—241). Теорема Бернулли-Лапласа (стр. 241—242). Теорема Пуассона (стр. 242—243). Общий смысл обоих (стр. 243—245). Влияние числа наблюдений на точность результата (стр. 245—246). Значение теоремы Пуассона (стр. 246—249). Отношение обоих теорем к действительности (стр. 249—250).

Доказательство закона большого числа в его математической формулировке—„вывод Курно“ (стр. 250—252). Начальные стадии вывода теоремы Бернулли-Лапласа. Подход к биномиальной формуле (стр. 252—261). Формула Стирлинга (стр. 261—263). Два вопроса теоремы Бернулли (стр. 263—264). Нахождение наивероятнейшей комбинации и ея вероятность (стр. 264—268); вероятность результата, на выходящего из заданных пределов, как суммы вероятностей ряда результатов (стр. 268—274); переход к интегралу (стр. 274—277) Интеграл Лапласа и таблицы его значений (стр 277—283). Нужен ли „вывод Курно“ для обоснования реального значения математической формулировки закона большого числа (стр. 283—286).

ГЛАВА СЕДЬМАЯ.

Применение теоремы Бернулли-Лапласа. Обращенная теорема Бернулли . . . . . 287 — 357

Три задачи, разрешаемые при помощи интеграла вероятностей (стр. 287—288). Первая задача—определение степени точности и достоверности результата наблюдения (стр. 288—293). Влияние числа наблюдений (стр. 293—295). Необходимая степень точности и достоверности (стр 295—296).

Заключение от частости к вероятности (стр. 296—298). Обращенная теорема Бернулли (стр. 298—299). Упрощенные доказательства (стр. 299—301). Теорема Байеса (стр. 301—307); ее математическое обоснование (стр. 307—313). Вероятность будущих событий (стр. 313—315). Самостоятельное значение теоремы Байеса (стр. 315—316). Вывод из нее обращенной теоремы Бернулли (стр. 316—318).

Распространение закона большого числа на средние величины (стр. 318—319): теорема Чебышева (стр. 319—321). Соображения Борткевича (стр. 321—323).

Вопрос о числе наблюдений. Постановка вопроса (стр. 323—325). Указания таблиц Лапласовского интеграла (стр. 325—326). Значение расчленения совокупностей (стр. 326—330). Точное математическое решение вопроса о достаточном числе (стр. 330 и 335). Главомерные приемы—их принципиальная суть (стр. 335—337),

Стр.

их две разновидности (стр. 337—340). Принцип выборочного исследования (стр. 340—342). Математические критерии для решения вопроса о числе наблюдений (стр. 342—343). Абсолютное или относительное число? (стр. 343—347). Неизбежность глазомерного решения (стр. 347—348). Сфера применимости выборочного исследования (стр 348—350), схема Громана и поправка к ней (стр. 350—353). Принцип механического отбора (стр. 353—357)

ГЛАВА ВОСЬМАЯ.

Учение об устойчивости статистических рядов . . . . . 358 — 423

Понятие дисперсии (стр.358-360). Метедологический и моральнофилософский аспект вопроса (стр 360—361); „кетлетизм" и реакция против него (стр. 361-364). Общие соображения по вопросу об отношении статистической закономерности к единичному поступку (стр. 364-366). „Нивеллирующая тенденция" и принцип средней вероятности (стр. 366-368); роль учения о дисперсии (стр. 368).

Дисперсия как критерий для оценки внутреннего смысла статистических коэффициентов (стр 369-370). Глазомер и элементарные меры устойчивости (стр. 370-371). Простое и квадратическое отклонение (стр. 371-374). Теоретические меры (стр. 374-375). Теория погрешностей—ее сущность (стр. 375-377); условия применения теории вероятностей (стр. 377-380). Перенесение в область статистики (стр. 380-381); роль теории погрешностей для теоретической статистики (стр. 381-383). Закон погрешностей и формула Гаусса (стр. 383-387). Ее значение и условия применимости (стр 387-389), в частности в социальных науках (стр.389-390). Формулы теоретической меры дисперсии (стр.390-393). Модуль и среднее квадратическое отклонение (стр 393-398). Критерий Лексиса (стр. 398-401), формула Борткевича (стр. 401-402). Три типа рядов по Лексису (стр. 402-403). Их значение в первоначальной схеме Лексиса: ряды со сверхнормальною устойчивостью (стр. 403-405); „связанные" массовые явления (стр. 405-408); нормальная устойчивость (стр. 408-410); поднормальная устойчивость (стр. 410-412). Сверхнормальная и неправильная дисперсия (стр. 412-414); приемы уловления той и другой: метод Вестергорда (стр. 414-416); биномиальная формула (стр. 416-418), таблицы интеграла вероятностей (стр. 418-420). Симптоматические ряды (стр. 420-421). Значение типичности для предсказаний (стр. 421-422), значение симптоматических рядов для каузального исследования (стр. 422-423).

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ.

Учение об устойчивости статистических рядов. Дальнейшая разработка и критика 424 — 486

Эмпирическая проверка „критерия Лексиса"—фактические поправки к его выводам (стр. 424-426). Влияние сокращения поля наблюдения (стр. 426-427). Числа изображающие соотношения частот (стр. 427-428). Закон малых чисел Борткевича (стр. 428-432); его об'яснение (стр. 432-433), его принципиальное значение (стр. 433-434). Понятие вероятности и математическая вероятность (стр. 434-435). Фиктивность повышения уровня устойчи-

Стр

вости по мере сокращения поля наблюдения (стр. 435-436), в частном случае „закона малых чисел" (стр. 436), в общем случае (стр. 437-439). Смысл нормальной устойчивости в виду преобладания средних вероятностей (стр. 440-443). Условия, порождающие сверхнормальную устойчивость (стр. 443-447), поднормальную устойчивость (стр 447-450); Связь с повышением устойчивости при сокращении поля наблюдения (стр 450-451); острая и хроническая солидарность (стр. 451-453).

Значение поправок к схеме Лексиса для „морально-философского аспекта" (стр. 456-458). Критерий Лексиса не играет решающей роли (стр. 456-458). Поправки Орженцкого (стр. 458-461); точка зрения сложной вероятности (стр. 461-565). „Методологический аспект" (стр. 465). Смысл эмпирической проверки применимости исчисления вероятностей (стр 465-467). Роль нормального уровня дисперсии (стр 467-469); реальное значение теоретических схем разных типов дисперсии (стр. 469-472); обзор отдельных схем (стр. 472-478). Совершенная их шаткость и произвольность выводов (стр. 478-482). Незаконность самого понятия „нормальной" устойчивости—формула Гаусса и формула Бернулли-Лапласа (стр. 482-486).

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ.

Измерения дисперсии в практике научного статистического анализа. Значение исчисления вероятностей для статистики . . . . . 487 — 534

„Дифференциальный метод" — его существенный смысл (стр. 487-489), технические приемы и формулы (стр. 489-496), Примеры применения из области социальной статистики (стр. 496-497), вариационная статистика (стр. 497-499). Роль дифференциального метода в социальной статистике; принципиальная его несостоятельность (стр. 499-511).

Вопрос о приложимости исчисления вероятностей в практике научного статистического анализа (стр 511-512). Крайние и умеренные взгляды (стр. 512-518). Исчисление вероятностей и принцип вероятности (стр. 518-522). Математическое направление и элементарные приемы (стр. 522-527). Математическая и статистическая постановка вопросов (стр 527-529). Законность обоих направлений (стр. 530). Принципиальное значение теории вероятностей (стр. 530-534).

ГЛАВА ОДИНАДЦАТАЯ.

О статистике как самостоятельной науке . . . . . 535 — 558

Статистический метод и статистическое искусство (стр. 535-540). Статистика как социальная наука (стр. 540). Несостоятельность такой концепции (стр. 544-543); статистика—чисто методологическое учение (стр. 544-545) Концепция А. А. Чупрова (стр. 545-550), ее несостоятельность (стр. 550-554). Концепция М. В. Птухи (стр. 554-556). Е. Е. Слуцкого (стр. 556-558).

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Профессор Александр Аркадьевич Кауфман скончался 18 мая 1919 г. При жизни он успел окончательно прокорректировать только первые двенадцать печатных листов, которые тогда же были отпечатаны в количестве 3000 экземпляров. Остальное было найдено частью в виде первой авторской корректуры, частью в наборе, еще не просмотренном автором, частью в виде рукописи, повидимому даже не совсем подготовленной к печати.

Согласно воле покойного, работы по посмертному изданию его сочинений должны были взять на себя его ближайшие сотрудники по Статистическому Семинарию бывш. Петроградских Высших Женских (Бестужевских) Курсов: И. Ф. Макаров, Т. Л. Якобсон и В. А. Лосиевская.

Труд по корректированию настоящей книги был выполнен нижеподписавшимися. Исправления в оригинал вносились только в случаях явных описок, или ошибок, и при том такого характера, которые были бы несомненно исправлены самим автором. Ни в одном случае не было внесено хотя-бы частичных поправок в те места текста, которые либо были связаны с какой-нибудь точкой зрения автора на трактуемый вопрос, либо являлись изложением его собственных выводов, совершенно независимо от того, разделялись ли нами эти выводы или нет. Даже терминология, иногда не совсем правильная или не общепринятая, но являющаяся характерной для автора, поскольку он придерживался ее не только в других сочинениях, но и в первых двенадцати листах настоящей книги, была оставлена в полной неприкосновенности.

Т. Якобсон и *В. Лосиевская.*

Петроград.
Январь 1923 г.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Существо и сфера применения статистического метода.

Обычное или ходячее, если угодно вульгарное, понимание статистики, как его резюмировал в свое время Курно, это: «собрание фактов, относящихся к социальной жизни людей», и облеченных, притом, более или менее исключительно в численную форму. В более строгом понимании статистика, по определению того же Курно, это— наука или, точнее, метод, «которого предмет — собирать многочисленные факты или явления какого-либо рода, сопоставлять их так, чтобы получать численные отношения, приблизительно постоянные и независимые от аномалий случая, указывающие на существование постоянных причин, комбинирующихся с случайными причинами» [1]; главная цель и объект статистических исследований — «элиминирование случайных причин, или точнее—их влияния, и нахождение постоянных или правильных причин» [2]). Или по одному из многочисленных других определений: статистика — «метод исследования, имеющий целью численное наблюдение над массами и стремящийся путем сопоставления численных рядов установлять типичные групповые признаки» (Конрад). Основной и необходимо-входящий в состав самого понятия статистики прием наблюдения над массами—разложение наблюдаемой массы, состоящей из однородных по тому или другому объединяющему признаку единиц, на отдельные единицы, случаи или экземпляры, — и счет этих единиц с их характерными, «симптоматическими», признаками. Высшее проявление статистики или статистического метода — уловление, путем сопоставления групповых признаков, причинных связей и зависимостей. В основе статистического метода, поскольку таковой является орудием научного познания, ле-

---

[1]) Cournot. Die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung,—цитирую по немецкому переводу G. H. Schnuse, Braunschw. 1849, стр. 147.

[2]) Стр. 149.

жит *закон большого числа*, основная сущность которого известна всякому, кто приступает к чтению этой книги, и подробному рассмотрению которого, в его первоосновах и последствиях, будет посвящена значительная часть ее содержания. По Эттингену, существенный смысл и цель статистического метода — «установить, путем собрания большого числа наблюдений и соответственного анализа и группировки их, эмпирические законы и внутренний ритм в нестрой путанице конкретных явлений». Изучаемые статистическим путем массы — это «массы единичных случаев, однородность которых мы познаем только в конечном результате, но в основе которых могут лежать разнообразнейшие ряды разнороднейших действующих причин. Главною целью статистического наблюдения становится, поэтому, *счисление масс*, чтобы использовать большие числа в целях научного изучения общественных (и, добавлю сейчас-же от себя, других аналогичных с ними. А. К.) массовых явлений». Вот к этой-то способности больших чисел выявлять «внутренний ритм», обнаруживать «эмпирические законы», кроющиеся среди «нестрой путаницы конкретных явлений», — к ней, в простейшем виде, и сводится сущность закона большого числа. Его существенный смысл формулируется Георгом Майром в следующих словах: «в большом числе, составляющем результат статистического, массового наблюдения, выступают такие правильности, — правильности как *в строении* известной социальной (или шире—всякой иной, отвечающей известным предпосылкам. А. К.) массы, так *и в наступлении* поступков или событий, которые не могут быть познаны на произвольно взятых частях изучаемой массы». Это — то, что можно назвать «житейскою» формулировкой закона большого числа; его строгая, математическая формулировка, опять-таки, составит один из главнейших предметов дальнейшего изложения. Житейское, достаточное для элементарно-научных целей, объяснение этого закона достаточно ярко формулировано Лапласом: «представим себе, — говорит Лаплас, — урну с шарами, содержащую черные и белые шары. Начнем вынимать шары из урны и класть их туда обратно. При начале этой операции (значит—*в малом* числе случаев! А. К.) отношение числа вынутых белых к числу черных крайне неправильно. Но изменяющиеся величины этих неправильностей, отвлекающие явления то в ту, то в другую сторону от правильного хода, взаимно уничтожаются по мере накопления большого числа извлечений, так что все больше и больше выступает действительное отношение содержащихся в урне черных и белых шаров». Или в более общей форме: способность больших чисел выявлять законы массовых явлений объясняется «присутствием постоянных причин в предшествующих обстоятельствах, вызывающих явление: действие непостоянных, переменных влияний, так сказать, интерферируется для наблюдателя в общей массе однородных явле-

ний и тем самым дает возможность выступить постоянным действиям причин постоянных». Позволю себе заключить эти краткие вступительные замечания, лишь резюмирующие то, что, давно, конечно, известно читателю, изящным образом, который я заимствую из введения к «Исчислению вероятностей» Бертрана: «Если на Place du Carrousel целый день идет дождь, все камни на мостовой будут мокры». Это, в упрощенном виде, сущность того, что мы называем законом большого числа. «Конечно — продолжает Бертран — могло-бы случиться, что дождь лил-бы потоками, а одна плита из мостовой оставалась бы сухою; ни одна капля не имеет особого предназначения к ней»—к этой именно плите: «их рассеивает случай, и случай мог-бы все их разнести на соседние плиты. Однако, никто не предположит серьезно такого рода возможности»; абстрактно мыслимое представляется нам — следуя терминологии Курно — «физически невозможным». И вот, «случайные события подобны дождевым каплям: лишь-бы они были достаточно многочисленны, — случай распределит их равномерно между всеми возможными разновидностями, не благоприятствуя особо ни одной из них».

Посмотрим же теперь, какого рода явления выявляют лежащие в их основе правильности, закономерности и причинные связи только в большом числе, и какова, в соответствии с этим, сфера применения статистического метода? Первое, что естественно приходит в голову, как ответ на этот вопрос, — это обычное противоположение явлений физического порядка массовым явлениям человеческого общежития. Не требуется никакого «большого числа», никакого статистического наблюдения, чтобы определить, например, состав чистой воды или медного купороса, чтобы установить точную меру влияния температуры на объем того или другого тела, удельный вес и все иные свойства золота, ртути или любого, сколь угодно сложного, химического соединения, чтобы вычислить орбиту того или другого из небесных светил. Столь же ясно, напротив, что мы не иначе как в большом числе, при помощи методов статистики, можем выявить закономерности и причинные зависимости в таких явлениях, как долговечность и смертность населения, как его культурность или благосостояние; что только этим путем мы можем подойти к выяснению, например, влияния благосостояния на смертность или на культурный уровень населения, влияния состава крестьянской семьи на размеры хозяйства, влияния промысловой деятельности на земледелие или на развитие грамотности, влияния последней на заработную плату и на продуктивность труда и т. п. Явления человеческого общежития — социальные явления,—это несомненная сфера приложения статистического метода, область, где он безраздельно господствует, как единственный способ хотя бы приближенно-точного, количественного определения и выражения закономерностей и

причинных зависимостей. Отсюда все те многочисленные определения статистики и статистического метода, примером которых является определение Гильдебрандта: «искусство измерения политических и социальных явлений». Отсюда все процитированные выше соображения Эттингена, относящиеся только и исключительно к явлениям общественной жизни. Даже и для Лексиса, основоположника современной статистической теории, задача статистики—«при помощи точного метода учитывать и исследовать с о ц и а л ь н ы е явления».

А между тем, очень немногих справок достаточно, чтобы убедиться в том, что сфера приложения статистического метода отнюдь не ограничивается одними только общественными явлениями, вообще, не ограничивается явлениями человеческого общежития. Общеизвестный факт, что такая чисто-физическая наука, как метеорология, никогда не оперировала и не могла оперировать иначе, как статистическим методом. Не приходится останавливаться на роли статистического метода в таких областях прикладного естествознания, как медицина с санитариею, или агрономический эксперимент. Не приходится напоминать о роли статистического метода в антропологии, изучающей изменчивые и, никаким другим путем не уловимые, признаки человеческих рас. Во всей современной биологии статистический метод «играет не менее существенную роль, чем в обществоведении, причем весьма характерно, что целый ряд существеннейших приемов современной математической статистики выработался как раз на почве статистико-биологических исследований» (Žižek). Применение в сферах зоологии, ботаники, той-же антропологии, статистических приемов позволило поставить на новые, гораздо более твердые основания изучение рас или «биологических видов», исследование законов наследственности и естественного подбора, — вообще, всех тех сторон органической жизни, где играют роль индивидуальные вариации; достаточно напомнить о роли, так называемой, «вариационной статистики» в деле изучения «трансгрессивной изменчивости», проявляющейся не в обязательных для всех единичных экземпляров известной биологической разновидности формах, а только в средних величинах; или о статистических кривых, как способе выяснения чистого или, наоборот, смешанного характера растительных, животных или человеческих рас. Еще раз: значение статистики для современной биологии вытекает из того, что последняя широко заинтересовалась, в последние десятилетия, не одними только о б щ и м и, р о д о в ы м и или видовыми признаками, присущими к а ж д о м у экземпляру данного рода или вида, но и признаками и н д и в и д у а л ь н ы м и, в а р и и р у ю щ и м и от случая к случаю, только в средних выводах подчиняющимися известным закономерностям и выявляющими известные причинные соотношения. «Везде,—говорит А. А. Чупров в своих «Очерках по теории статистики»,—где мы проходим к убеждению, что непосредственно интере-

сующие нас явления должны быть рассматриваемы как сводный результат необозримо большого числа трудно уловимых раздельных процессов, статистическая точка зрения неминуемо ложится в основу нашего образа мышления и работы». В физике успехи новейшего эксперимента доказали реальность мельчайших частиц—атомов, электронов и т. п.—раз это так, то «статистическая точка зрения... становится необходимостью, в силу фактической невозможности следить за перемещениями всех этих мириад частиц». Сходным путем статистические приемы проникают даже в такую—казалось бы—бесконечно удаленную от всякой статистики сферу, как астрономия: они применяются здесь «во всех тех случаях, где астрономам приходится иметь дело с чрезвычайно большим числом» небесных тел, «и они... ищут понимания наблюдаемой картины в ее целом на почве тех-же представлений и приемов, которые лежат в основе статистической теории газа» [1]).

К сказанному только-что, в виде цитат из «Очерков» А. А. Чупрова, я сделал бы только одну небольшую оговорку—именно о роли «статистического метода» в теоретической физике Да—о «статистической точке зрения», «статистических приемах», «статистической статике» и т. п. в теоретической физике, в самом деле, говорят [2]). Говорят о специально изобретенной, для исследования известных категорий явлений, «особой науке, которая не преследует задачи изучать движение единичных механических систем, а стремится найти свойства весьма многих систем, исходящих из разнообразнейших начальных условий»; эта наука—«статистическая механика, состоящая из «статистической статики», изучающей условия неизменности видимых свойств комплекса, несмотря на движения индивидов, и «статистической механики», вычисляющей постепенные изменения этих свойств, при отсутствии условий их неизменности (Boltzmann). Однако, такое словоупотребление едва-ли вполне соответствует существу статистического метода. В основе этого последнего лежит не только ф а к т с у щ е с т в о в а н и я единичных объектов, но лежит, во всяком случае, с т а т и с т и ч е с к о е н а б л ю д е н и е; из подсчета данных массового наблюдения получаются массовые цифры, в которых находят себе выражение те или другие статистические правильности и причинные зависимости. В «статистической механике» статистического н а б л ю д е н и я нет; существует некоторая, пусть даже экспериментально-доказанная, гипотеза, и з н е е, а не из каких-либо конкретно-установленных и суммированных данных массового наблюдения над частицами газов, — получаются выводы, путем приложения принципов и вычислительных приемов теории вероятностей. Значит, в теоретической физике мы имеем дело, в сущности, не с о статистическою точкою зрения, а с точкою зрения чистой теории вероятностей, применяемой на основе некоторой чисто-теоретической (хотя бы—повторяю—и подкрепленной результатами эксперимента), именно атомистической гипотезы.

Сказанное нисколько не мешает тому, что в чрезвычайно широкой сфере, хотя бы биологии, мы имеем дело, действительно, с о стати-

---

[1]) См. также его речь „Закон больших чисел в современной науке". Статистич. Вестн., 1914, кн. 1 и 2, стр. 1—22.

[2]) См. напр. интереснейший этюд Boltzmann'a о „развитии методов современной физики в новейшее время" в его „Populäre Schriften", Wien, 1905.

статическим методом и со *статистической* точкой зрения; со статистическим методом во *всех* его фазах, начиная с начальной стадии—массового наблюдения; не мешает, вообще, тому, что сфера приложения статистического метода выходит бесконечно далеко за пределы наук, изучающих явления человеческого общежития. В чем-же, спрашивается, дело? *Где и когда*, при каких условиях находит себе применение статистический метод? Почему одни категории явлений, в частности, вся, вообще, широкая область общественных наук, допускают применение одного только статистического метода; другие требуют применения иногда статистического, иногда других методов, в частности, обычной индукции, исходящей из единичного наблюдения или эксперимента, а еще другие не нуждаются вовсе, в какой-бы то ни было мере, в применении статистического метода?

Чтобы вполне отчетливо разобраться в этом вопросе, нужно взять за исходную точку *характер тех причин*, которые обусловливают каждую данную категорию явлений—в частности, взаимоотношение *постоянных* и *случайных* причин. А к этому последнему вопросу трудно подойти иначе, как от основного понятия *случая*, «случайного» явления.

Нужно-ли, спрашивается, задаваться выяснением этого последнего понятия—понятия «случая» и «случайной причины»? Для меня лично это большой вопрос. Вся теория вероятностей, например, для Бертрана, ничто иное, как учение о «законах случая», — а, между тем, он даже не пытается дать его определение. Отвергая определение случая как «антитезы всякого закона», он, со своей стороны, «не предлагает никакого другого». «Нужно-ли,—спрашивает он сам себя,—отвлечь химика от его печей, чтобы требовать от него объяснения существа материи? Нужно-ли начинать изучение принципов передачи силы с определения электричества»? При отсутствии отчетливого определения предмета можно, все-таки, рассуждать о нем без всякой двусмысленности—«sur un sujet vaguement défini on peut raisonner sans equivoque, и в частности, «слово случай, понятное само по себе, вызывает в уме совершенно ясное представление» [1]). Несомненно, что это слово вызывает совершенно ясное представление и в уме каждого, приступающего к чтению этой книги, и, вообще, к изучению статистической теории.

Но уже если задаваться целью дать определение «случая», чтобы от него перейти к понятию «случайной причины», то дело оказывается не столь простым. И в логике, и в теории вероятностей, которая, ведь, вся зиждется на этом именно понятии, мы встречаемся, прежде всего, с чисто субъективным пониманием. Для Юма, для Лапласа, случай—просто выражение нашего незнания. На той-же точке зрения

---

[1]) **Bertrand.** Calcul des probabilités. Parie 1889. Введение (Les lois du hasard), стр. 41.

стоят и многие из современных математиков. По определению, например, проф. А. В. Васильева, в его «Лекциях» по теории вероятностей, случай—только «мера нашего незнания»; случайные явления—просто «те, законов которых мы не знаем»; с научной точки зрения разницы между случайным или «вероятным»—и достоверным событием нет; «разницу между ними полагает только наше незнание» [1]). По определению Czuber'a, в его известной Wahrscheinlichkeitsrechnung, случай—это «те изменяющиеся условия, которые, в их непрерывной изменчивости, не поддаются нашему познанию»; случайные события—это такие, «бытие или наступление которых не может быть с достоверностью выведено из известных нам условий или предпосылок», и, таким образом, «слово случай отнюдь не отрицает причинной связи,—употребляя его, мы только признаем, что эта связь, в данном случае, либо, вообще, не поддается познанию, либо настолько сложна, что мы не можем пойти дальше простого ее констатирования». В этих последних словах к чисто субъективному пониманию привходит уже и некоторый объективный элемент—сложность связи, или даже просто непознаваемость. Тем не менее, и с этими оговорками определение Czuber'a остается еще слишком широким. К такому определению или пониманию, может быть, можно придти, если исходить от уже готового представления о массовом явлении, в котором комбинируются известные постоянные причины с неопределенным множеством причин «случайного» характера; при таком подходе можно, в самом деле, признать, «случайным событием» обвинение или оправдание подсудимого—пример, приводимый проф. А. В. Васильевым в цитированном выше месте его лекций. Но как исходная точка, приведенные определения представляются явно недостаточными. Неужели, в самом деле, все, что не поддается нашему познанию,—все, чего мы, с достоверностью, не можем вывести из известных нам посылок, будет «случайным событием» или проявлением случая? Если взять поступки любого человека в течение дня, начиная от момента пробуждения и кончая отходом ко сну; взять все эти поступки в их конкретной обстановке,—как он встал, во что и как оделся, что и в каком количестве он ел, куда, зачем и какою дорогою пошел,—очевидно, что мы не отнесем всей этой совокупности поступков человека к числу «случайных» явлений, хотя ни одного из них, в их конкретной реальности, мы не сможем вывести из известных нам посылок. Равным образом, мы не признаем «случайностями» всякого случая выздоровления или смерти больного, всякого случая обвинения или оправдания подсудимого, удачи или банкротства торгово-промышленного предприятия, хотя причины, в каждом из этих примеров, сплошь и рядом «не поддаются нашему

---

[1]) А. В. Васильев. Теория вероятностей. Лекции (лит.). Казань, 1886, стр. 48, 53.

познанию»: самый лучший и опытный врач, сплошь и рядом, не в состоянии сказать, почему его пациент А. поправился, а пациент Б. умер от той же болезни при, казалось бы, совершенно одинаковых субъективных данных и совершенно одинаковых методах лечения. О «случае», случайности, мы будем говорить лишь при известной комбинации обстоятельств. Если человек опоздал куда-нибудь, потому что проспал, а проспал, потому что накануне засиделся в гостях,—в этом мы не усмотрим ничего «случайного»: о случайном опоздании мы будем говорить, если оно обусловлено сходом с рельс трамвайного вагона или разводкой мостов в неурочное время. О случайной смерти больного Б. мы будем говорить, если она обусловлена присоединившеюся к основной болезни простудой от открывшейся форточки, или ошибкой в приготовлении лекарства; о случайном обвинении подсудимого—если оно вызвано внезапным заболеванием опытного защитника или снисходительного присяжного заседателя и заменою первого начинающим защитником «по назначению», второго—более ригористически настроенным запасным. Значит, для того, чтобы мы могли говорить о «случае», должно иметься налицо не только наше незнание, но и еще нечто другое, о б ъ е к т и в н о е: должно быть н е ч т о п о с т о р о н н е е, п р и в х о д я щ е е к нормальному течению событий, — должна быть встреча, с о в п а д е н и е д в у х н е з а в и с и м ы х д р у г о т д р у г а я в л е н и й, с о б ы т и й и л и п р о ц е с с о в. Этот элемент постороннего, привходящего, взаимно-несвязанного имеется налицо и в тех примерах, которыми Czuber иллюстрирует приведенное выше определение случая. Czuber, несомненно, верно понимал, в чем собственно существенный признак «случайного» события, но только не достаточно отчетливо формулировал свою мысль. Один из этих примеров — появление кометы в год особенно жестокой эпидемии: мы имеем здесь совпадение во времени двух абсолютно независимых друг от друга событий. Другой пример — падение кости на то или другое ребро: здесь мы имеем, с одной стороны, данную структуру кости, в силу которой кость не может стать на острое ребро, а должна лечь на одну из шести граней, с очками от единицы до шести, и не может лечь ни на какую грань с семью или с одиннадцатью очками; а с другой,—какие-то совершенно неуловимые, совершенно не связанные с структурою кости моменты, в силу которых кость один раз падает на одну, другой раз на другую грань: привычки данного игрока, случайные обстоятельства, сбусловившие данное движение руки, неровности доски игорного стола и т. п.; и мы н е будем считать случайностью излишне-частый выход того или другого очка, если он обусловлен «случайною» (как ее назовут в просторечии) неправильностью формы или неоднородностью массы самой игральной кости. Значит, основная, существенная черта понятия случая, случайного события, — это «с л у ч а й н о е» с о в п а-

дение во времени двух или нескольких, независимо друг от друга протекающих, явлений, или известной совокупности индивидуальных, «случайных» причин с некоторым комплексом постоянных причин — причин общего для целой серии явлений характера. С этой, наиболее существенной, точки зрения, случай, как его определяет Виндельбанд, — это «совпадение фактов, которые не находятся между собой в отношении причины и следствия и не зависят ни от какой общей причины, — следовательно, между которыми не существует никакой необходимой связи» [1]). Неправильно поэтому, — как подчеркивает Д. С. Милль, — «говорить, что то или другое явление происходит случайно. Мы имеем право сказать лишь так: два или более явления соединены случайно; они сосуществуют или следуют друг за другом только благодаря случайности. Отношение между ними»—этими двумя или несколькими явлениями—«вовсе не зависит от причинной связи: они не связаны друг с другом, как причина и следствие, и в то же время не составляют следствия ни одной и той же причины, ни причин, связанных между собою каким-либо законом сосуществования, ни даже того же самого размещения первых причин» [2]).

С особенною яркостью такое, уже не субъективное, а объективное, в своем основном существе, понимание случая, ныне, повидимому, господствующее в науке, формулировано и развито у Курно. В заключительных положениях к его знаменитым «Основам исчисления вероятностей» понятие случая сведено «ни к чему иному, как к совпадению нескольких независимых друг от друга причин, совокупно вызывающих определенный результат» [3]). Иначе говоря, случай, как он его определяет в специальной главе, посвященной «случаю, физической возможности и невозможности»,—это «явления, вызванные совпадением или соединением нескольких причинно-независимых явлений» [4]). Или, как не менее категорически подчеркивает Курно в другом своем фундаментальном труде—«Essai sur les fondements de nos connaissances et sur les caractères de la critique philosophique», случай — это отнюдь не только выражение нашего незнания, но и объективная идея «комбинации нескольких независимых систем причинностей». Каждое событие, конечно, обусловливается определенными причинами: причины каждого данного последствия образуют «линейные серии», которые могут

---

[1]) Windelband. Die Lehren vom Zufall, Inaug-Diss. 1870, стр. 24.

[2]) Дж. Ст. Милль. Система логики и т. д., пер. под ред. В. Н. Ивановского, М. 1914, стр. 479.

[3]) Цитирую по переводу Schnuse, стр. 217.

[4]) Там-же, стр. 63.

быть «солидарными», т. е. взаимно-влияющими друг на друга, или «независимыми» друг от друга; в этом последнем случае il y a comme deux petits mondes — отдельные линейные серии причин образуют как бы «маленькие миры, в каждом из которых можно наблюдать сцепление причин и следствий, развертывающихся одновременно, не имея между собою связи и не оказывая ощутительного влияния друг на друга». Пока эти независимые серии не скрещиваются — случая нет, как бы сложно и как бы ни было нам неизвестно сцепление причин в пределах каждой данной серии. Случайные события — это «события, вызванные комбинацией или встречей других событий, принадлежащих к независимым друг от друга сериям». Такая встреча—добавлю от себя —в одних случаях может порождать совершенно новые, если можно так выразиться, гетерогенные события; в других—«случайное событие» сводится к самой встрече, которая почему-либо обращает на себя наше внимание. Шальная пуля, попавшая в случайно проходящего, или ломовой извозчик, задавивший на-смерть знаменитого Кюри—примеры первой категории: встречи двух совершенно друг от друга независимых рядов событий вызвали совершенно новые события—смерть прохожего или смерть Кюри. Встреча, во время прогулки, с царем, или появление кометы в холерный год—примеры второй категории; и в том и в другом случае не было ничего, кроме встречи, совпадения во времени и в пространстве, не вызвавшего никаких объективных последствий, а только, почему-либо, обратившего на себя наше внимание.

Возвратимся, однако, к Курно. Для него сущность понятия случая—в совпадении или встрече двух независимых серий причинностей,—«в этом смысле правильно сказать, что случай управляет миром». Если взять такое явление, как движение планетной системы: чтобы оно получило свой данный, конкретный вид, требовалось а) действие известных механических сил и законов, но, кроме того, б) и некоторое начальное положение частей материальной системы, сложившейся в форму нашего мира. Совпадение того и другого не было необходимым, и, следовательно, оно должно быть рассматриваемо как тот элемент случая, благодаря которому наш мир получил свою конкретную форму. Случай сыграл, значит, свою роль даже в этом, так сказать, начале всех начал. А затем роль его, понятно, растет по мере усложнения явлений, — с переходом «от логического и математического порядка к физическому и механическому—к растительному и животному миру—к человеку и к царству исторических явлений». И везде, во всех сферах и областях, сущность дела—в встрече событий, принадлежащих к независимым сериям причин, а не в нашем незнании; встреча земли с кометою «не потеряла бы характера случайной причины, даже если бы астрономы уже сейчас могли вычислить время встречи»; случай «не проистекает от нашего незнания мировых законов; отношения случай-

ности существуют между самыми вещами, и роль его не уменьшится по мере расширения нашего знания» [1]).

Не умножая литературных справок, остановлюсь еще только на носящей тоже строго объективный характер, но дающей гораздо более исчерпывающий анализ данного вопроса, схеме Poincaré. Он подводит всю несметную массу случайных явлений под три основных типа, из которых только один, т р е т и й по счету, совпадает с «случаем» в понимании Курно: «взаимодействие двух, казалось бы, совершенно чуждых друг другу сфер», при котором ничтожное изменение условий может один раз привести, другой раз не привести к такому взаимодействию; ничто—подчеркивает Пуанкаре—не дает нам возможности предсказать то или другое,—это мы и называем случаем». Однако, этим типом (пример—падение кирпича с крыши дома на прохожего) далеко не исчерпывается разнообразие тех явлений, которые мы подводим под понятие случая. Очень часто дело сводится просто к тому, п е р в о м у в перечне Пуанкаре, типу случаев, когда «сложность данного процесса, большое число участвовавших причин, уничтожают для нас возможность обозреть их в совокупности и предсказать результат, хотя бы необходимо вытекающий из их совместного действия» (тасовка карт в колоде!) или к тому, в т о р о м у типу, где «ничтожные вариации в причинах, именно в силу своей ничтожности не поддающиеся констатированию и измерению, могут изменить конечный результат — «случайность» результата равносильна нашей неспособности разобраться в этих условиях и предвидеть результат» (остановка шарика рулетки на определенном поле!) [2]). К этим двум типам, по мнению Poincaré, чаще всего может быть сведен и тот третий тип «случайных» событий, который соответствует схеме Курно. Особое внимание Poincaré уделяет п е р в о м у из своих трех типов. К этому типу он относит, между прочим, «случайное» в истории. И здесь суть дела сводится к тому, что «малые причины», часто не уловленные историею, «произвели большие следствия» («от копеечной свечи Москва сгорела!»). Эту, наиболее интересующую его схему ничтожных причин, приводящих к большим последствиям, Poincaré освещает и под математическим углом зрения. Он приводит ее, именно, в связь с понятием «непрерывности» изменений причины, которым отвечают «перерывы» в наступлении следствий; так, при движении шарика рулетки вероятность силы толчка в пределах a и a + e равна вероятности силы толчка в пределах смежного промежутка a + e и a + 2e,—между тем, толчок в пределах первого интервала дает остановку на красном, в пределах второго—на черном поле; в первом случае—выигрыш, во втором—проигрыш. Следовательно, ве-

---

[1]) Cm. M e n t r é, Cournot et la renaissance du probabilisme au XIX siècle. 1908, стр. 193—206.

[2]) Цитирую по Czuber'y, Wahrscheinlichkeitsrechnung, 3-е изд , 1914, стр. 9—10.

роятность всех возможных случаев остановки шарика на черном поле равна вероятности всех возможных случаев остановки его на красном, а потому и то и другое представляет собою одинаково «случайные» события [1]).

Как и Курно, Poincaré настаивает на о б ъ е к т и в н о м значении понятия случая: даваемые теориею вероятностей законы случайных явлений «не перестанут быть верными», и, значит, понятие случая не утратит своего значения, «и в тот день, когда мы лучше узнаем законы этих явлений» [2]). И, однако, и он признает, что в понятии случая есть и некоторый элемент субъективности, в виду относительности обоих формулируемых им основных критериев понятия случайного: и «чрезмерной» сложности, и «неуловимой» малости вызывающих событие причин: по мере прогресса техники исследования, многое из того, чего мы сейчас не можем уловить или раскрыть, поддастся уловлению и раскрытию. И в самом деле, без известного элемента субъективности в определении понятия «случайного» обойтись нельзя. По отношению к тому типу «случая», содержание которого сводится т о л ь к о к встрече независимых событий, этот субъективизм находит себе выражение уже в том, что из всей необозримой массы такого рода встреч мы признаем «случайными» с о б ы т и я м и лишь те, которые почему-либо обращают на себя наше внимание: из необозримой массы случаев сближения между собой небесных тел—такие, как появление кометы в год войны или эпидемии, из необозримой массы наших встреч с незнакомыми людьми—встречи с нужными людьми в нужный момент, или с чем-либо замечательными лицами, и т. п. [3]). А затем, и при формулировке понятий «случая» и «случайного события» в более широком смысле нельзя обойтись без элемента субъективности в смысле незнания, невежества. Поскольку мы имеем в виду «случайные» события, изучаемые статистикой, это представляется совершенно очевидным: зачем, в самом деле, нужны были бы суммарные выводы и грубые обобщения статистики, если бы мы были в состоянии сконструи-

---

[1]) П у а н к а р е, Наука и метод. Пер. под ред. Н. А. Гезехуса, 1910, стр. 61—62.

[2]) Там-же, стр. 50—52.

[3]) Изложенные в тексте соображения относительно „случайных“ событий этого типа—где значит, фактом „встречи“ или совпадения исчерпывается все содержание „случайного события“, очевидно, сближают этот тип с установленным теориею вероятностей понятием „необычайного“ события в более широком, окрашенном субъективностью, смысле этого слова: число комбинаций букв алфавита, практически, неисчислимо, и все они представляются одинаково невероятными,—иначе сказать, вероятности каждой из них одинаково ничтожны. Однако, „за необычайные“ события мы признаем лишь такие комбинации, которые слагаются в слова или фразы и потому заинтересовывают нас. Подобным же образом, и „встречи“ независимых событий необозримы по числу и бесконечно разнообразны по характеру встречающихся независимых событий; однако, случайными событиями мы признаем лишь те немногие из этих встреч, которые почему-либо ее привлекают к себе наше внимание?

ровать каждое единичное событие,—следовательно, «знали» его во всей сложности обусловивших его причин? Но даже оставляя в стороне специально-статистическую точку зрения: то или другое событие произошло благодаря встрече двух независимых друг от друга человеческих «миров»; появление кометы в год войны—встреча «мира» движения кометы с «миром» человеческих событий в данное время, в данном месте. Но если бы мы могли довести наше исследование причинных цепей: в первом случае—до общего праотца двух встретившихся индивидов, или до первой плазмы; во втором—до того первоначального хаоса, из которого выделились и комета, и наша земля, то мы оказались бы в состоянии уловить и ту зависимость, которая связывает встретившиеся «миры» и которая неизбежно должна была привести именно к данной «встрече». Этот элемент субъективности может быть выражен более или менее резко, и обратно, объективная независимость может быть более или менее близкою к абсолютной,—отсюда то, что можно назвать степенями случайности. Что случайность имеет степени—это ясно видно хотя бы на одном из примеров, на которых сам Курно иллюстрирует понятие «случая»: если два брата пали в один день в одном и том-же сражении—это, для Курно, «не чисто случайное совпадение», потому что здесь есть некоторая возможность проследить всю сумму причин, приведших обоих братьев в одну армию или даже в один полк и обусловливших их участие в данном сражении; если они пали в разных сражениях и даже на разных театрах войны—это «результат случая», потому что ряды причин, обусловливших смерть обоих в один день, вполне независимы друг от друга [1]). Между тем, ведь и первое из взятых Курно, в виде примера, событий, требовало еще определенного полета двух пуль или удара двух штыков,—т. е. участия событий, абсолютно независимых от совокупности причин, приведших братьев в данное сражение, а с другой стороны, и во втором варианте, при более полном знании обстоятельств, мы могли бы проследить всю цепь причин, которые должны были привести обоих братьев к участию, в один и тот же день, в двух данных сражениях. Значит, в той или другой степени, но объективные элементы случайного есть в обоих вариантах, как в обоих-же вариантах, только в разных степенях, имеется налицо субъективный элемент—простого незнания полного комплекса причин. То же самое—только с другим подходом—мы можем подметить и в примерах Czuber'a: в игре в кости, при опытах с вынниманиями шаров из урны мы можем отдать себе достаточно полный отчет в том, каковы могли быть те разнообразные серии причин, которые привели к падению кости на определенную грань или к выходу шара определенного цвета,—мы только лишены возможности проследить и вычислить то сплетение причин,

[1]) Cournot, Wahrsch-Rechn., пер. Schnuse, стр. 63—64.

которое, именно в данном случае, привело именно к данному результату. В случае появления кометы в холерный год, мы, с нашими ограниченными средствами познания, вовсе не можем даже представить себе характера причин, приведших к данной «встрече». Еще яснее можем мы видеть нашу неспособность представить себе характер обусловливающих причин на таком, приводимом Bruns'ом, примере «случайного» события, как определенная форма листа у дуба, клена или иной древесной породы. Отсюда проводившееся мною в моих чтениях и проводимое Брунсом противупоставление двух категорий или типов случайных событий: по терминологии Брунса—Zufall wegen voller Unwissenheit и Zufall wegen übergrosser Verwicklung—понятие случая, проистекающее из полного незнания и понятие «случая», проистекающее лишь из чрезмерной сложности, запутанности известных нам обстоятельств. Или как я называю эти два типа: непостижимый — и невычислимый случай, причем, конечно, между чистыми формами того и другого типа можно мыслить любое количество переходных форм и оттенков. «Непостижимый» случай—когда связь между двумя встретившимися событиями не поддается никакому уразумению, «невычислимый»—когда связь, в существе своем, нам понятна, в своих существенных моментах может быть прослежена, и лишь не поддается точному установлению во всех последовательных ее звеньях, и тем более не поддается тому количественному вычислению, при котором могла-бы быть уловлена необходимость именно данного, конкретного совпадения. Падение человека, поскользнувшегося на брошенной им самим апельсиновой корке, встреча на улице двух братьев, одновременно вышедших из своей квартиры, первый вариант убитых в один день братьев у Курно—примеры «невычислимого» случая. Падение человека, поскользнувшегося на корке, брошенной неизвестно кем; смерть Кюри под колесами ломовой телеги; появление кометы в холерный год—это все будут примеры случая «непостижимого». И тут и там—повторяю—есть объективный элемент скрещивающихся рядов более или менее независимых цепей причин; и тут и там есть, только в разной степени, субъективный элемент нашего незнания.

Пойдем теперь еще несколько дальше по тому пути, который должен привести нас к ответу, собственно, на интересующий нас вопрос. Начнем опять с примеров Czuber'a. В примере появления кометы мы имеем дело с двумя единичными событиями: появлением кометы и холерой; в примере с игральною костью—с общими условиями и различными возможностями, комбинация которых обусловливает наступление единичного события,—с формой кости и с конкретными обстоятельствами, вызвавшими результат данного бросания. В этом втором примере «случайное» проявляется, во-1-х, в наступлении каждого единичного события—в выходе, при данном бросании, двойки или шестерки,

мы имеем здесь дело с первым и вторым типами по схеме Poincaré: с запутанностью и «малостью» причин, приводящих к данному определенному результату, в отдельных случаях—и с третьим, или со схемою Курно—(меня толкнули, я оглянулся на вошедшего в комнату человека, и это повлияло на движение моей руки!) и, во-2-х, в совпадении определенного комплекса «случайных», меняющихся от случая к случаю, причин с известным комплексом постоянных свойств игральной кости вообще и данного экземпляра кости—в особенности. Это—разновидность чистой схемы Курно или третьего типа Poincaré; или, как ее определяет Kries: та разновидность случая, когда «единичные события несводимы к общим условиям, причем безразлично, уловимы-ли обусловливающие их общие условия, или нет» [1]). При игре в кости—пусть даже мы оказались бы в состоянии проследить все движение руки бросавшего, обусловившее и м е н н о д а н н ы й конкретный способ падения кости,—они ничем не связаны с формою, равномерностью распределения вещества в кости и т. п. ее постоянными, общими для всех бросаний свойствами; при извлечениях монеты случайности перемешивания и случайности вынимания—если-бы, опять-таки, мы и могли проследить их во всей их сложности и во всей их «малости»,—ничем не связаны с числом шаров, их формой и т. п. постоянными свойствами.

Таким образом, от понятия, просто, «случая» мы приходим к понятию «с л у ч а й н о й» и как его противуположность—«п о с т о я н н о й» п р и ч и н ы, с которыми имеют дело, одинаково, и теория вероятностей, и теория статистики. По правильному замечанию Mansion'a [2]), то общее определение случая, какое дает Курно — определение случая, как результата встречи событий, принадлежащих к независимым целям причинностей, «слишком широко для применений исчисления вероятностей»—равно как и для статистической теории, «ибо здесь всегда приходится предполагать один из рядов сильно преобладающим и слагающимся в определенный порядок (ordonnée), тогда как остальные играют лишь роль рядов légèrement perturbatrices»—рядов причин, лишь слегка нарушающих общую правильность событий. И вот, только что изложенные соображения приводят нас непосредственно от этого, слишком широкого понимания случая, к специально для нас важному понятию с л у ч а й н о й п р и ч и н ы,—или, как их характеризует Бэн, к «комбинациям закона и случая, т. е. к отношениям, которые одновременно и случайны, и причинны» [3]); к тому, более узкому понятию случая, которое превосходно охарактери-

---

[1]) K r i e s, Prinz. d. Warsch-Rechn. 1886, стр. 102—103.

[2]) M a n s i o n, Sur la portée objective du calcul des probabilités. Bullet. de l'Acad. royale de Belgique, cl. des sciences, 1903, № 12, стр. 66—67.

[3]) B a i n, Logique induct. et déduct., фр. перев. Compayré, т. II, 1875, стр. 133.

зовано еще Пуассоном, под углом зрения теории вероятностей: к понятию случая, как совокупности причин или обстоятельств, не влияющих на chance—на объективную вероятность, но определяющих конкретный вид единичного события [1]). По определению того же Курно, «правильными или постоянными причинами мы называем те, всегда наличные, причины, которых влияние простирается на в с ю серию испытаний, тогда как причины, которые и н а ч е влияют при каждом испытании, и для которых н е т в з а и м н о й з а в и с и м о с т и в их влиянии при отдельных испытаниях или случаях, мы называем н е п р а в и л ь н ы м и или с л у ч а й н ы м и причинами» [2]).

С особенною подробностью эта, собственно, сторона вопроса о случае разработана у Виндельбанда. «При всем знании законов,—говорит он,—мы все же не можем уйти от случая, который состоит именно в привхождении не поддающихся предвидению и вычислению (unberechenbarer) побочных условий»,—с л у ч а й н о ю является здесь особая определенность—besondere Bestimmtheit, единичного случая по отношению к управляющему им закону, откуда вытекает наше полное неведение и полная неопределенность по отношению к отдельному случаю» [3]). Понятие «случайного», рассматриваемого с этой точки зрения,—понятие «случайной причины» имеет, очевидно, в п о л н е о т н о с и т е л ь н ы й характер. Если «случайными», с логической точки зрения, называть особые признаки «не сами по себе, а по отношению к общему понятию, в определении которого они не содержатся» [4]), то принадлежность той или другой причины к категории постоянных или, наоборот, случайных всецело будет зависеть от того, из какого «общего понятия» мы будем исходить,—иначе говоря, о т н а ш е й т о ч к и з р е н и я, от того интереса, с которым мы подходим к предмету. В зависимости от этого, один и тот же признак, одна и та же причина может оказаться и в числе постоянных, и в числе случайных. Если мы изучаем зависимость урожая от обработки почвы, то колебания метеорологических факторов—температуры воздуха, количества выпадающей влаги и т. п., будут рассматриваться нами как случайные причины; если мы изучаем влияние метеорологического фактора, то «случайными» будут для нас все различия в способах обработки, вообще, все моменты, кроме интересующего нас, в данном случае, метеорологического фактора.

Сказанным далеко не исчерпывается все, что можно было-бы сказать по поводу понятий «случая» и случайной причины. Но наиболее существенные пункты в достаточной мере выяснены. Всякого рода

---

[1]) P o i s s o n. Recherches s. la proba bilité des jugements etc., 1837, стр. 80.
[2]) C o u r n o t Wahrsch-Rechn. пер. Schnuse, стр. 148—149.
[3]) W i n d e l b a n d. Die Lehren vom Zufall (Inaug-Diss), 1870, стр. 31.
[4]) Там-же, стр. 70.

случайные события в широком смысле слова — это события, по той или другой причине, не поддающейся предвидению, могущие—в нашем представлении—наступить или не наступить, наступить в таком или в другом направлении, повлиять в ту или другую сторону. Объективная основа случайного события — встреча независимых событий, чрезвычайная сложность причин, «малость» тех вариаций в причинах, которые могут вызывать существенные различия в следствиях. По степени участия момента, так сказать, объективной непознаваемости обусловливающих случайное событие причин и, наоборот,—субъективного момента незнания, можно различать «непостижимый» и «невычислимый» случай, по характеру самого случайного события—такие, где случайное событие именно и состоит в совпадении двух независимых событий, и такие, где такое совпадение является источником какого-либо нового, самостоятельного события. Случайные события, случайные причины, в том значении, какое существенно для теории статистики и для теории вероятностей, — «resultierende Wirkung—следствия, вытекающие из неопределенного числа неизвестных причин. Несмотря на это, случайное принадлежит не только к нашему субъективному представлению, но предположение случая всегда включает объективное условие, заключающееся в том, что случайные изменения события, в бесчисленном множестве случаев, компенсируются (sich aufheben), потому что они, в среднем выводе, одинаково далеко отклоняются как в положительную, так и в отрицательную сторону от того значения, которое принимало-бы данное событие без неизвестных побочных причин». И сюда вытекает, что, «во-1-х, случай никогда не может появляться как самостоятельный феномен, а всегда лишь как индивидуальное видоизменение закона определенного явления, и во-2-х, в строгом смысле, за случай признается лишь та часть такого индивидуального колебания, которая поддается элиминированию. Вместе с тем, понятие случая ограничивается тою частью наблюдаемых явлений, изучение которой никогда не могло быть предметом научного исследования» [1]).

Приведенные слова Вундта требуют, однако, существенной оговорки. Дело в том, что в данном смысле о «случайных» событиях, признаках, причинах говорится всегда по отношению к определенному комплексу постоянных причин или условий—говорится, как о совокупности специфических условий и обстоятельств, не связанных с общими причинами и обстоятельствами, но имеющих решающее влияние на конкретный вид единичного случая. Наиболее характерный здесь элемент случайности—не в тех или других уловимых или неуловимых комбинациях причин внутри данного комплекса специфических обстоятельств данного события, а в комбинации этих обстоятельств с постоянными условиями и обстоятельствами, оставши-

[1]) Wundt, Logik. Bd. I, Allgem. Logik und Erkenntnisstheorie, Stuttg. 1907, стр. 435.

мися неизменными для целой серии событий; в комбинации, например, специфических условий и обстоятельств данного броска с постоянными свойствами данной игральной кости. Тоже самое и в области изучаемых при помощи статистического метода явлений реальной жизни. И здесь мы имеем, прежде всего, «случайные» события в первом, наиболее общем, значении этого слова,—события, проистекающие из «случайных» стечений независимых друг от друга обстоятельств: банкротство торгово-промышленного предприятия, благодаря кораблекрушению, крупной растрате, погрому, военным обстоятельствам; разорение крепкого крестьянского двора, благодаря пожару, градобитию, смерти сына-работника и т. п. А затем, так сказать, относительно-«случайные» события, обусловленные определенными комплексами причин, хотя бы в каждом данном случае поддающихся достаточно строгому учету и доступных научному изучению, но «случайных» по отношению к комплексу «постоянных», общих причин, лежащему в основе данного массового явления, как собирательного целого. В этом смысле случайными событиями будут процветание или упадок каждого из существующих в данной стране или области, при данной промышленной конъюнктуре, предприятий, степень хозяйственной «силы» каждого отдельного крестьянского двора, при данной совокупности общих для селения, волости, уезда или группы условий. Если даже каждое из этих единичных явлений, в их конкретной индивидуальности, и может быть прослежено во всей совокупности обусловивших его обстоятельств и подвергнуто научному изучению («монографическое» исследование!), — это все-таки будут «случайные» события по отношению к общей массе предприятий или дворов, потому что специфические обстоятельства, обусловившие их индивидуальную судьбу, не стоят ни в какой связи с общими условиями торгово-промышленной конъюнктуры в стране или с общими условиями крестьянского хозяйства в данной местности. В области социальной и, в частности, экономической статистики яснее, нежели где бы то ни было, видна относительность понятий постоянных и случайных явлений и причин: если мы изучаем, например, зависимость грамотности населения от распределения школ, то такие признаки, как размеры надельного обеспечения, промысловость, племенной состав отойдут в категорию «случайных» причин; если мы заинтересуемся зависимостью грамотности от распространения промыслов, в разряд случайных причин, вместе с надельным обеспечением и племенным составом, перейдет и территориальное распределение школ,—вообще, каждая из перечисленных и любая другая причина, влияющая на грамотность, может, смотря по цели исследования, оказаться в числе случайных или рассматриваться как постоянная причина. Переход тех или других условий из категории постоянных в категорию случайных или обратно, может определяться, затем,

и о б ъ е м о м той массы, которая подлежит исследованию: если объектом изучения будет м о е хозяйство, — его характерные черты будут постоянными, условия урожая, положим, данного года, случайными причинами; если объектом изучения будет хозяйство данной общины,—характерные черты моего индивидуального хозяйства перейдут в категорию случайных причин, а роль причин постоянных будет принадлежать общим земельно-хозяйственным условиям целой общины. Эти последние, в свою очередь, перейдут в разряд причин случайных, если мы распространим наше исследование на целую волость, тем более, на уезд. Подобным же образом, по мере расширения объема исследования, положим, заработной платы промышленных рабочих, из категории постоянных причин в разряд случайных будут постепенно переходить: индивидуальные свойства отдельного рабочего; условия, характерные для известной категории рабочих данной фабрики; еще более общие условия, характерные для фабрики в целом; наконец, условия целой отрасли промышленности—и они тоже перейдут в категорию случайных причин, если мы станем изучать заработную плату в обобщенном для всей совокупности промышленных рабочих виде.

Итак, еще раз: понятие «случайной причины», «случайного» явления в том смысле, в каком с ним имеют дело и статистика, и теория вероятностей, носит чисто-относительный характер; смотря по постановке и цели исследования, в категорию случайных могут отходить какие угодно свойства и причины изучаемых явлений. Но если это так, то положение, формулированное Вундтом под п. 2-м, приходится признать совершенно несостоятельным: в категорию «случайных» событий и причин могут отходить события, свойства и причины, сколь угодно доступные научному изучению и в самом деле подвергаемые исследованию, раз только соответственно изменяется постановка составляющего содержание исследования вопроса. Самое большое, что можно принять из формулированного Вундтом под п. 2-м положения, это то, что «та часть наблюдаемых явлений, изучение которой никогда не может быть предметом научного исследования», носит а б с о л ю т н о-случайный характер,—иначе сказать, никогда не может перейти в категорию постоянных свойств или причин. Но обратное положение совершенно неверно: явления и причины, вполне доступные научному исследованию, могут быть, смотря по обстоятельствам, трактуемы и как постоянные, и как случайные причины.

Итак, мы можем, все-таки, сказать, что при всей важности объективных моментов, придающих событию характер «случайного»,—случая, все-таки, в природе нет. Он существует, все-таки, лишь в нашем представлении, и сущность его сводится к тому, что «совокупность наличных условий, п о с к о л ь к у о н и д о с т у п н ы н а ш е м у з н а н и ю, не имеет своим необходимым последствием ни наступления, ни ненаступления данного события» (Kries). С неменьшею определенно-

стью мы можем, однако, сказать, что случай—как его ни понимать—играет огромную роль если не во всех, то в громадном большинстве областей научного исследования. В явлениях же человеческой, и тем более, общественной жизни, «случай», «случайное» явление или событие, «случайные» причины, если не в абсолютном, то в относительном смысле, играют, можно сказать, решающую роль: явления общественной жизни «в большинстве случаев суть следствия причин, которые, хотя и оказывают влияние на всех лиц данного общества, но, вместе с тем, в отдельных лицах, вследствие причин, не находящихся ни в какой видимой связи с причинами первого рода, видоизменяются в своих последствиях или даже уничтожаются» (Рейхесберг).

Идем, однако, дальше. Мы, значит, окончательно или, во всяком случае, достаточно для нашей цели установили понятия постоянных или общих,—и случайных или изменяющихся, причин. Напомню еще раз, что разграничение признаков и причин между этими двумя категориями—если оставить в стороне те причины, которые я назвал «абсолютно-случайными», представляется в полной мере относительным, завися всецело от направления нашего интереса и от цели нашего исследования. Студент NN плохо занимается,—постоянными причинами будет известная совокупность индивидуальных его свойств, случайными—обстоятельства, способствовавшие или препятствовавшие его успешной работе в каждый данный день и час; студенты данного типа—положим, такого-то университета и факультета, с таким-то средним цензом, плохо занимаются—индивидуальные черты каждого отдельного студента перейдут в разряд случайных причин, а в числе постоянных останутся лишь общие черты данного типа студенчества; студенты данного университета, вообще, занимаются плохо—в разряд случайных причин переходит и факультет, и средний ценз, «постоянною» остается только принадлежность к данному университету; русские студенты, вообще, плохо работают—в разряд случайных переходит и этот последний признак, постоянными признаками остаются лишь черты, общие всему русскому студенчеству. Или последний пример—урожай хлебов. Он зависит от чрезвычайно сложной совокупности причин самых разнообразных порядков: естественно-исторических, как физические свойства и состав почвы, рельеф местности, климат; агрикультурных—система полеводства и севооборот, обработка, удобрение и пр. в данном хозяйстве; от случайностей погоды данного года—количества осадков, чередования температур, ветров, появления или отсутствия вредителей и пр. Условия этой третьей категории мы не можем даже предвидеть; условия второй категории мы знаем, но не можем их определенным образом связать с условиями первой категории. Если мы изучаем урожай в данной местности вообще, к числу случайных отнесутся, прежде всего, все условия второй и третьей категорий, но затем, смотря по тому, с какой стороны мы подходим к изучению уро-

жая, еще и та или другая часть признаков первой группы: если нас интересует влияние почвы—рельеф и «микроклиматические» особенности; если мы изучаем влияние этих последних—рельеф и почва, и т. д. Если мы изучаем урожай данного года—причины третьей категории перейдут в разряд постоянных, причины первой категории могут оказаться частью в числе постоянных, частью в числе случайных, смотря по тому, будем ли мы изучать урожай данного года в общем виде, или в связи с другими факторами. Если нас интересуют урожаи в данном хозяйстве, постоянными сделаются причины первой и второй категорий, случайными останутся только причины третьей группы.

Такого рода комбинации постоянных и случайных причин лежат в основе в с я к о г о реально-существующего объекта научного познания—н е т случайности только в дедуктивных, в частности, в математических выводах и построениях. Если даже взять такую, казалось бы, абсолютно свободную от элемента случайности область, как движение небесных тел,—и здесь к совокупности тех постоянных элементов, которым определяется орбита данного светила, несомненно, привходят и такие случайные причины, как притяжение где-то проносящейся кометы, как распадение какой-либо из малых планет, и т. п. Но одни явления слагаются исключительно или почти исключительно под влиянием одних только постоянных причин,—случайные причины, как в приведенном только-что примере, не имеют на них никакого влияния, или действие их настолько ничтожно, что их можно считать как бы не существующими и совершенно не принимать в расчет. В других случаях сумма случайных причин настолько велика, что они, в каждом отдельном случае, совершенно заслоняют действие причин постоянных. Между этими двумя крайними типами — бесчисленные переходные формы, с более или менее резко выраженным перевесом постоянных или, наоборот, случайных причин, и в соответствии с этим—с более или менее явственно выраженным или, напротив, скрытым за случайными индивидуальными вариациями общим типом, характерным для данной категории явлений. На этом основывается деление в с е х явлений, к к а к о й б ы о б л а с т и о н и н и п р и н а д л е ж а л и, на две группы или категории: явлений т и п и ч е с к и х и явлений и н д и в и д у а л ь н ы х. Первые—это те, где доминируют постоянные, вторые—где решающее влияние принадлежит случайным причинам; первые, значит, такие, которые во всех случаях, единицах, экземплярах, сохраняют однообразный вид, вторые—такие, где каждый случай, единица, экземпляр, имеет свои индивидуальные черты, более или менее резко отличающие его от каждой другой единицы, экземпляра или случая. Очень хорошо охарактеризованы эти две основных группы или категории у Р. М. Орженцкого: «в одних случаях,—говорит он,—выделенный признак (или признаки), свойственный целому ряду объектов, дает достаточное, или почти достаточное для известных целей, позна-

ние группы объектов, объединенных данным признаком или признаками. Остальные признаки каждого объекта группы, как сходные, так и различные, представляются либо вовсе не имеющими значения для данных целей познания, либо имеющими второстепенное значение»; либо — добавлю от себя — они отсутствуют вовсе или решительно не поддаются уловлению, — «и потому оставляются без внимания... В таких случаях выделяемые общие признаки, или признак, называются типическими; образуемое из них понятие—типом, а группа объединенных этим понятием объектов—типичною группой». Обращаю внимание читателя, в приведенной цитате, на слова, подчеркнутые курсивом: «типичность» не предполагает—и этого, как видно из сказанного несколько выше, и нельзя было бы предполагать—совершенного отсутствия «остальных признаков»; для признания объекта типическим достаточно, чтобы эти признаки не имели значения или имели лишь второстепенное значение. На противоположном полюсе—я продолжаю цитату по Орженцкому—стоят такие случаи, где «отвлечение одного или нескольких признаков хотя и характеризует группу объектов, но в степени менее или совсем недостаточной для целей познания; оно не исчерпывает собой всех признаков, которые представляются нам важными для познания соответствующих объектов. Такого рода общие, отвлекаемые от объектов, признаки мы называем не-типическими, а образуемую ими группу объектов—собирательною группой». К первой категории относится значительная часть явлений неорганического мира: свойства золота или ртути; химический состав чистой воды или серной кислоты; движение земли вокруг солнца; чередование прилива и отлива. Движение земли вокруг солнца может, правда, подвергаться влиянию таких случайных причин, как прохождение кометы, распадение малых планет, может быть извержения на солнце,—но эти причины оказывают столь бесконечно-малое, практически нулевое влияние, что их можно абсолютно игнорировать; однажды вычисленный из известной совокупности постоянных элементов закон движения земли вокруг солнца из года в год воспроизводится с абсолютною правильностью, и все моменты этого движения могут быть предсказаны за сотни лет вперед. То же самое можно сказать относительно состава воды или серной кислоты, относительно любого физического опыта: идеально чистой воды не существует, нет и идеально чистого водорода или кислорода; ни один физический опыт не может быть обставлен с абсолютною точностью. И, однако, однажды полученное при известных условиях, из соединения известных простых тел, сложное вещество будет всегда получаться при наличности тех-же условий, и обратно—определенное сложное вещество всегда разложится, определенным способом, на определенные элементы: соединение двух H и одного O, при электрическом разряде, всегда даст воду; из золотой руды, при обработке

ртутью, всегда получится золото; опыт с атвудовой машиной всегда выявит ту же прогрессию ускорения падающего тела. Не идеальная точность эксперимента или наблюдения явлений этой категории, не идеальная чистота химических элементов или соединений, существенно важна только в одном отношении: если бы мы имели уверенность в абсолютной точности наших наблюдений и опытов, или в идеальной чистоте исследуемых веществ, мы, на основании одного наблюдения или опыта, могли бы сделать определенный вывод, верность которого была бы гарантирована для всех возможных случаев. Так как такой уверенности нет, нам приходится делать некоторое число повторных проверочных наблюдений—тем большее, чем меньше уверенность в точности наблюдения или опыта и чем большую роль, вообще, могут играть, хотя бы второстепенные, привходящие влияния. Раз несколько проверочных наблюдений дало достаточно совпадающие результаты, можно считать закон установленным раз навсегда и с уверенностью рассчитывать, что действие его будет проявляться всегда и везде, при каждом будущем случае наблюдения или опыта. Конечно, при изучении животного или человеческого организма, хотя бы даже в основных чертах его строения и его функций, повторные наблюдения нужнее, чем где бы то ни было: единичный случай может быть патологическим или, вообще, резко уклоняющимся от нормы, — следовательно, при изучении даже основных характерных черт строения человеческого или животного организма, или основных его функций, всегда приходится считаться с возможностью более или менее резкого привхождения элемента случайности. Поэтому, при изучении органического мира, в том числе и человеческого организма, уже безусловно необходимо некоторое число повторных наблюдений. Но никто не считает нужным накоплять миллионы наблюдений, вообще, прибегать к массовому, статистическому наблюдению, чтобы установить строение человеческого скелета или нервной системы, чтобы уловить законы дыхания и кровообращения, чтобы выяснить функции печени или поджелудочной железы. Если мы изучаем зоологический вид—лисицу: каждый экземпляр лисицы имеет свои индивидуальные черты,—но для характеристики вида, эти индивидуальные черты несущественны; следовательно, зоолог может дать характеристику данного вида по наблюдениям над немногими лисицами,—немногими, но все-таки не одною, потому что эта одна может быть, как раз, нечистым или патологическим экземпляром.

Все сказанное относится—еще раз—к типическим явлениям, т. е. таким, где более или менее решительно преобладают постоянные причины, случайные же причины не оказывают никакого или, во всяком случае, — никакого существенного для цели нашего исследования влияния, и где, поэтому, результат немногих наблюдений или опытов может быть распространен на все случаи данного

явления. Им противуполагаются индивидуальные или не-типические явления, т. е. такие, где действие постоянных причин маскируется, в каждом единичном случае, влиянием причин, называемых случайными по отношению к этим постоянным причинам, действующих в разных направлениях, нередко (хотя и не всегда) с очень различною силой; где, поэтому, каждый единичный случай, индивид или экземпляр принимает своеобразный, индивидуальный вид. Каковы эти случайные причины,—носят-ли они простой или сложный характер, исходят-ли они извнутри данного случая или экземпляра (индивидуальные особенности человеческого или животного организма!) или приходят извне (профессия, социальное положение, жизненная обстановка),—это безразлично: достаточно этого своеобразия единичных случаев или экземпляров, этой индивидуальной изменчивости, чтобы по одному или немногим случаям нельзя было делать обобщающих заключений о данном явлении.

Не приходится доказывать или подтверждать примерами, что именно таковы все явления социальной жизни—жизни человека в обществе: продолжительность жизни, рост, физическая сила, благосостояние крестьянского двора, заработная плата промышленного рабочего, социальные факторы преступности, судьба промышленного предприятия и т. п. Но аналогичные явления чрезвычайно широко распространены и в других сферах реального мира, в других областях научного познания. Достаточно напомнить о таком явлении, как климат, основные элементы которого определяются совокупностью географических условий каждой данной местности, но реальные проявления которого в каждый данный день и час—температура, осадки, ветер, влажность и т. п., слагаются под влиянием своеобразной совокупности многообразных, до сих пор весьма еще мало изученных, переменчивых влияний; отсюда чисто-«индивидуальный», не-типический характер погоды каждого дня и часа, отсюда совершенная невозможность, на основании наблюдений над погодой одного или немногих дней, делать какие-либо заключения о климате. Таковы второстепенные признаки, отличающие каждый экземпляр каждой разновидности органического мира, начиная простейшими растениями и животными, и кончая человеком,—для человека, например, такие признаки, как рост, объем груди, форма черепа, форма наружного уха, цвет глаз и волос и т. п. На изучении этих второстепенных признаков животных и растений основаны такие операции прикладного естествознания, как улучшающий расу подбор производителей в зоотехнии, как улучшение посевных семян путем селекции, т. е. отбора и высева лучших по своим индивидуальным признакам зерен из предшествовавшего урожая. Всецело на изучении такого рода второстепенных признаков покоится, в области научного естествознания, исследование такого рода первостепенно-важных проблем, как изменчивость и наследственность, как есте-

ственный подбор, как установление, внутри издавна установленных зоологическою и ботаническою систематикою видов растений и животных, так называемых «биологических видов» или подвидов, рас или пород.

Однако, несколькими строками выше мы говорили о лисице, об анатомическом строении и жизненных функциях человеческого организма и т. п., как о типических явлениях,—типических в том смысле, что явление в достаточной мере характеризуется определенною совокупностью постоянных признаков, могущих быть констатированными в каждом случае или экземпляре. Сейчас мы говорим об известных свойствах того же человеческого организма, тех же растений и животных, как о явлении, отражающем, в каждом данном случае или экземпляре, влияние той или другой совокупности случайных причин, а потому индивидуально-изменчивом. Значит, одно и то же явление может рассматриваться и как типическое, и как индивидуальное, смотря по нашему подходу к изучению этого явления, смотря по тем сторонам явления, которые нас интересуют. Заметим это, пока, предварительно,—несколько дальше нам придется вернуться к данному вопросу и отчетливее подчеркнуть решающее значение нашей точки зрения, нашего интереса к предмету. Пока же мы будем, просто, исходить из установленных нами понятий типического и не-типического или индивидуального явления. Первой из этих категорий — типическим явлениям, отвечают родовые понятия, т. е. такие, все содержание которых, т. е. все входящие в состав понятия признаки, в полной мере относятся к каждому единичному случаю и могут быть наблюдаемы на каждом единичном случае, индивиде или экземпляре данного явления. Родовым понятим будет понятие воды—каждая частица чистой воды имеет тождественный химический состав, замерзает и оттаивает при определенной температуре, при нагревании и охлаждении следует определенным законам расширения; лисицы, как систематического вида—каждая лисица характеризуется определенным экстерьером, формой черепа, характером зубов, определенными инстинктами и т. п.; понятие пшеницы — каждое растение, каждый колос и каждое зерно пшеницы характеризуется определенною совокупностью признаков, установленных ботаническою систематикой, и по этим признакам пшеницу всегда можно отличить от всех других видов хлебных злаков; родовым понятием будет человек—каждый человек характеризуется выпрямленностью тела, наличностью двух рук и двух ног, определенною «зубною формулой», определенным циклом жизненных отправлений и т. п. Индивидуальным явлениям отвечают собирательные понятия; один или немного общих признаков имеются налицо в каждом случае, индивиде или экземпляре данного явления; все остальные изменчивы—случайны в установленном нами на предшествующих страницах смысле, и в ка-

ждом случае или экземпляре совокупность этих изменчивых или случайных признаков слагается в своеобразную картину, в особую индивидуальность. Примерами собирательных понятий будут: студент—русский студент—студент-юрист или путеец; крестьянин—русский крестьянин—черноземный крестьянин—пензенский крестьянин—малоземельный пензенский крестьянин—малоземельный крестьянин такого-то уезда, такой-то волости Пензенской губернии; преступник—вор—малолетний вор—привычный малолетний вор—привычный малолетний трамвайный вор, и т. п. В каждом из приведенных примеров, каждое последующее, более тесное по объему собирательное понятие включает в себя, сверх всей совокупности постоянных признаков предшествующего, еще некоторые добавочные признаки, следовательно, обогащается содержанием. Но это нисколько не мешает тому, что к совокупности признаков даже самого тесного по объему собирательного понятия привходит, в каждом единичном случае, еще и более или менее сложная совокупность «случайных» признаков, присущих именно данному студенту-юристу, данному малоземельному крестьянину такой-то волости, данному привычному малолетнему трамвайному вору, придающих каждому из них свою индивидуальную физиономию, делающую их непохожими на других студентов-юристов, других малоземельных крестьян данной волости, привычных малолетних трамвайных воров и т. п. и—скажем сейчас же—лишающих нас права от наблюдений над одним или над немногими студентами-юристами, малоземельными крестьянами, привычными карманными ворами, делать какие-либо обобщения, относящиеся ко всей совокупности подходящих под признаки данного собирательного понятия единиц.

Итак: типическим явлениям отвечают р о д о в ы е понятия, явлениям индивидуальным или не-типическим — с о б и р а т е л ь н ы е понятия. Известные категории объектов могут рассматриваться т о л ь к о как типические явления,—следовательно, по отношению к ним возможны т о л ь к о родовые понятия,—таковы: вода, ртуть, золото и т. п. Другие—в частности, более или менее все те, с каким имеет дело социальная статистика, могут рассматриваться т о л ь к о как индивидуальные или не-типические,—следовательно, по отношению к ним возможно конструировать т о л ь к о собирательные понятия,—таковы, например, продолжительность жизни человека, благосостояние крестьянского двора, строй промышленного предприятия и т. п. Наконец, очень многие объекты, смотря по точке зрения, могут рассматриваться и как типические, и как не-типические явления, следовательно, могут дать содержание и для родовых, и для собирательных понятий. Мы можем рассматривать пшеницу как систематический вид—в таком случае понятие пшеницы будет родовым—в него войдут только такие признаки, какие присущи всякой пшенице. Но мы можем, под практическим или под научным углом зрения, интересоваться такими признаками,

как длина колоса, число зерен, их величина, окраска, тяжесть,—в таком случае пшеница станет для нас собирательным понятием, с некоторым числом общих и с некоторым числом индивидуально варьирующих, от экземпляра к экземпляру, признаков. Мы можем рассматривать человека с точки зрения зоологической систематики, как определенный вид,—в таком случае понятие человека будет родовым, и в него войдут исключительно такие признаки, которые присущи каждому представителю человеческого рода (за исключением уродов); и можем рассматривать его под антропологическим углом зрения, и тогда человек, как представитель известной расы, составит содержание собирательного понятия, с некоторым числом общих и, опять-таки определенным комплексом варьирующих, от экземпляра к экземпляру, признаков. Или обобщая: родовое понятие превращается в собирательное, если в интересы исследователя входят, кроме общих для всех случаев, индивидов или экземпляров, еще и индивидуальные, изменчивые признаки; и обратно,—собирательное понятие превращается в родовое, если эти индивидуальные, изменчивые признаки внимания исследователя к себе не привлекают, а интерес его сосредоточивается на одних только общих признаках. Чем больше этих последних, тем родовое понятие богаче содержанием, и оно тем беднее содержанием, чем их меньше. За известными пределами—если, например, за последовательным отметением всех конкретизирующих признаков останется, скажем, один общий признак, родовое понятие переходит в более или менее бессодержательное обозначение и утрачивает интерес для научного исследования,—таковы, например, понятия: «студент», «прислуга», «солдат» и т. п. Такого рода объекты изучаются более или менее исключительно под углом зрения собирательных понятий,—интерес исследователя неизбежно обращается к индивидуально-варьирующим признакам.

Типические явления и отвечающие им родовые понятия, со всеми признаками, входящими в их содержание, изучаются путем наблюдения или эксперимента над более или менее незначительным числом случаев или единиц — таким числом, какое окажется достаточным для проверочных целей. Из немногих случаев, единиц или экземпляров конструируется родовое понятие, которое может быть распространено на все случаи, экземпляры или единицы данного явления. Собирательное понятие может быть выведено только из массы единиц или случаев, из некоторой совокупности: в массе, в совокупности, взаимно сглаживаются и уравновешиваются индивидуальные особенности и выражающиеся в них случайные причины, и выявляется общий тип, закон данного явления, отражающий влияние лежащего в его основе комплекса общих или постоянных причин. Из массы наблюдений может быть конструировано, например, собирательное понятие студента-юриста или путейца — его, так сказать, коллективная интеллектуаль-

ная и духовная физиономия; собирательное понятие продолжительности жизни человека вообще, в частности русского человека, принадлежащего к определенной социальной категории; собирательное понятие крестьянского земледельческого хозяйства данной губернии, или данной волости, или данной племенной, либо вероисповедной группы. Интеллектуальная и духовная физиономия единичного студента или немногих студентов, продолжительность жизни одного или немногих людей, состав и характер хозяйства единичных крестьянских дворов не могут ничего дать для познания соответственных явлений в целом и для установления соответственных собирательных понятий, потому что каждый единичный случай, под влиянием определенного комплекса случайных причин, может сколько угодно далеко отклониться от того вида данного явления, который отвечал-бы действию совокупности общих или постоянных причин.

Вот, индивидуальные или нетипические явления, с отвечающими им собирательными понятиями, поддающиеся изучению только в м а с с е, в более или менее значительных совокупностях, представляют собою сферу приложения статистического метода; иначе говоря — явления, слагающиеся из р а з н о о б р а з н ы х по своим индивидуальным признакам отдельных случаев или единиц, — поскольку притом н а с и н т е р е с у ю т именно эти, варьирующие от случая к случаю, признаки, а не общие всем случаям признаки или свойства. После сказанного выше нет больше надобности распространяться о том, что с такого рода нетипическими или индивидуальными явлениями и отвечающими им собирательными понятиями мы встречаемся не только в мире общественных явлений (что не мешает человеческому общежитию быть сферою бо́льшего, чем где-либо преобладания т а к и х явлений и таких понятий), но и, если не во всех, то, во всяком случае, в значительном большинстве областей, изучаемых естествознанием. Следовательно, область применения статистического метода выходит далеко за пределы явлений человеческого общежития и изучающих эти явления социальных наук. За исключением известных категорий явлений, стоящих на крайних полюсах абсолютной типичности, либо абсолютной индивидуальности, по отношению ко всей остальной массе явлений решает т о ч к а з р е н и я, наш интерес к предмету изучения: одни и те же явления, смотря по точке зрения и интересу, могут быть трактуемы и как типические, и как нетипические; по отношению к одним и тем же явлениям могут быть конструируемы и родовые, и собирательные понятия, одни и те же объекты могут быть изучаемы и статистическими и не статистическими приемами. Это относится одинаково и к человеку, как зоологической разновидности и объекту антропологического изучения; к пшенице или овце, как зоологическим и ботаническим видам и как объектам селекции; и, положим, к тем мелким небесным телам, которые

известны под названием малых планет. В этом последнем примере решающее значение точки зрения, так сказать, относительной индивидуальности,—решающее значение характера нашего интереса к предмету проявляется с особою отчетливостью. Если нас интересуют общие законы движения планет, мы конструируем их дедуктивно, или восходим к ним путем обобщения данных наблюдений над немногими единичными планетами. Если нас интересует конкретная индивидуальная характеристика такой-то определенной планеты, мы прибегаем к детальному индивидуальному ее изучению. И только если нас интересуют известные закономерности, выраженные, так сказать, в сводном виде, характерные для всей массы малых планет,—только тогда мы прибегаем к статистическому методу. То же самое и в любом другом примере: мы индивидуально изучаем Наполеона или Николая Второго, мы констатируем родовое понятие «человека» из наблюдений над немногими представителями человеческого рода; и мы прибегаем к статистическому наблюдению, когда интересуемся разнообразнейшими индивидуально-изменчивыми свойствами человека, как физическими, так и духовными.

Резюмируя словами А. А. Чупрова, можно, в самом деле, сказать, что «в настоящее время учение о типичности явлений природы и нетипичности явлений человеческого общежития может быть признано окончательно отжившим». В этом Чупров совершенно прав. Но он едва-ли прав, когда идет дальше и отметает самое противоположение типических явлений нетипическим, как критерий, решающий вопрос о применении статистического или других методов научного познания. По справедливому замечанию Борткевича, «явное несочувствие Чупрова к этой концепции», исходящей от Рюмелина и других немецких теоретиков середины прошлого века, основательно лишь «постольку, поскольку ее связывали с представлением, будто явления природы по существу типичны, а явления человеческого общежития по существу не типичны» [1]),—но никоим образом не тогда, когда А. А. Чупров отвергает самую конструкцию. «Если,—говорит Чупров в ответ на приведенное замечание Борткевича,—разорвать связь с антитезой «природа—человеческое общежитие», то что же останется в антитезе «типичное—нетипичное», имеющего хоть тень касательства к определению задач статистического описания? Разве же статистическому счету подвергаются исключительно или хотя бы преимущественно объекты нетипические? Статистика подсчитывает интересующие нас объекты, ни мало не заботясь о том, сходны эти объекты в остальных отношениях, кроме тех, что служат основанием для отнесения их к одной «категории»—типичны они или индивидуальны. Будь все новорожденные младенцы одного пола схожи друг с другом, как две капли воды,—это ни

[1]) Борткевич. Задачи и концепции научной статистики, Журн. Мин. Нар. Просв. 1910, февраль, стр. 348.

на йоту не убавило-бы интереса к знанию их числа и не избавило-бы от необходимости их учета» [1]).

Однако, даже и этот пример не подтверждает мысли А. А. Чупрова, а опровергает ее: поскольку научная статистика интересуется счетом рождений того и другого пола, она интересуется им именно потому, что распределение рождений по полу—явление, в высшей степени индивидуальное. Если-бы в каждой семье рождалась одинаковая пропорция мальчиков и девочек, для установления этой пропорции не было бы надобности в статистическом счете. Этот последний становится необходимым только потому, что в отдельных семьях мальчики и девочки рождаются в самых разнообразных комбинациях, и только массовое наблюдение может уяснить нам как массовую же пропорцию мужских и женских рождений, так, до некоторой, по крайней мере, степени, и различные влияющие на нее моменты. Если же от этого частного примера обратиться к общему положению, формулированному Чупровым, то приходится, конечно, согласиться с тем, что «статистическому счету» могут подвергаться и действительно подвергаются и типичные, или рассматриваемые как типические, объекты: пуды пшеницы или чугуна, десятины пашни или сенокоса, двигатели или рабочие машины определенных категорий, наконец, просто, люди при суммарных учетах населения. Но, поскольку «статистический счет» имеет, в самом деле, научно-статистическое значение, — необходимость в нем всегда вытекает из того, что известные, от случая к случаю изменяющиеся числа «типических» объектов входят в число интересующих статистику признаков совсем других, уже не-типических объектов, которые и являются действительным предметом статистического изучения: пуды чугуна или пшеницы учитываются, как варьирующие признаки промышленных или сельскохозяйственных предприятий, десятины пашни—как варьирующие признаки крестьянских дворов, и т. п., и т. п. Поскольку же «статистический счет» производится с административными или деловыми целями,—с этой точки зрения, в самом деле, важное значение имеют, просто, числа людей, десятин, пудов разных товаров и продуктов, совершенно независимо от типичности или нетипичности; постольку он не представляет интереса для статистической теории и не имеет никакого отношения к вопросу о существе и пределах статистики, как научного метода. По совершенно правильному замечанию М. В. Птухи, «при изучении типических явлений на первый план выдвигается установление типа и типических признаков, разделение рода на виды и их классификация. Подсчет объектов познания в науке, имеющей дело с типическими явлениями, как таковыми, может играть лишь второстепенную роль, и он всегда имеет побочное значение...

---

[1]) Очерки по теории статистики, 2-е изд., 1910, стр. 98, примеч.

Хотя указание числа объектов и имеет некоторую познавательную ценность, однако, само по себе это знание во всяком случае не может претендовать на имя «науки», так как под наукой всегда разумеют нечто большее, чем ряд абсолютных и относительных чисел». «Создать науку,—заключает М. В. Птуха,—на основании образования статистических совокупностей, как таковых, для царства типического, не представляется возможным» [1]). Относясь, собственно, к статистической «науке», как ее хочет конструировать М. В. Птуха [2]), это замечание тем более правильно по отношению к статистическому методу: статистике, как методу научного исследования, с типическими явлениями делать нечего.

Как бы то ни было—вопрос, собственно, о сфере применения статистического метода решается очень просто и очень широко: как правильно формулировал еще Курно [3]), теория статистики или статистический метод «применим к явлениям как физического, так и нравственного и политического мира, так что в этом смысле к области статистики относятся и явления небесные и атмосферические, и явления животного мира, и еще более сложные явления общества, взаимные соприкосновения индивидов и народов»,—все это постольку, поскольку каждое данное явление характеризуется изменчивостью, разнообразием индивидуальных свойств отдельных случаев или единиц, и поскольку интерес исследователя направлен именно на эти, изменчивые или случайные признаки; поскольку мы, притом, интересуемся ими не по отношению к определенным индивидуальным объектам, а имеем в виду изучать их в сводном виде, характерном не для единичных случаев, а для целой, более или менее обширной по объекту, так или иначе очерченной, массы или совокупности единиц, слагающих данное массовое явление.

Все сказанное не мешает тому, что явления человеческого общежития остаются тою сферой, где статистический метод находит свое преимущественное применение, — где значение его, как орудия, если не точного, то до известной степени приближающегося к точному, знания исключительно важно и велико. В то время, как в области естествознания массовое наблюдение является одним из возможных методов точного научного исследования, применяемых лишь при разрешении некоторых, определенных проблем,—в области явлений человеческого общежития это единственный метод количественного изучения и приблизительно точного, могущего притязать на известную степень объективности, анализа, чем и объясняются,—замечу мимоходом,—те многочисленные попытки сконструировать, в

---

[1]) Птуха. Очерки по теории статистики населения и моральной, стр. 33.

[2]) См. ниже, в гл. 11-ой.

[3]) Wahrsch.-Rechn., перев. Sehvuse, стр. 149.

применении именно к явлениям человеческого общежития, особую статистическую «науку», о которых мне придется говорить в заключительной главе этой книги. Так как преимущественное значение статистического метода для общественных наук—факт, которым никем не оспаривается, и так как собственно по этому вопросу не приходится приводить и каких-либо аргументов в дополнение хотя бы к тем, которые сведены в моей книге «Теория и методы статистики» [1]), то я ограничусь здесь одним лишь кратким резюме большей части аргументов, и лишь на одном из них остановлюсь, в заключение, несколько подробнее. Суть дела сводится к тому, что в области явлений человека в обществе каждый единичный случай любого, можно сказать, явления слагается под влиянием более сложной, нежели в какой бы то ни было другой сфере, совокупности «случайных» причин, а потому нетипичность, индивидуальность явлений проявляется особенно резко. Даже физическая природа человека, как высшего из представителей органического мира, и та отличается особенно сильным проявлением индивидуальности—более сильным, нежели в какой-либо другой области органического мира; если даже это не так в действительности, то, во всяком случае, это так с точки зрения нашего научного интереса: л ю д и, мы больше всего интересуемся л ю д ь м и. Тем индивидуальнее, конечно, его духовная, интеллектуальная и нравственная природа, следовательно, тем индивидуальнее те бесконечно - сложные явления, из которых слагается жизнь человека в обществе, причем ко всем прочим факторам, пересекающимся и переплетающимся в каждом отдельном случае, присоединяется еще новый фактор, по отношению к другим факторам являющийся «случайным»: свободная или нет — это для данного вопроса совершенно безразлично — ч е л о в е ч е с к а я в о л я. Дальнейшим источником разнообразнейших привходящих факторов является факт жизни человека в о б щ е с т в е. Влияние этого фактора—достаточно напомнить об этом читателю—простирается и на физическую природу человека: влияние, как, просто, результирующее из известного комплекса условий жизни в известной общественной среде, так и планомерное и преднамеренное, вытекающее из известных целей организованного общества и проводимое через посредство тех или других мероприятий общественной, в широком смысле слова, власти. Нечего уже говорить о том, что только благодаря жизни в обществе слагается и приняла свою, характерную для каждого данного общества, физиономию, интеллектуальная и духовная культура, во всех ее разнообразных проявлениях, начиная от самых элементарных и кончая самыми высокими. Только в обществе могла сложиться и действительно сложилась хозяйственная и правовая жизнь с вытекающими в той

---

[1]) Стр. 32—35.

и другой сложнейшими взаимоотношениями, слагающимися—каждая их категория—из единичных, бесконечно-индивидуальных случаев Все это влияние общественной обстановки, выступая, по отношению к более или менее общим физическим свойствам человека, в качестве безконечно сложного источника *случайных* причин и влияний, в свою очередь слагается в систему *постоянных* причин, действующих на все данное общество в совокупности или на отдельные его классы или группы,— следовательно, даже при изучении физической жизни и физической природы человека наводит научное исследование на новые точки зрения и ставит перед ним новые задачи, требующие работы статистическим методом,—и в то же время порождает сложную совокупность совершенно новых, не существующих вне сферы человеческого общежития объектов, дающих содержание для всей экономической, «моральной» и культурной статистики.

Такова общеизвестная совокупность обстоятельств, делающих явления жизни человека в обществе сферой, где статистический метод находит себе *преимущественное* поле приложения; заставляющих нас, когда мы мыслим, просто, «статистику», иметь в виду, прежде всего, статистический метод в приложении его в области именно *общественных* явлений; обстоятельств, в силу которых знакомство с статистическим методом, приобретаемое естествоиспытателями лишь по мере надобности и применяемое лишь при разрешении определенных категорий научных вопросов, является *необходимою* составною частью научного багажа обществоведа.

Ко всем этим обстоятельствам привходит, однако, еще одно, на котором стоит остановиться несколько подробнее, — именно, значение статистического метода, как суррогата искусственного опыта, эксперимента, и невозможность этого последнего в сфере явлений жизни человека в обществе. Не приходится распространяться о практической невозможности (разумея под таковою в одних случаях действительную, физическую невозможность, в других—моральную недопустимость), в сфере явлений человеческого общежития, того, что можно назвать, в общем виде, experimentum in anima vili. Подчеркну только *методологическую* невозможность, в этой сфере, таких опытов, которые в самом деле, отвечали бы методологическим требованиям научного эксперимента. Даже, если бы мы могли совершенно свободно задумывать и выполнять опыты,—говорит Дж. Ст. Милль,—мы все-таки находились бы в чрезвычайно невыгодном положении: с одной стороны, вследствие невозможности установить и заметить все факты каждого случая, а с другой,—вследствие того, что (по причине непрерывного изменения этих фактов), прежде чем пройдет достаточно времени для определения результатов опыта, всегда должны каким-либо образом измениться не те, так другие существенные обстоятельства». В конце концов—по соображениям, значит, и физической, и моральной, и ме-

тодологической невозможности искусственного опыта, «мы можем только следить за теми опытами, которые производятся природой и людьми (последними—с какою-либо другою, а не со специально-экспериментальною целью); а в таких опытах мы не можем приспособить к нашим целям наших логических средств, не можем видоизменять обстоятельства, как этого требует процесс «исключения», или «элиминации», к которому сводится методологическое существо научного эксперимента.

Между тем, статистический метод, как оперирующая определенными численными приемами разновидность сравнительного метода, в широком смысле этого слова, дополняет эксперимент в двух отношениях: «во-1-х,—говорит Вундт,—он применим везде, где экспериментальный метод неприменим, и во-2-х, везде, где возможно применение обоих, он служит к заполнению пробелов этого метода». Нас, конечно, интересует, в данную минуту, первый из этих двух случаев. Здесь, с одной стороны, выступает на сцену подчеркиваемая тем же Вундтом полярность между применимостью эксперимента и множественностью наблюдений. «Точное наблюдение,—говорит Вундт,—может двояким образом подходить к исследованию: во-1-х, вмешиваясь и произвольно изменяя свойства предмета или течение процесса, и, во-2-х, сравнивая друг с другом возможно большее количество тождественных или аналогичных явлений». Эти две разновидности—это «экспериментальное» и «сравнительное наблюдение», с разновидностью последнего—статистическим наблюдением. «Из существа экспериментальнаго метода,—продолжает Вундт,—вытекает, что оно, как правило, может довольствоваться сравнительно малым числом наблюдений, тогда как, наоборот, раз эксперимент, по каким-либо основаниям, неприменим, становится необходимым собирание обширного материала сравнительных наблюдений»—т. е. то, что составляет главную принципиальную основу статистического метода». С другой стороны, в смысле своих аналитических возможностей, статистический метод, благодаря той свободе группировки единичных случаев, которая открывается для статистического анализа техникою групповых и в особенности комбинационных таблиц [1]), дает нечто аналогичное эксперименту, но только, так сказать, обращенному: «тогда как при настоящем эксперименте варьируются условия, участвующие в возникновении явлений, при статистическом приеме произвольно комбинируются, in variabler Weise—разнообразными способами, сами явления, чтобы отсюда делать заключения относительно действовавших при их возникновении условий». В этом,—как подчеркивает Вундт,—источник высокой степени законченности статистического метода, ставящей его (это я согласился бы признать лишь с большими оговорками! А. К.) наравне с ме-

[1]) См. мою „Теорию и методы статистики", ч. I, гл. 5.

тодами наблюдения в астрономии или с экспериментальными приемами в физике и химии. В частности, в области общественных наук, статистическое сравнение «играет роль вполне аналогичную экспериментальной проверке в вспомогательных дедукциях» естественно-исторической индукции», причем та «особенность статистического приема, что он группирует факты, по крайней мере отчасти, по произвольно избираемым исследователем основаниям, nach selbstgewählten Begriffen, таким-же образом способствует исследованию, как планомерное варьирование условий при экспериментальном методе» [1]).

Как я мимоходом уже заметил в скобках, я—вместе с Лексисом и другими корифеями статистической теории—никоим образом не решился бы признать статистический метод равноценным естественно-историческому эксперименту. Этому противоречит вся, в конце концов, все-таки очень грубая, методика табличной разработки, даже в лучшем случае—случае комбинационных таблиц, не позволяющая идти в элиминировании дальше немногих из, нередко, огромного числа факторов, влияющих на отдельные случаи изучаемого явления, а поскольку речь идет о социальной статистике,—еще и неизбежная неточность первичных данных, вытекающая из не могущих быть вполне избегнутыми, нередко очень существенных, погрешностей статистического наблюдения [2]). Но это, конечно, для занимающего нас вопроса несущественно: для оправдания совершенно исключительной роли статистического метода в области явлений человеческого общежития достаточно признать — а это признать, конечно, приходится, что в данной области статистический метод является единственным, хотя бы и более или менее грубым, суррогатом, до известной степени дающим обществоведу то, что дает естествоиспытателю искусственно-организованный эксперимент.

Очень подробные соображения, так или иначе привязанные к вопросу о сфере применения статистического метода, мы находим в первом из «Очерков по теории статистики» А. А. Чупрова. Однако, к действительному существу вопроса эти соображения прибавляют немного, как и вообще первый «Очерк» и по моему личному убеждению является наименее ценною частью капитального труда А. А. Чупрова, и со стороны других критиков встретил наименее сочувственную оценку. Я остановлюсь, поэтому, только на некоторых сторонах соображений А. А. Чупрова, и, прежде всего, отмечу ту ошибку в исторической перспективе, в которую он впадает, когда говорит о «совокупностях» и «групповых» (или как я их называю — собирательных) понятиях, как о чем-то новом для теории. В различии этих двух категорий (родовых и собирательных понятий,—говорит А. А. Чупров,—«логика долгое время по возникновении статистических дисциплин не могла разобраться»—она не разбиралась в присущем статисти-

[1]) Wundt, Logik, Bd. III, стр. 105—106.

[2]) См. мою „Теорию и методы статистики", ч. II, гл. 2.

ческим совокупностям различии между массою и составными ее элементами: «традиции было известно знание, приурочивающееся к любому представителю рода в той-же мере, как и ко всякому иному; но знание, которое приурочивалось бы к совокупности, не являясь одновременно знанием относительно индивидов, было ей неведомо»; в частности, и теория статистической науки «просматривала принципиальное различие между отношением группового понятия к охватываемым совокупностью индивидуумам и отношением понятия родового к входящим в его объем единичным представителям рода» [1]). Я не берусь решать, в какой мере это обвинение справедливо по отношению к представителям общей логики. Но по отношению к представителям статистической теории оно, во всяком случае, неосновательно. Уже Кетле отметил своеобразность явлений, изучаемых статистическим методом, хотя и под несколько неправильным углом зрения. Как известно, он противополагал друг другу две основных категории причин, определяющих состояния и поступки человека — причин физического и нравственного порядка. Первые,—полагал он, впадая в этом в существенную ошибку, именно не считаясь с подчеркнутым выше, вполне относительным характером категорий «постоянных» и «случайных» причин и совершенно забывая о приложениях статистического метода в области физических и естественных наук, где о причинах «нравственного» порядка, вообще, не может быть речи,—действуют всегда одинаковым образом: вторые оказывают на явления влияние пертурбационное, видоизменяющее. Закономерность и правильность в большом числе—результат влияния постоянных причин, отклонения отдельных случаев — действие причин случайных. Мы должны поэтому,—говорит Кетле,—и здесь он обнаруживает, очевидно, совершенно правильное понимание различия между групповым или собирательным понятием и характеристикою индивида, — оставить вне нашего рассмотрения изолированного человека и рассматривать его только как частицу вида, группы; снимая с него его индивидуальность, мы устраняем все, что имеет случайный характер; индивидуальные особенности, имеющие малое влияние на массу или вовсе его не имеющие, сгладятся сами собой и позволят схватить общие результаты». В этих словах с совершенною ясностью подчеркнуть своеобразный характер статистики, как метода изучения массовых явлений: метода, который игнорирует «изолированного человека», или в более общей форме — единичный случай или единичный экземпляр, и имеет дело только с массою или группою, иначе сказать, с совокупностью случаев, каждый из которых получает свою индивидуальную физиономию под доминирующим влиянием конкретной совокупности «пертурбационных» или случайных причин. Еще более отчетливую формулировку эта мысль получила у Рюмелина. Он, даже с чрезмерною—как видно из сказанного выше—определенностью, противупоставляет естествознание, как область, где господствуют родовые понятия и постоянные признаки, присущие всем отдельным случаям, наукам общественным, где господствуют понятия собирательные. В этом резком противуположении Рюмелин в полной мере подпадает под всю тяжесть критики А. А. Чупрова. Но самый смысл собирательных понятий, как характеризующих объекты, требующие применения статистического метода, он понимает вполне правильно. В то время, как родовые понятия представляют собой ничто иное, как «понятия о типическом индивиде», и все, относящееся к роду, целиком относится и к каждому отдельному его представителю, «в

[1]) Чупров. „Очерки", 2-ое изд., стр. 92—98.

собирательные понятия группируются различные вещи, объединяемые только каким-либо одним общим признаком»; то, что говорится об объединенной таким общим признаком массе, «вовсе не обязательно распространяется на отдельные единицы, постоянных признаков, в этом случае, вовсе нет, кроме того одного, во имя которого возникло и получило свое обозначение собирательное понятие». Родовое понятие (золото, азот) имеет дело с массами однородного вещества или тождественных (либо принимаемых за тождественные) случаев; собирательное (жители Петербурга, рабочие текстильной промышленности, умирающие в такой-то стране) имеет дело с совокупностью предметов, объединенных по одному или по немногим признакам и во всех других отношениях, может быть, совершенно разнородных. Едва-ли нужна была более отчетливая формулировка основной логической особенности групповых или собирательных понятий, нежели она дана в приведенных словах Рюмелина. независимости единичного случая или индивида, отражающего свою собственную, конкретно-индивидуальную совокупность «случайных» по отношению к составляющим содержание собирательного понятия «постоянным» признакам причин, от действия тех законов и правильностей, которые находят себе выражение в массе. Но если она была нужна—мы, уже во всяком случае, находим ее в известном, постоянно-цитируемом афоризме Лексиса. «каждый отдельный случай—т. е случай смерти, самоубийства, преступления, обнаруживает по отношению к массовому явлению, взятому в целом, такого же рода независимость, какая присуща отдельному случаю бросания игральной кости по отношению к общему результату ста или тысячи бросаний». Повторяю: говорить о принципиальной разнице между родовыми и «групповыми» или собирательными понятиями, как о чем-то новом для статистической теории—несомненная ошибка исторической перспективы.

Остановлюсь, далее, на предлагаемом для характеристики «статистического интереса» критерии времени и пространства. Исходною точкою соображений А. А. Чупрова является здесь известная антиномия номографического или (как его называет Чупров в своих более ранних, немецких работах) номологического и идиографического или онтологического знания: первого—ведущего к познанию вечных законов, имеющих силу всегда и везде; второго—изображающего явления в их индивидуальном, конкретном виде. В чем, однако, сущность «индивидуального»? Индивидуальное—не в «том причудливом сочетании признаков, которые сплетаются в наглядную картину данного индивидуума»: «какою бы сложною комбинациею признаков мы ни характеризовали данный объект, никогда нельзя поручиться, что там или здесь, если не в настоящее время, то в отдаленном будущем, или в глубоком прошлом, эта комбинация не воспроизведется». С другой стороны,—полагает Чупров,—«своеобразность не только недостаточна для индивидуализирования объекта, но и не нужна: пусть даже два куриных яйца будут абсолютно сходны по всем уловимым для нас признакам,—«мы различаем их как два отдельных самостоятельных предмета...; мы в состоянии следить за ними и в дальнейшей их истории, не смешивая одно с другим». Таким образом,—полагает Чупров,—«при определении индивидуума как такового, как отличного от всех иных индивидуумов, не повторяющегося и не могущего повторяться, нельзя опираться на характеристику, бьющую на то, чтобы схватить его своеобразность; такая характеристика недостаточна, с одной стороны, излишня—с другой. Не в ней логическая основа понятия индивидуального, а в приуроченности к определенному времени и пространству» (курс мой, А. К.). Это, правда, лишь «логически-мыслимый предел»

идиографической науки, от которого она «в своем действительном виде держится далеко», интересуясь «не только занимаемым в пространстве местом» изучаемых ею объектов, «но и теми или иными их свойствами—свойствами, общими им с другими сходными объектами, но представляющими для человека особый интерес как раз в данное время, в данном месте» [1]). Таким образом, критерием идиографического знания являются, практически, два момента: индивидуальная совокупность свойств и признаков—и определенность во времени и пространстве. Относительное значение, в каждой данной области знания и в каждой данной постановке исследования, того и другого элемента определяет формы нашего интереса к явлениям в их идиографическом изучении «интерес может сосредоточиться на конкретном образе изучаемого объекта во всем неисчерпаемом богатстве его характерных черт и его «личной истории» Но своеобразие объекта может и не стоять в центре внимания. интерес может фиксироваться лишь на некоторых свойствах объекта, общих ему со многими иными, и приурочиваться к положению объекта во времени и пространстве Интерес к положению может, в свою очередь, носить характер «географического», или общее—топографического, и ценить возможно точное указание координат пространства и времени каждого из рассматриваемых объектов изучения, но может также пренебрегать, помимо своеобразия объектов, и точностью данных касательно их местонахождения, принципиально довольствуясь указанием на сравнительно широкие рамки времени и пространства»—в таком случае мы имеем дело с «статистическим интересом» [2]).

Я не буду входить в исчерпывающий разбор изложенной только что, в существенных чертах, концепции А. А. Чупрова, используемой им, собственно, для построения понятия статистики как идиографической наук и (о чем будет речь в заключительной главе этой книги), но не могущей быть оставленною без внимания и тогда, когда идет речь о пределах и значении статистического м е т о д а. Я должен, однако, отметить, что в литературе статистической теории эта концепция не встретила особенного сочувствия. «Теорию трех интересов»,—говорит Борткевич,—из которых какой-нибудь один яко бы непременно лежит в основе всякой идиографии, нельзя признать удачною. С равным успехом можно было бы конструировать и целую дюжину подобных «интересов» Автору хотелось, очевидно, вызвать в читателе впечатление, что, исходя из общих рассуждений о задачах научного исследования и о двух видах его, исследовании номографическом и идиографическом, мы, так сказать, естественно натыкаемся на статистику, как на одну из (немногих) основных форм идиографии На самом же деле взятый автором курс одною силою логики вовсе не приводит неизбежно к статистике, и в его изложении статистика появляется на сцене, в сущности, без достаточной мотивировки и, во всяком случае, неожиданнее, чем в конструкции Рюмелина и других немецких теоретиков, которые исходят из противупоставления типичного—нетипичному или индивидуальному» [3]). На «некоторую неопределенность» конструкции А. А. Чупрова указывает и М. В. Птуха, в своих «Очерках по теории статистики населения и моральной» [4]). Он подчеркивает, что «главное основание для образования статистической совокупности—наличность определенных признаков у тех или иных объектов, а их смежность во времени и пространстве может служить лишь как добавочная характеристика совокупностей. Возможно,—добавляет Птуха,—представить слу-

---

[1]) Ч у п р о в. Очерки, стр. 71—76.

[2]) Там-же, стр. 88—89.

[3]) Б о р т к е в и ч. Задачи и концепции научной статистики, l. c. стр. 478.

[4]) П т у х а. Очерки, стр. 9—10.

чаи статистического интереса, который вовсе не направлен на точно определенное время и место (отношение полов новорожденных), и для которых эти категории имеют второстепенное значение». Со своей стороны, и я не могу не подчеркнуть, что критерий приуроченности к определенным рамкам времени и пространства, как таковой, не может играть решающей роли при определении ни объема и существа—пусть даже могущей быть конструированной—«статистической науки», ни тем более—сущности и сферы применения статистического метода. При определенной постановке вопроса, данные и выводы статистического исследования могут оказаться, и в самом деле, приуроченными к времени и месту—но это именно только при определенной постановке вопроса: если мы ограничиваемся статистическим описанием явления, или если мы анализируем его применительно именно к данным рамкам времени и места Но такого рода возможность—отнюдь не характерный признак для статистики, как таковой, и в частности, для статистического метода Приуроченная к определенному пространству и времени постановка возможна и в любой иной отрасли научного исследования. ботаник может изучать флору, зоолог—фауну данной местности, скажем, данной речной долины или данного горного хребта, историк может изучать материальную или духовную культуру данной страны, в данную эпоху. При других заданиях «рамки времени и пространства» даются, в сущности, лишь внешними условиями исследования, в частности, характером уже собранного или условиями сбора материала; статистик совершенно так же работает над крестьянским хозяйством какого-нибудь Тотемского или Епифанского уезда, над условиями труда текстильной промышленности Петербургского или Лодзинского района, как естествоиспытатель—над флорою или фауною долины такой-то большой реки, или такой-то малой речки, такого-то горного кряжа и т. п. В таком случае «рамки времени и пространства» важны лишь как предпосылка действия определенных, интересующих нас общих условий: выводы, полученные при изучении крестьянского хозяйства Тотемского уезда, в такой же мере будут подлежать распространению на сходные, по совокупности условий, местности соседних, Вологодского или Никольского уездов, как выводы, полученные на основании данных о флоре и фауне такого-то участка долины большой реки, или долины такой-то малой речки, будут подлежать распространению на другие участки той-же долины или на другие долины малых речек, представляющие достаточное сходство определяющих флору и фауну условий. Еще в других случаях время и пространство и вовсе не будут играть никакой роли, если не считать того, что все, что совершается и существует, существует и совершается когда-либо во времени и где-либо в пространстве В наблюдательном естествознании объектом изучения может быть, просто, флора больших и малых речных долин, лесных и степных местностей, альпийских и субъальпийских горных склонов; или—случаи, где независимость от рамок времени и пространства сказывается еще резче—зависимость флоры от рельефа, почвы, условий орошения и т. п. В области явлений, изучаемых при помощи статистического метода, в частности, в статистике социальной, мы можем сделать предметом нашего исследования особенности мужской и женской преступности, или мужских и женских самоубийств, отношение между посевною площадью и составом семьи, различия в силе репрессии суда присяжных и коронного,—мы можем брать материал для нашего анализа в любых рамках времени и места, лишь бы только имелись налицо интересующие нас явления и условия и были или могли быть сделаны соответственные наблюдения.

Как критерий времени и пространства не имеет решающего значения для постановки проводимого статистическим методом исследования, так он не имеет решающего значения и для сферы приложимости получаемых от исследования

выводов. Правда, очень многие из получаемых статистическим путем выводов действительны, в самом деле, лишь в определенных условиях пространства и времени. Но, во-первых, даже не все: статистика знает и такие положения, которые остаются справедливыми для всякого времени и для всякого места—таково, например, общеизвестное соотношение мужских и женских рождений, или мужских и женских самоубийств,—или зависимость между составом и хозяйственною силою крестьянского двора Во-вторых, поскольку значительное большинство получаемых статистическим путем выводов, в самом деле, действительно в известных рамках времени и пространства, это не составляет специфической особенности именно статистических выводов и статистическим путем полученных правильностей и закономерностей; как подробно развито, напр., у Дж. Ст Милля. это—характерное свойство всякого эмпирического закона, каким бы путем или методом он ни был получен И, в-третьих, как видно хотя бы из соображений того же Дж. Ст. Милля, рамки времени и места важны, и в данном случае, отнюдь не сами по себе, а лишь поскольку к этим рамкам приурочиваются определенные комплексы определяющих конкретную физиономию данного явления причин дело не в том, собственно, чтобы не выйти из соответственных рамок времени и места, а в том, «чтобы не приложить данного эмпирического закона»—в частности, данного статистического вывода, к случаям, отличающимся от первых такого рода обстоятельствами, от которых, в конце концов, зависит самая истинность закона» [1]) И совершенно правильно поступает Бэн, когда настаивает на том, что «производные и тем более эмпирические законы не должны быть применяемы вне известных пределов, относящихся либо к времени, либо к пространству, либо к обстоятельствам» (курс. мой. А. К.) [2]); а из приводимых и разбираемых им на дальнейших страницах примеров (частота самоубийств в Лондоне, соотношение между густотою населения и смертностью) совершенно ясно, что и в тех случаях, когда возникает вопрос о применимости эмпирических законов вне известных пределов места и времени, дело, собственно, не во времени и не в месте, а в наличности тех причин, от которых зависит данная закономерность.

Мало существенного дают, говоря вообще, и подробные соображения А А. Чупрова по поводу образования групп или совокупностей и их количественного определения,—соображения, в которых, по правильному замечанию Борткевича, имеется в виду только один из способов такого количественного определения—«подсчет входящих в состав их единичных случаев», т. е., то, что я называю «групповым подсчетом», и совершенно не затрагивается другой: «сложение того или иного рода величин, характеризующих эти единичные случаи с известной стороны», или, по моей терминологии, «итоговый подсчет» [3]). «По-видимому,—замечает Борткевич по поводу посвященных данному вопросу соображений Чупрова,—обе операции—образования совокупностей и подсчета входящих в них единичных случаев, не представляют с логической стороны ничего загадочного. Тем не менее, автор», т. е. А. А Чупров, «довольно подробно трактует именно о логической сущности означенных операций, как будто поддавшись гипнозу слов «совокупность» и «категорическое исчисление», и видя проблему там, где ее нет» [4]).

Я не могу, с своей стороны, не присоединиться к данной в приведенных словах Борткевича, оценке соображений Чупрова по вопросу, вообще, об обра-

---

[1]) Милль, Логика, пер. Ивановского, стр. 503—505 и 826.

[2]) Bain, Logique, перев. Compayré, стр. 159.

[3]) „Теория и методы", стр. 463.

[4]) „Задачи и концепции", стр. 348—349.

зовании совокупностей. Эти соображения кажутся и мне одним из довольно ярких случаев, где подробные теоретические объяснения и попытки добиться точных определений ни мало не способствуют уяснению и без того вполне ясных вещей

Весьма интересными мне представляются, напротив, соображения А. А. Чупрова по вопросу о статистических совокупностях в той их части, где он противупоставляет совокупностям, которые мы искусственно конструируем для целей статистического изучения, совокупности р е а л ь н ы е, созданные самою жизнью и объединенные не только известными общими свойствами охватываемых ими индивидов, но и реально существующими между ними отношениями. «Когда врач,—поясняет А. А. Чупров,—желающий установить действие нового лечебного средства, сопоставляет смертность для ряда случаев, где оно применялось, с тою, какая имела место раньше; когда биолог, стремясь схватить законы наследственности, сравнивает средний рост детей крупных и мелкорослых родителей,—образуемые ими совокупности не интересуют их сами по себе: они лишь средство к цели, и по достижении этой цели, не сдерживаемые более волею исследователя, рассыпаются на образующие их единичные случаи. Массовое явление здесь — всецело дело наших рук; само по себе, независимо от нашего усмотрения, оно не существует; оно созидается нами правильно и планомерно, в наших видах и целях». Иное в том случае, «когда совокупности, с которыми мы имеем дело, даются нам действительностью, как таковые. Любая из бесчисленных туманностей, которые мы видим на звездном небе; город Петроград, как сложная система взаимоотношений между совокупностью его обитателей; Лесной парк, как совокупность деревьев и кустов, связанных, в силу соседства, общим влиянием и общими условиями произрастания, существуют в природе, как массовые явления, независимые от того, привлекают-ли они внимание исследователя или нет» [1]).

Установление понятия «реальной совокупности», как действительно существующего в реальной действительности объекта статистического изучения, несомненная заслуга А. А. Чупрова. Иное приходится сказать о его попытке разрешить «нелегкую задачу»—дать «точную формулировку логического содержания понятия реальной совокупности». Здесь мы опять имеем случай, когда такая попытка не только не способствует уяснению вполне ясного, в примерах самого А. А. Чупрова, понятия, а ведет лишь к его затемнению. В поисках точной формулировки, А. А. Чупров отвергает предлагаемый Б. А. Кистяковским в его монографии «Gesellschaft und Einzelwesen» критерий «наличности взаимодействия (Wechselwirkung) между входящими в совокупность единицами», — отвергает и предъявляемое Кистяковским, даже признаваемое им за «самоочевидное» требование «однородности» или «сходства» объемлемых совокупностью единиц.

---

[1]) Ч у п р о в, Закон больших чисел в современной науке, Стат. Вестн. 1914. кн. 1 и 2-ая, стр. 13—14.

«На приводимых самим Кистяковским примерах,—говорит он, по первому из этих двух пунктов,—не трудно убедиться, что признака Wechselwirkung еще недостаточно для отличения реальных совокупностей от совокупностей иного порядка. Солнечная система представляет, по мнению Кистяковского, реальную совокупность, а куча песку—нет Но разве между отдельными песчинками не действуют те-же самые силы взаимного притяжения, что связывают в реальную совокупность и тела нашей солнечной системы?» Более того: в реальную совокупность нашей планетной системы мы не вводим временно находящейся в ее пределах кометы, хотя в это время «между нею и остальными элементами системы устанавливается такое-же взаимодействие, как между землей, солнцем, Юпитером и т д. Разница лишь в том, что силы взаимодействия, связывающие землю с солнцем, привязывают землю к солнцу прочно, тогда как комета пересечет этот угол мироздания и, выйдя из сферы солнечного притяжения, унесется вдаль с тем, чтобы, быть может, никогда уже к солнцу не вернуться. По той же причине и кучу песка мы не признаем совокупностью реальной· взаимодействие между отдельными частицами ее есть, но оно не носит такого характера, чтобы обеспечивать длительно принадлежность частиц к одной совокупности; дуновения ветра достаточно, чтобы нарушить связь и рассеять песчинки по лицу земли» «Не бесспорным» А. А Чупров признает и второе требование Кистяковского: «оставляя в стороне запутанные категории обществоведения,—говорит он,—присмотримся внимательнее, как к более простому примеру, к приводимому Кистяковским, в качестве решающего аргумента, понятию «леса». Точно-ли в лес входят только деревья? Разве не входят в него—и не только в данный конкретный лес, но и в понятие леса, как реальной совокупности, кусты, трава и т п, вплоть до фауны леса?. Взаимодействие между деревом и деревом не более, а, пожалуй, даже менее тесное, нежели между деревом и примыкающим к нему кустом ; с другой стороны, «почему два дерева представляются однородными единицами, а дерево и куст или дерево и трава—нет»? И в конечном выводе А. А Чупров «отбрасывает, как лишенное почвы и в то же время слишком расплывчатое, требование однородности единиц, входящих в совокупность», и «за основу определения понятия реальной совокупности принимает наличность между отдельными единицами, в нее входящими, такого рода взаимодействия, которое способно обеспечить длительное существование» [1]): именно момент длительности,—полагает он,—«лежит в основе логической классификации тех групповых понятий, в которые статистика вливает результаты своих исследований» [2]).

Мне кажется, что в данном случае прав не Чупров, а Кистяковский: что отличительным признаком реальной совокупности является не момент длительности (хотя и весьма обычный), а именно момент взаимодействия, как правило, обусловливающий, но могущий и не обусловливать длительности существования, и что, с другой стороны, именно в статистике мы имеем дело исключительно с совокупностями из однородных единиц или экземпляров Остановлюсь, сначала, на этой последней, наиболее простой стороне вопроса. Лесовод, например, школы Г. Ф. Морозова, в самом деле, рассматривает лес, как реальную совокупность—симбиоз древесной растительности с кустарниковою и травяною, с почвою и материнскими породами, с живущею в лесу фауною и т. д.; но статистику с такою реальною совокупностью делать нечего; предполагая техническую возможность статистического счета, он подвергнет таковому, отдельно, хищных млекопитающихся, живущих в лесу, отдельно птиц—вероятно,

---

[1]) „Очерки", стр. 110—114.

[2]) Там-же, стр 110.

каждую из этих *однородных* реальных совокупностей расчленит на еще более однородные — отдельно сосчитает волков и отдельно лисиц, отдельно кротов и отдельно соболей и т. п.; и при всем желании он не сможет статистически оперировать над, пусть даже единою, реальною, совокупностью из деревьев, кустов, травяного покрова, почвы, животных, растений и т. п. Город Петербург для историка или социолога, несомненно, «реальная совокупность», обнимающая и население, и производственную деятельность, и торговлю, внешнюю и внутреннюю, и культурную и политическую жизнь. Но опять-таки, *статистику* с этою многогранною, хотя и вполне реальною, совокупностью нечего делать—он не сможет соединить в единую *статистическую* совокупность живущих в Петербурге людей с постройками, с производимыми и обращающимися в торговле товарами, с выходящими в Петербурге книгами и периодическими изданиями, с преступлениями и проступками, политическими идеями и т. п. Он будет оперировать непременно над отдельными однородными совокупностями, из которых каждая в отдельности будет отвечать понятию совокупности реальной: над населением, рождаемостью, смертностью, производством, торговлею и т. п... Статистика, по самому существу своего метода, может иметь дело только с массами однородных, по той или другой совокупности признаков, объектов, а, следовательно, как бы ни подходить к понятию реальной совокупности с биологической, исторической, социологической, санитарно-гигиенической и т. п. точек зрения, — *для теории статистики* реальная совокупность будет непременно совокупностью однородных по известному признаку объектов.

Едва-ли есть основание придавать значение решающего критерия и моменту длительности. Совокупность не станет более реальной от того, что мы, вместо кучи песку, возьмем кучу булыжника, которой никакой ветер разнести не может, и которая, поэтому, имеет несравненно больше данных для длительного существования, нежели куча песку. И она не станет менее реальной, если мы возьмем прибрежную дюну или песчаную отмель, которую постепенно развевает ветер или которую, может быть, завтра же снесет разлив реки. Несомненно, реальною совокупностью была, на данные несколько часов, та толпа, которая брала Бастилию, или та, которая жгла здание окружного суда 27 февраля 1917 года; несомненно, «реальные» совокупности—те толпы крестьян, которые летом того же года разоряли помещичьи экономии, хотя, быть может, на другой же день входящие в эти толпы индивиды разбивались на отдельные группы, или партии, вступавшие в бой из-за дележа награбленного имущества. И если-бы предположить это технически осуществимым—для историка и социолога было-бы крайне интересно подвергнуть каждую из таких временных реальных совокупностей детальнейшему статистическому анализу. Впрочем, я могу привести пример, где будет на-лицо и техническая возможность статистического учета временных, по самому своему существу, и в то же время, несомненно, реальных, совокупностей: всякого рода съезды статистиков, врачей, криминалистов и т. п., — временные сельскохозяйственные, статистические, кооперативные и т. п. курсы, вроде устраиваемых при медицинских школах или при университете Шанявского. Совокупности участников съездов или слушателей курсов—это будут временные, но, несомненно, реальные совокупности, реальные хотя-бы уже потому, что они так-таки существуют в реальной действительности, а не конструируются нами для целей статистического счета, и, вместе с тем, вполне пригодные для этого последнего.

Я позволяю себе думать, что Чупров, и в данном случае, увлекся, с одной стороны, своим стремлением все свести к простейшим логическим категориям (длительность), а с другой — погрешил слишком упрощенным или, если

угодно, распространительным толкованием понятия «взаимодействие», которого Кистяковский, конечно, не разумел в смысле всегда, везде и во всем мироздании действующих физических и механических законов

Я, со своей стороны, не берусь дать «точной формулировки логического содержания» ни понятия «взаимодействия», ни понятия реальной совокупности. Но думаю, что сущность этого последнего, прежде всего, в реальном существовании совокупности, как таковой, а затем—именно в вытекающем из этого реального существования взаимодействии. С моей точки зрения, реальною совокупностью будет всякая совокупность однородных единиц, существующая в природе, как массовое явление, и в силу этого объединяемая известными взаимными отношениями и вытекающими из них общими свойствами входящих в состав совокупности индивидов. К такому—еще раз подчеркиваю—отнюдь не претендующему на логическую законченность, но, я думаю, ясному для всякого статистика определению необходимо сделать еще одну дополнительную оговорку: что понятие реальной совокупности—весьма относительное, и что совокупности могут обладать весьма различною степенью реальности. «Тифозные заболевания» вообще, тифозные заболевания в России, может быть, даже тифозные заболевания в Петербурге будут совокупностями искусственного характера,—но тифозные заболевания из одного квартала, либо дома, или тифозные заболевания, поступающие в одну больницу, будут носить уже известные черты реальной совокупности, вытекающие, в первом случае, из соприкосновения в момент заболевания, во втором—из общих условий лечения. Рабочие в русской обрабатывающей промышленности, вообще, уже будут некоторою реальною совокупностью, если они, хотя-бы даже неформально, объединены известным классовым единством интересов и политики; рабочие в текстильной промышленности—рабочие Петербурга—рабочие в петербургской текстильной промышленности—квалифицированные рабочие петербургской текстильной промышленности—рабочие такой-то петербургской бумагопрядильни—рабочие такого-то отделения этой мануфактуры—это будут совокупности, очевидно, с последовательно-наростающею степенью «реальности», объединяемые все более и более тесными общими связями и интересами и характеризуемые все большим и большим, по мере перехода от более широких к более тесным объединениям, числом общих условий и свойств. Чем ограниченнее по объему и теснее по непосредственности соприкосновения и силе связи реальная совокупность,—тем больше к статистически уловляемым условиями и признакам данного массового явления, взятого в общем виде, привходит статистически-же уловляемых условий, присущих именно данной, реальной совокупности. Такие реальные совокупности, как березы такой-то рощи, как хризантемы такой-то долины, как форели в таком-то горном ручье, получат при вариационно-статистическом изучении неко-

торую добавочную характеристику к общей характеристике березы, хризантемы или форели, так или иначе вытекающую из специфических условий именно данной рощи, долины или речки. Такие реальные совокупности, как течение тифозных заболеваний в такой-то больнице, или условия труда в такой-то петербургской бумагопрядильне, потребуют дополнительной статистической характеристики к характеристике течения, вообще, тифозных заболеваний, или условий труда, вообще, в русской текстильной промышленности, которая отразит на себе специфические условия лечения, а, может быть, и подбора больных в данной больнице, специфические условия подбора и организации рабочих, поведения предпринимателя и других сторон обстановки труда в данной мануфактуре.

Таким образом, понятие реальной совокупности приходится признать очень существенным для статистической теории. Более того: т о л ь к о з а р е а л ь н о ю с о в к у п н о с т ь ю, мне кажется, можно признать значение самостоятельной логической категории. «Искусственная» или «отвлеченная» совокупность, конструируемая нами для целей статистического подсчета и анализа—это просто синоним определенной множественности, массы, «большого числа»; это н е с у щ е с т в е н н о е с в о й с т в о данного массового явления, а только о р у д и е или с р е д с т в о научного описания и научного анализа. Явления «рождаемость», «преступность», «брачность», «условия труда в текстильной промышленности», «зависимость производительности труда от уровня культурности»—это все суммы, может быть определенного, а может быть и неопределенного числа случаев. Чтобы дать тому или другому из этих явлений статистическую характеристику, мы берем некоторое, так или иначе определенное, большое число, некоторую «совокупность» отдельных случаев или единиц и производим над ними известные счетные и логические операции. Смотря по обстоятельствам, это число или эта совокупность может быть исчерпывающим (население или промышленные предприятия России, крестьянское хозяйство Новосильского уезда, переселенческое движение на дальний восток) или представляет собою лишь некоторую, иногда выделенную по строго определенному плану (как это имеет место при типичном выборочном исследовании), иногда просто так или иначе выхваченную, часть объема данного массового явления.

Таким образом, еще раз: совокупность, поскольку она не является реальной, не представляет собою самостоятельной логической категории. Это—не более, как синоним подсчета или суммирования больших чисел, как характерного для статистики методологического приема,—между тем как реальная совокупность есть именно нечто р е а л ь н о существующее, действительно самостоятельная логическая категория. Может быть не лишне заметить еще, что и «большое число», множественность, характерны не для не-типического явления и не для

собирательного понятия, как таковых. Родовые понятия и типические явления так же предполагают «множественность», как и нетипические явления и собирательные понятия: родовые понятия — человек, золото, вода, только потому и потребовалось и оказалось возможным конструировать, что в природе имеется м н о г о людей, м н о г о золота, м н о г о воды,—если-бы существовал на свете один только человек, не могло-бы образоваться родового понятия. Характерными для нетипических явлений и собирательных понятий большое число, множественность становятся лишь в моменте и з у ч е н и я, а н а л и з а. Родовое понятие может быть установлено, в идеале, путем изучения о д н о г о случая или экземпляра типического явления, и только для целей проверки приходится прибегнуть к наблюдению или опыту над несколькими экземплярами. Сводные свойства собирательного понятия могут быть установлены только путем с т а т и с т и ч е с к о г о и з у ч е н и я, а оно непременно, по самому своему существу, предполагает м н о ж е с т в е н н о с т ь, б о л ь ш о е ч и с л о объектов наблюдения.

Так или иначе — основным признаком, отличающим изучаемые в статистических совокупностях нетипические или индивидуальные явления от типических, собирательные понятия от родовых, является, как выше было отмечено, н е з а в и с и м о с т ь е д и н и ч н о г о с л у ч а я, с о б ы т и я и л и э к з е м п л я р а, управляемого своею собственною, конкретною совокупностью индивидуальных причин, о т д е й с т в и я т е х з а к о н о в и п р а в и л ь н о с т е й, к о т о р ы е н а х о д я т с е б е в ы р а ж е н и е в ц е л о й м а с с е и л и с о в о к у п н о с т и. «Каждый отдельный случай, т. е. случай смерти, самоубийства, преступления, обнаруживает по отношению к массовому явлению, взятому в целом, такого же рода независимость, какая присуща отдельному случаю бросания игральной кости по отношению к общему результату ста и тысячи бросаний». Свойства р о д о в о г о понятия «человек» обнаруживаются на каждом отдельном представителе человеческого рода: каждый человек, если он не урод, имеет две руки и две ноги, определенным образом построенный скелет, определенным образом функционирующую систему пищеварения и кровообращения. То же самое можно сказать о родовом понятии «планета», «лисица», «рожь» и т. п. — каждое из них объемлет определенную совокупность признаков, свойств и правильностей, которые мы сможем констатировать в каждой планете, каждой лисице, каждом экземпляре ржи. Но того же никоим образом нельзя сказать о признаках, входящих в состав таких собирательных понятий, как «студент», «англичанин», «крестьянин черноземного центра» и т. п., или—если выйти за пределы социальной статистики—как определенный «биологический вид» или подвид той же лисицы или той же ржи, как влияние определенного минерального удобрения на произрастание льна или сахарной свекловицы. С о в о к у п н о с т ь к р е с т ь я н черноземного центра

выявляет нам собирательное понятие, объемлющее известный комплекс признаков бытового, культурного, экономического характера—определенный уровень грамотности, известный тип земледельческого хозяйства, определенный уровень благосостояния. Но единичный крестьянин может оказаться исключительно интеллигентным и культурным человеком, может вести совершенно своеобразное по типу земледельческое хозяйство, может быть в десять или в пятьдесят раз состоятельнее или, наоборот, гораздо беднее, нежели отвечало-бы «собирательному понятию» «крестьянина» данной местности. Совокупность экземпляров данного биологического вида, данной породы рогатого скота, данного сорта пшеницы, характеризуется определенным комплексом дополнительных к общим свойствам данного систематического вида второстепенных свойств. Но отличительною особенностью этих второстепенных свойств подвидов, пород, сортов, является именно их «трансгрессивная» изменчивость: эти свойства выявляются именно только в средних выводах и в отвечающих им более или менее типичных экземплярах, отдельные же экземпляры могут весьма далеко отклоняться, по тому или другому, или по нескольким, в исключительных случаях, даже по всем признакам, от типа, характерного для подвида, породы или сорта. Отсюда—необходимость в приложении статистического метода, и в частности—приемов «вариационной статистики», для установления как самого факта существования подвидов, рас или сортов, характеризуемых трансгрессивною изменчивостью признаков, так и принадлежности отдельных экземпляров растений и животных к определенному подвиду или расе; отсюда и не полная достоверность, а только более или менее высокая вероятность тех ответов на последнеформулированный вопрос, какие может давать вариационная статистика: резкое отклонение от типа, характерного для подвида, породы или сорта, во всех или в значительном большинстве входящих в состав данного собирательного понятия признаков, столь же мало вероятно, но все-таки столь же возможно, как и самый неправдоподобный результат тиражей шаров из урны или сдач из колоды карт [1]).

Принципиально иначе ставит вопрос Р. М. Орженцкий. По Орженцкому, «совокупность. представляет собой понятие, состоящее из общего признака, объединяющего единичные случаи, и представления о некотором числе таких случаев» [2]). Это верно, поскольку речь идет о совокупности, как техническом орудии статистического анализа, как об известном числе случаев, взятом для статистической обработки. — но неверно, если иметь в виду «совокупности» в том смысле, как их трактуют Рюмелин и А. А. Чупров,—как самостоятельную логическую категорию. Затем, уже окончательно неверен дальнейший вывод Орженцкого: что «от всякой совокупности можно перейти

---

[1]) О трансгрессивной изменчивости и методах вариационной статистики см. ниже, в гл. VII.

[2]) Орженцкий Учебн. матем. статист., стр. 7—8.

к родовому понятию, и обратно. Если, именно, из совокупности исключить представление о количестве случаев и оставить только родовой признак, получается родовое понятие; так, совокупности «население города Н.» отвечает родовое понятие «житель города Н». Если же в содержание родового понятия включить представление о некотором числе случаев, какие заключаются в его объеме, получим понятие «совокупности». Едва-ли это так Правда, статистика всегда имеет дело с совокупностями из известного числа случаев Но это вытекает из особенностей метода, а не из существа изучаемого предмета. В понятие совокупностей «внебрачные дети», «малоземельные крестьяне, и т. п, отнюдь не входит представление об определенном числе — тем более. оно не входит в понятие таких реальных совокупностей, как звездная туманность, лесное насаждение и т. п... Лишь когда мы приступаем к статистическому анализу, мы всегда—хотя-бы просто мы выхватывали экземпляры наудачу,—оперируем с определенным числом, и это не входит, очевидно, в существо самого понятия Равным образом, привнесение или устранение представления о числе случаев, не может превратить родового понятия в собирательное, или обратно. «Тысяча пудов золота», «100 тыс. ведер воды», «пятьсот лисиц», — ни в одном из этих случаев отсчет определенного числа экземпляров или единиц меры, либо веса, не создаст собирательного понятия. «Золото», «вода», ни при каких условиях не станет собирательным понятием». «Человек», «лисица» могут стать собирательными понятиями, — но это случится не тогда, когда мы отсчитаем определенное число людей или лисиц, а тогда, когда мы займемся изучением индивидуально-варьирующих признаков. Тем менее можно представить себе обратное. собирательное понятие никоим образом не превратится в родовое от того только, что мы оставим без внимания число относящихся к нему случаев. «Житель» данного города — не родовое понятие, а элементарная составная часть совокупности, воплощающей собирательное понятие. «население» того же города. Из объединяемого одним только признаком собирательного понятия «население» никаким способом нельзя выделить родового понятия, — нельзя выделить такого рода характерных для родового понятия «свойств и правильностей», которые, «будучи установлены для определенного рода явлений или предметов, являются правилом или законом для каждого единичного случая того же рода» — а, ведь, именно таким, по определению самого Орженцкого, должно быть содержание родового понятия. «Домашняя кошка», «лисица», действительно, может быть рассматриваема и как родовое понятие,—и это осталось-бы возможным, если-бы мы точно знали, что домашних кошек существует в природе 978 519; а лисиц 2.376 849 штук — как существованию родового понятия «зубр» нисколько не препятствовал-бы точный учет всех — единственных в природе — зубров Беловежской пущи. Может—потому что за устранением из рассмотрения варирующих в отдельных случаях признаков, остается еще достаточное для образования «родового понятия» количество признаков общих каждой домашней кошке, каждой лисице и каждому зубру.

Правильным и существенным представляется мне только одно замечание Орженцкого· «если в содержание родового понятия ввести представление о всех возможных единичных случаях, получится совокупность с неопределенным числом случаев, отвечающим всему объему родового понятия. Так, родовому понятию «человек» отвечает совокупность «человеческий род»; совокупности «городское население» отвечает родовое понятие «житель города» [1]). Я не считаю удачным, в частности, второй, пример — с моей точки зрения, «жи-

[1]) Там-же

тель города»—собирательное понятие. Но в существе, повторяю, данная мысль Орженцкого кажется мне правильной. В самом деле — родовому понятию «человек» совершенно так же отвечает «совокупность с неопределенным числом случаев» — совершенно так же может отвечать и любая совокупность с определенным числом случаев (100 тыс., миллион людей), как и собирательному понятию «житель города», или «студент», или «крестьянин», или какому угодно другому. Совершенно так же можно мыслить совокупности, отвечающие любому другому родовому понятию — вся вода на земном шаре, вода в резервуарах городского водопровода, весь кардифский уголь в местах его залегания, 1 000 тонн угля на складах такой же железной дороги. Разница в том, что соответственные родовые понятия мы конструируем совершенно помимо такого рода совокупностей, все равно, с ограниченным или с неограниченным объемом,—следовательно, «совокупности» типических объектов не представляют интереса в методологическом отношении, тогда как собирательных понятий мы не можем конструировать иначе, как из наблюдения над объектами, сведенными в реальные, либо в искусственные совокупности; тогда как, следовательно, по отношению к собирательным понятиям образование совокупностей, иначе сказать, большие числа, являются необходимым познавательным средством.

Итак, еще раз. Объект статистического метода—нетипические или индивидуальные явления, состоящие из массы случаев, единиц или экземпляров, объединяемых под одно «собирательное понятие» одним или несколькими общими признаками, а во всем остальном более или менее сильно друг от друга отличающихся, а потому в сферу приложения статистического метода входят, без различия областей естественных или общественных наук, все те отрасли знания, которые имеют дело с такого рода объектами, постольку притом, поскольку интерес исследователя направляется *именно на эти*, индивидуально-изменчивые признаки. Цель проводимого статистическим методом изучения — характеристика отвечающих собирательным понятиям массовых объектов определенного или неопределенного, в реальной действительности, объема, но, во всяком случае, изучаемых в так или иначе взятых совокупностях, известным комплексом — употребляя удачный термин Р. М. Орженцкого — *сводных признаков*, каждый из которых представляет собою проявляющуюся только в массе равнодействующую всей суммы соответственных признаков отдельных случаев или индивидов; установление *сводных зависимостей* причинного характера, обнаруживающихся, опять-таки, только в массе, и уловление в этих сводных признаках и сводных зависимостях действия общих причин, управляющих данным массовым явлением.

Из всего сказанного с совершенною ясностью вытекает и *суть статистического метода*. По известному, в существе своем совершенно не устаревшему, определению Этгингена, «существенный смысл последнего состоит в том, что путем последовательного собирания и систематического сопоставления рядов однородных фактов вы-

ясняют постоянство определенных явлений и основных причин; что, путем собирания большого числа наблюдений» — или, на языке более современной терминологии, путем образования совокупностей, «и соответственного анализа и группировки их стремятся установить эмпирические законы и внутренний ритм в пестрой путанице конкретных явлений». «В общественных явлениях, — говорит Эттинген несколько дальше, — мы имеем дело с конкретными массовыми явлениями, слагающимися из массы единичных случаев, однородность которых мы познаем только в конечном результате, но в основе которых могут лежать разнороднейшие ряды разнообразнейших действующих причин Главною целью»,—я сказал бы скорее, главным познавательным средством,—«статистического наблюдения становится, поэтому, счисление масс, чтобы использовать большие числа в целях расширения области научного изучения сущности общественных» и—как теперь приходится добавить—других нетипических или индивидуальных «явлений».

В приведенной только-что цитате мне важно подчеркнуть слова: «выясняют постоянство определенных влияний и основных причин»; а затем: «стремятся установить эмпирические законы и внутренний ритм в путанице конкретных явлений». Только тогда, когда статистическими приемами выясняется «постоянство определенных влияний и основных причин»,—только тогда статистика становится, в самом деле, о р у д и е м н а у ч н о г о и с с л е д о в а н и я. Само по себе, по справедливому замечанию Георга Майра, «наблюдение и констатирование социальных» и каких угодно других «масс, как таковых, есть лишь с т а т и с т и ч е с к о е и с к у с с т в о», которое существует, само по себе, zunächst, независимо от того, предназначается-ли оно служить конечной цели научного познания социальных и других масс. Приемы статистического наблюдения и статистического счета, сами по себе,—такое же техническое орудие, как приемы измерения, взвешивания и т. п., применяемые физическими науками. Взвешивание широко применяется, и притом, иногда, в сравнительно весьма точных формах, для разнообразнейших целей, не имеющих ничего общего с наукой—например, в технических производствах, в аптечном деле и т. п.; н а у ч н ы м методом оно становится тогда, когда применяется для целей научной химии, физики, физиологии и т. п. Подобным же образом и статистическое наблюдение, равно как и практикуемые статистикой счетные приемы, могут быть применяемы для разнообразных, чисто административных (счет населения для целей учета продовольственных карточек, раскладки повинностей и т. п.) или деловых (учет производства и сбыта в крупном промышленном предприятии) целей—это будут применения «статистического искусства», а не статистический метод, как орудие научного познания. В качестве такового он может быть направлен, и в самом деле в широкой мере направляется, ближайшим образом, на н а у ч н о е и з о б р а ж е н и е массовых явлений, выдвигающее впе-

ред свойственные ему, как целому, общие черты или «постоянные» признаки. Основною и наиболее характерною для статистического метода, как такового, задачей является, однако, даже не научное изображение, а научное исследование, в целях причинно-следственного объяснения; является, в формулировке Курно, «элиминирование случайных причин, или, точнее, их влияния, и нахождение постоянных или правильных причин». Центр тяжести статистического метода лежит, таким образом, не столько в «сводных признаках», сколько в «сводных зависимостях», выясняющих причинные связи, — в таких, притом, областях (обществоведение!) или, во всяком случае, в таких направлениях (определенные направления биологического исследования!), где не находит себе применения эксперимент.

Как научный метод, «статистический метод — по Вундту — ничто иное, как точное развитие сравнительного метода вообще»[1]). Аналитическое средство статистического метода, единственное, при помощи которого он способен раскрывать причинные зависимости, — сравнение, но только обставленное известными специфическими условиями. Особенности статистического метода, как разновидности сравнительного — по Вунду же,—сводятся к тому, что 1) «производимая, на основании индивидуального сравнения, группировка фактов должна быть основана на точно определенных признаках», и 2) «die so bevorzugten Merkmale— выбранные, таким образом, признаки должны давать легко исчисляемые группы, выбор которых должен соответствовать цели исследования». Из этих двух особенностей,—замечу пока мимоходом,—Вундт выводит применимость в статистике тех же принципов теории вероятностей, какие применяются для оценки повторных наблюдений определенных феноменов, иначе говоря—теории погрешностей наблюдения, с тою только разницей, что «понятие ошибки наблюдения переходит из субъективного в объективное значение, означая промежуток, Spielraum, в пределах которого может колебаться данное массовое явление[2]).

Как я уже сказал, статистический метод находит себе применение в таких областях и в таких направлениях, где он является единственным способом раскрытия причинных связей и зависимостей,—где, в частности, не может быть искусственного опыта, эксперимента. Такою областью целиком является жизнь человека в обществе, таких областей неопределенно-много и в широкой сфере естествоведения, начиная с биологических дисциплин и кончая метеорологией и астрономией. Между тем, именно опыт, а не простое наблюдение, представляет собой приспособленное к раскрытию причинных зависимостей орудие научного познания. Наблюдение,—говорит,

[1]) Wundt. Logik. I d III, стр 73—74.
[2]) Там-же, стр. 76.

опять-таки, Вундт,—ставит себе вопрос Wie? эксперимент—вопрос Warum? «Только в редких случаях, в предположении частью достаточной простоты процесса, частью обнаруживающейся в самой природе вариации условий, наблюдение способно без помощи эксперимента подойти к этому второму вопросу». Технический прием, «средство, помощью которого эксперимент подходит к вопросу о Warum», состоит в изолировании и варьировании обстоятельств. Первое никогда не может быть достигнуто простым наблюдением, потому что лишь в виде едва мыслимой, а потому никогда не наступающей с нужною правильностью, случайности два события различаются лишь в одном из бесчисленных условий, сопровождающих их наступление». С другой стороны, «изолирование обстоятельств необходимо приводит от простого описания фактов к их причинному пониманию. Ибо, как только изолированное изменение известного обстоятельства правильно ведет за собой определенные изменения в течении событий, логический принцип основания и следствия вынуждает нас придать данному изолированному движению причинное значение» [1]).

И вот, везде, где эксперимент неприменим, и где имеются налицо потребные для применения массового статистического наблюдения условия, статистический метод заступает, до известной степени, место эксперимента,—присущая статистике свобода группировок делает из статистического метода нечто аналогичное обращенному эксперименту: «тогда как при настоящем эксперименте варьируются условия, участвующие в самом возникновении явлений, при статистическом приеме произвольно комбинируются, изменяющимися способами, in variabler Weise, сами явления, чтобы отсюда делать заключения относительно действовавших при их возникновении условий» [2]). Статистика—как подробнее развита та же мысль, у Вундта в другом месте,—оперирует, для каузального объяснения, главным образом, приемом Gruppenzerlegung: «произвольное разложение на группы, будучи принципиально неограниченным, логически имеет значение произвольного варьирования условий, конечно, в единственной форме, доступной, по отношению к предмету, которого наблюдатель не может изменять по существу,—именно als Variierung der subjektiven, mit den Beobachtungsobjekten vorzunehmenden Gruppierungen—в виде варьирования могущих быть предпринятыми по отношению к объектам наблюдения группировок». Простор для варьирования в статистике меньше, нежели в эксперименте, потому что статистика оперирует с данным жизнью материалом,—но за то именно эта, несколько меньшая свобода группировок, уменьшает опасность subjektiver Täuschungen—субъективных за-

---

[1]) Там-же, стр. 358—359

[2]) Тоже стр. 75.

блуждений, которые неизбежны при руководимом, нередко, предвзятыми гипотезами экспериментальном исследовании»[1]).

В следующей главе я подробнее рассмотрю те приемы статистического анализа, которые Вундт имеет в виду в своей характеристике статистической Gruppenzerlegung, равно как и те, которые не укладываются в эту категорию. Сейчас мне нужно было только дать читателю представление о том, как характеризует роль статистического метода, как суррогата естественно-научного эксперимента, такой логик и естествоиспытатель, как Вундт. Вундт даже преувеличивает «высокую степень законченности» статистического метода, приравнивая его к методам наблюдения в астрономии, или к экспериментальным приемами в физике и химии, и упуская из виду неизбежную, по самому их существу, грубость статистических приемов.

В заключение настоящей главы, не лишнее будет остановиться еще на одном вопросе, вытекающем из тех формулировок существа статистического метода, какие мы находим в работах Р. М. Орженцкого

По Орженцкому, содержание статистического метода составляют «приемы изучения сводных признаков и сводных закономерностей в тех случаях, когда эти признаки и закономерности могут быть выражены в числовых величинах», а сам «статистический метод состоит в характеристике предметов и явлений сводными признаками.., в изучении сводной закономерности явлений . и, наконец, в изучении сводной зависимости»—всего этого в том смысле, какой достаточно ясен из всего предшествующего изложения [2]). Или, как Орженцкий формулирует в другом месте: существо статистического метода заключается «как в установлении сводных признаков, так и в исследовании и проверке их реального, конститутивного и элементарного характера» [3]), каковые свойства могут быть установлены либо индуктивно, путем сравнения между собою целых совокупностей, либо статистически, «путем сопоставления их с признаками индивидуальных объектов совокупности» [4]). Как это все делается,—в данный момент для нас несущественно. Важно только то, что под понятие статистического метода Р. М Орженцкий подводит только момент получения, критики и дальнейшей переработки с в о д н ы х признаков, и, повидимому, совершенно не относит к существу статистического метода момента получения тех и н д и в и д у а л ь н ы х признаков, суммирование которых дает сводные признаки и с которыми эти последние потом приходится сопоставлять, иначе сказать, момента с т а т и с т и ч е с к о г о н а б л ю д е н и я. Поскольку это не вполне, может быть, ясно из самой формулировки приведенных только-что определений, это становится окончательно ясным из того факта, что Орженцкий ни в одной из своих двух работ ни одним словом не касается ни статистического наблюдения, ни процесса получения абсолютных массовых чисел, а трактует исключительно вопросы, связанные с получением, дальнейшею обработкою и критикою производных статистических величин. Правильно-ли так суживать понятие статистического метода, или нет? Мне думается, скорее нет, потому что «сводные признаки» по-

---

[1]) Там-же, стр. 505. Подробнее, но с меньшею степенью отчетливости, см. у Дж. Ст. М и л л я, „Логика", стр. 138.

[2]) Учебн. математ. статистики, 3—4.

[3]) Сводн. признаки, стр. 310.

[4]) Там-же, стр. 320—321.

лучаются, в конце концов, из данных, добываемых теми или другими приемами статистического наблюдения, и доброкачественность этого последнего является необходимою предпосылкою доброкачественности, а в значительной мере и самой возможности, получения сводных признаков Мне кажется, поэтому, более правильным включать в понятие статистического метода всю последовательную цепь операций, требующихся для получения и для дальнейшего научного использования сводных признаков или производных величин, начиная с первого звена этой цепи—статистического наблюдения. Следует-ли из этого, что методика этого первого звена должна трактоваться в том методологическом учении, которое трактует, собственно, приемы получения и дальнейшего использования сводных признаков—в учении или «науке» о статистическом методе? Это—вопрос, уже не имеющий существенного значения и в практике получивший компромиссное решение.

Дело в том, что приемы статистического наблюдения, иначе сказать, приемы получения того первичного статистического материала, тех единичных количественных и качественных характеристик, из которых потом получаются массовые данные, бесконечно разнообразны. Они будут одни в экономической и культурной статистике — будут различны даже в отдельных областях той и другой (ср. приемы статистики внешней торговли, статистики заработной платы, статистики крестьянского хозяйства) и другие в статистике состояния и движения населения; будут совсем другие в биологической статистике и, опять-таки, в зоологии совсем иные, чем в ботанике; будут весьма различны даже в разных отделах, хотя-бы зоологии; совершенно другие в метеорологии, опять иные в астрономии, в медицинской статистике, в каждом из отделов наблюдательной и экспериментальной агрономии и т. п И вот, ходячая статистическая методология входит в более или менее подробное рассмотрение приемов собирания первичных данных—приемов «статистического наблюдения», в статистике населения, экономической, частью культурной, и совершенно не входит в рассмотрение этого момента в приложениях статистического метода как во всей беспредельной области наук о природе, так и в таких «науках о духе», как филология, психология и т. п. Источником такого компромиссного решения вопроса является, отчасти, просто традиционное понимание статистики, как «искусства измерения политических и социальных явлений», или как «науки о социальных массах» Отчасти, однако, для такого двойственного решения вопроса можно найти и известные рациональные основания. Приемы получения первичных данных в естествознании—это, в существе, общие методы каждой данной его отрасли—энтомологии, ботаники, антропологии, агрономии и т. п.; поскольку же для целей статистического анализа приходится применять особые приемы измерения растительных, животных и т п. индивидов, или, вообще, точного констатирования фактов,—это уже такие детали, которые могут найти себе место только в специальных монографиях; в иных случаях, напротив, эти приемы настолько простых, что, вообще, не требуют никакой особой методики (счет лепестков у цветов, пятен на крыльях бабочек и пр). Напротив, приемы констатирования единичных фактов, применяемые в социальной статистике, при всем их разнообразии, имеют ту общую черту, что имеют дело с человеком, живущим в обществе. Отсюда, с одной стороны, необходимость организованного—притом, как правило, организованного государственною или общественною властью—подхода к массовым явлениям человеческого общежития в форме тех или других видов переписи или текущей регистрации, а с другой, в очень многих отраслях статистики, невозможность непосредственного констатирования фактов: большая часть интересующих социальную ста-

тистику единичных фактов, получается путем так или иначе организованного, письменного или словесного опроса прикосновенных к данному массовому явлению людей, откуда вытекает особая техника опроса, борьбы с невольными и вольными неточностями показаний, особое учение о погрешностях статистического наблюдения и т. п. Все это представляет собой очень много общих черт, в применениях к разнообразнейшим отделам социальных наук, а в то же время все это не трактуется, в сколько-нибудь систематическом виде, ни в одной из них Поэтому и принимая во внимание доминирующее, все-таки, значение статистического метода в общественных науках, представляется вполне целесообразным не отступать от традиции, и в общем учении о статистическом методе продолжать трактовать методику статистического наблюдения, тогда как по отношению к применениям статистического метода в несравненно более широкой и разнообразной сфере естественных и других, кроме обществоведения, гуманитарных наук, это было-бы нецелесообразно, и, более того, — неосуществимо

ГЛАВА ВТОРАЯ.

Приемы статистического умозаключения.

В книге, посвященной основам теории статистики, было-бы, конечно, не место останавливаться на приемах ни первичного статистического наблюдения,—в том числе и на тех, применяемых в области явлений человеческого общежития, приемах наблюдения, рассмотрение которых обычно включается в круг вопросов общей статистической методики; ни того процесса сводки и табличной обработки, в результате которого—уже во всякой области приложения статистического метода—из записей единичных наблюдений получаются массовые цифры. Мы можем, поэтому, непосредственно перейти к рассмотрению тех логических процессов, помощью которых статистик приходит к научным заключениям,—в частности, к заключениям относительно причинных зависимостей между явлениями и признаками явлений. Этот вопрос почти не ставился перед теоретиками статистики, пока статистический метод рассматривался, как разновидность или как техническое вспомогательное средство обычной индукции. Пока безраздельно господствовало такого рода понимание статистического метода, любое заключение, полученное из статистических данных и статистическими приемами, подводили, просто, под тот или другой из общеизвестных методов индуктивного умозаключения. Раз приходится отказаться от такого понимания, или даже раз только законность последнего подвержена сколько-нибудь серьезному сомнению,—а таково именно положение вопроса в настоящее время,—то надо свести приемы статистического умозаключения к своим определенным типам, исходя, притом, не от каких-либо предустановленных общею логикою схем, а от практики научного статистического анализа; выяснить себе их взаимоотношение и познавательное значение, а затем уже—и их отношение к методам обычной индукции.

В этой книге, предполагающей в читателе некоторое, по крайней мере, знакомство с первыми началами статистической теории, мне нет, опять-таки, надобности, останавливаться на двух вещах, могущих предполагаться общеизвестными. Во-1-х,—на том, что в основу статистических

умозаключений научного характера кладутся, в виде правила, не абсолютные статистические числа, а производные величины, средние или относительные. Если из этого правила и встречаются исключения, то лишь постольку, поскольку мы исходим из подразумеваемого сопоставления с известными другими цифрами. Если, например, в Германии добыча каменного угля за полвека возрасла в 15, а выработка чугуна в 35 раз, то мы и без перевода в какие-либо производные величины, непосредственно из абсолютных цифр, заключаем о чрезвычайно быстром росте производительных сил страны; но мы можем сделать это только потому, что без особых справок знаем, что население не возрасло в такое же число раз, а возрасло, может быть, вдвое, а потому можем сказать без всяких специальных вычислений и, в частности, без всяких переводов на душу населения, что добыча угля и выплавка чугуна растут в Германии несравненно быстрее, нежели население. Если вся совокупность абсолютных цифр, характеризующих промышленное развитие страны, при общем росте, обнаруживает, однако, волнообразные колебания, мы непосредственно из этих абсолютных цифр, не прибегая к переводу на душу населения, можем сделать заключение о некоторой цикличности промышленного развития; но опять-таки, мы имеем право сделать такое заключение только потому, что знаем, что в движении численности населения не обнаруживается ничего похожего на такие волнообразные колебания. Во-2-х, нам нет надобности останавливаться и на том, что основой какого бы то ни было научно-статистического вывода не могут служить единичные статистические числа. Будет-ли единичная статистическая цифра абсолютною или относительною,—ее научное значение, во всяком случае, сводится к нулю: такая цифра «констатирует лишь единичный факт, и потому не дает повода для каких-либо дальнейших соображений» (Czuber). Всякая статистическая цифра, безразлично, будет-ли она абсолютною или относительною, раскрывает свой смысл и может служить основанием для научных выводов лишь при условии сравнения, лишь при сопоставлении ее с другими,—а для таких сравнений и сопоставлений могут служить не отдельные цифры, а статистические ряды. Следовательно, всякий научный вывод в области статистики, будет-ли этот вывод сводится, просто, к констатированию явлений сосуществования, либо последовательности, или будет носить причинно-следственный характер, может быть получен лишь из рассмотрения статистических рядов. Изучение и анализ статистических рядов— это тот единственный путь, который приводит статистика к научным выводам—к установлению того, что называют статистическими правильностями и закономерностями, в частности, к раскрытию связей и зависимостей причинного характера.

Согласно несколько искусственной или схоластической классификации Георга Майра, наиболее общим понятием представляется статистическая «пра-

вильность» (Regelmassigkeit). По степени своей всеобщности «правильности» могут быть уложены в такую градацию. если правильность хотя и часто наблюдается, но нарушается существенными отступлениями,—если, значит, характеризуемый известными статистическими коэффициентами склад явления не может быть рассматриваем, как его тип, мы имеем дело именно с «простою правильностью». Если исключения хотя и встречаются, но лишь в редких, единичных случаях, и выяснившийся из цифр вид явления может быть рассматриваем, как типический, то правильность становится «закономерностью» (Gesetzmassigkeit). Наконец, статистическая правильность, хотя и сопровождаемая (как это имеет место для любого социального закона), не выходящими из известных тесных пределов колебаниями, может, однако, оказаться столь устойчивою, что ее можно признать за «статистический закон», в тесном смысле этого слова Все эти виды статистической закономерности сводятся, прежде всего, к простому констатированию фактов сосуществования или последовательного наступления известных событий, к констатированию известных процессов эволюции, в соответствии с чем Майр различает законы сосуществования, законы событий и законы эволюции. Но они могут устанавливать и з а в и с и м о с т и между состояниями, явлениями и событиями, имеющие более или менее ясно выраженный п р и ч и н н ы й характер, и в таком случае мы имеем дело уже не с простыми правильностями, а с статистически установленными причинными зависимостями и связями.

Первое, что делает статистика в данном направлении,—она устанавливает п о с т о я н с т в о, у с т о й ч и в о с т ь, е д и н о о б р а з и е статистически-измеренных явлений. «Обыденная достоверность,—замечает Вундт по поводу значения наблюдаемого в каких бы то ни было явлениях постоянства,—покоится на постоянстве, с которым представляются нашему взору, навязываются нашему вниманию (sich aufdrangen) известные восприятия». Это не мешает тому, что с точки зрения выводов, и в частности—выводов причинно-следственного характера, значение постоянства, неизменности статистических чисел представляется второстепенным, и первенствующее значение в данном отношении принадлежит констатированию не постоянства, неизменности, сходства, а р а з л и ч и й, и з м е н е н и й в статистических числах.

Это—положение, как кажется, общепризнанное и в общей логике, и в теории статистики. «Мы никогда не имеем повода,—говорит тот же Вундт,—применить понятие причинности к предметам нашего обыденного опыта, пока они остаются неизменными в их пространственных и временных отношениях. Равным образом, мы приводим субъективные процессы и состояния, которые мы, с психологической точки зрения, рассматриваем, как непосредственные составные части внутреннего опыта, в причинную между собою связь только при условии изменения во времени. Таким образом, и з м е н е н и е есть первое условие причинности; последняя относится не к в е щ а м, а к с о б ы т и я м[1]). С неменьшею категоричностью то же самое, в существе, положение формулируется Зигвартом, Борткевичем, Лексисом. Конечно,

[1]) W u n d t, Logik, Bd I, стр 5 86.

установленный статистическим путем факт постоянства не может быть случайным,—следовательно, от этого факта мы смело можем заключать к существованию некоторых причин, обусловливающих это постоянство. Со своей стороны, и Зигварт подчеркивает, что правильности, выражающиеся в постоянстве, однородности явлений, «носят, прежде всего, лишь описательный характер и могут выражать причинные связи лишь при помощи предпосылки, что те условия, из которых вытекают в какой-либо области отдельные варнирующие (потому что и постоянство, в общем, не исключает возможности индивидуальных вариаций) случаи, являются постоянными в своем общем составе». «Где возможны,—говорит тот же Зигварт,—выводы из статистики к причинным законам, там исходный пункт лежит не в постоянстве, а, наоборот, в колебаниях статистических чисел». Или, как та же мысль выражена у Лексиса: «наиболее интересное в цифрах моральной статистики (которую, в данном случае, имеет в виду Лексис, отнюдь не думая, конечно, ограничивать формулируемого им положения одною только областью именно моральной статистики! А. К.),—это не их устойчивость, а их изменчивость. Значительные изменения статистических величин являются непосредственными симптомами изменений в системе причинно-зависимостей соответственных явлений; а, между тем, нахождение этих отношений причинности для общественной» и, конечно, для всякой другой науки, «несомненно, важнее», нежели простое констатирование устойчивости известного статистического ряда.

Будучи, в общем, несомненно правильною, такая постановка вопроса грешит, однако, некоторым преуменьшением научного значения элемента постоянства, устойчивости статистических чисел,—преуменьшением, которое было, может быть, естественною реакцией против того преувеличения именно этого элемента «поражающего» и, иногда, в самом деле, поразительного постоянства, который останавливал на себе преимущественное внимание первых теоретиков статистики, в частности, Кетле и его последователей. Можно-ли, в самом деле, утверждать, что мы «никогда не имеем повода применить понятие причинности к предметам нашего объективного опыта, пока они пребывают»? Можно-ли, в частности, как делает Зигварт, утверждать, что даже исходный пункт к выводам из статистики к причинным законам «лежит не в постоянстве», а только «в колебаниях чисел»? Едва-ли. «Исходным пунктом» в той цепи соображений, которая приводит нас к тем или иным причинным законам, несомненно, может быть и нередко бывает именно постоянство, неизменность, однообразие статистических чисел,—иногда оно, само по себе; иногда—в той или

другой комбинации с различиями в этих числах. Раз мы наталкиваемся на последовательно-проходящее через ряд или многие ряды статистических чисел постоянство, мы не можем не задаться вопросом о характере тех «постоянных в своем общем составе условий, из которых «вытекают отдельные варьирующие случаи». Возьмем хотя-бы известные германские средние цифры душевого потребления соли, в ряд последовательных пятилетий не выходящие из таких тесных пределов, как 7,6 кил.—в одну сторону и 7,8 кил.—в другую. Разве этого постоянства чисел не достаточно, чтобы заставить нас доискиваться причин, п о ч е м у потребление соли — именно соли — выражается в почти неизменных средних цифрах, тогда как массовое потребление таких продуктов, как кофе, чай, сахар и т. п., прогрессивно изменяется в том или другом определенном направлении. Или возьмем еще гораздо более известный пример, — пропорцию мужских и женских рождений. Разве, именно, не приблизительное постоянство этой пропорции — постоянство, наблюдаемое не только в пределах человеческого рода, но даже констатированное новейшими исследованиями для ряда представителей животного и растительного царств,—разве, говорю я, не именно п о с т о я н с т в о, с которым воспроизводится почти тождественная пропорция мужских и женских рождений, — разве не оно побудило и продолжает побуждать научную мысль так настойчиво доискиваться причин, п о ч е м у между рождениями того и другого пола существует именно данная, а не другая пропорция? Представим себе на минуту, что пропорция мужских и женских рождений в одних странах и в одни эпохи была-бы одна, в других странах и в другие времена—совсем другая, — вопрос, несомненно, утратил-бы значительную долю своего интереса для науки. И наоборот—этот интерес нисколько не уменьшился-бы, если-бы сделать обратное предположение: если-бы не было даже перевеса мужских рождений над женскими, и если-бы мальчики и девочки рождались, неизменно, в близких к строгому равенству пропорциях.

Что с бо́льшим основанием можно сказать относительно значения, собственно, постоянства статистических чисел, это то, что постоянство, неизменность цифр, заставляя предполагать существование н е к о т о р ы х п р и ч и н, обусловливающих такое постоянство, не дает, однако, само по себе, представления о х а р а к т е р е и с в о й с т в е этих причин. Однако, даже и это не совсем, или точнее, не всегда так. В приведенном только-что примере постоянства цифр среднего потребления соли, постоянство это—как мне, по крайней мере, представляется—не только наводит на мысль существования «некоторой» причины, но с логической неизбежностью заставляет нас искать этой причины в одном определенном направлении, именно в том, что потребление соли стало физиологической потребностью, которая, именно поэтому, удовлетворяется в одном определенном размере, независимо от изменений в той

сложной совокупности условий, от которой зависят размеры потребления других продуктов. Это—с одной стороны. А с другой: ведь главное значение различий и изменений, вообще, колебаний статистических чисел, если их рассматривать сами по себе, — это значение, все-таки, симптоматическое. Повышение, или понижение, или периодические колебания тех или других статистических чисел, или, вообще, различия между ними, говорят нам, прежде всего, именно о повышении, о понижении, о периодических колебаниях, о различиях в том или другом определенном направлении: о росте производительных сил страны, о повышении уровня ее культурности, о понижении смертности, а, следовательно—об улучшении санитарно-гигиенической обстановки, о различиях в уровне смертности, положим, между разными странами и частями страны, между городом и деревней, между разными классами и категориями населения страны. Изменение статистических коэффициентов во времени или разнообразие их в пространстве имеет, несомненно, более яркое симптоматическое значение, нежели имело-бы постоянство во времени или однообразие в пространстве: повышающийся ряд цифр урожайности вызовет в нашем уме—чисто-психологически—несравненно более яркое представление о положении сельского хозяйства в стране, нежели ряд цифр, свидетельствующих о постоянстве урожаев; нам будет гораздо интереснее и поучительнее знать, что урожайность одних стран вдвое и втрое превышает урожайность других, чем если-бы цифры говорили о приблизительно одинаковой урожайности. Можно сказать и больше: что во всех подобных случаях колебания статистических чисел с гораздо большею определенностью, чем факты их постоянства, однообразия, говорят о наличности обусловливающих колебания причин: изменяющиеся в каком-либо определенном направлении ряды чисел еще в меньшей мере могут быть делом простой случайности, нежели ряд тождественных или очень близких друг к другу чисел. Если цифры не меняются,—мы легко можем успокоиться на простом констатировании факта их постоянства или однообразия. Всякое же резкое изменение, всякое бросающееся в глаза разнообразие цифр и фактов, неизбежно заставляет нас поставить себе вопрос: откуда это разнообразие, какими причинами вызвано это изменение. Но все-таки, в конце концов, и колебания статистических цифр, так же как и их постоянство, сами по себе еще не дают ответа на вопрос о том, каковы эти причины, в чем выражаются кроющиеся за данною закономерностью причинные зависимости, в чем заключается выразившееся в различиях или в изменениях статистических чисел различие или изменение обстоятельств — и ответа на этот вопрос приходится искать уже вне того статистического ряда, колебания которого навели нас на мысль о существовании изменяющихся причин. В зависимости от объ-

ективных условий, и в частности—от характера имеющегося в нашем распоряжении статистического или иного материала, а с другой стороны—от нашего субъективного склада и нашего взгляда на данный предмет, «нам приходится продвигаться к выяснению остающегося открытым вопроса либо при помощи дальнейшего статистического анализа, либо не-статистическим путем» (Zizek). В этом последнем случае мы идем от колебаний статистических чисел тем самым путем, каким нам приходится идти и для объяснения констатируемых в статистических числах постоянства. Разница только в том, что когда мы доискиваемся причин постоянства, неизменности статистических чисел, этот не-статистический путь—единственный, который открыт перед нами,—собственно-статистическое исследование постоянства чисел не идет дальше простого констатирования факта такого постоянства. Статистическое продвижение к выяснению кроющихся за статистическими числами причинных зависимостей непременно имеет своим исходным пунктом те или другие изменения или различия, вообще, какие-либо колебания статистических чисел.

Итак, та разница в роли постоянства и в значении колебаний статистических чисел для раскрытия причинных отношений оказывается далеко не столь резкою, как это выходило в формулировках Вундта, Зигварта или Лексиса. Исходным пунктом к выводам от статистики к причинным законам могут служить и те и другие, причем и те и другие, иногда, указывают и то направление, где следует искать проявляющихся в цифрах причин. Те и другие, сплошь и рядом, служат именно только исходным пунктом, самые же поиски интересующих нас причин ведутся уже не-статистическими путями, — это, при постоянстве цифр, имеет место всегда, при колебаниях—в очень многих случаях [1]). В этом последнем случае, однако, — и здесь собственно единственный существенный пункт различия — мы нередко имеем возможность продвинуться несколько дальше чисто-статистическим путем, — сделать этим путем еще один или несколько шагов в направлении к уловлению существа и меры действия тех причин, которые лежат в основе выявляющихся в данном ряде колебаний цифр; я подчеркиваю—еще один или несколько шагов, потому что, в конце концов, после этих одного или нескольких шагов по пути дальнейшего статистического анализа нам все-же необходимо приходится сойти со статистического пути и вступить на путь тех или иных не-статистических соображений.

В литературе, как общей логики, так и теории статистики, вопрос о тех логических приемах, какими делаются возможные для статистики дальнейшие шаги в направлении к установлению связей и зависимостей причинного характера,—иначе говоря, вопрос о приемах каузального статистического анализа, до

[1]) Примеры см. в моей книге „Теория и методы статист.“, 3-е изд., стр. 165 и след.

сих пор разрабатывался очень мало, и имеющиеся налицо попытки общей характеристики приемов статистического анализа далеко не исчерпывают предмета Наиболее ранняя из них по времени принадлежит Курно, который, впрочем, дает лишь совершенно общую формулу, совершенно не раскрывая ее содержания. Высшая цель статистики,—говорит он в своих «Основах исчисления вероятностей»,—раскрытие причин явлений, а для этой цели, в будущем, надо заниматься не столько чрезмерным накоплением наблюдений, сколько расчленением их и очищением от случайных влияний; расположение наблюдений в ряд не имеет другой цели, как компенсацию влияния причин, единично действующих на каждый отдельный случай, и в таком случае нет надобности рассматривать ряды из очень многих единичных случаев Поэтому,—продолжает Курно,—«надо как можно больше увеличивать число подразделений и выбирать близкие по времени и месту наблюдения, чтобы изменения средней вероятности, для каждого из рассматриваемых рядов, при переходе от места к месту или от эпохи к эпохе, были мало заметны»

Немногим больше дает, в смысле конкретности, относящаяся уже к новейшему времени попытка характеристики, принадлежащая Вундту «Статистическое исследование коррелятивных массовых явлений,—говорит Вундт—ведет к каузальным проблемам, ибо существование какого-либо причинного отношения везде может выразиться только в фактической наличности корреляции разных явлений» Под «корреляцией» здесь, конечно, разумеются не известные математические формулы, а просто наличность правильных соотношений между рядами статистических чисел. Но корреляция сама по себе,—продолжает Вундт,—очень редко достаточна, чтобы заключить о причинном отношении, в виду сложности массовых явлений нужно «разложение явлений на составные части, из которых каждая должна быть испытана на ее каузальное значение». Применяемые для этой цели приемы Вундт разбивает на две группы: статистическое Gruppenzerlegung, разложение на группы,—специфически приноровленное к массовым явлениям форма статистического анализа, и статистическое Gruppenverknüpfung—«сам по себе синтетический прием, однако, по способу его применения допускающий заключения аналитического характера» Первый из этих приемов, при несколько недостаточной конкретности его характеристики, не представляет, однако, ничего неясного: это именно тот прием статистического анализа, который аналогичен с экспериментом, он «логически имеет значение произвольного варьирования условий, конечно, в единственной форме, доступной по отношению к предмету, которого наблюдатель не может изменять в его существе; именно, в форме варьирования могущих быть выполненными над объектами наблюдения группировок». Сущность второго Вундт формулирует как обращение первого, в виду чего этот второй прием и предполагает, как правило, предварительное разложение на группы: полученные путем такого разложения члены ряда комбинируют, таким образом, чтобы свести вместе члены, стоящие и не стоящие под влиянием изучаемой причины; если при этом обнаруживается разница в частоте данного явления, то отсюда заключают о наличности причинной связи. Этот последний прием,—говорит далее Вундт,—«опирается, с одной стороны, на возрастающую достоверность предположения с возрастанием относительного числа подтверждающих случаев, а с другой, на элиминирование побочных причин, которое тем легче удается, чем многочисленнее и разнообразнее явления в их прочих условиях». Первый из характеризуемых Вундтом приемов имеет непосредственное значение для отыскания определенных причин массовых явлений, второй дополняет его, главным образом, там, где имеется определенный материал, распределенный на группы по пространству и времени и за недостатком соответственных статистических данных не до-

пускающий дальнейшего произвольного разложения К сожалению, этот второй прием, в характеристике Вундта, остается, в существе своем, весьма неясным, и только последне-процитированное пояснение открывает некоторую возможность предполагать, что речь идет здесь о том из приемов статистического умозаключения, который я называю методом вторичной количественной группировки,—приеме, сущность которого именно и заключается в «соединении в группы» получившихся при предшествующем разложении групп и который именно и применяется при невозможности дальнейшего их произвольного разложения [1])

Более отчетлива, на первый взгляд, характеристика основного приема каузального статистического анализа, которую мы находим у Зигварта «Причинные связи,—говорит он,—могут быть выведены только при помощи метода различий. Этот последний сравнивает с общею среднею такие частные средние, которые объединяют случаи, обладающие отличительным качеством; тем самым он дает право допустить, что различия частичных средних величин от общей средней обусловливаются именно тем фактором, которым особо подсчитанные случаи отличаются от остальных». Мы знаем, в самом деле, что «в достаточно большом числе случаев вся совокупность прочих неизвестных условий с их вариациями может предполагаться взаимно уравновешивающеюся и в отдельно вычисленных частях этой массы, а потому, поскольку действуют одни только эти («прочие неизвестные») причины, можно и в этих частях ожидать тех же средних величин. Если это не имеет места,—это указывает на наличность какого-либо условия, отличающего отобранные случаи от остальных, и тот факт, что общим для всех случаев является именно исследуемое обстоятельство, позволяет именно в нем видеть это отличительное условие». Повторяю—на первый взгляд эта характеристика кажется вполне отчетливою. В действительности, однако, она отвечает лишь сравнительно мало распространенному в практике статистического анализа приему. Мы, в самом деле, лишь в виде исключения сравниваем статистические коэффициенты, вычисленные для чем-либо особым отличающихся частей, с аналогичными коэффициентами, характеризующими целую массу,—сравниваем, например, смертность городского населения с общим уровнем смертности в стране, говорим, что коэффициент преступности того, что можно назвать преступным классом, в столько-то раз превышает общий во всей стране коэффициент преступности, или проводим такое сравнение для потребления спиртных напитков в больших городах. Обычным представляется несколько иной прием: сравнение коэффициентов, вычисленных для выделенной по какому-либо отличительному признаку части данной массы, с аналогичными коэффициентами, выделенными для других, выделенных по другим вариантам того-же признака, частей той-же массы; мы сравниваем, например, процент самоубийств у женщин, распределение женских самоубийств по способам самоубийства, распределение женской преступности по видам преступлений и т. п. не с аналогичными данными, характеризующими преступность и самоубийства всего населения, а с процентом самоубийств, распределением их по способам самоубийства и с характеристикою преступности у мужской половины населения; сравниваем цифры, характеризующие силу уголовной репрессии, положим, в коронном суде, не с общими для всей суммы судебных учреждений страны коэффициентами уголовной репрессии, а отдельно с коэффициентами репрессии в судах присяжных, в полицейских судах и т. п.

Безупречною в смысле точности является характеристика статистических приемов выяснения причин различий или изменений в статистических числах, принадлежащая Борткевичу: «причинные соотношения в статистике, — говорит

[1]) Wundt, Logik, Bd. III, стр. 501—508.

он,—устанавливаются путем сопоставления частостей, относящихся к группам, которые отличаются одна от другой в определенном отношении. Если, например, коэффициент преступности получается больший для лиц холостых, чем для женатых, то говорят, что между холостым состоянием и высокою преступностью существует (более или менее непосредственное) причинное соотношение», причем «под причиною всегда понимается известный признак или принадлежность к так или иначе характеризованной группе, а под следствием—сравнительно высокое или низкое численное значение данного статистического коэффициента»

Повторяю—характеристика эта безупречна в отношении я с н о с т и, но она недостаточна в отношении п о л н о т ы,—она объемлет лишь одну из двух главных категорий практикуемых в статистике приемов каузального анализа, ту, притом, категорию, которая, при несомненно большей определенности получающихся результатов, пользуется, однако, благодаря обстоятельствам чисто-технического характера, несравненно меньшею степенью распространения,—и совершенно неприменима к тому, несравненно шире применимому, способу статистического каузального умозаключения, который я ниже называю методом параллельных рядов.

Последняя попытка характеристики и классификации приемов статистического каузального умозаключения, о которой я должен еще упомянуть, принадлежит А. А. Чупрову. Вошедшая в состав его немецкой работы «Die Aufgaben der Theorie der Statistik», которая, взятая в целом, представляет собой лишь как бы общую схему или первый набросок, намечавшейся А. А. Чупровым большой работы, эта попытка представляет собою тоже лишь некоторый абрис или схему, далеко не исчерпывающую предмета, а в некоторых частях страдающую и известными неточностями или, во всяком случае, неясностями.

Соображения Чупрова по занимающему нас вопросу привязаны к тому общему положению, что «в основе всех чисел статистики населения и моральной, лежат математические вероятности или функции таковых» [1]). Как использовать,—спрашивает себя А. А Чупров,—этот вывод для заключений относительно причинных связей? Здесь возможны два случая. Один—сравнение д а н н ы х н а б л ю д е н и е м статистических масс (города, местности). Раз установлен («дифференциальным» методом) не-случайный характер различий частот, мы попадаем «в колею индуктивных методов» со всеми присущими им трудностями, и всегда остается «неопределимый остаток, der den Schluss vereitelt»—делающий заключение невозможным Только в исключительных случаях удается «разом так элиминировать бесконечное множество моментов путем многократного последовательного применения дифференциального метода, что заключение делается почти что достоверным», такой исключительный случай представляет собою, например, проведенное в монографии М И. Туган-Барановского о промышленных кризисах, сопоставление смертности и т. п в земледельческих и промышленных округах в годы процветания и кризиса. Но это—именно исключительный случай. Обычно сведение единичных случаев в статистические массы и переход от частот к вероятностям «лишь очень мало приближает нас к конечной цели—познанию причинных зависимостей». Другой прием, очевидно, совпадающий с тем единственным приемом, какой имеется в виду в вышеприведенной характеристике Борткевича,—это сравнение искусственно-составленных по определенному признаку масс. Этот прием на первый взгляд лучше, потому что такого рода массы «могут отличаться друг от друга только данными признаками и стоящими с ними связи, признаки же, от них независимые, влияют на характер массы лишь

[1]) Die Aufgaben etc, стр 468.

в меру случайного». Но в действительности и этот прием отказывается служить в силу всегда возможного привхождения онтологических связей, которые «могут расстраивать наши заключения, то усиливая, то парализуя номологическую зависимость» (пример. влияние зависимости аренды от размеров землевладения маскируется наличностью или недостатком арендного фонда). Остающийся и в том и другом случае узел может быть распутан помощью «Reihenvergleichung»—сравнения параллельных рядов. Практически важнейшая разновидность этого приема—сведение единичных случаев (курс мой. А. К.) в группы по значению величины, дающей наилучшую количественную характеристику другой величины», подчеркнутые мною слова позволяют, как будто бы, принять, что дело здесь идет о том приеме, который я ниже называю способом первичной «количественной группировки»—группировки единиц по известному количественному признаку; но иллюстрируется этот способ надельною группировкою деревень—значит, примером уже не первичной, а вторичной группировки—группировки готовых «натуральных» групп объектов. Как бы то ни было, при отсутствии правильности «оба явления независимы и номологически и онтологически»; если подмечается правильность, надо вычислить вероятность ее случайного характера; если эта вероятность ничтожна, «мы редко ошибемся, если примем, что два явления не независимы друг от друга». Какого рода связь—на этот вопрос не отвечает и данный метод; этого и вообще нельзя определить аналитическим путем, даже в тех наивыгоднейших условиях, какие мы встречаем в экспериментальных науках Лишь если та же связь наблюдается при очень разнообразных условиях места и времени, становится вероятным предположение, что она носит номологический характер. Оно стало бы бесспорным, zwingend, лишь в том случае, если бы мы могли установить отсутствие, вообще, онтологических отношений или такой их характер, при котором он не мог бы заслонить или перевесить данный номологический момент» [1]). Как видит читатель, эта схема, в самом деле, только не лишенный даже некоторой обивчивости набросок Но в этом наброске можно найти если не вполне отчетливые характеристики, то, во всяком случае, намек на все основные типы каузального статистического умозаключения: на первичные методы группировки единиц по предполагаемому факториальному признаку; на метод параллельных рядов, а, повидимому, и на метод вторичной количественной группировки—группировки групп объектов, как вспомогательный прием метода параллельных рядов.

С своей стороны, я считаю правильным исходить, в характеристике приемов статистического умозаключения, из противуположения двух основных типов: одного, который только и имеется в виду в приведенных характеристиках Зигварта и Борткевича, и сущность которого сводится к группировке по определенному «факториальному» признаку, т. е. такому, в котором мы предполагаем причину или фактор, имеющий решающее влияние на склад и характер изучаемого явления,—к группировке, говорю я, отдельных единичных объектов; и другого—метода параллельных рядов с производным от него методом вторичной количественной группировки—группировки уже сведенных в «натуральные» группы средних или относительных величин. Эти два типа существенно различны и по степени определенности получающихся выводов, и по степени широты их применимости,

[1]) Там-же, стр. 469—473.

и в связи с этим последним обстоятельством—по характеру того технического орудия, или конкретнее,—тех типов таблиц, какими мы оперируем и какими мы должны располагать для статистических умозаключений, отвечающих тому и другому из охарактеризованных только-что логических типов.

Существеннейшие черты *первого* из этих двух типов с достаточною отчетливостью резюмируются приведенною краткою формулою Борткевича: «причинные соотношения устанавливаются путем сопоставления частостей, относящихся к группам, которые отличаются одна от другой в определенном отношении», причем «под причиною всегда понимается известный признак или *принадлежность к так или иначе характеризованной группе*, а под следствием—сравнительно высокое или низкое численное значение данного статистического коэффициента». Не приходится, конечно, напоминать, что техническим орудием статистического умозаключения, подходящего под только-что приведенную характеристику, могут быть только *групповые или комбинационные таблицы*, — только они дают распределение случаев, или индивидов, входящих в состав изучаемой массы, на такие группы, принадлежность к которым может рассматриваться как «причина»,—и только они дают такие статистические коэффициенты, высокое или низкое численное значение которых может пониматься как «следствие» принадлежности к «так или иначе охарактеризованной группе». Еще менее приходится напоминать о том, что групповые таблицы дают группировку случаев или индивидов по какому-либо одному, комбинационные—по совокупности нескольких (однако, в силу общеизвестных технических условий, немногих) признаков, благодаря чему первые дают возможность выявлять влияние, в каждом случае, какого-либо *одного* факториального признака, при предполагаемом уравновешении, в массе, всей совокупности остальных признаков, которые, по отношению к принятому в основу построения таблицы фактору, принимаются за «случайные»; комбинационные таблицы позволяют выявить влияние каждого из принятых при построении данной таблицы *нескольких* признаков, при, фактически, одинаковых или приблизительно одинаковых вариантах остальных, учтенных в таблице, и при предполагаемом, опять-таки, уравновешении, в массе, всех остальных, частью, может быть, известных, частью неизвестных, факторов случайного, по отношению к данной совокупности признаков факториального характера, причин. На что, однако, не мешает обратить внимание, это то, что именно групповые и комбинационные таблицы представляют собой то наиболее совершенное орудие статистического анализа, при пользовании которым, статистика, по своим логическим функциям, сближается с естественно-историческим экспериментом. Ведь именно благодаря «свободе группировок»

ь статистике, по Вундту, достигается нечто подобное «обращенному эксперименту»: «тогда как при настоящем эксперименте вариируются условия, участвующие в возникновении явлений, при статистическом приеме комбинируются, in variabler Weise, сами явления (курс. мой. А. К.), чтобы отсюда делать Ruckschlusse относительно действовавших при их возникновении условий» [1]) А эта «свобода группировок» достигается в статистике не иначе, как при условии возможности построения соответствующих каждой желаемой группировке групповых или комбинационных таблиц.

Практически, однако, можно различать две разновидности данного типа статистического умозаключения: методы количественной и качественной группировки. Первый случай имеет место тогда, когда достичь раскрытия определенной причинной зависимости удается исходя из вариаций какого-либо, если можно так выразиться, данного самою природою изучаемого явления признака, выраженного в качественной или описательной форме, который и полагается в основу расчленения изучаемой массы на группы, или, говоря технически,— в основу построения данной групповой или комбинационной таблицы; признака, который, в силу тех или других соображений, подсказанных, может быть, просто, повседневным опытом, может быть опытом, уже принявшим форму научного обобщения, а то и просто в силу определенных предположений, по «догадке», предполагается стоящим в причинной связи с изучаемым явлением. Мы группируем, например, данные о смертности по профессиям, данные об урожаях—по характеру почв, данные, характеризующие благосостояние и хозяйство крестьян—по племенному признаку или по разрядам крестьян, данные о их грамотности—по тому-же племенному признаку и по характеру промысловой деятельности, данные о заработной плате промышленных рабочих — по «профессиям» и по уровню грамотности, и т. п. Мы можем проводить группировку по любому одному из подобных признаков, и тогда мы строим групповую таблицу; можем провести группировку по совокупности качественных признаков, и тогда мы будем строить комбинационную таблицу; можем выяснять, например, зависимость урожая от способов обработки, в связи с характером почвы,—зависимость заработной платы от профессии, племенного признака и грамотности, положения переселенцев в зависимости от происхождения, промысловости и способа водворения на новом месте, и т. п. Во всех этих случаях качественно или описательно выраженный признак содержит прямое указание на причинную связь; он выражает либо такое обстоятельство, которое непосредственно влияет на изучаемое явление (почва, грамотность,

[1]) Wundt, Logik, Bd. III, стр. 75.

промысловость), либо такое, которое является симптомом некоторой совокупности влияющих условий (влияние профессии или вероисповедания на смертность). А мера колебаний, характеризующих отдельные группы коэффициентов, является, вместе с тем, и мерою влияния различных вариаций положенного в основание группировки фактора.

Другая разновидность рассматриваемого типа—метод количественной группировки. И здесь изучаемая масса расчленяется на группы или частные совокупности, на основании вариаций признака, предполагаемого влияющим или—можно выразиться иначе—испытуемого в его влиянии на изучаемое явление; для каждой группы вычисляются отдельные коэффициенты, и эти коэффициенты сравниваются между собой и сопоставляются с вариациями факториального признака. Разница в том, что в основу группировки полагаются не вариации качественного признака, а выраженные в цифрах вариации признака, выраженного количественно. Мы выясняем, например, влияние возраста на общий уровень смертности, на силу смертности от главных категорий причин смерти, на профессиональный состав, на грамотность населения, на высоту заработной платы, и т. п.; выясняем влияние размеров земельного надела на благосостояние крестьян, на технику земледелия, на аренду, на грамотность, на промысловость; выясняем влияние размеров дохода, или скученности населения в жилищах, выражаемой средним числом жителей на комнату, на смертность, или на заболеваемость от заразных болезней,—в каждом из подобных случаев мы также точно строим групповую таблицу, если задаемся целью выяснить влияние какого-либо одного количественного признака, игнорируя влияние остальных, и строим комбинационную таблицу, если мы хотим выявить влияние вариаций одного количественного признака при одинаковом или приблизительно одинаковом влиянии некоторого числа других, количественных же признаков; мы можем разгруппировать, например, данные о крестьянском хозяйстве по размерам землевладения, количеству скота, как показателю состоятельности, и по рабочей силе крестьянских дворов; можем разгруппировать данные о грамотности рабочих по возрасту и по величине заработной платы; разгруппировать данные о смертности городского населения—по высоте квартирной платы и по степени скученности населения в квартирах, и т. п. В каждом из подобных случаев изменение коэффициентов сгруппированного по данному количественному признаку ряда в определенном, прямом или обратном соотношении с изменениями этого факториального признака может быть признано за бесспорное доказательство существования причинной зависимости между теми явлениями или признаками, которые находят себе выражение в групповых коэффициентах, и тем фактором, который положен в основание группировки. Коэффициенты зависимого ряда именно

потому и изменяются в соответствующем градации положенного в основу группировки фактора, или в противуположном направлении, что характеризуемое этими коэффициентами явление стоит в более или менее непосредственной зависимости от данного фактора, который, и в рассматриваемом случае, может выражать собою либо более или менее непосредственно влияющую на данное явление причину, либо лишь статистически-уловимый симптом, позволяющий судить о некоторой более отдаленной причине. Во всех подобного рода случаях найти правильное основание группировки—это значит, в сущности, разрешить вопрос о той причинной зависимости, которая лежит в основе исследуемых статистических цифр, а вместе с тем—и характеризуемого ими явления.

Из всего сказанного ясно, что методы количественной и качественной группировки — именно только разновидности одного и того же типа статистического умозаключения, различающиеся между собой лишь способом выражения испытуемого на его влияние признака. Принципиальное существо обоих одно: изучаемая масса или совокупность, или, более определенно — входящие в эту массу случаи или индивиды (смысл этой оговорки окончательно выяснится, когда мы перейдем к рассмотрению очень похожего по внешнему виду и по характеру технического орудия — соответственных таблиц, метода вторичной количественной группировки), расчленяются на частные группы или совокупности, на основании вариаций некоторого «факториального» признака, т. е. такого, который мы, по каким-либо основаниям, предполагаем имеющим более или менее решающее влияние на изучаемое явление, или по некоторой совокупности таких «факториальных» признаков. Для каждой такой частной группы вычисляются отдельные коэффициенты функционального признака или признаков, т. е той величины, либо тех величин, которые предполагаются стоящими в зависимости от данного фактора или комбинации факторов. Различия в значениях этих коэффициентов выражают влияние фактора, положенного в основу группировки, и центром внимания исследователя является взаимоотношение между этими изменениями—и вариациями положенного в основу группировки признака или комбинации признаков. Разница, как уже отмечено, заключается в том, что, в одном случае, в основу группировки полагаются вариации качественного признака, в другом—выраженные в числах варианты признака, допускающего количественное выражение. В случаях комбинационного анализа, сплошь и рядом, имеет место комбинация обеих разновидностей—количественной и качественной группировки: мы можем, например, провести группировку крестьянских дворов по величине надела, рабочей силе—признаки количественные, но в комбинации с ними еще и по племенному признаку и промысловости—признаки

качественные; можем провести группировку данных о заработной плате промышленных рабочих по роду производства и «профессии»— в комбинации с возрастом и продолжительностью работы в данном предприятии. И тут, и там—и при количественной, и при качественной группировке, найти правильное основание группировки значит, в существе, решить вопрос о характере той причинной зависимости, которая лежит в основе изучаемого явления. Но в то-же время, и тут и там, нахождение такого правильного основания не может быть делом простой случайности. Уже одной той массы технической работы, а, следовательно, и тех затрат, каких требует составление, по первичному материалу, соответственной групповой или комбинационной таблицы, достаточно, чтобы сделать невозможным применение рассматриваемых приемов статистического умозаключения на-авось, ощупью: не выйдет-ли чего-нибудь. Напротив: мы именно потому и полагаем в основу группировки тот или другой, количественно или качественно выраженный, фактор, или определенную комбинацию таких факторов, что *предполагаем существование причинной связи* между данными факторами и данными функциями; потому что, на основании данных предыдущих научных исследований, или просто указаний жизненного опыта, *имеем основание предполагать* влияние данного фактора или данной комбинации факторов на изучаемое явление.

Из всего сказанного ясно, что, если возможно сближение рассмотренных двух методов, или объединяя их—рассматриваемого типа статистических умозаключений, с теми или иными из обычных методов индукций, то их приходится сближать (не предрешая вопроса о тождестве или только о некотором сходстве) только с методами сходства и различия. В случае группировки по *одному* признаку, или, технически, когда мы оперируем с групповою таблицей, рассматриваемые приемы могут быть сближены с методом единственного сходства: единицы, включенные в сопоставляемые, в их функциональных признаках, группы, могут быть сколько угодно различны во всех известных или остающихся нам неизвестными факториальных признаках, кроме того одного, который положен в основу группировки; следовательно, всякая существенная разница в групповых коэффициентах должна рассматриваться—пока не доказано противное—как стоящая в причинно-следственной зависимости от единственного сходного фактора. В случае группировки *по-совокупности нескольких* признаков, данный тип анализа может быть сближаем, смотря по приему анализа, либо с методом сходства, либо с методом различия. Если мы выбираем из комбинационной группировки переселенческих хозяйств группы дворов, однородные по продолжительности проживания на новом месте, по рабочей силе и, положим, по племенному признаку, и различающиеся только по количеству принесенных денег, и

сопоставляем получившиеся в этих группах коэффициенты благосостояния переселенцев,—такой прием анализа придется сблизить с методом различия: различия в величине зависимых коэффициентов мы должны будем отнести насчет того единственного фактора, который изменяется, при более или менее близком тождестве остальных трех учитываемых при нашем анализе факторов; и наоборот—если мы выбираем группы, однородные по размеру принесенных между собою денежных средств, но различающиеся между собой по совокупности остальных, учтенных при нашем анализе признаков, и если зависимые коэффициенты при этом оказываются тождественными или близким,—наше заключение о решающем значении данного признака будет близко к методу сходства: причин тождества или близости тех признаков, которые нашли себе выражение в коэффициентах зависимого ряда, мы должны искать не в чем ином, как в том единственном обстоятельстве, которое мы взяли тождественным или сходным для всех сравниваемых групп. Однако, в практике статистического анализа приходится оперировать, главным образом, первым способом, а потому не будет ошибкою сказать, что в случае группировки по совокупности нескольких признаков, рассматриваемый тип статистического умозаключения может быть сближен, по преимуществу, с методом различия.

Итак, еще раз: по существенному своему смыслу методы количественной и качественной группировки настолько близки между собою, что их вполне возможно рассматривать как различающиеся в одном лишь, и притом второстепенном, обстоятельстве, разновидности одного и того-же основного типа статистического умозаключения. Между этими двумя разновидностями есть, однако, и некоторое существенное различие, хотя и далеко не столь резкое, как мне представлялось и как я это выразил в моей книге «Теория и методы статистики» [1]). «При количественной группировке,—писал я там,—самая наличность соответствия между положенным в основание группировки признаком и постепенностью изменения расположенных по этому признаку статистических коэффициентов является доказательством того, что мы имеем здесь дело с причинною зависимостью, а не со случайным совпадением, — раз достаточно твердо установлен такой числовой параллелизм, нам нет надобности искать дальнейших доказательств наличности причинной связи, а надо только объяснить ее. Иное в случае качественной группировки: самое слово, комбинация букв, «кабатчик», «углекоп», «сельский работник», само по себе не дает указания на то, что мы имеем дело с причинною связью, а не с случайным совпадением. Каждая из этих комбинаций букв, сама по себе, может совпасть с определенным уровнем смертности, как комбинация «ткач» или «торговец». Конечно, — оговари-

[1]) См. 3-е изд., стр. 174—175

вался я, — раз «ткачей» или «торговцев» много, и раз полученные для многочисленных групп торговцев и ткачей коэффициенты существенно отличаются друг от друга, становится трудным допустить, чтобы различия носили случайный характер; в нас, естественно, возникает представление, что обнаруживающиеся различия зависят от какой-то или каких-то определенных причин», и «это представление укрепляется в нас, в особенности, в том случае, если аналогичные различия обнаруживаются при повторных или, вообще, при дополняющих и поверяющих друг друга наблюдениях».

В данное время я должен решительно отказаться от приведенных только-что соображений и признать их ошибочными. В действительности, конечно, и в том, и в другом случае в основе нашего заключения о наличности причинной связи лежит та-же самая невозможность допустить случайный характер существенных различий в относящихся к сколько-нибудь значительным частным совокупностям коэффициентах. И к тому, и к другому случаю одинаково относится то, уже приведенное выше, в формулировке Зигварта, и подробнее развиваемое в дальнейшем соображение, что «в достаточно большом числе случаев вся совокупность прочих неизвестных условий с их вариациями может предполагаться взаимно-уравновешивающеюся и в отдельно вычисленных частях данной массы случаев, а потому, поскольку действуют только одни эти—«прочие неизвестные» причины, можно и в этих частях ожидать тех-же средних величин. Если это не имеет места, — это указывает на наличность какого-либо условия, отличающего отобранные случаи от остальных, и тот факт, что общим для всех случаев является именно исследуемое обстоятельство, позволяет именно в нем видеть это отличительное условие». И в том, и в другом случае, и тут, и там, независимо от количественного или качественного способа выражения группового признака, случайные, т. е. не стоящие в связи с положенным в основание группировки, значит принятым за «постоянный», признаком, различия должны были бы уравновеситься в массе и не могли бы отклонить отдельных коэффициентов рассматриваемого ряда от той или иной однообразной величины, — и, значит, если эти коэффициенты существенно различны, это должно стоять в причинной связи с единственным, объединяющим отдельные случаи в каждой группе и в то-же время отличающим каждую такую частную группу или совокупность от остальных частных совокупностей обстоятельством — с вариациями факториального признака, безразлично, количественного или качественного. Равным образом, к обеим разновидностям относится и дальнейшее: что представление о невозможности предположить случайные различия и о необходимости допустить проявляющуюся в различных групповых коэффициентах причинную связь становится значительно более прочным, если «аналогичные различия обнаруживаются при повторных или, вообще,

при дополняющих и проверяющих друг друга наблюдениях». Проверка выводов на *другом* материале всегда, независимо от той или другой разновидности или даже от того или иного основного типа умозаключения, остается лучшим способом подкрепления получаемых выводов, и в частности—для выводов, полученных путем количественной группировки, она никак не менее желательна, нежели для выводов из качественных группировок: и в том и в другом случае полученные из какого-либо одного материала, следовательно, относящиеся к известной конкретной совокупности условий места и времени, групповые цифры могут—как это ни мало вероятно—отразить влияние не вариаций данного факториального признака, а каких-либо обстоятельств, привзошедших к нему со стороны; но такое случайное привхождение станет окончательно неправдоподобным, если та-же зависимость чисел функционального ряда или рядов от вариаций факториального признака или от их комбинаций будет обнаружена на другом материале, в других условиях времени и места. В той-же мере, к *обеим* разновидностям относятся и дальнейшие соображения, которые я относил к одному только «качественному» методу,—именно, указание на необходимость, «чтобы окончательно установить наличность *причинной* связи, *ввести в наш вывод*, хотя, может быть, и молчаливо, *промежуточные звенья*»—например, пояснить, «*почему* профессия кабатчика может, в самом деле, вести за собой повышенную, профессия огородника—пониженную смертность». Поскольку речь идет, в самом деле, просто об *установлении наличности* причинной связи, — для этого ни в том, ни в другом случае не требуется такого рода промежуточных звеньев, — она в достаточной мере доказывается только-что приведенными соображениями о *невозможности случайного* характера колебаний цифр. Поскольку речь идет о *выяснении ее существа*, об *объяснении* получившейся закономерности причинного характера, — введение требующихся *для этого* промежуточных звеньев одинаково необходимо и в случае количественного, и в случае качественного признака. И в том, и в другом случае, как мы увидим ниже, объяснение представляет собою совершенно самостоятельную фазу научной работы, не стоящую в органической связи с констатированием факта существования зависимости причинного характера.

Во всех этих отношениях между количественною и качественною группировкой нет, таким образом, разницы. *Есть* разница только в одном отношении. При *количественной* группировке тем самым дается *мера*, определенная количественная *градация* испытуемого, в его влиянии на изучаемое явление, фактора: если выделены группы одно-, дву- и трехрабочих дворов — вторая и третья группы дают удвоенную и утроенную меру данного фактора; если даны группы промышленных предприятий, имеющих, положим, до 10,

11—50, 51—100, 101—500, 501—1000 рабочих, мы, конечно, не можем выразить меры данного фактора определенными кратными, но все-же имеем наглядное представление об этой мере. Конечно, представление это, даже в лучшем случае, более или менее условное, потому что, например, хозяйственная мощность двурабочего или трехрабочего двора, в силу общеизвестных соображений, не вдвое и не втрое, а в гораздо большей пропорции превышает хозяйственную силу однорабочего. Но все-таки — это некоторое, пусть даже только грубоприблизительное, количественное представление. Напротив, при группировке по качественному признаку, формулировка этого последнего, сама по себе, не только не дает никакого представления о мере его действия; она, нередко, не дает представления даже о направлении его действия; даже последнее, нередко выясняется только из характера колебаний цифр расположенного по данному признаку статистического ряда: если сгруппированные по почвенным типам данные об урожайности дают для сравнительно близких друг к другу почвенных типов—положим, для каких-нибудь средних и легких суглинков и супесей, среднюю урожайность в 60, 55 и 50 пудов, то, быть может, именно эти цифры впервые дают точный ответ на вопрос о том, какой из этих типов почв, при данных: климате, обработке, унаваживании, лучше, и который хуже других. Обстоятельство это существенным образом отражается и на самих целях исследования. Построение рядов в качественной группировке нередко имеет если не главною, то побочною целью именно измерить, выразить в числах значение того или другого признака, иным способом не поддающегося измерению, иногда — даже и более того: определить самое направление его влияния. При количественной группировке эта последняя задача может иметь место лишь в исключительно редких случаях — в виде правила, приступая к исследованию, мы уже знаем, влияет - ли данный признак в положительном или в отрицательном смысле; первая-же отпадает во всяком случае, ибо сама группировка дает меру положенного в ее основание фактора, и весь вопрос может быть только о его влиянии. Тем самым количественный метод дает более твердую придержку для определения меры влияния положенного в основу группировки фактора: эта мера непосредственно дается отношением между изменениями ряда коэффициентов и градациею вариантов факториального признака. Возьмем хотя бы два такие примера: один — влияние возраста вступления в брак на процент бездетности. Интервалы для количественной группировки взяты: 15—20 лет, затем пятилетние интервалы до 45 лет, последний интервал—выше 45 лет: проценты бездетности получились: для Норвегии—3,2 — 3,6 — 6,2 — 9,2 — 17,1 — 46,1 — 81,1%; для города Берлина—6,6 — 6,1 — 12,9 — 22,0 — 32,1 —

65,1 — 91,1%; влияние, очевидно, чрезвычайно сильное. Другой пример — влияние продолжительности учебной работы в начальных школах Тверской губернии. Интервалы взяты: до 5 лет, 5—10, больше 10 лет; соответственные коэффициенты получились для процента школ с ранним началом занятий 72 — 76 — 82, для среднего числа учеников 39 — 41 — 43, для процента достигших старшего отделения 36 — 46 — 51%; влияние, в этом случае, тоже совершенно несомненно, но мера его незначительна — изменения коэффициентов слабее, нежели вариации группового признака.

Однако, и в данном направлении разница между двумя разновидностями исчезает, если влияние количественного или качественного фактора измерять в другом направлении, — именно, сравнивать *степень влияния одного данного фактора на различные, зависимые от него функциональные признаки*. В виде резкого примера возьмем влияние того-же фактора — возраста вступления женщины в брак, на два явления: бездетность и мертворождения. При только-что приведенной градации процент бездетности для Норвегии получился, как мы видели, 3,2 — 3,6 — 6,2 — 9,2 — 17,1 — 46,1 — 61,1, а процент мертворождений 4,1 — 3,0 — 3,6 — 3,1 — 4,3 — 5,1 — 6,4; для города Берлина проценты бездетности 6,6 — 6,1 — 12,9 — 22,0 — 32,1 — 65,1 — 91,1%, проценты мертворождений 4,5 — 3,6 — 3,6 — 3,9 — 4,3 — 5,6 — 5,7%; ясно, что влияние возраста вступления в брак на первое из названных явлений — бездетность, чрезвычайно сильно, влияние того-же момента на мертворождения хотя и проявляется с совершенною и не допускающею сомнения отчетливостью, но несравненно слабее. Не приходится доказывать, что тот-же критерий для суждения о большей или меньшей силе влияния исследуемого фактора вполне применим и при группировках по качественному признаку: и в этом случае различия величины коэффициентов, сплошь и рядом, оказываются для одного из зависимыхъ от данного фактора функциональных признаков более или менее резкими, для другого они могут проявляться более или менее слабо, а то и с меньшею степенью отчетливости, — ясно, что влияние испытуемого фактора придется признать по отношению к первому, зависимому от него, явлению или признаку, сильным, по отношению ко второму—слабым.

Как бы то ни было, *в своем принципиальном существе* обе разновидности рассматривавшегося до сих пор типа статистических умозаключений чрезвычайно близки между собой: общий принцип обоих в том, что предметом исследования является *зависимость данного явления или признака от того фактора, который положен в основу группировки*. Прямо или косвенно, как непосредственно - действующий фактор или как симптом действительно влияющей при-

чины, — во всяком случае, положенный в основу группировки признак является выражением такого фактора или таких факторов, влияние которых обусловливает проявляющиеся в коэффициентах данного ряда различия; влияние этого признака является п р и ч и н о ю этих различий в том смысле, как этот термин понимается в теории статистики и в теории вероятностей. И о д н о г о, соответственно разгруппированного ряда достаточно, чтобы установить наличность или отсутствие зависимости составляющих его коэффициентов от положенного в основу группировки признака или фактора. О б а эти метода, или обе эти разновидности, целиком подходят под приведенные выше характеристики Зигварта и Борткевича, обе они отвечают соображениям Вундта относительно статистического приема, как аналогичного естественно-историческому эксперименту — приема варпирования обстоятельств, как способа раскрытия действующих причин.

Однако, ни эти соображения, ни характеристики Борткевича и Зигварта далеко не исчерпывают всей совокупности логических приемов статистического каузального анализа; в частности, эти характеристики совершенно не могут быть приложены к тому типу статистического умозаключения, намек на который мы находим только в вышеприведенных соображеннях А. А. Чупрова (Reihenvergleichung!) и который приходится сопоставлять уже не с методами сходства или различия, а с третьим из основных методов обычной индукции—методом сопутствующих изменений. Это—тот метод, или самостоятельный, в логическом смысле, тип статистического умозаключения, который я называю методом п а р а л л е л ь н ы х р я д о в. Конечно, и в этом случае предметом изучения является статистический ряд—серия статистических коэффициентов (либо, реже, абсолютных величин), подсчитанных по группам или частным совокупностям. Но варианты группового признака сами по себе ничего не говорят или, во всяком случае, м о г у т н и ч е г о н е г о в о р и т ь о каких бы то ни было влияниях и зависимостях причинного характера: в роли группового признака могут стоять названия губерний, уездов, стран, деревень, обозначения годов или месяцев, просто номера—1-ый, 2-ой и т. д., или литеры—А, Б, В, и т. д. Групповой признак может—если угодно—и вовсе отсутствовать—предметом изучения могут быть просто ряды статистических коэффициентов, сгруппированных неизвестно или безразлично по какому признаку. В такого рода случаях о д и н статистический ряд, сам по себе, конечно, н и ч е г о не говорит о причинах, обнаруживающихся в числах колебаний; колебания ряда погубернских цифр, положим, смертности, или переселенческого движения, или потребления вина, равно как и колебания погодного ряда цифр, относящихся к тем-же или к каким угодно другим явлениям, сами по себе, так-же мало говорят о причинах, вызывающих различия в пространстве или изменения во времени, как мало говорили-бы нам, просто, цифры, положим, 29—31—26—24—

30—28 и т. д., если-бы нам сказали, что это—какие-то цифры, изображающие смертность где-то и когда-то. Объяснения различиям в погодных или погубернских цифрах одного ряда нам пришлось-бы, в каждом из подобных случаев, искать в той или другой совокупности вне-статистических соображений; или конкретно—в той или другой совокупности откуда-либо нам известных данных, характеризующих отдельные губернии, или отдельные года, и могущих так или иначе влиять на смертность, на переселение или на потребление спиртных напитков. Дело коренным образом меняется, если мы имеем два или несколько рядов, сгруппированных по каким угодно — но только по тождественным — вариантам какого угодно, влияющего или невлияющего, хотя-бы совершенно условного, признака. В таком случае, мы приходим к заключению относительно существования причинной зависимости из параллелизма или, наоборот— из антагонизма, — из параллельного или, напротив, противуположного характера колебаний в обоих или, вообще, во всех сопоставляемых рядах: погодные цифры смертности колеблются, приблизительно, в прямом отношении с хлебными ценами и, в обратном отношении, с урожаями, — мы заключаем отсюда, что смертность стоит в прямой зависимости от хлебных цен и в обратной зависимости от урожаев. Проценты переселенцев изменяются в прямом отношении со средними размерами земельного обеспечения крестьян и в обратном отношении—с среднею урожайностью, которая, значит, изменяется в обратном отношении и с размерами земельного обеспечения,—мы заключаем отсюда о существовании прямой зависимости размеров переселения от степени земельного обеспечения, и некоторое объяснение парадоксальному, на первый взгляд, факту такой прямой зависимости мы находим в обратной зависимости урожаев от того-же земельного обеспечения,— причем нам совершенно безразлично, относятся-ли сопоставляемые цифры к губерниям, уездам, волостям, или к произвольно составленным группам селений. При количественной и качественной группировке вывод о существовании причинной связи делается из сопоставления различий в величине коэффициентов, относящихся к каждой данной группе, с вариациями положенного в основу группировки признака. При методе параллельных рядов этот последний может быть совершенно индифферентным—вывод о наличности или отсутствии причинной связи мы делаем безотносительно к групповому признаку, из параллельного или противуположного характера колебаний сгруппированных по любому, лишьбы он был тождественным, признаку абсолютных или относительных чисел. Я сказал: может быть совершенно индифферентным — дело в том, что вывод методом параллельных рядом может получиться и в виде, если можно так выразиться, по-

бочного продукта статистического анализа, в основном своем содержании построенного по методу количественной или качественной группировки и опирающегося, значит, на групповые или комбинационные таблицы. Например, мы, при помощи соответственным образом построенной групповой таблицы, выясняем влияние размеров крестьянского землевладения на длинный ряд явлений крестьянского хозяйства и крестьянской жизни вообще: на потребительный и рабочий состав семьи, на грамотность и школьное обучение, на величину запашки и количество скота, на распределение посевов по видам культур, на промысловость и т. п. Основным приемом анализа будет сопоставление колебаний в рядах цифр, соответствующих каждому из перечисленных функциональных признаков, с вариациями факториального признака, положенного в основу построения таблицы,—размеров землевладения. Попутно мы можем, однако, подметить, в той-же таблице, тот или другой параллелизм или антагонизм между любою парою функциональных признаков—например, между рабочим составом и промысловостью, промысловостью и грамотностью, грамотностью и распространенностью интенсивных и ценных культур, общим размером посевов и распределением их по культурам и т. п.,—и из наличности такого параллелизма, либо антагонизма, придти к ряду заключений относительно причинной связи между соответственными парами признаков крестьянского хозяйства. В э т и х наших попутных или побочных выводах положенный в основу построения таблицы, сам по себе чрезвычайно важный, признак не будет играть никакой роли—он будет, собственно, для данных наших выводов, полученных по методу параллельных рядов, так-же индифферентен, как названия губерний или волостей, как какие-нибудь текущие нумера групп или, просто, буквенные обозначения; эти наши побочные выводы ничего не потеряют в своем значении, если, положим, стереть или отрезать боковые заголовки, содержащие характеристику земельных групп, тогда как использование такой испорченной таблицы для выводов по методу количественной группировки сразу-же стало-бы совершенно невозможным.

Существенно различные, собственно по характеру аналитического приема, рассматриваемые два типа статистического умозаключения—методы количественной и качественной группировки, с одной стороны, и метод параллельных рядов, с другой, существенно различны и в отношении о п р е д е л е н н о с т и или, если можно так выразиться, к а т е г о р и ч н о с т и п о л у ч е н н ы х в ы в о д о в: метод параллельных рядов дает гораздо менее твердые и определенные выводы, и выводы эти должны быть выражаемы в гораздо менее категорической форме, нежели когда мы оперируем методами количественной или качественной группировки. Когда мы оперируем одним из методов первого типа, к а ж д ы й единичный случай попадает в характеризуемую соответственною вариациею факториального признака группу, и к а ж д а я

такая группа составляется только из таких случаев, которые подходят именно под данную вариацию этого признака. Получающийся вывод вполне категоричен: те случаи, которые характеризуются в данном отношении так-то, дают такой-то коэффициент зависимого признака, и переход к тем случаям, которые характеризуются такою-то другою вариацией факториального признака, сопровождается таким-то изменением зависимого коэффициента. При методе параллельных рядов мы имеем дело уже не с разгруппированными по определенным вариантам факториального признака отдельными случаями, а лишь со средними для целых групп коэффициентами, как для признака, в котором мы предполагаем причину, так и для признаков, которые предполагаются зависимыми от этой причины. Между тем, характеризуемая некоторою среднею величиною признака группа может быть составлена из весьма разнородных единиц: селение со среднею лошадностью 2,0 может обнимать и, обычно, обнимает, и безлошадных и однолошадных, и многолошадных; фабрика с 40% грамотных обнимает и грамотных и неграмотных. Поэтому, основанное на наличности параллелизма, либо антагонизма рядов заключение уже не может быть облечено в категорическую форму «те случаи, которые...», а должно быть выражено в гораздо менее определенной форме: «там, где принимаемый за причину признак выражен такою-то среднею величиной, зависимый коэффициент имеет такую-то величину». Но—еще раз: «там, где» получился известный средний, общий коэффициент, он выведен, несомненно, из различных, и, может быть, из чрезвычайно различных конкретных цифр. И возможно, что та характеристика данной группы, которая дается соответственными цифрами рядов, изображающих зависимое явление, относится не к целой группе, а к части ее, с большими или с меньшими, против среднего для всей группы, коэффициентами, и что, следовательно, выявляющийся при сопоставлении рядов параллелизм или антагонизм колебаний существует, в действительности, не между целыми группами, а между отдельными частями их, и притом совсем не в том виде, как это вытекало-бы из средних цифр. На конкретном примере: сопоставление поуездных цифр земельной обеспеченности и переселенческого движения привело к парадоксальному выводу, что переселение идет сильнее из многоземельных местностей. Но эти местности—целые уезды; между тем, в многоземельном уезде могут быть (и, фактически, в виде правила, бывают) очень различные по земельной обеспеченности волости, селения и дворы—в уезде с средним обеспечением в 6 дес. поволостные средние легко могут колебаться между 3 и 10, поселенные—между 1 и 50 дес., земельное обеспечение отдельных дворов—между 0 и 200 десятинами. И вполне мыслимо, что усиленное переселение идет из многозе-

мельных уездов, но из м а л о земельных волостей и селений, и что переселяются, в частности, наиболее малоземельные дворы. Такое предположение—если-бы оно оправдалось—не представляло-бы даже ничего парадоксального: в многоземельном уезде незначительность земельного обеспечения ощущается особенно остро, и потому с особенною силою может толкать к переселению. Между тем, при методе количественной группировки в группы отобраны однородные дворы, и этим a limine устраняется возможность подобного рода подрывающих достоверность полученного вывода предположений.

Итак, еще раз: метод параллельных рядов обеспечивает далеко меньшую степень определенности и категоричности выводов, нежели методы количественной и качественной группировки, и потому везде, где только возможно, следует оперировать этими последними методами, и только если ее нет, прибегать к методу параллельных рядов. Но именно с таким положением вещей приходится встречаться очень часто, и потому метод параллельных рядов в статистической практике встречается несравненно чаще, нежели методы первого типа. Дело в том, что необходимою предпосылкою возможности применения методов количественной и качественной группировки являются соответственные групповые или комбинационные таблицы, где первичные данные были-бы сведены именно по интересующим исследователя признакам или комбинациям признаков. Значит, данная группировка должна быть предусмотрена уже п р и с а м о й с в о д к е первичных данных; а для этого, в свою очередь, уже при первичной сводке должно быть предусмотрено д а н н о е н а п р а в л е н и е каузального анализа. Но, во-1-х, всех мыслимых его направлений нет возможности предусмотреть, а, во-2-х, всех соответственных группировок не было-бы никакой возможности провести через таблицы—соображения экономии труда и средств заставляют ограничиваться ничтожною долею желательных группировок,—теми из них, которые отвечают известным установившимся теоретическим представлениям, или интересам момента, или индивидуальному интересу руководящего разработкою лица. А раз соответственных таблиц налицо не имеется, для исследователя, как правило, не имеющего даже доступа к первичным данным, путь к интересующей его группировке закрыт; исследователь, значит, совершенно связан теми группировками, какие имеются в опубликованном материале. Напротив, для применения метода параллельных рядов требуется только одно: чтобы ряды были подсчитаны п о о д и н а к о в о м у о с н о в а н и ю, совершенно безразлично, по какому. Такие цифры исследователь, без сравнения чаще, может подобрать в неизмеримо более изобильном материале п р о с т ы х таблиц опубликованных статистических изданий. Сплошь и рядом он находит все ему нужное в каком-нибудь о д н о м статистическом издании: поселенные таблицы любого земского статистического сборника содержат десятки и сотни «парал-

лельных рядов», подсчитанных по одному и тому-же варианту пространственного признака, в том числе десятки и, может быть, сотни пар таких рядов, которые заслуживают сопоставления и, которые, таким образом, остается только подвергнуть параллельному рассмотрению; любой статистический справочник содержит сотни рядов погубернских или поуездных цифр, которые, опять-таки, остается лишь использовать для интересующих исследователя сопоставлений. В других случаях «параллельные ряды» приходится выискивать из различных статистических источников. Чтобы сопоставить ряды погодных или погубернских цифр урожаев с цифрами смертности и преступности, приходится обратиться: за первыми—к урожайной статистике, за вторыми—к статистике движения населения, за третьими—к уголовной; чтобы сопоставить данные о ввозе и вывозе с колебаниями вексельного курса, придется взять: первые—из таможенной статистики, вторые—из котировок соответственных бирж, и т. п. Но и это—лишь несколько более хлопотливо, но не представляет не только непреодолимого, но даже сколько-нибудь существенного затруднения.

Из всего сказанного вытекает несравненно более широкая применимость метода параллельных рядов. Группировка материала по определенному количественному или качественному признаку всегда предполагает наличность уже готовых представлений относительно условий, влияющих на изучаемое явление; никто не решится на те крупные затраты труда и средств, каких требует групповой или комбинационный подсчет, если он с известною уверенностью не ожидает получить от него положительных результатов. Между тем, по методу параллельных рядов используются уже готовые таблицы,—сплошь и рядом подсчитанные и опубликованные для чисто-деловых целей, по не имеющим ничего общего с данными научными вопросами, шаблонным делениям. Затрата труда, требующаяся для подыскания и сопоставления параллельных рядов, более или менее незначительна, иногда совершенно ничтожна, а потому здесь вполне допустимо простое «нащупывание» даже таких закономерностей причинного характера, относительно которых исследователь имеет, может быть, только слабо обоснованное, даже совсем необоснованное предположение. Поэтому, применение метода параллельных рядов может привести, иногда, к гораздо более неожиданным результатам—к таким «статистическим открытиям», какие почти немыслимы при применении методов количественной и качественной группировки.

Однако, в чистом своем виде и метод параллельных рядов применим лишь при наличности определенных условий. Для этого требуется, прежде всего, чисто внешняя обозримость, достижимая лишь при неслишком длинных рядах, не больше, скажем, чем в несколько десятков цифр в каждом ряде; ряды с сотнями цифр, прямо-таки, нет

возможности окинуть взглядом, чтобы подметить, может быть и имеющийся, параллелизм; а затем—требуется я в н ы й, уловимый, так сказать, простым глазом параллелизм или столь-же явная противуположность колебаний. Между тем, в практике статистического анализа, сплошь и рядом, приходится иметь дело с длинными рядами, состоящими, каждый, из многих сотен и даже тысяч цифр: при работе в общегосударственном масштабе — с рядами поуездных цифр, при детальных работах в поуездном или погубернском масштабе—с сотнями и тысячами общин или селений; в этих случаях отсутствует даже самая элементарная внешняя обозримость подлежащих сопоставлению рядов. Еще гораздо чаще отсутствует второе условие — сколько-нибудь ясный или, хотя бы, уловимый при помощи простейших графических способов (линейные диаграммы, картограммы) параллелизм или противоположность колебаний. И это последнее обстоятельство с неизбежностью вытекает из сложности тех явлений, к анализу которых применяется статистический метод: с т р о г о г о или близкого к строгому параллелизма или противоположности колебаний можно было-бы ожидать лишь если-бы сопоставляемые явления находились в причинной связи т о л ь к о друг с другом, и ни с чем другим; если-бы, например, смертность, либо преступность зависела исключительно от урожаев и ни от чего другого. Между тем, в действительности, всякое не-типическое явление, требующее применения статистического метода, связано с сложным комплексом разнообразнейших причин, скрещивающихся между собой в самых разнообразных комбинациях, иногда парализующих, иногда усиливающих друг друга в их, в свою очередь, иногда параллельном, иногда противоположном влиянию интересующего нас фактора действии на данное явление. Поэтому, связь между двумя какими-либо явлениями — даже предполагая ее несомненною, — далеко не всегда, и даже скорее как исключение, проявится отчетливо поверх влияния всех привходящих обстоятельств; гораздо чаще она окажется в большей или меньшей мере замаскированною обусловленными этими привходящими причинами неправильными колебаниями. Легко может, поэтому, случиться, что даже опытный исследователь, с наметавшимся взглядом, и вовсе не в состоянии будет обнаружить никакого видимого параллелизма, никакой видимой зависимости; а, между тем, зависимость есть, и для выявления ее требуется лишь некоторая обработка сопоставляемых рядов. Я не буду останавливаться на тех приемах механической или полумеханической обработки, которые трактуются в любом элементарном курсе статистической теории или методологии; напомню только, что направление такого рода элементарной обработки подсказывается существенным смыслом закона большого числа: зависимость между явлениями, заслоненная в отдельных членах сопоставляемых рядов,—значит, в с р а в н и т е л ь н о м а л ы х числах, влиянием других обстоятельств, которые мы, с точки зрения цели нашего исследования,

рассматриваем как случайные, сплошь и рядом выступает совершенно явственно, когда мы переходим к б о л ь ш и м числам,—иначе говоря, при целесообразном сведении отдельных членов сопоставляемых рядов в более крупные группы. Не буду останавливаться и на основанных уже на принципах высшего математического анализа приемах, вроде вычисления коэффициента корреляции, которые стремятся дать о б щ у ю м е р у связи между сопоставляемыми рядами,—на этого рода приемах мне придется остановиться в одной из последних глав этой книги. Скажу всего лишь несколько слов и о тех случаях, когда сведение чисел в сопоставляемых рядах в более крупные группы утрачивает механический характер, а производится по тем или другим рациональным основаниям — наиболее обычным случаем этого рода является сведение рядов, подсчитанных по территориальным делениям, в более крупные районы; по верному замечанию Майра, «районы в их пространственной индивидуальности могут рассматриваться как носители дифференцированных статистических совокупностей», и, следовательно, сводя сопоставленные цифры по районам, мы не только увеличиваем сопоставляемые совокупности и, таким образом, устраняем появляющееся в более мелких делениях влияние случайных причин, но, вместе с тем, выясняем влияние тех особенностей, которые положены в основу группировки в районы и которые могут, так или иначе, влиять на связи между интересующими нас явлениями. Аналогичный характер носят случаи сведения цифр сопоставляемых рядов в более крупные группы, объединяемые близостью соответственных признаков вещественного характера — например, рядов цифр, характеризующих больных различными болезнями, по категориям болезней, рядов цифр, относящихся к рабочим или к предприятиям в отдельных отраслях промышленности, в группы, соответствующие, положим, известным 13-ти крупным категориям нашей промышленной статистики, рядов цифр, относящихся к отдельным видам преступлений, в группы, соответствующие более широким категориям этих последних. Во всех подобных случаях мы, опять-таки, не только увеличиваем сравниваемые массы и, таким образом, способствуем лучшему выявлению постоянных причин, но, вместе с тем, обнаруживаем и влияние на сопоставляемые явления или признаки тех общих черт, которые характеризуют определенные широкие категории болезней или преступлений, целые отрасли промышленности и т. п.

Все эти способы обработки сопоставляемых рядов могут быть рассматриваемы как простые вспомогательные средства метода параллельных рядов в его первоначальном виде. Но только-что рассмотренные случаи, когда сведение в более крупные группы уже не носит механического характера, могут рассматриваться как переход к тому, могущему претендовать уже на самостоятельное логическое значение, приему, который можно назвать методом в т о р и ч н о й к о л и ч е-

ственной группировки. Сущность этого приема сводится к тому, что отдельные члены того из «параллельных рядов», который отвечает предполагаемому нами признаку-причине, принимаются за факторальный признак, по величине которого цифры другого ряда или остальных рядов, отвечающих предполагаемым явлениям-следствиям, разбиваются на группы. Или, подходя к делу с другого конца: отдельные члены ряда или рядов, изображающих явления-следствия, разбиваются на группы, объединенные одинаковою или близкою величиною членов ряда, отвечающего предполагаемому явлению - причине; для каждой такой «вторичной группы» выводятся средние коэффициенты функциональных признаков, и эти новые, «вторичные», групповые коэффициенты сопоставляются с «вторичным» факториальным признаком. Даны, например, параллельные ряды хлебных цен, смертности и преступности, — мы образуем группы годов с высокими, средними и низкими ценами и для каждой из них вычисляем средний коэффициент смертности и преступности; даны ряды поселенных цифр земельного обеспечения, посевной площади, промысловости, грамотности и т. п. — мы образуем группы многоземельных, вышесредних, среднеземельных, нижесредних, малоземельных селений и для каждой из таких групп вычисляем средние коэффициенты предполагаемых зависимыми от земельного обеспечения признаков — посевной площади, обеспечения скотом, грамотности, промысловости и т. п.

Как было выше отмечено, некоторый намек на характеристику этого метода мы находим у А. А. Чупрова, когда он говорит о Reihenvergleichung и, в виде примера важнейшей Modalität этого приема, указывает на сведение единичных случаев в группы по значению «величины, дающей наилучшую количественную характеристику другой величины», и иллюстрирует этот прием примером надельных групп селений. Более отчетливо, но без сколько-нибудь подробной разработки, идея данного метода формулирована у тех из логиков, которые более серьезно входили в существо статистического метода — например, у Зигварта и Вундта: последний останавливается на возможности комбинирования различных группировок и разложений, и, как особенно замечательную категорию подобного рода приемов, отмечает те случаи, «когда результат первого родового сравнения опять трактуется как индивидуальный случай, вновь подвергаемый сравнению с другими, подобным-же способом образованными, искусственными индивидуальными понятиями; таким образом, — заключает Вундт, — получаются, в настоящем смысле, родовые (generisch) сравнения второго порядка» (курс. автора) [1]). Определение, казалось-бы, вполне отчетливое. Однако, в понимании существа рассматриваемого приема и у Вундта, есть, повидимому, некоторая неясность: в дальнейшем он считает нужным подчеркнуть, что «такие искусственно-образо-

[1]) Wundt, Logik, т. III, стр 77.

ванные индивидуальные понятия... никогда не могут приобрести того-же значения реальных объектов, как действительные индивидуумы», и как пример переоценки значения таких «искусственно образованных индивидуальных понятий», приводит среднего человека Кетле: пример этот, очевидно, не отвечает только-что процитированной характеристике рассматриваемого приема, как она дана самим Вундтом, потому что здесь вовсе нет родового сравнения второго порядка, а есть только неуместная персонификация обобщения из непосредственно-данных индивидуальных характеристик.

Вернемся, однако, к нашей характеристике метода «вторичной количественной группировки». Нам нет уже надобности подчеркивать внешнего его сходства с «первичным» методом количественной группировки — иначе сказать, с количественною разновидностью того первого типа статистического умозаключения, который мы принципиально противупоставили методу параллельных рядов. Это внешнее сходство выражается и в том, что вторичная количественная группировка, как и первичная, находит себе внешнее выражение и, вместе с тем,—техническое орудие в групповых и комбинационных таблицах, которые, однако, в применении к данной категории случаев, приходится выделить в особый тип—таблиц «вторичного типа»: группирующиеся в подобного рода таблицы цифры получаются путем подсчета не первичных данных, относящихся к отдельным единицам или индивидам, а уже готовых цифр, относящихся к целым «натуральным группам» индивидов или единиц—крестьянским селениям, переселенческим поселкам, уездам, как совокупностям крестьянских дворов, фабрикам, как совокупностям рабочих, годам, как совокупностям урожайных данных или данных о хлебных ценах, и т. п. Иначе говоря—получаются не путем сводки первичных данных статистического исчисления, а путем подсчета данных, уже сведенных и опубликованных в форме простых или перечневых таблиц. Не входя в подробности технического характера [1]), нельзя, однако, не отметить, что указанное только-что обстоятельство существенным образом отражается на градации интервалов таблиц того и другого типа: ясно—если говорить в применении к конкретному случаю,—что землевладение, посевные площади или лошадность отдельных дворов могут колебаться в несравненно более широких пределах, нежели средние коэффициенты, характеризующие целые селения, а, тем более, волости или уезды; в средних цифрах сглаживаются колебания индивидуальных величин. А отсюда, в свою очередь, ясно, что при построении групповых и комбинационных таблиц «вторичного» типа, где за основание группировки принимаются именно средние величины предполагаемого признака-причины, можно довольствоваться

---

[1]) См. мою „Теорию и методы статистики“, 3-е изд., стр. 460—462, 496—497.

гораздо меньшим числом групп, и границы интервалов будут все-таки гораздо уже, нежели в таблицах «первичного типа», где за основание группировки принимаются индивидуальные измерения признака - причины. Иллюстрирую сказанное только одним примером — проведенною Г. И. Баскиным двоякой разработкой данных о крестьянском хозяйстве по Ставропольскому уезду, Самарской губернии: «первичная» группировка проведена здесь по восьми группам, с границами интервалов 3, 6, 9, 15, 21, 30 дес., «вторичная» — всего по трем группам, с пределами интервалов 5 и 7 дес.

Гораздо существеннее, с занимающей нас теоретической или методологической точки зрения, два другие последствия, вытекающие из «вторичного» или производного характера рассматриваемого приема—производного от метода параллельных рядов; последствия, резко противуполагающие и этот метод «первичным» методам количественной группировки и сближающие его, наоборот, с методом параллельных рядов в его первоначальном виде. Это, с одной стороны, широкая сфера применения, но зато с другой—гораздо меньшая определенность и категоричность получаемых выводов, нежели при том или другом из «первичных» методов. Первая особенность, составляющая, очевидно, существенное преимущество «вторичного» метода, вытекает из того обстоятельства, что для «вторичных» группировок нет надобности располагать первичным материалом,—таким группировкам подвертаются данные, содержащиеся в уже опубликованных статистических источниках, которые каждый исследователь может иметь в своем распоряжении. Вторая, слабая, сторона «вторичных» группировок вытекает из того, что выводы получаются из сопоставления средних коэффициентов, вычисленных по группам групп, объединенных по средним значениям группового признака: по группам селений с одинаковою или близкою среднею лошадностью или средним размером земельного обеспечения, группам фабрик с одинаковым, положим, средним размером заработной платы, и т. п. Но при этом в группу, положим, среднеземельных селений войдут и отлично-обеспеченные землею, и малоземельные дворы, в группу фабрик с высокою среднею заработною платою — рабочие и средних, и низших по заработной плате категорий, и т. д... А при таких условиях вывод, как и при методе параллельных рядов в его первоначальном виде, может притязать на далеко меньшую степень определенности и категоричности, нежели при группировке первичного материала. В этом последнем случае мы заключаем о хорошо оплаченных рабочих, о скудно наделенных землею дворах и т. п. — при вторичной группировке мы имеем право говорить только о местностях с высоким средним обеспечением землею, о предприятиях с высоким средним уровнем заработной платы и т. п... И выраженный в такой форме вывод тоже будет оставлять место для со-

мнения: не кроется-ли за выясняющимся из цифр соотношением между групповыми коэффициентами соотношение совсем, может быть, иного характера между коэффициентами, которые могли-бы быть вычислены для более мелких частных групп, на которые следовало-бы разбить вошедшие во вторичную группировку группы? Не следует-ли, например, отнести пониженный процент учащихся, получившийся в высшей по посевной площади группе селений, за счет малосеющих дворов в этих группах? Не следует-ли отнести пониженный процент грамотных в группе предприятий с высшею среднею оплатою труда на счет имеющейся в этих предприятиях группы очень, наоборот, плохо оплачиваемых неквалифицированных рабочих? Не будет-ли правильно повышенную смертность в стране в год плохого урожая приписать более или менее целиком неземледельческому и, в частности, городскому населению?

Таким образом, метод «вторичной» количественной группировки, вместе с методом параллельных рядов, является как-бы суррогатом, к которому поневоле приходится прибегать за неимением в распоряжении исследователя табличного материала, отвечающего требованиям более доброкачественных, по характеру возможных выводов, методов, основанных на «первичной» группировке.

Бывают, однако, случаи, когда метод вторичной группировки приобретает и более самостоятельное значение: во-1-х, он может выступить в роли *необходимого дополнения к* «первичной группировке», и во-2-х, «вторичная» группировка материала может, иногда, сообщить последнему совершенно иной смысл, следовательно, придать *существенно иной смысл* могущим получиться выводам.

Первый из охарактеризованных только-что случаев получил теоретическую формулировку в небольшой работе проф. А. А. Чупрова: «О приемах разработки статистических материалов», практически-же был испытан Г. И. Баскиным при разработке данных переписи крестьянских хозяйств Ставропольского уезда, Самарской губернии. Соображения А. А. Чупрова привязаны к частному вопросу — группировки крестьянских дворов по размерам землевладения, осуществлены они Г. И. Баскиным в применении к группировке по посевной площади. Обычный в нашей статистике крестьянского хозяйства тип группировки по тому и по другому признаку — это «первичная» группировка крестьянских дворов или хозяйств. Между тем,—как правильно отмечает А. А. Чупров,—двор с пятью или с десятью десятинами посева в многоземельной или, наоборот, в малоземельной общине — совсем разные вещи, и цифровая мера землевладения отдельных дворов получает совсем разный смысл, смотря по общему уровню земельной обеспеченности целых общин: двор с 5 десятинами будет одним из средних—в малоземельной и одним из беднейших—в многоземельной

общине, двор с 10 десятинами будет одним из хорошо обеспеченных в малоземельной и одним из средних или, может быть, даже слабо обеспеченных землею—в многоземельной общине. Это несоответствие числовой меры и действительного смысла цифр устраняется, если брать группы общин с одинаковым средним размером землевладения, и уже внутри этих групп сравнивать близкие по конкретным размерам землевладения группы дворов: в однородной группе селений земельная обеспеченность 5-ти, 10-ти, 15-десятинного двора будет, в самом деле, пропорциональна числам 1 : 2 : 3, — 15-десятинный двор будет, в самом деле, втрое лучше обеспеченным землею, нежели пятидесятинный; и наоборот — сравнивая между собою разнонаделенные группы селений, можно, в самом деле, ожидать аналогии средних, вышесредних, обильнонаделенных и наоборот — нижесредних и малоземельных групп, независимо от тех цифр, в которых, в каждой данной группе селений, выражены пределы каждой из этих групп, а «сравнение групп хозяйств с одним и тем же размером надельного землевладения, но взятых из разных групп общин, даст нам возможность с полною точностью установить влияние большей или меньшей степени обеспеченности крестьянина надельною землею на все интересующие нас экономические явления». Мы увидим, сейчас-же дальше, что даже оперируя с такого рода поправкой к обычному способу «первичной» группировки, мы будем выявлять влияние, собственно, не «обеспеченности крестьянина надельною землею», а чего-то другого, более сложного, где обеспеченность надельною землею является уже, до некоторой степени, производным моментом,—но это обстоятельство не умаляет более общего принципиально-методологического значения соображений А. А. Чупрова. В соответствии с этими соображениями, им был намечен и особый тип комбинационной таблицы, где первая группировка дает группы общин с тем или другим средним размером надела, вторая—группы хозяйств в каждой такой группе общин, располагающих, каждое, тем или другим, уже конкретным, количеством земли. Как уже было упомянуто, методологическая идея А. А. Чупрова была осуществлена Г. И. Баскиным при разработке данных подворной переписи Ставропольского уезда, в применении, однако, не к земельной, а к посевной группировке: в комбинационных таблицах по Ставропольскому уезду первая группировка дает группы селений со среднею посевною площадью до 5, 5—7 и свыше 7 дес., вторая—группы дворов, в каждой из этих групп селений, с индивидуальною посевною площадью до 3, 3—6, 6—9, 9—15, 15—21, 21—30 и свыше 30 десятин. Здесь, разумеется, не место останавливаться на тех чрезвычайно интересных выводах, к которым привели Г. И. Баскина разработанные в такой двойной группировке данные,—достаточно сказать, что они позволили ему бросить, в значительной мере, новый свет на характер дифференциации

крестьянских хозяйств в данной местности и, следовательно, вполне оправдали впервые проведенное им в статистическую практику усовершенствование.

Приведенная в ковычках цитата из работы А. А. Чупрова приводит нас к другому случаю, когда факторпальный признак, при «вторичной» группировке, принимает иной смысл, нежели при первичной. Этот случай можно иллюстрировать на группировке, именно, по размерам землевладения. В самом деле, легко сообразить, что индивидуальный размер землевладения (или при общинном землевладении—землепользования) имеет, если взять его как групповой признак, совершенно иной смысл, нежели средний по волостям, селениям или иным территориальным единицам. Индивидуальная обеспеченность землей крестьянского двора—не более как один из многих, притом производных, признаков состоятельности двора: состоятельный двор тем или другим путем (при подворном владении—покупкой, при общинном—арендой) сосредоточит в своих руках или, во всяком случае, сохранит землю, бедный выпустит землю из рук или, во всяком случае, ее не приумножит. Следовательно, группируя дворы по земельной обеспеченности, т. е. применяя «первичную» группировку, мы, в сущности, выясняем, просто, влияние состоятельности на те или другие стороны крестьянского хозяйства. Совсем другой смысл имеет группировка селений, волостей или уездов по средним величинам земельного обеспечения; такая группировка выясняет нам влияние, в самом деле, хозяйственной густоты населения, или иначе — степени земельного простора, земельной обеспеченности, либо напротив, «утеснения», малоземелья,—фактора, имеющего очень мало общего не только с индивидуальною, но даже с массовою состоятельностью. Если мы желаем выявить влияние этого момента—земельного простора или тесноты, мы должны непременно применить, так или иначе, «вторичную» группировку: положить в основу группировки не индивидуальный, а средний размер землевладения в селении, волости или даже уезде, причем влияние собственно этого фактора—земельного простора, либо тесноты, будет выявляться в тем более чистом виде, чем обширнее будут взятые для «вторичной» группировки «натуральные» группы. «Вторичная» группировка данных о выселении из нескольких губерний (Харьковской, Черниговской и др.), привела к выводу, что выселение является спутником земельного простора и сопровождающего его первобытного хозяйства; между тем, при подворной группировке получается, что переселяются, главным образом, мало- и среднеземельные, лишь в меньшинстве хорошо обеспеченные землею, семьи,—что, впрочем, и совершенно естественно, ибо, при данной степени хозяйственной густоты населения и обусловливаемом ею характере земледельческого хозяйства, потребность в выселении острее ощущается менее состоятельными—

они-же малоземельные—дворами. «То-же самое,—писал я в 3-м издании моей книги «Теория и методы статистики»,—если задаться вопросом о факторах, влияющих на прогресс техники крестьянского хозяйства. Если исходить из средних цифр землевладения по селениям и волостям, значит, применять «вторичный» метод, мы будем выяснять влияние хозяйственной густоты населения. Если исходить из индивидуального землевладения дворов, мы получим ответ на совсем другой вопрос: какие слои крестьянства—многоземельные, следовательно, более состоятельные, или малоземельные, следовательно, более бедные, идут впереди по пути хозяйственного прогресса». Когда я писал эти строки, я имел в виду серию поставленных в статистическом семинарии Петербургских высших женских курсов экспериментально-методологических работ, целью которых было именно испытать влияние земельной группировки дворов, с одной стороны, и целых общин, с другой, на признаки, характерные для техники крестьянского хозяйства. В настоящее время одна из этих работ (по Константиноградскому уезду) закончена и результаты опубликованы [1]). Не входя, конечно, и здесь в подробности, приходится, однако, отметить, что «вторичная» группировка и в данном случае привнесла существенные дополнения и поправки к тем выводам, какие получались при «первичной» группировке по размерам землевладения,—следовательно, вполне оправдала изложенные только-что соображения относительно самостоятельного значения, в некоторых случаях, «вторичного», наряду с «первичным», методом количественной группировки.

Сказанным исчерпывается то, что я имел сказать, собственно, для характеристики логических приемов статистического умозаключения; иначе говоря—для характеристики тех приемов статистического мышления, которые приводят к установлению статистических закономерностей и к выявлению, статистическим путем, причинных связей и зависимостей между явлениями или признаками явлений. Однако, установить наличность статистической закономерности или даже причинной зависимости—далеко еще не значит дать изучаемому явлению полное причинное объяснение. Пусть постоянство или наоборот — с определенною правильностью проявляющиеся различия, либо изменения в статистических числах, убедили нас в том, что данное явление управляется определенною совокупностью причин, обусловливающих это постоянство, эти различия или изменения. Остается открытым вопрос: каковы-же, все-таки, эти причины? Почему числа, характеризующие явление А, держатся на одном, приблизительно, постоян-

---

[1]) См. „Вестн. Сел. Хозяйства“ за 1918 г.

ном, и притом на данном, а не на каком-либо ином уровне? Почему явление Б обнаруживает более или менее правильный рост, явление В— более или менее правильную убыль, явление Г—более или менее определенную периодичность? и тем более—почему этот рост или эта убыль имеют место в данной, а не в какой-либо иной прогрессии? Мало того— пусть даже нам удалось, при помощи одного из охарактеризованных только-что методов каузального статистического анализа, пролить некоторый свет на характер причинных зависимостей данного явления. И все-таки мы еще весьма далеки от действительного причинного объяснения. Мы все-же, как в первом, так и в последнем случае, имеем не более как, именно, простые статистические закономерности,—как простые «эмпирические законы», т. е. такие общие положения, которые, по определению Зигварта, «или только устанавливают, путем описания, формулу единичного или наблюдающегося в целом классе вещей фактического события, или же выражают правильные связи различных феноменов, фактически существующие в пределах нашего опыта». Или в формулировке Дж. Ст. Милля: «такие единообразия, на существование которых указывает наблюдение или опыт, но которых исследователи не решаются распространить на случаи, более или менее значительно отличающиеся от действительно наблюдавшихся, — не решаются вследствие того, что не видят основания, почему должен существовать подобный закон». Это—«во-1-х, те законы, которые известны за законы причинной связи, но относительно которых предполагается, что они сводимы к более простым законам, а во-2-х, такие, о которых совершенно неизвестно, суть-ли они законы причинной связи». Даже и тогда,—повторяю,—когда нам удалось одним из статистических приемов уловить наличность тех или других причинных связей между явлениями или признаками,—это все-таки еще отнюдь не полная цепь причин, управляющих явлением, а именно только некоторые причинные связи, нуждающиеся в дальнейшем объяснении. Особенно отчетливо такой характер статистически-уловляемых причинозависимостей проявляется в случаях применения метода параллельных рядов в чистом его виде. К этим случаям вполне приложимо то, что говорит Renouvier по поводу вполне аналогичного методу параллельных рядов, индуктивного метода сопутствующих изменений: применяя, одинаково, тот или другой метод, «поднимаются выше изыскания, souvent équivoque et obscure,—часто приводящего к сомнительным и неясным выводам, причинного соотношения сосуществования или последовательности явлений. Causes ou non, effets ou non,—причины или нет, следствия или нет— дело сводится к тому, чтобы определить, как и в каких мерах одни зависят от других и принимают значения, соответствующие значениям других. Этот mode général de dépendance—этот общий вид зависимости

выражает то, что мы действительно знаем о природе»,—и такая «замена идеи причины идеей функции является характерною чертою современной физики, еще мало известною логикам», а тем более—мало известной в ближайшей сфере применения статистического метода—в общественных науках. Будучи, однако, преимуществом с точки зрения отвлеченной теории познания, эта характерная черта индуктивного метода сопутствующих изменений, а, вместе с тем, и статистического метода параллельных рядов, решительно не отвечает требованиям практики научного исследования. Последняя не может довольствоваться констатированием некоторой функциональной зависимости,—ей нужно знать, где причины и где следствия; а, между тем, метод параллельных рядов сам по себе позволяет установить именно лишь некоторую зависимость между сопоставляемыми явлениями, и решительно ничего не говорит о характере этой зависимости: параллелизм (или антагонизм) сопоставляемых рядов одинаково совместим с предположением, что причина лежит в явлении А, а следствие в Б, и с обратным предположением: Б—как причины, и А—как следствия, и с предположением взаимной обусловленности явлений, и с предположением соподчиненности их действию какой-либо третьей, общей им обоим, причины и, наконец, с наиболее сложным предположением: комбинации взаимной обусловленности явлений А и Б и, в то-же время, соподчиненности их одной общей причине С,—как это мы имеем, например, в случае параллелизма колебаний рядов цифр рождаемости и смертности. Сам по себе, параллелизм или антагонизм статистических рядов совместим с любым из этих предположений, и лишь при помощи вне-статистических соображений мы приходим к одному из них, как наиболее отвечающему существу сопоставляемых явлений или признаков. Несколько лучше дело обстоит в случаях как «первичных», так и «вторичных» группировок,—лучше уже хотя-бы потому, что мы, ведь, именно потому, проводим группировку по данному, а не по другому, признаку или комбинации признаков, что именно в нем, или в них, знаем или предполагаем причину, влияющую на зависимые от нее или от них явления или признаки явления. Однако, даже и в этом, наиболее благоприятном случае, все-таки различные значения полагаемого в основу группировки количественного или качественного признака, как выше было уже отмечено, выражают собой не столько причины, в собственном смысле слова, сколько симптомы, более или менее ясно, более или менее непосредственно указывающие на действительные причины. «В самом деле,—поясняет В. И. Борткевич формулированную только-что мысль,—разве такие факторы, как возраст, пол, гражданское состояние, на которые обращается столько внимания в исследованиях статистики населения и моральной, — разве они имеют более, нежели симптоматическое

значение? Что́ в большей или меньшей мере предрасполагает человека к известным деяниям, делает его более или менее восприимчивым к известным воздействиям природы или общества,—это не принадлежность его к тому или другому полу, возрасту или гражданскому состоянию сама по себе,—это его принадлежность к соответствующим группам постольку, поскольку с нею связываются другие, глубже лежащие и потому не поддающиеся статистическому учету каузальные моменты, причем еще сама связь (этих моментов с этими симптомами) отнюдь не есть связь необходимая и непременная, а имеет место только в виде общего правила, из кото́рого возможны исключения». Детальнейший анализ частного вопроса о причинах бездетных браков приводит Борткевича к «убеждению в невозможности существования независимых от времени и места коэффициентов бездетности». Этот результат,—подчеркивает Борткевич,—«может быть непосредственно распространен на все вообще статистические коэффициенты. И для смертности, и для преступности и т. д. дело, рассуждая принципиально, обстоит совершенно также; и для этих областей не только нет возможности установить независимые от времени и пространства, allgemeingültige, коэффициенты на основании имеющегося статистического материала,—таковые представляются невозможными даже в том предположении, что материал когда-либо окажется возможным расчленять по любым отличительным признакам и по любым комбинациям этих признаков»—иначе говоря, при сколь угодно далеко идущем усовершенствовании методов статистического каузального анализа.

Таким образом, статистический анализ сам по себе приводит только к известным эмпирическим законам—он дает лишь те или другие правильности, закономерности, выясняет известные причинные связи и зависимости между явлениями и признаками явлений. Чтобы занять подобающее им место в системе наших знаний—чтобы из эмпирических законов стать настоящими, хотя-бы только «производными» научными законами, эти правильности и закономерности должны еще получить свое объяснение, иначе сказать, должны быть приведены в связь с такого рода моментами, которым, в самом деле, могло-бы быть приписано значение причин, управляющих исследуемым явлением. Но это—вопрос или категория вопросов, на которые статистический анализ, как таковой, не дает и не способен дать ответа; этого, и вообще, нет возможности определить аналитическим путем, даже и в сравнительно наивыгоднейших условиях экспериментальных наук[1]). Каузальный статистический анализ не есть нечто самодовлеющее, в самом себе законченное,—как ни важна та особенность статистического приема, что он «zum Teil nach selbstgewählten Begriffen группирует

[1]) Tschuprow, Die Aufg. der stat. Methode, стр. 473.

факты» и, благодаря этому, «таким-же образом способствует исследованию, как планомерное варьирование условий при экспериментальном методе естественных наук»,—аналогия идет и дальше, и сводящееся к разложению и варьированию групп статистическое сравнение играет в каузальном исследовании «роль, вполне аналогичную экспериментальной проверке в вспомогательных дедукциях естественно-исторической индукции» [1]). И в особенности это справедливо, конечно, в области социальной статистики: здесь причинное объяснение эмпирических законов «никогда не может быть получено из них самих, а только из психологических, исторических и, если речь идет о физической стороне человека, из физиологических и физических фактов»; статистический анализ может только «обратить внимание исследователя на причинные отношения, которых действительное обнаружение остается делом психологии или соответственных физических наук» [2]).

Таким образом—еще раз: верх научных достижений статистического метода—это констатирование существования некоторой причинной связи—некоторого влияния известного, статистически-уловленного фактора или комбинации факторов на известное явление или на известный комплекс функциональных признаков. Объяснения существа этой зависимости, действительного характера тех причин, которые влияют на данное явление или данный признак, приходится искать, в зависимости от свойств каждого данного явления и каждого данного признака, в самых разнообразных областях как научного знания, так, нередко, и просто жизненного опыта, исходя из данных и соображений, в виде правила уже не находящих выражения в статистических величинах, нередко и вообще лишенных конкретного характера. Так, исследуя рождаемость, приходится считаться, между прочим, с моральными побуждениями, с нравами и обычаями страны или отдельного общественного класса. При исследовании причин, влияющих на благосостояние народных масс, приходится считаться не только с факторами, поддающимися точному описанию и строгому учету, но и с влиянием этнографических и т. п. условий, уровня трудоспособности и трудоинтенсивности, обычаев и деловых привычек населения и т. п. При изучении факторов урожайности приходится считаться с теоретическими соображениями из области агрономической химии, физиологии растений, разнообразных отделов физики,—наряду с этим, со способами культуры вообще и возделывания каждого отдельного растения—в частности, с приемами обработки почвы; независимо от всей этой совокупности объективных и поддающихся точному описанию условий, также и со степенью трудолюбия населения, с его трудовыми

---

[1]) Wundt, Logik, Bd. III, стр. 105—106.

[2]) Там-же, стр. 510.

навыками и привычками, и т. д., и т. д. Все это,—как я подробно развил в другом месте [1],—уже дело не статистика, а представителей тех разнообразнейших, чистых и прикладных наук, к кругу ведения которых относится подвергаемое статистическому анализу явление или комплекс явлений; поскольку с попытками объяснения выступает сам статистик-аналитик,—он выступает уже не в роли статистика, а в роли экономиста-социолога, криминалиста, этнографа, биолога, метеоролога,—смотря по той области, к которой относится его аналитическая работа и в которой он считает себя компетентным входить в расследование существа тех действительных причин, которые находят себе выражение в данной закономерности каузального характера.

При чрезвычайной сложности всех тех явлений, к изучению которых прилагается статистический метод, объяснения статистических закономерностей нередко страдают, и не могут не страдать, резко выраженною субъективностью. «Нельзя,—справедливо замечает, опять-таки, Вундт,—поддаваться соблазну думать, что, раз статистические факты обладают точною формой, то таковая-же приличествует и основанной на них интерпретации». Это—в особенности потому, что точные причинные законы могут быть получены лишь там, где и следствия, и причины представляют собою единичные факты, а, между тем, статистика «пользуется большими числами, и не только чтобы элиминировать более или менее значительные отклонения единичных наблюдений, из которых каждое содержит искомый закон, а потому, что при ее объекте исследования закон, вообще, действителен лишь для массовых явлений», а не для входящих в состав их индивидов [2]. Как далеко могут расходиться объяснения одной и той-же, сколь угодно твердо установленной статистикою, закономерности,—это ясно можно видеть хотя-бы на примере известного, приблизительно постоянного для всех стран и, во всяком случае, для продолжительных периодов времени, а, может быть, даже не только для человеческого рода, но и для всего вообще органического мира, отношения мужских и женских рождений [3]. Из не менее нежели четырех объяснений этого статистического факта или эмпирического закона, очевидно, неверны по меньшей мере три—а, между тем, объяснения эти принадлежат первым корифеям статистической науки. Но на примере этом видно и обратное: пусть даже три или даже все четыре объяснения данного статистического факта будут неверны,-это не подрывает достоверности и научного значения самого статистического факта—того научного положения, которое выведено непосредственно из статистических данных статистическими приемами. Тоже самое и в любом другом примере—в том числе и в случаях,

---

[1]) „Теория и методы статистики", стр. 194—195.

[2]) l. c , стр. 511.

[3]) См. „Теория и методы стат.", стр. 194.

где статистическая закономерность принимает каузальный характер. Известная теория кризисов проф. М. И. Туган-Барановского опирается, в значительной мере, на статистически-констатированный факт зависимости между ценами и добычею железа и симптомами отдельных фазисов промышленного цикла. Допустим, что теория проф. Туган-Барановского будет окончательно отвергнута наукой—это нисколько не подорвет достоверности статистического вывода, относящегося собственно к существованию такого рода зависимостей; этот вывод мог-бы быть отвергнут лишь соображениями, относящимися к свойству использованных для вывода данных и примененных для получения вывода методологических приемов.

Итак, еще раз: статистический метод всегда и везде дает лишь те или другие эмпирические законы—постоянства, правильности, причинно-зависимости, которые лишь вне статистической сферы, в области тех или других, разнообразнейших материальных наук, получают (е с л и, вообще, получают, потому что в результате статистического наблюдения и статистического анализа сплошь и рядом получаются—следуя характеристике Бэна—«единообразия сосуществования, несводимые к законам причинности») окончательное объяснение, и которые используются этими разнообразнейшими науками, наравне со всякого рода иным фактическим материалом и с аргументами разнообразнейших других порядков, для целей научного познания. Роль статистического метода в общем ходе в с я к о г о научного исследования—приблизительно та самая, которая принадлежит, по Дж. Ст. Миллю, моменту «проверки» в том «физическом» или «конкретно-дедуктивном» методе, который Милль считает характерным, главным образом, для области общественных наук, причем, в зависимости от хода исследования, этот момент проверки может и предшествовать теоретическому объяснению, и следовать за тем или другим теоретическим построением—выступать с ответом на тот или другой, по априорным соображениям поставленный вопрос.

В более отчетливой формулировке, принадлежащей Вундту, участие статистики в установлении причинных отношений может выразиться в двоякой форме: «и н д у к ц и и, непосредственно приведшей, при помощи статистических данных, к чисто эмпирической закономерности, которая затем, günstigenfalls, поддается превращению в причинную зависимость; и д е д у к ц и и, исходящей от провизорной гипотезы, которая затем подтверждается путем statistischer Nachweisung der aus ihr erschlossenen Korrelationen». Такая предварительная дедукция, в свою очередь, может принимать две формы: в одних случаях «она предшествует статистическому исследованию, и оно имеет целью лишь ein an und für sich schon ursächlich bestimmtes Phänomen nach seiner Grösze zu bestimmen, um daraus eventuell auf die Intensität der bekannten Ursachen zu schliessen» — вопрос в этого рода случаях идет, значит, т о л ь к о

о мере причинной связи, ибо направление ее заранее установлено дедуктивным путем; в других случаях целью предварительной дедукции является, «в первую очередь, нахождение причин, и уже потом оценка их величины, поскольку таковая, вообще, возможна», — такая именно постановка вопроса имеет место в случаях переплетения сложной совокупности причин, результата которого — именно в силу его сложности—нет возможности предугадать. В том и другом случае, однако, роль статистика, как такового, и статистического метода оканчивается с установлением той или иной статистической закономерности, в лучшем случае — с статистическим констатированием зависимости причинного характера. Статистик может, правда, попытаться и сам найти окончательное объяснение установленным им статистическим закономерностям и зависимостям каузального характера, но при этом он так-же мало остается «статистиком», как физиолог, или физик, или бактериолог, работающий микроскопом, остается «микроскопистом», или как мало астроном, или геодезист, или, опять-таки, физик, работающий хронометром, остается «хронометристом», и т. п. В виде правила-же, повторяю, и окончательное объяснение статистически установленных закономерностей, и, тем более, использование их для дальнейшего развития соответственных отраслей нашего знания, становится делом представителей соответственных, чистых или прикладных, материальных наук, для которых статистический метод представляет собой, в применении к определенным категориям явлений, не более, как такое-же оружие научного познания и анализа, каким, в применении к другим категориям явлений и процессов, являются микроскоп, весы, хронометр и т. п. Недаром один из русских биологов, много потрудившийся для введения статистического метода в практику биологических исследований, П. И. Бахметьев, в одной из своих популярных статей охарактеризовал графические методы статистики как «геометрический микроскоп» и провел весьма удачную параллель между ролью этого статистического микроскопа и функциями, в других категориях случаев, настоящего оптического микроскопа [1]).

Однако, все сказанное не должно служить основанием для того, чтобы слишком умалять роль статистического метода. Примеры такого умаления мы встречаем и в литературе общей логики, и в специально-статистической литературе. В качестве одного из таких примеров можно привести очень содержательный «Элементарный курс статистики» А. А. Овчинникова. Следуя за Зигвартом, проф. Овчинников настаивает на том, что «статистика подтверждает лишь, что причины, известные из какого-

---

[1]) Бахметьев, „Геометр. микроскоп", Естествознание и География, 1913, № 33.

либо иного источника, оказали свое действие и не были ограничены другими, и дает меру для отношения их деятельности к деятельности прочих». Статистика,—полагает далее Овчинников,—убеждает нас только тогда, когда получаемые статистическим путем выводы отвечают нашим ожиданиям; «если-бы числа оказались противоречащими нашему ожиданию, то мы стали-бы, наоборот, искать других причин, которые должны были противодействовать известным нам». Разобрав некоторые конкретные примеры статистического анализа, он приходит к заключению, что об обнаруживающейся в статистических рядах причинной связи «мы, пожалуй, догадывались и без наших рядов, так что, выходит, статистики» только «делают вид, будто изумлены открытием, которое, по совести, нельзя считать таковым»; что «статистика не столько изумляет, сколько разочаровывает нас, если мы ждем от нее правильностей».

Однако, такого рода скептический взгляд на возможности статистического метода уместен лишь в том случае, если ждать от статистики незыблемых законов «номологического» или, что по существу тоже самое, естественно-исторического характера. Вполне уместными представляются поэтому и формулируемые А. А. Чупровым—который склонен приписывать статистическому методу «номографические функции», сомнения относительно возможности получения, каким бы то ни было из бегло охарактеризованных им в его цитированной выше немецкой статье о «задачах статистического метода» приемов, таких выводов каузального характера, которые были-бы свободны от привхождения моментов «онтологического» или, проще говоря, случайного характера и, следовательно, были-бы в полной мере способны выявить номологические зависимости [1]). Но, как мне придется говорить подробнее на следующих же страницах, статистика фактически и не задается, и н е д о л ж н а, не имеет права задаваться такого рода целями,—она не может и мечтать о раскрытии н о м о г р а ф и ч е с к и х зависимостей. Поскольку-же речь идет о действительных ее функциях — об установлении эмпирических законов, в виде-ли простых закономерностей, или причинных зависимостей, даже тот факт, что статистический анализ, обычно, так или иначе, отвечает на наши заранее формулированные предположения, нисколько не служит к умалению достоинства и значения статистического метода. Пусть, в самом деле, статистический анализ является лишь способом проверки уже имеющихся у нас предположений. Но это—нормальный ход всякого, вообще, научного, и, в частности, индуктивного, исследования: всякое «знание,—как категорически заявляет проф. А. И. Введенский на первых-же страницах своей «Логики»,—расширяется тем путем, что у нас сперва возникает догадка (или, как иначе выражаются,

[1]) Die Aufgaben etc., стр. 470.

гипотеза), которая подвергается проверке и, в конце концов, либо отбрасывается и заменяется новой догадкой (которая может быть, между прочим, простой поправкой прежней), когда мы удостоверимся в ложности или ошибочности проверяемой догадки, либо становится прочным достоянием науки, когда мы удостоверяемся в истинности этой догадки» [1]). Без гипотезы, без заранее построенных предположений, не обходятся, конечно, и экспериментальные науки. Всякое научное наблюдение, и, тем более, всякий эксперимент, предпринимаются не на-авось и не наобум, а потому, что в уме исследователя возникли те или другие представления о причинной обусловленности данного явления, и эти свои предположения, эти свои догадки он проверяет путем наблюдения или эксперимента. Тоже самое имеет место и по отношению к статистическому методу. Поскольку, в частности, мы применяем методы количественной или качественной группировки—все равно, первичной или вторичной, мы лишь тогда пускаем в ход этого рода приемы статистического анализа, лишь тогда приступаем к составлению соответственных таблиц, когда имеем основание предполагать зависимость данного явления, или признака, от данного фактора или данной комбинации факторов. Но статистический анализ может, прежде всего, просто опровергнуть наше предположение, может доказать отсутствие той зависимости, какой мы ожидали на основании априорных соображений, или заставить внести к нашим предположениям более или менее существенные поправки. Это может случиться и тогда, когда мы в нашем априорном построении, просто, допустили какую-нибудь ошибку—например, исходили из неверного предположения о характере действия того или другого фактора, или когда мы относили насчет одного фактора то, что в действительности обусловливалось каким-либо другим; и тогда, когда мы не приняли в расчет влияния таких привходящих моментов, которые, в действительности, заслоняют или даже перевешивают действие принимавшихся нами в рассчет и, в самом деле, оказывающих свою долю действия условий. Статистический анализ может затем,—это, впрочем, признают и скептики,—дать меру влияния тех факторов, действие которых мы, быть может, и предусматривали в общем, более или менее неопределенном виде, но не могли-бы, иначе, оценить с количественной стороны—в отношении большей или меньшей силы их влияния на данное явление или данный признак: в одних случаях сравнительно слабые вариации влияющего фактора сопровождаются резкими изменениями зависимой величины (влияние возраста на бездетность браков), в других темп изменений того и другого приблизительно одинаков, еще в других очень резкие изменения влияющего фактора сопровождаются едва уловимыми колебаниями зависи-

---

[1]) Введенский, Логика, 3 изд., стр. 2.

мого явления (хлебные цены или урожаи и смертность); иногда данный фактор до известного предела влияет известным образом, а за этим пределом перестает влиять или влияет, напротив, с прогрессирующею силой (распределение причин смерти в зависимости от возраста!); один и тот-же фактор влияет на одни зависимые явления очень сильно, на другие весьма слабо (влияние возраста вступления в замужество на бездетность и на мертворождения!), и т. п.—все это, повторяю, не может быть выяснено иначе, как путем статистического анализа. Далее: во многих случаях мы, несомненно, ожидаем найти некоторую зависимость между двумя явлениями,—но лишь статистический анализ раскрывает нам ее направление. Мы, несомненно, заранее знаем, что почва как-то должна влиять на урожаи, по отношению к некоторым типам почв заранее предвидим и направление этого влияния, но по отношению к разным промежуточным, не резко друг от друга отличающимся типам почв мы, сплошь и рядом, ничего не можем заранее сказать о характере этого влияния при данных условиях рельефа, климата, севооборота, обработки и т. п., и их относительное достоинство выясняется для нас именно только из данных урожайной статистики. Мы можем ожидать, что профессия как-нибудь отражается на смертности; мы, опять-таки, по отношению к некоторым, особенно вредным или, наоборот, протекающим в особенно благоприятной обстановке, профессиям, можем предвидеть и направление этого влияния,—но по отношению к множеству не слишком резких профессиональных различий не можем сказать ничего заранее, и только, опять-таки, статистические данные выясняют нам, какие именно профессии повышают, и какие понижают продолжительность жизни. Не редкость, что выясняемый статистическим путем характер влияния того или другого фактора оказывается и неожиданным для нас, а иногда даже прямо противоречащим тому, чего мы имели основание ожидать. Статистические данные о начальных школах Тверской губернии выяснили, например, что работа учащих со среднеобразовательным (не-специальным) цензом не только не лучше, но хуже, нежели работа учащих с низшим цензом; произведенные в Сев.-Амер. Соед. Штатах статистические исследования, в противность ожиданиям их инициаторов, выяснили, что иммигранты славянской расы по способности к ассимиляции и по приспособляемости к производительному труду стоят не только не ниже, но даже выше иммигрантов других рас; можно было с уверенностью ожидать, что большая или меньшая продолжительность забастовок как-нибудь отразится на их результатах, но едва-ли можно было предвидеть, что удлинение стачек,—как показывает австрийская статистика,—приведет к сокращению процента как полного успеха, так и полной неудачи для рабочих, и к повышению процента стачек с компромисным результатом. Не подлежит, наконец, сомнению тот, решительно не мирящийся с резюмированным

выше скептическим взглядом, факт, что сам статистический анализ, сами статистические цифры сплошь и рядом наводят на такие зависимости и на такие объяснения, каких мы вовсе не ожидали и не предвидели. Если мне будет позволено сослаться на свой личный исследовательский опыт,—ничто иное, как результаты статистического анализа позволили мне установить существование ранее неизвестного агрономической науке, и уже мною, наверно, не предвидевшегося, типа «залежно-парового» хозяйства и проследить последовательность смены разных его разновидностей и перехода от него к беззалежному хозяйству; ничто иное, как статистический анализ дало возможность выяснить различные типы земледельческого хозяйства, существовавшие в Новгородской области в конце XV столетия. Я уже не буду говорить о таких отраслях статистического анализа, как вариационная статистика, которая, нередко, приступает к делу вовсе без определенной заранее гипотезы, и данные которой, сплошь и рядом, позволяют установить вовсе не предвидевшиеся исследователем различия подвидов или рас, или уловить смешанный характер той или другой расы или того, либо другого биологического вида. Словом, если—как мы увидим в следующей главе—возможностей статистического метода не следует преувеличивать, то тем менее основания их преуменьшать: как ни велики слабые стороны статистического метода, все же, для широчайших областей научного знания и, в частности, для всей широкой сферы общественных наук, статистический метод является чрезвычайно ценным и по отношению к определенным категориям явлений и к определенным направлениям научного исследования единственным суррогатом естественно-исторического эксперимента,—единственным орудием, хотя-бы приближенно, объективного количественного научного знания.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

Статистическая закономерность и естественный закон. Статистический метод и индукция.

В заключительной части предыдущей главы я указал на то, что возможностей статистического метода, как орудия научного знания и научного анализа, ни в каком случае не следует преуменьшать. Но, с другой стороны, их не следует и преувеличивать. Решительным преувеличением познавательных возможностей статистики и силы вскрываемых ею законов грешили, как известно, Кетле и, в особенности, некоторые из его последователей, так называемых, «кетлетистов»; на их взглядах я здесь не буду, однако, останавливаться, — мне лишь мимоходом придется коснуться их в одной из последних глав этой книги, в связи с вопросом об устойчивости статистических рядов. Но если те или другие их ошибки сейчас сохранили для статистической науки лишь историческое значение, то тем необходимее отметить, что в некоторое преувеличение возможностей статистического метода, как такового, впадает — и притом в значительной мере, в противоречие с самим собою,—и такой первоклассный представитель современной теоретической мысли в статистике, как А. А. Чупров.

В дальнейшей части этой главы мне придется очень подробно остановиться на соображениях А. А. Чупрова по вопросу об отношении статистического метода к индукции, — соображениях, к которым я лично примыкаю почти без оговорок. Уже здесь я должен, однако, отметить, что в этих своих соображениях проф. Чупров все время имеет в виду то, что он называет, в заглавии своего второго «очерка», «номографическими функциями статистического метода»,—говорит о нем, как об одном из орудий «номографического анализа». В такой характеристике статистического метода и в таком понимании его возможностей нельзя не видеть не только некоторого недоразумения, но даже, как я уже сказал, самопротиворечия. Элемент недоразумения здесь настолько резок и очевиден, что такой компетентный и, в общем, со-

чувственный критик, как В. И. Борткевич, вполне оценивший, в частности, второй «очерк» А. А. Чупрова, решается высказать предположение, что «Чупров, в данном случае, только выражается с недостаточной определенностью и осторожностью, и тем дает повод к подозрению в том, что он придает статистическим частностям, как таковым, «полуномографический характер»; что «настоящее его», Чупрова, «мнение заключалось-бы в том, что эти статистические частности служат лишь отправною точкой для научного исследования, приводящего в конечном результате к истинам номографического или полуномографического характера» [1]). Однако, в виду ясности и образцовой отчетливости, характеризующей, вообще, изложение Чупрова, предположение такого рода «неопределенности» или «неосторожности» в выражениях представляется мне совершенно неправдоподобным: по «недостаточной осторожности» А. А. Чупров не мог-бы так категорически и решительно говорить, да притом еще в заглавии целого «второго очерка», о «номографических функциях статистического метода». Ясно, что он видит в нем, в самом деле «нечто в той или другой мере» и, даже в полной мере, «номографическое». Но этим самым он становится в противоречие с содержанием самого второго «очерка», и Борткевич совершенно прав, когда, при таком взгляде на характер статистического метода, признает данный Чупровым в этом «очерке» ответ на вопрос, в каком смысле статистический метод дополняет методы индукции, неожиданным и неприемлемым [2]). Не менее прав Борткевич и тогда, когда подчеркивает противоречие его характеристики статистического метода, как чего-то номографического или хотя-бы только полуномографического, с его взглядом на отношение понятий вероятности и статистической частости к единичному случаю. В противность Борткевичу, Чупров категорически настаивает на том, что «с единичным случаем ни объективная вероятность» и следовательно—отражающая ее статистическая частость, «ни закон больших чисел, не имеют дела» [3]). Прав-ли он в данном случае, или не прав—это в данном случае неважно. Но Борткевич правильно подчеркивает несовместимость такого взгляда с признанием за статистическим методом номографического или хотя-бы только полу-номографического характера. «Именно мысль, — говорит он, — о неприменимости статистических частостей к единичному случаю должна была предохранить Чупрова от искушения видеть в статистической частости... нечто выходящее за пределы идиографии» и обладающее номографическим значением [4]). В самом деле: номографическое знание, как его ха-

---

[1]) Задачи и концепции научн. статистики, стр. 360.

[2]) Там-же, стр. 361.

[3]) „Очерки“, 2-ое изд., стр. 237.

[4]) l. c., стр. 359.

рактеризует Чупров — это знание, в основе которого лежит допущение «такого рода связи, что в случае, если явление А представляет собой причину *a*, то всюду и всегда, где только наблюдается А, за ними неизменно следует *a*, и нигде не наблюдается *a* без того, чтобы ему не предшествовало А». Идеал номографического знания, как его, опять-таки, формулирует Чупров, — «добраться, путем постепенного расчленения сложных комплексов взаимно-обусловленных явлений, до установления «законов природы» — причинных соотношений между возможно простыми явлениями, между элементарными причинами и следствиями». Можно-ли признать такой номографический характер за статистическими обобщениями и умозаключениями? Конечно, нет. Сам А. А. Чупров говорит о еще недавно господствовавшем одностороннем увлечении ученого мира номографией, отысканием вечных законов, как об обстоятельстве, которое «тормозило рост статистической науки, заставляя приспособляться к господствующим в науке логическим предрассудкам и облекать идиографическое содержание в мало идущие к нему номографические формы». И достаточно припомнить данную в предыдущей главе характеристику приемов статистического умозаключения, а вдобавок к этому вспомнить то, что, конечно, известно читателю относительно техники табличной разработки статистических данных, чтобы сразу стало ясно, что могущие получиться такими приемами и при помощи таких технических средств выводы бесконечно далеки от той степени точности и определенности, какой требует номографический анализ. Самое большое, на что может притязать статистический анализ, это только—употребляя терминологию самого Чупрова—«опираясь на уже открытые общие законы, объяснить единичное событие, — показать, что действие общих вечных законов обусловливает необходимость перехода идиографической констелляции предшествующего момента в ту картину, какую являет подлежащее объяснению событие». И даже это лишь с большими оговорками: даже и наши объяснения единичных событий и констатируемых нами статистических закономерностей мы лишь в исключительно редких случаях можем привязать к общим, вечным законам; в виде правила мы даже и их привязываем к эмпирически установленным правильностям или к априорно-постулированным общим положениям, причем те и другие очень часто носят более или менее предположительный характер. Все выводы, к каким приводит статистический анализ, носят, как мы видели, характер эмпирических законов. Между тем, характерною для всякого эмпирического закона чертою является именно то, что такой закон «не должен быть применяем вне известных пределов, относящихся либо к времени, либо к пространству, либо к обстоятельствам»; это — потому, что эмпирические законы, как «зависящие от нескольких общих законов и от определенного размещения факторов (collocation d'agents), подвергаются опасности не быть

верными, во-1-х, если какой-либо из этих общих законов отсутствует, и, во-2-х, если изменены обстоятельства, при которых они действуют [1]). Как подробнее развито у Дж. Ст. Милля, «сущность... эмпирического закона именно в том и состоит, что мы не знаем, является-ли он результатом различных следствий одной причины, или-же следствий различных причин. Мы не можем сказать, зависит-ли он всецело от законов, или-же частью от законов, а частью от размещений. Если он зависит от того или другого размещения, то он будет истинным во всех случаях, где будет налицо это размещение. Но так как (в случае, если закон зависит от размещения), мы находимся в полном неведении относительно сущности этого размещения, то мы не можем с уверенностью распространить наш закон за пределы того времени и пространства, внутри которых истинность его была засвидетельствована опытом. Так как внутри этих пределов закон постоянно оказывался истинным, то мы имеем доказательство того, что размещения, от которых он зависит, действительно существуют в этих пределах. Но так как мы еще не знаем того правила или принципа, которому подчиняются эти размещения, то мы не можем из того, что данное размещение существует внутри известных пределов пространства и времени—заключить, что оно будет существовать и за этими пределами. Таким образом, эмпирические законы можно признавать истинными только в тех пределах времени и пространства, в которых истинность их была доказана наблюдением, притом не просто в этих пределах времени и пространства, а в пределах времени, пространства и о б с т о я т е л ь с т в. В самом деле, так как значение эмпирического закона именно в том и состоит, что мы не знаем тех конечных законов причинной связи, от которых он зависит, то без действительного опыта мы не можем предсказать, каким образом или до какой степени повлияет на него введение того или другого нового обстоятельства» [2]).

Таким образом, уже из общей характеристики всякой статистической закономерности, как одного из частных случаев более общего понятия эмпирического закона, с необходимостью вытекает невозможность приписывать статистическим закономерностям какой-либо номографический характер и говорить о каких-либо «номографических функциях» статистического метода. И эта невозможность еще сугубо подчеркивается специфическими особенностями именно статистического метода, как такового, и получаемых из статистического анализа с т а т и с т и ч е с к и х умозаключений. Номографический закон—это такой, что «в случае, если явление A представляет из себя причину *a*, то всюду и всегда, где-бы ни наблюдалось A, за ним неизменно следует *a*». Но даже если не предвосхищать тех сравнительно тонких соображений, к кото-

---

[1]) B a i n, Logique, стр. 159—160.

[2]) М и л л ь, Логика, стр. 472—473.

рым нам предстоит перейти в последующей части этой главы,—соображений, лучше нежели у кого-либо развитых у самого А. А. Чупрова, все-таки совершенно ясно, что о статистической закономерности, менее, чем о каком-либо другом виде «эмпирических законов», можно говорить как о чем-то истинном «всегда и везде». Такой всеобщности нельзя приписать статистической закономерности даже в том случае, если иметь в виду статистическую массу в ее целом, даже если забыть о входящих в состав ее индивидах, потому что та тенденция, которая находит себе выражение в той или другой статистической закономерности, может встретиться с какою-либо более сильною, противодействующею тенденциею, а потому отвечающее данной закономерности соотношение или следствие может и не оказаться налицо. Как-бы твердо ни было установлено известное взаимоотношение между величиною крестьянской семьи и размерами ее хозяйства, вполне возможна такая конкретная совокупность обстоятельств, при которой это соотношение не будет наблюдаться; как-бы твердо ни было установлено положение о прямой зависимости грамотности от размеров крестьянского хозяйства, при известных условиях такой зависимости не только не оказывается, но, в той или другой мере, обнаруживается обратная зависимость. А затем, даже и в наилучшем случае, статистическая закономерность—это такая закономерность, которая относится именно лишь к статистическим массам, для единичного-же случая обусловливает только известные вероятности, а никак не достоверное наступление, «всегда и везде», отвечающих данной закономерности событий или существование отвечающих ему соотношений. Если даже в данной местности или данной группе населения наблюдается известное соотношение между составом крестьянской семьи и размерами ее хозяйства, или между размерами хозяйства и грамотностью,—эти соотношения наблюдаются именно только в массе, и существование их нисколько не мешает тому, что отдельные, многолюдные и даже многорабочие, семьи обладают хозяйствами небольших размеров, и наоборот, или тому, что отдельные семьи с большим количеством земли и большими посевами окажутся в числе слаборамотных или вовсе безграмотных. Ясно, что такой характер статистических закономерностей—это нечто самым решительным образом противоречащее понятию номографии, номографического закона или номографического умозаключения, — нечто бесконечно далекое от истинных «всегда и везде» законов природы.

Характернейшею чертою всякого статистического умозаключения является, как я уже сказал, его грубый, приблизительный характер. Это с необходимостью вытекает из самого существа статистического метода, которое, ведь, сводится к учету сравнительно ничтожного числа наиболее резко бросающихся в глаза симптомов, и которого методологическою предпосылкой является, как мы частью видели в первой главе,

частью увидим в дальнейшей части настоящей главы, именно неполное знание, — неполное как в смысле отсутствия сколько-нибудь исчерпывающей осведомленности относительно всех причин, влияющих на данное явление, так и в смысле невозможности доходить, в статистическом анализе, до неразложимых, элементарных причин и следствий и, следовательно, до однозначных причинных связей.

Повторяю, эта грубость, приблизительность всякого статистического умозаключения с необходимостью вытекает из самого принципиального существа статистического метода. В еще большей мере она вытекает из особенностей тех конкретных приемов, которыми пользуется статистик для получения выводов из статистического материала. Возьмем хотя-бы обычный в статистике случай, когда мы делаем выводы относительно происходящих в статистических массах изменений из сопоставления результатов двух или нескольких, разделенных известными промежутками времени, переписей. Этот прием — во многих случаях единственный, дающий нам способ судить об эволюции, о динамике явления: мы судим о росте населения и об изменениях в его половом, возрастном, профессиональном составе и т. д., на основании сопоставления данных нескольких народных переписей; сравниваем результаты двух или трех разновременных переписей крестьянского хозяйства, и из такого сравнения уясняем себе эволюцию хозяйственного быта народных масс, до некоторой степени—эволюцию его семейного строя, изменения в уровне культурности и т. п. Между тем, по справедливому замечанию Лексиса, формулированному им, собственно, в применении к явлениям естественного движения населения, но имеющему вполне общее значение, мы во всех подобного рода случаях «имеем дело с известным числом случаев начального состояния, из которых исходит известное число случаев конечного состояния; о лежащих между этими состояниями физических (и иных) процессах мы, как статистики, знаем так-же мало, как о сложных движениях катящейся игральной кости, по отношению к которой нас интересует только то положение, в котором она остановится» [1]). Или как та-же, в существе, мысль была формулирована одним из заслуженнейших и наиболее вдумчивых русских статистиков, Н. Н. Черненковым, в применении к совершенно другой области, именно к эволюции крестьянского хозяйства: «подобные сопоставления дают возможность уловить не самые процессы в их действительных размерах и в их настоящем значении, а только окончательные результаты нередко совершенно противоположных течений, и притом только в том случае, если одно из этих течений имело известный перевес над другим; в противном же случае получается более или менее полная неизвестность положения, на самом деле могущая прикрывать собою богатую содержанием и весьма сложную картину круп-

[1]) Einl. in die Theorie d. Bevölk Stat., стр. 94—95.

ных изменений». Схематически данные двух последовательных переписей можно представить себе в виде двух точек, между которыми можно мыслить действительный ход имевших место изменений, в виде произвольного числа каких угодно линий. Пусть последующая точка настолько-то выше предыдущей—между ними можно мыслить и прямую восходящую линию, и линию, сначала слегка падающую, а потом сильно поднимающуюся, и наоборот—сначала сильно поднимающуюся, а потом слегка падающую или горизонтальную, и сначала горизонтальную, а в конце, так или иначе, поднимающуюся, и т. п. Или конкретно: пусть перед нами результат двух переписей промышленности. Сопоставление их раскрывает перед нами, допустим, все признаки концентрации промышленности. Но такого рода р е з у л ь т а т мог получиться в результате весьма разнообразных п р о ц е с с о в развития: концентрация могла идти весьма быстро в течение первых, положим, 10 лет протекшего между переписями периода, а затем остановиться или даже смениться некоторым измельчанием; может быть, наоборот, она произошла, главным образом, в самые последние годы, на смену продолжительному, приблизительно-стационарному состоянию; может быть и то, что процесс концентрации шел все время равномерно, разве лишь с случайными остановками, или, напротив, что общая тенденция концентрации все время перемежалась волнообразными колебаниями. Или другой пример: сопоставление двух переписей крестьянского хозяйства выявило всю совокупность признаков упадка крестьянского хозяйства. Опять-таки, такого рода результат мог получиться из крайне различных по своему внутреннему содержанию и по возможным прогнозам процессов; может быть, этот упадок представляет собою, в самом деле, непрерывно-продолжающийся, следовательно, коренящийся в каких-то общих условиях, процесс; может быть, упадок шел безостановочно и очень резко первые годы, а затем приостановился или даже сменился некоторым улучшением положения населения; может быть, наоборот, положение хозяйства все время прогрессировало, но как раз перед второю переписью были неурожаи, временно или даже надолго подорвавшие благосостояние крестьян. В подобного рода случаях мы, как почти не знающее исключения правило, не располагаем сколько-нибудь точными данными, которые позволили-бы разложить получаемые из сопоставления переписей результаты на их отдельные элементы и статистически установить те разносторонние процессы, иногда идущие параллельно, иногда противуположные, взаимно друг друга погашающие и перекрывающие, которые нашли себе видимое выражение в некотором одном, суммарно-учтенном второю переписью, результате. Очень часто мы даже не имеем основания догадываться о том, что за полученным результатом или за видимым отсутствием каких-либо изменений скрываются такие взаимно-перекрещивающиеся и перекрывающиеся процессы. А если догадываемся или даже вполне ясно представляем себе, на основании

тех или других данных и впечатлений, приблизительный характер этих процессов, мы все-таки не можем обосновать наше представление на точных цифровых данных, а довольствуемся теми или иными общими соображениями, которые из области точных статистических данных и выводов уводят нас в область гаданий и гипотез.

В такого рода случаях грубость и схематичность статистического умозаключения проявляется в наиболее резкой форме. Но почти в такой-же мере та-же схематичность, та-же приблизительность свойственна и каждому статистическому умозаключению, и, прежде всего, каждому, полученному по методу параллельных рядов. Чтобы наши заключения, полученные этим методом, могли претендовать на известную степень строгости и точности, сопоставляемые ряды должны были-бы обнаруживать п о л н о е взаимное соответствие, так, чтобы каждому колебанию одного ряда соответствовало колебание в ту-же (или при антагонизме—в противуположную) сторону другого; мало того, чтобы самая сила колебаний была одинакова, так, чтобы повышению на 10 и на 20% в одном ряде соответствовало повышение тоже на 10 и тоже на 20% в другом. Но параллельных рядов с такою п о л н о ю пропорциональностью колебаний статистика, повидимому, не знает. Максимум правильности, с каким практически приходится считаться, будет иметь место, когда максимальные и минимальные цифры в обоих рядах оказываются на одних и тех-же местах; когда направление колебаний одного ряда во всех его частях соответствует направлению колебаний другого; и когда более значительным колебаниям одного соответствуют более значительные колебания другого (Bowley); достаточно даже и того, чтобы каждому, более или менее значительному повышению одного ряда соответствовало более или менее значительное повышение, каждому понижению—понижение другого. Но и т а к а я степень параллелизма (или антагонизма) колебаний—это такой максимум правильности, на который статистик может рассчитывать лишь в редких случаях. В реальной действительности влияние каждой данной постоянной причины скрещивается и переплетается с действием бесчисленного множества разнообразных привходящих причин, которые отклоняют то одно из сопоставляемых явлений, то другое, то оба, от соответствующего действию постоянных причин нормального вида,—отклоняют, притом, то в одну для обоих явлений, то в разные стороны, и, таким образом, то усиливают, то ослабляют, то совершенно заслоняют тот параллелизм в колебаниях сопоставляемых рядов, который соответствовал-бы взятому в чистом виде действию параллельно влияющих на сопоставляемые явления постоянных причин. В силу этого, общим правилом является более или менее н е п о л н ы й параллелизм (или антагонизм), известная господствующая тенденция, в более или менее значительной мере заслоняемая, в отдельных членах сопоставляемых рядов, случайными колебаниями, и статистик может только констатировать эту основную тен-

денцию, прибегая, ради ее уловления, к тем или другим искусственным приемам (разбивка рядов на части с вычислением частных средних и т. п.). Ясно, однако, что применение такого рода искусственных приемов, имея целью выделить основной закон параллелизма или антагонизма в колебаниях сопоставляемых рядов, имеет своею оборотною стороною затушевывание всех тех разнообразных обстоятельств, под влиянием которых складываются сопоставляемые цифры, и из взаимодействия которых только и выясняется действительный характер, действительная эволюция сопоставляемых явлений. Мы устанавливаем проявляющийся в общих чертах параллелизм между явлениями или признаками, и либо совершенно игнорируем проявляющиеся в отдельных парах чисел отклонения от основных тенденций, либо, если и оговариваем наличность подобного рода отклонений, то объяснения им мы вынуждены искать в тех или других, более или менее произвольных, и, во всяком случае, лишенных строгого статистического обоснования, гипотезах и догадках.

Не многим лучше обстоит дело и тогда, когда мы оперируем наиболее совершенными из имеющихся в распоряжении статистика приемами умозаключения, именно методами количественной или качественной группировки. Как мы знаем, техническим орудием их являются групповые и комбинационные таблицы. Но групповая таблица учитывает влияние одного, комбинационная—самое большое 3—4, в исключительно редких случаях—5 или 6 факторов (комбинационные таблицы Г. И. Баскина по Ставропольскому уезду!); мы, значит, не имеем возможности учесть, в его влиянии на интересующее нас явление или признак, всего сложного нерасчлененного остатка, который, однако, в действительности, так или иначе, переплетается и перекрещивается с тою одною или с теми немногими причинами, влияние которых позволяет учесть наши таблицы. Это—именно та внешняя форма, в которую облекается одна из главнейших слабых сторон всякого статистического исследования, о которых нам придется говорить в дальнейшем,—неполное знание причин, управляющих изучаемым явлением. Далее: и в самой группировке, поскольку она проведена в таблицах, всегда есть неустранимые источники недостаточной отчетливости и определенности выводов. Если в основу группировки положен к а ч е с т в е н н ы й признак—он никогда не будет вполне однозначным, и, следовательно, образованные по такому признаку группы никогда не будут вполне однородны. Возьмем хотя-бы зависимость смертности от профессии, или характера крестьянского хозяйства от племенного признака: можно-ли допустить предположение, что все «сельскохозяйственные рабочие», все «сапожники», все «служащие тракторного промысла», все «рабочие в текстильном производстве» поставлены в хотя-бы приблизительно одинаковые условия по своей совокупности экономических, культурных, гигиенических и т. п. моментов, так или иначе влияющих на смертность?

Можно-ли предполагать такую однородность условий, отражающихся на характере крестьянского хозяйства, у каждого из индивидов, вошедших в племенные группы: «русские», «мордва», «татары», «немцы-колонисты» и т. п.? Очевидно, нет; очевидно, в группе «сапожников» найдется немало таких индивидов, которых жизненные условия гораздо ближе к условиям жизни преобладающего типа «портных», нежели других «сапожников»; среди «малороссов» найдется немало таких, которые, по всей совокупности существенных для дела свойств, более похожи на великороссов, нежели на своих единоплеменников. Количественная группировка, как будто-бы, точнее. Но возьмем даже такие простейшие случаи, как группировка по лошадности, мужской рабочей силе и т. п.: однолошадные, двулошадные и т. п., однорабочие, двурабочие и т. п. Так ведь, «работник», «лошадь» и т. п. не такие однозначные меры, как аршин или фунт: рабочий рабочему рознь, одна хорошая лошадь может стоить двух заморенных кляч, и мы не только не можем иметь никакой уверенности в том, что однорабочий двор, в самом деле, в д в о е слабее, нежели двурабочий, что трехлошадный двор, в самом деле, в три раза сильнее однолошадного,— но, напротив, мы доподлинно знаем, что рабочая способность двурабочего, «семьянистого» двора, при прочих равных условиях, будет более чем вдвое превышать рабочую силу «одинокого», однорабочего; что однолошадный двор, в силу неполной использованности лошади, «управляет», в среднем, далеко меньше, чем половину того, что обрабатывает, в среднем-же, двухлошадный. Нечего уже говорить о том, более обычном случае, когда группировка проведена по более или менее широким интервалам: в такого рода случаях в одну группу попадут такие, далеко не однородные вещи, как дворы с 7 и с 10, с 11 и с 20 десятинами посева, как промышленные заведения с 21 и с 50, с 251 и с 500, с 1,001 и с 2,000 рабочими, между тем, как ясно, что фабрика, положим, с 101 рабочим, гораздо ближе к попавшей в другую группу фабрике с 100, нежели к попавшей в ту-же группу фабрике с 250 рабочими, двор с 16 десятинами посева ближе к зачисленному в другую группу двору с 15-ю, нежели к отнесенному в одну с ним группу двору с 25 десятинами. Ясно, что в этих случаях, пользуясь наиболее совершенными из технических орудий, имеющимися в распоряжении статистика, мы все-же не можем пойти дальше грубо-приближенных выводов, можем лишь в самых общих чертах уловить существующие в действительной жизни сложные зависимости и связи.

Не менее ясно, что вытекает из всего сказанного для выяснения характера и смысла статистических выводов, поскольку таковые констатируют известные правильности, закономерности и причинные зависимости. «Статистическая закономерность,—говорит Майр,—сознательно и неизбежно абстрагирует от индивида и касается тех, более или менее выясненных, в смысле их типических причинных отношений,

явлений и процессов, которые происходят в массе, как таковой». При таком положении вещей, «статистическая закономерность покоится на основе, по необходимости противуположной существу естественного закона». По замечанию Лексиса, статистические числа, и в частности, относительные числа, в которых, главным образом, находят себе выражение статистические закономерности, «должны быть рассматриваемы не как управляющие явлениями нормы, на подобие естественных законов; напротив, они сами являются лишь результатом определенного хода массовых явлений; и если эти числа в течение долгого времени остаются неизменными, то это лишь знак того, что общественный процесс, в известных отношениях, находится в состоянии неподвижности или подвержен лишь медленным изменениям». Это—лишь перифраз мысли, которую, еще гораздо раньше, с совершенною отчетливостью формулировал Курно: мысли, что во всех тех случаях, где гармония создается взаимною реакциею разнородных элементов,—а именно, это является основною предпосылкой статистического метода и статистического умозаключения—«устанавливающийся в результате порядок (как и постоянство отношений, устанавливаемых статистикой), говорит: лишь о конечном возобладании правильного или постоянного влияния над аномальными и изменчивыми причинами». В то время, как закон в естественно-историческом смысле—номографический закон, «есть обобщение или абстракция от фактически однообразного совершения событий»; как «закономерное должно проявляться во всех отдельных случаях, и мы должны иметь право на индуктивное заключение, что оно будет проявляться и во всех вообще случаях данного рода»,—статистическая закономерность, благодаря бесконечному разнообразию и пестроте статистически-изучаемых явлений, может притязать лишь на большую или меньшую степень вероятности,—в отдельных случаях и группах могут оказаться существенные отклонения от отвечающего данной закономерности шаблона. Это верно для любой области статистически-исследуемых явлений,—это сугубо верно для широкой области человеческого общежития. Здесь к тому общему для любой из сфер, где находит себе приложение статистический метод, основанию, обусловливающему лишь более или менее вероятный, притом качественный, а не количественный характер причинных заключений, которое состоит в «сложности условий, действующих с различною силой и частью в разных направлениях», присоединяется еще специфическое условие: «привходящие, в качестве окончательно решающего фактора, психические мотивы», влияние которых «мы в лучшем случае можем предугадать в их общем направлении, на основании определяемых путем статистического исследования объективных условий, а в их количественных чертах можем только nachträglich, post factum, определить из фактически наступивших проявлений—Wirkun-

gen этих мотивов [1]). Статистические числа, таким образом, «не более как критерий, мерило совокупного влияния сложного комплекса обстоятельств, которые не поддаются измерению каким-либо иным способом и, вместе с тем, не могут быть строго дедуцированы из своих основных элементов. Постоянство жизненных отношений вместе с фунгибельностью, заменимостью участников различных групп, имеет своим последствием известное постоянство этих характеристических относительных величин, которые, однако, остаются чувствительными ко всякому изменению нормального порядка вещей» (Лексис); иначе сказать, допускают, для отдельных случаев и групп, всякого рода отклонения от выражающейся в общих цифрах закономерности.

Хорошо развиты те-же мысли в известном рассуждении Виндельбанда «О случае». Как и надлежит, он рассматривает вопрос о характере и смысле статистических выводов в связи с вопросом о смысле того, что он называет законами вероятности. Последние существенно отличны от законов, получаемых индуктивным путем. в основе обычного индуктивного умозаключения лежит сходство всех наблюдаемых случаев в отношении общего родового признака и различие во всем остальном,—в этом различии нужно удостовериться точным анализом; этот последний становится ненужным, если гарантия разнообразия дается большим числом наблюденных случаев, — суть дела здесь не в большом числе, а именно в обеспечиваемом большим числом разнообразии. Получаемый индуктивным путем закон действует в каждом единичном случае, закон вероятности—только в массе, следовательно, термин—«закон», собственно говоря, неприменим к исчислению вероятностей: он дает лишь «численное отношение данных обстоятельств, при наличности которых действовали определенные законы» [2]). Это обстоятельство,—подчеркивает Виндельбанд,—имеет решающее значение для статистики—науки, которой суть, по Виндельбанду, в тесном соединении индукции с заключением от вероятности a posteriori. Постоянство статистических частот приходится сводить к постоянству отношений между теми условиями, которые управляют суммою явлений. Переход от постоянного отношения к закону — уже не эмпирическая вероятность (как само постоянное отношение). Это—индукция, но индукция малой ценности, в виду малой ценности ее посылок: таковыми являются средние отношения, притом лишь более или менее приближенные; поэтому найденное статистическою индукциею постоянное отношение может не оправдываться не только в единичных случаях, но и в «суммах случаев». Следовательно, статистика дает не законы, а лишь постоянные отношения обстоятельств, под действием которых слагались закономерные влияния внутри человеческой жизни, — она есть наука не необходимого, а фактического. Отношение статистики к единичному случаю тождественно с отношением исчисления вероятностей: постоянные отношения статистики — не законы, по которым совершаются единичные факты (как это имеет место по отношению к естественным законам), а «продукты, которые от того правильно проистекают из изменчивых комбинаций обстоятельств, что численные отношения этих обстоятельств и способы их взаимодействия сами остаются одинаковы», — с

[1]) Wundt. Logik, Bd III, стр. 103.

[2]) Windelband, Die Lehren vom Zufall, 1870, стр. 44—45.

изменением обстоятельств, изменяются и статистические числа. «Изумительные правильности» последних доказывают лишь одно — что повторяются те же комбинации обстоятельств. Статистические числа имеют тем менее отношения к действительности, что в средних цифрах вероятности и статистики утрачивается индивидуальная определенность, под одну категорию подводятся крайне разнообразные случаи,—следовательно, статистика, поскольку, в особенности, идет речь о волевых человеческих действиях, не освещает главного — внутреннего процесса, приводящего к известному поступку А в силу этого статистические числа теряют большую часть своего значения для характеристики нравственного состояния общества [1]).

Можно-ли, при таких условиях, говорить о «номографических функциях» статистического метода? Конечно, нельзя. Самое большое, на что может притязать статистический анализ, — это, как я уже сказал, употребляя терминологию самого А. А. Чупрова, «опираясь на уже открытые общие законы, объяснить единичное событие, показать, что действие общих вечных законов обусловливает необходимость перехода идиографической констелляции предшествующего момента в ту картину, какую являет подлежащее объяснению событие». И даже это удается лишь в виде исключения; в виде правила нам приходится привязывать наши объяснения к положениям, еще чрезвычайно далеким от «общих законов»; привязывать их к эмпирически-установленным правильностям, или к априорно-постулированным положениям, очень часто носящим более или менее произвольный, гипотетический характер.

Изложенные только-что соображения относительно характера и смысла статистической закономерности в значительной мере приближают нас к разрешению одного из наиболее интересующих статистическую теорию вопросов—вопроса об отношении статистического метода к методам индукции, с одной стороны, и к теории вероятностей, с другой.

Согласно ещё недавно безраздельно господствовавшему в науке и сейчас еще преобладающему взгляду, статистический метод—не более, как разновидность, или лучше—вспомогательное средство обычных, известных общей логике, методов индукции. Задача первого, согласно этому господствующему взгляду, ограничивается, в сущности, констатированием облеченных в цифровую форму массовых фактов: статистическим перечетом отдельных случаев, сводкою результатов этого перечета в абсолютные числа, преобразованием последних в производные величины, составлением из них статистических рядов и численною обработкою, в целях получения тех или иных выводов. Собственно-же «для вывода заключений о существовании причинной зави-

---

[1]) Там же, стр. 46—5[illegible].

симости между отдельными рядами фактов пользуются — согласно этому господствующему взгляду — одним из приемов индуктивного исследования» (А. А. Чупров). Специальная задача статистического метода ограничивается, значит, доставлением и обработкою цифрового материала; обобщение и объяснение последнего — дело методов индукции. Поэтому в большинстве русских, например, курсов теории статистики, вслед за детальною характеристикою методов собирания, сводки и численного преобразования статистических цифр, дается изложение методов индуктивного умозаключения, и каждый из них иллюстрируется примерами соответственного анализа статистических рядов. Впрочем, даже и с такими иллюстрациями мы встречаемся далеко не везде. «Несмотря на все трудности, представляемые наблюдательными науками,—читаем мы, например, у Янсона,—для приложения полной индукции, все-же установление неизменности сосуществования или последовательности явлений достижимо в них до известной степени, и для этого мы имеем в своем распоряжении четыре способа, которые Милль называет методами опытного исследования [1]). И в процитированных только-что словах, и в дальнейшем изложении существа четырех Миллевских методов речь идет, значит, вообще о «наблюдательных науках», и не приводится ни каких-либо специальных соображений касательно применения этих методов в статистике, ни каких-либо конкретных примеров применения их к данным статистического наблюдения. Приблизительно так-же трактуется вопрос в курсе покойного А. И. Чупрова, — так-же просто он разрешается и в некоторых из новейших статистических руководств, — например у А. Н. Анциферова: «исследуя взаимную зависимость явлений общественной жизни, статистика пользуется методами индуктивной логики» [2]),—этими несколькими словами ограничивается у него вступление к формулировке отдельных методов, которая дается, опять-таки, в совершенно общем виде, без какого-либо специального применения к статистике. В несколько менее упрощенной форме, но сходным по существу образом, трактуется вопрос у Р. М. Орженцкого, в частности, в его монографии «Сводные признаки»,—в несколько позднее вышедшем «Учебнике математической статистики» мы находим уже несколько иную постановку вопроса. Орженцкий исходит именно из того положения, что, «если оставить в стороне отношение родовых и сводных признаков к отдельным объектам и обратить внимание только на отношение их ко всей совокупности, то и те и другие получают одинаковое значение, — они характеризуют совокупность, присущи ей, для нее являются постоянными и временными до тех пор, пока не изменяются реальные условия существования группы». И из этого—весьма сомнительного—

---

[1]) Янсон, Теория статистики, 2 ое изд. 1887, стр. 451

[2]) Анциферов, Элементарный курс статистики, стр 413

тождества значения родовых и сводных признаков делается тот вывод, что, «если независимо от приема изучения и родовые и сводные признаки одинаково характеризуют группу, к ним должны быть одинаково применимы способы индуктивного исследования. Будет-ли явлению присущ родовой или сводный признак, — и в том, и в другом случае мы одинаково можем прибегать, в дальнейшем изучении, к приемам единственного сходства, единственной разницы и т. д. Правда,—оговаривает Орженцкий,—особенности сводных признаков не остаются здесь без влияния: сводные признаки легче допускают применение одних приемов предпочтительно перед другими, и получаемые результаты обыкновенно не обладают характером той безусловности и необходимости, какая свойственна точным законам индукции», — но даже эта разница не принципиальна: она «зависит от обстоятельств, которые одинаково могут встречаться и по отношению к родовым признакам, но при сводных признаках они встречаются чаще», и выражается в том, что «в одном случае мы получаем точную величину признака путем измерения одного единственного явления, в другом — наиболее вероятное значение этой величины—путем вывода средней из многих измерений. Но, получив точную величину в первом случае и наиболее вероятное значение ее—во втором, мы в дальнейшем применяем к ним одни и те-же приемы индуктивного исследования»; при этом, «в обоих случаях эти приемы могут привести к точным законам или эмпирическим правильностям. Тот или другой исход,—подчеркивает Орженцкий,—зависит не от родового или сводного способа установления признака, а от того, достаточно-ли элементарен установленный признак, и обладаем-ли мы исчерпывающим знанием и контролем других признаков и условий, сопровождающих данный признак». И в конечном выводе «с того момента, как сводный признак выведен, получен и отнесен к своей совокупности, он в дальнейшем подчиняется общим законам индукции. Нет,—опять подчеркивает Орженцкий,—особых приемов изучения ни индуктивных, ни аналогичных им, параллельных индукции, которые были-бы специально приспособлены к сводным признакам и могли-бы составлять особый статистический метод индукции. Статистический метод, как особый логический прием, относится лишь к получению сводных признаков, следовательно, только к первой стадии опытного изучения—наблюдению и установлению признаков. В дальнейшем есть только обычная индукция, одинаково применяемая как к родовым, так и к сводным признакам» [1]).

Чтобы поднее разобраться в вопросе, охарактеризуем вкратце существо обычной индукции и главнейших методов индуктивного умозаключения.

Индукцию, по Дж. Ст. Миллю, заложившему прочные до сих

---

[1]) Орженцкий, Сводн. признаки, стр. 310–314

пор основы индуктивной логики [1]), «можно коротко определить как «обобщение из опыта». Она состоит в том, что на основании нескольких отдельных случаев, в которых известное явление наблюдалось, мы заключаем, что это явление имеет место и во всех случаях, сходных с наблюдавшимися в некоторых обстоятельствах, признаваемых существенными».

Если-бы этим определением исчерпывалось все существо индукции как таковой, то вопроса о том, подводить-ли под понятие индукции статистическое умозаключение, не могло-бы быть: под это определение оно, без всякого сомнения, подходит. Но определение это обставляется рядом таких условий и оговорок, которые значительно осложняют вопрос и—по моему убеждению—приводят к существенно иному ответу. Основной принцип, лежащий в основе подлинной индукции, это принцип единообразия природы, заключающийся в том, что «в природе существуют сходные, параллельные случаи; что то, что произошло один раз, будет иметь место, при достаточно сходных обстоятельствах, и вторично,—и не только вторично, а всякий раз, как снова встретятся одни и те-же обстоятельства». Или, по Вундту: «ход природы единообразен, т. е. при тождественных обстоятельствах всегда будет наступать тождественное. Поэтому всякая индукция может быть облечена в форму силлогизма, в котором эта предпосылка составляет бо́льшую посылку [2]). Посылка эта требует, однако, небольшого дополнения или поправки: как отмечает ближайший последователь Милля, Бэн, «течение явлений природы представляет не одно единообразие, а ряд единообразных законов; следовательно, в единообразии природы есть единообразия, так сказать, радикально отличные друг от друга», и «всякая область знания имеет свои единообразия».

И эта основная предпосылка методов индукции тоже еще не слишком осложнила-бы вопрос: и статистическая закономерность, как и любое индуктивное умозаключение, будет «истинна во всех случаях, наступающих в одинаковых условиях». Осложняющим дело моментом является лежащее в основе подлинной индукции понимание закона причинности: «во всяком изменении,—так формулирует его сущность Бэн [3]),—есть однородная связь между предыдущими и последующими», заключающаяся в том, что «все, случающееся окончательно и единообразно привязано к одной или к нескольким предшествующим; если имеет

[1]) В своей „Системе логики",—говорит проф. Введенский в вышедшем в 1917 г. 3-ем издании своей Логики,—Милль настолько удачно описал основные методы научной индукции, что, во-первых, их стали называть в честь его методами Милля или Миллевскими методами индуктивных доказательств, и во-вторых, при описании этих методов авторы курсов логики заботятся теперь только о том, чтобы как можно проще и короче изложить составленное Миллем описание. Логика, 3-е изд. 1917, стр. 233.

[2]) Wundt, Logik, Bd. I, стр. 22.

[3]) Bain, Logique, стр. 14.

место это предшествующее, наступает и данное событие; если предшествующее отсутствует, отсутствует и оно.

В несколько иной, уточненной формулировке, заключительная часть процитированного только-что положения представляет собою тот общий принцип, из которого непосредственно выводятся все основные методы индуктивного умозаключения. В сжатой формулировке А. А. Чупрова этот общий принцип гласит: «Если А имеет место, а B_1 за ним не следует, то А не причина B_1; если B_1 имеет место, а А ему не предшествует, то А—опять—не причина B_1» [1]). Или в несколько распространенной формулировке А. И. Введенского: «явление X только в том случае считается причиною явления У, если возникновение первого вполне достаточно (т. е. рядом с ним не нужно никаких добавочных условий), чтобы всегда и везде вместе с ним возникало и второе, хотябы и незаметным для нас образом. Последние слова,—поясняет Введенский,—означают, что отсутствие явления У там, где возникло X, может быть только кажущимся; например, это отсутствие должно объясняться тем, что рядом с X действует такая другая причина, которая заслоняет от наших глаз явление У. Если-же встретится хоть один такой случай, где, несмотря на возникновение явления X, У отсутствует истинным, а не только кажущимся образом, то X уже не считается больше причиною явления У, хотя-бы в остальных случаях последнее и всегда возникало вместе с явлением X. Точно так-же, если У и всегда возникает вместе с явлением X, да для этого недостаточно одного лишь возникновения явления X, а нужны еще какие-нибудь добавочные условия, то X тоже не называется причиною явления У» [2]).

Из этого принципа, как я сказал, уже совершенно непосредственно вытекают формулы всех основных методов индуктивного умозаключения. Дж. Ст. Милль насчитывает их, как известно, пять: метод сходства, метод различия, «соединенный метод сходства и различия», метод остатков и метод сопутствующих изменений. Классификация эта представляется, однако, не вполне выдержанной: «Милль сваливает в одну кучу простые методы с сложными; он описывает, как однородные, пять методов, из которых, однако, два оказываются сложными. Между тем, есть еще и другие сложные методы, так что у Милля либо остается непонятным, почему-же он говорит только о двух из них, либо его читатель ошибочно принимает описанные Миллем сложные методы за столько-же простые, как и три других». Собственно, простые методы—это метод сходства (или согласия, или единственного совпадения), метод различия (или метод разницы, или метод единственной разницы), и метод сопутствующих изменений (единственного сопутствующего изменения). Это — единственные возможные простые методы индуктивного умозаключения: «нельзя придумать,—говорит А. И. Введенский,—никаких других методов, кроме методов единственного совпадения, единствен-

[1]) Чупров, Очерки, 2-ое изд, стр. 139.
[2]) Введенский, Логика, 3-е изд., стр. 240—241.

ной разницы и единственного сопутствующего изменения» [1]). И не только простые, но, можно сказать, простейшие — «наука принуждена не только для всякого, вполне точного, но даже и для наиболее лишь вероятного доказательства догадки о полной, прямо наблюдаемой причине употреблять непременно с л о ж н ы е индуктивные методы, т. е. доказательства, состоящие из соединения какого-либо простого метода Милля с каким-либо другим доказательством (или даже с несколькими другими), безразлично, «будет-ли последнее одинаково с первым, или-же иным». Ни один из простых методов не может быть достаточен сам по себе, и каждый из них требует еще некоторого дополнительного доказательства, потому что «каждый из них, взятый сам по себе, доказывает всего лишь разделительное суждение, говорящее, что явление X есть либо причина, либо составная часть причины явления У», либо, может быть, даже вовсе не причина, а следствие этого последнего, «и чтобы решить, на каком из членов деления должны мы окончательно остановиться, нам нужно еще добавочное доказательство» [2]). К числу такого рода сложных индуктивных доказательств относятся и остальные два метода, включенные Миллем в его классификацию,—соединенный метод сходства и различия, или иначе—«косвенный метод разницы», и метод остатков. Из этих сложных методов мы будем иметь случай упоминать о первом — соединенном методе сходства и разницы, аналогичные которому приемы приходится применять и в статистическом анализе, теперь-же мы дадим характеристику трех основных или простых методов, с которыми, как мы видели в предшествующей главе, сближаются применяемые в практике научного статистического анализа приемы статистического умозаключения.

Итак, еще раз: «ни одно обстоятельство, которое можно исключить без ущерба для явления, или которое может отсутствовать, несмотря на присутствие этого явления, не связано с ним причинною связью». Из этой «аксиомы» непосредственно вытекает первое Миллевское «правило» — м е т о д а с х о д с т в а: «если два или более случая подлежащего исследованию явления имеют общим лишь одно обстоятельство, то это обстоятельство — в котором только и согласуются эти случаи — есть причина (или следствие) данного явления» Или в несколько развитом определении А. И. Введенского, между прочим, подчеркивающем то чрезвычайно существенное обстоятельство, что метод сходства, как и всякий другой, простой или сложный метод индуктивного умозаключения, всегда отвечает на вопрос: «к а к д о к а з а т ь у ж е в о з н и к ш у ю у н а с д о г а д к у, что причиной изучаемого явления природы У служит именно X» [3]), иначе говоря, что применение индуктивных методов всегда исходит из какой-либо, может быть, даже не вполне осознанной самим исследователем, гипотезы: «при доказательстве с помощью этого метода»—метода сходства—«догадки, что явление X служит причиною явления У, надо среди данных опыта подобрать такие примеры возникновения явления У, чтобы у них было одно только общее для них всех обстоятельство, именно присутствие явления X в каждом из них. И если удастся подобрать среди данных опыта именно такие примеры, то они служат основаниями, подтверждающими нашу догадку» В самом деле — пусть нам удалось подобрать три случая наступления явления У, в которых предшествующими были комбинации явлений: ХАВ—ХАС — ХВС; «эти три примера докажут нашу догадку... с помощью следующего рассуждения: «здесь причиною возникновения явления У, скажем мы, надо считать явление X, потому что это е д и н с т в е н н о е обстоятельство,

[1]) Там-же, стр. 250.
[2]) Там-же, стр. 251.
[3]) Там-же, стр. 240.

которое присутствовало каждый раз, как возникало У. Всякое-же другое обстоятельство присутствовало при этом не каждый раз. Напр., А не было в третьем случае, В—во втором и т. д.. Но явление У, конечно, не могло возникнуть там, где не было его причины», и, следовательно, явления А, В, С, отсутствовавшие хотя-бы в одном из случаев, где присутствовало явление У, не могло быть его причиной. Следовательно, ничего не остается, как признать причиною явления У то единственное явление, которое присутствовало во всех случаях его наступления, именно явление Х». Смерть последовала в одном случае при явлениях дифтерита, в другом—при явлениях удушения подушкой, в третьем—при явлениях, положим, утопления; при чрезвычайном разнообразии обстоятельств, сопровождавших смерть в каждом из этих трех случаев, и при отсутствии в них чего-либо общего, кроме одного лишь обстоятельства: прекращения доступа воздуха в легкие, именно в этом обстоятельстве надо видеть причину, вызвавшую смерть во всех трех случаях. Аналогичные (э т о мы, во всяком случае, вправе сказать, как-бы мы ни разрешили впоследствии вопрос об отношении статистических приемов к методам индукции) примеры из области явлений, изучаемых статистическими приемами: повышение смертности и преступности в года плохих урожаев, повышение того и другого в годы высоких хлебных цен. В том и другом примере каждый из вошедших в сопоставление годов с повышенною смертностью или преступностью характеризовался самыми разнообразными комбинациями всякого рода природных и общественных условий, кроме одного: в первом примере — плохого урожая, во втором — высоких хлебных цен. Следовательно, в этих единственных, общих всем годам с повышенною смертностью и преступностью, признаках надо видеть причину такого повышения; именно п р и ч и н у, а не следствие, потому что обратное предположение, в обоих случаях, противоречило-бы здравому смыслу и не могло бы быть ничем мотивировано.

Второе «правило» — м е т о д а р а з н и ц ы, по Миллю, гласит: «если случай, в котором исследуемое явление наступает, и случай, в котором оно не наступает, сходны во всех обстоятельствах, кроме одного, встречающегося лишь в первом случае, то это обстоятельство, в котором одном только и разнятся эти два случая, есть следствие, или причина, или необходимая составная часть причины явления». Или, опять-таки, в более развитой формулировке А. И. Введенского: «при доказательстве с помощью этого метода догадки, что явление Х служит причиною явления У, надо среди данных опыта подобрать, или впервые создать посредством эксперимента, два таких примера, чтобы, во-первых, в одном из них явление У возникло, а в другом—не возникло, и, чтобы, во-вторых, между этими примерами была только одна разница, именно, когда У возникло, то среди обстоятельств, при которых оно возникло, было явление Х, а когда У не возникло, то не было явления Х». Если, в самом деле, мы располагаем двумя примерами: наступления У при комбинации обстоятельств Х А В, и ненаступления явления У при комбинации обстоятельств А В, без Х'а, то «мы можем пользоваться этими данными опыта, как основаниями для следующего рассуждения: «явление У, скажем мы, непременно д о л ж н о было возникнуть там, где присутствовала его причина. Поэтому, нельзя считать причиной ни А, ни В, ни их соединения только между собой, без участия явления Х: ведь все это присутствовало во втором случае, однако, явления У здесь не возникало. Следовательно, причиной этого явления может быть только или само явление Х, или его соединение с каким-либо из обстоятельств, бывших рядом с ним, так что явление Х есть или причина, или, по крайней мере, составная часть причины явления У». Под колпаком воздушного насоса ставится электрический колокольчик; он звучит, пока под колпаком есть воздух, и не звучит, когда воздух из-

под колпака выкачан. Так как во всем остальном обстоятельства в обоих случаях тождественны, то из сопоставления их мы можем заключить, что присутствие воздуха под колпаком было необходимой составною частью причины звука (другая составная часть—удары молоточка о звонок!), и с еще большею определенностью, что отсутствие воздуха было причиной того, что колокольчик не звучал во втором случае. Из области явлений, изучаемых статистическими приемами, аналогичными примерами будут (или могли-бы быть, если-бы было установлено тождество всех прочих условий): повышение цен в районах вывоза и понижение их в районах привоза, как результаты, положим, проведения железной дороги, все остальные обстоятельства были налицо и до и после проложения железной дороги, разница только в этом одном обстоятельстве,— следовательно, в проложении железной дороги надо видеть причину повышения цен Расположенные вперемежку селения, положим, великороссов, малороссов и татар, при одинаковой величине надела и при тождестве всех остальных условий землепользования и хозяйства, обнаруживают, однако, такие-то резкие различия в размерах и результатах хозяйства—мы заключаем отсюда, что причина этих различий в том единственном обстоятельстве, которым различаются эти три группы селений—в племенном составе населения.

Однако, относительно метода разниц можно сейчас-же—даже не предрешая более общего вопроса об отношении статистического метода к индукции— сказать, что здесь может быть речь именно т о л ь к о о б а н а л о г и и, а никак не о чем-либо большем. Дело в том, что «метод различия, как бесспорно установлено Миллем, есть по преимуществу метод искусственного опыта или эксперимента». Это потому, что «особенности «метода различия» гораздо точнее определяют характер требующихся для него сочетаний, чем это имеет место при методе сходства: два подлежащие сравнению случая должны быть вполне сходны во всех обстоятельствах, кроме одного того, исследование которого составляет нашу цель». Конечно, «нет нужды, чтобы это сходство в обстоятельствах простиралось и на такие, которые, как уже известно, несущественны для результата»—оговорка, чрезвычайно существенная, потому, если-бы не это, то метод разницы, в виду неполного совершенства даже самых совершенных методов научного исследования, пришлось-бы признать практически в о в с е неприменимым; «но если даже ограничить тождественность двух случаев ABC и BC только такими обстоятельствами, которые неизвестны заранее за безразличные, то и тогда окажется, что природа весьма редко дает два случая, относительно которых мы могли-бы быть вполне уверены, что они стоят именно в таком отношении друг к другу», иначе говоря, «в природе обыкновенно нельзя бывает найти такого самопроизвольного опыта, какого требует метод различия». Напротив, «когда мы производим явление при помощи искусственного опыта, или эксперимента, то мы почти непременно получим два, требуемые этим методом, случая, если только процесс не продолжается очень долгое время»; это потому, что «сама природа эксперимента заключается во внесении в существовавшую до того момента совокупность обстоятельств какой-нибудь вполне определенной перемены»,—при удовлетворительно поставленном эксперименте мы имеем «право питать полную уверенность в том, что ранее существовавшее состояние и состояние, нами произведенное, различаются только фактом присутствия или отсутствия изучаемого явления». Но если так, то, значит, о применимости метода разницы ко всему кругу явлений, где применяются статистические приемы, или о т о ж д е с т в е каких бы то ни было случаев статистического анализа, не может быть и речи: статистические приемы — приемы чисто-наблюдательные, и статистический метод, как мы видели, применяется именно к тем явлениям и к разрешению именно тех научных вопросов, где

эксперимент не может иметь места, и где поэтому приходится оперировать исключительно наблюдением

Напротив, метод сходства есть по преимуществу метод наблюдения—метод, применяемый именно там, где эксперимент не может иметь места: «здесь не надо никаких специальных, никаких особенных, определенных случаев. Им можно исследовать всякие случаи, в которых мы находим в природе то или другое явление; раз группа случаев в чем-либо сходна, то уже этот факт дает довольно важное заключение; правда, мы редко можем быть уверены в том, что найденное сходство есть единственное сходство,—но здесь такая неизвестность не подрывает заключения, как при методе различия, она не затрагивает достоверности результата в отведенных ему пределах». Но «отведенные ему пределы» далеко уже, в смысле содержания, нежели пределы метода разницы: «из методов непосредственного опыта только метод различия может давать непосредственное знание о причинах. Метод сходства ведет лишь.. к таким единообразиям, которые или вовсе не составляют причинной связи, или в которых вопрос о причинной связи должен пока остаться открытым. Метод сходства полезен, главным образом, потому, что указывает, где прилагать метод различия; кроме того, метод сходства приходится применять, в качестве менее сильного орудия, в тех случаях, когда метод различия неприложим», иначе говоря, везде, где нет места эксперименту; менее сильного, и гораздо менее сильного орудия потому, что, «пользуясь им в его простом виде, т. е. без всяких добавочных доказательств, мы часто можем принять за полную причину даже и то, что совсем не принадлежит к составу причины, а присутствует чисто случайным образом во всех подобранных нами примерах». Метод сходства приводил-бы к достоверным заключениям лишь в том случае, если-бы мы могли быть уверены, что данное явление может иметь только одну причину. Между тем, «многие явления отличаются так называемою множественностью причин». Об этой категории обстоятельств нам дальше придется говорить подробно—сейчас для нас достаточно того, что «под этим названием подразумевается, что одно и то-же явление может быть произведено различными причинами». Но если это так, и «если в доказываемой догадке идет речь о таком явлении, которое обладает множественностью причин, то при самом строгом соблюдении правила метода единственного совпадения, если им пользоваться без всяких добавочных доказательств, легко может возникнуть только-что указанная ошибка» [1]). Как, сравнительно, низко ценится в общей логике доказательная сила метода сходства,—это ясно видно хотя-бы из того, что получение вывода при помощи этого метода признается бесспорным критерием ниского качества этого вывода,—невозможности приписать ему характер причинного закона: «если,—говорит, например, Бэн,—обобщение доказано исключительно методом сходства, то его характер, как причинного закона, остается недоказанным, и, если оно не есть последний закон сосуществования (т. е несводимый к причинности), оно является эмпирическим законом» [2]).

В числе тех добавочных доказательств или осложненных индуктивных методов, которые способны значительно повысить доказательную силу вывода, полученного методом сходства, видное место занимает «миллевский»-же, но уже не простой, а сложный «косвенный метод различия» или «соединенный метод сходства и различия». Применимость метода сходства—так, весьма удачно, поясняется сущность этой комбинации у Бэна, «значительно увеличивается путем распространения его на совпадение в отсутствии Когда случаи этого рода присоединяются к таким, где происходит совпадение в наличности,

[1]) Введенский, Логика, стр. 257—258, 251.

[2]) Bain, Logique, стр. 158

метод приобретает, или почти приобретает, решающий характер метода разницы». Формула этого метода, или, лучше сказать, этого комбинированного применения метода сходства, гласит: «если два или более случая возникновения явления имеют общим лишь одно обстоятельство, и два или более случая невозникновения явления имеют общим только отсутствие того-же самого обстоятельства, то это обстоятельство, в котором только и разнятся два ряда случаев, есть или следствие, или причина, или необходимая часть причины изучаемого явления» Два или несколько скарлатинных больных, которым было сделано вливание сыворотки, поправились; два или несколько больных, которым вливание не было сделано, умерли; какую-бы долю значения ни приписывать разным побочным обстоятельствам, совпадение сходства в наличности и сходства в отсутствии прививки убеждает нас в том, что вливание сыворотки было, хотя может быть и неполною, причиною выздоровления подвергшихся вливанию больных Под эту-же комбинацию, скорее нежели под простой метод сходства, можно подвести и уже разобранные выше примеры из сферы приложения статистического метода—зависимость смертности и преступности от урожаев и от хлебных цен: в том, что именно в низких урожаях и высоких хлебных ценах причина повышения смертности и преступности, нас убеждает не просто совпадение повышения той и другой с плохими урожаями и высокими ценами, но еще и отсутствие данного следствия при отсутствии предполагаемых причин—иначе говоря, нормальная или пониженная смертность и преступность в года удовлетворительных урожаев и умеренных или низких хлебных цен.

Эти последние примеры могут быть, однако, трактованы и под углом зрения последнего из простых методов индуктивного умозаключения—метода сопутствующих изменений. Его правило или формула, по Миллю, гласит: «всякое явление, изменяющееся определенным образом всякий раз, когда некоторым особенным образом изменяется другое явление, есть либо причина, либо следствие этого явления, либо соединено с ним какою-либо причинною связью» Или в распространенной формулировке А. И. Введенского «при доказательстве, с помощью этого метода, догадки, что явление X служит причиною явления У, надо подобрать или посредством эксперимента впервые создать, среди данных опыта, по крайней мере, два таких примера возникновения явления У, чтобы, во-первых, в каждом из них это явление возникло в ином виде, например, сильнее или слабее, чем в другом, и чтобы, во-вторых, среди обстоятельств, при которых возникало это явление, изменялось только одно явление, именно X, а все прочие обстоятельства оставались без всякой перемены. И если удастся найти хоть два таких примера, то ими будет доказано разделительное положение, что явление X служит либо причиною, либо составною частью причины явления У». Если явление $У_1$ возникло при обстоятельствах X_1 А В, а его, видоизменение $У_2$ при обстоятельствах X_2 А В, то мы можем рассуждать таким образом: «если нет никакой перемены в причине, то не может быть перемены и в производимом ею действии. Поэтому, причиной явления У нельзя считать ни А, ни В, ни их соединения между собой, без участия явления X. Ведь, все это во втором примере осталось без всякой перемены, а У, между тем, изменилось Следовательно, причиной явления У может быть только или само явление X, или его соединение с каким-либо из обстоятельств, бывших рядом с ним; ибо только в нем одном и произошла перемена во втором примере. Значит, X есть или причина, или, по крайней мере, составная часть причины явления У». В виде примеров можно привести хотя-бы сельскохозяйственный эксперимент—выращивание семян, положим, пшеницы при определенной совокупности однообразных условий, но с прибавлением различных доз известного удобрительного средства: если при этом будет определенным обра-

зом изменяться количество и качество получаемого зерна, мы отнесем эту разницу насчет единственного сопутствующего изменения—присутствия и определенной дозы данного удобрительного средства. Не приходится останавливаться на том, что именно с этим методом индуктивного заключения более всего сближаются статистические выводы, полученные методом параллельных рядов в чистом его виде. Особенно близок этот статистический прием к той разновидности метода сопутствующих изменений, которая, по Бэну, состоит «в распределении в ряд всех объектов, обладающих одним общим свойством, смотря по тому, обладают-ли они им в большей или меньшей мере»: каждый год характеризуется известною преступностью—каждый год характеризуется определенным урожаем. Мы располагаем года в ряд, смотря по тому, в какой мере они обладают тем и другим, присущим каждому из них, свойством, и если в изменениях этой меры есть прямое или обратное соотношение, мы заключаем отсюда о существовании прямой или обратной причинной зависимости.

Как я уже сказал, статистические приемы причинно-следственного умозаключения считали, а как правило и сейчас продолжают считать, за разновидность охарактеризованных только-что методов индукции. Конечно, и представители чистой логики, и в особенности статистики, не могли не замечать, что индукция в области тех, собственно, явлений, которые изучаются статистическим методом, встречается с особыми затруднениями. Так, еще Кетле подчеркивал, что «объяснение статистических фактов часто затрудняется тем, что сложные по своей природе факты рассматриваются как простые», и подчеркивал «необходимость величайшей осторожности при установлении силы влияния каждого из влияющих моментов; даже весьма опытные люди,—писал он,—иногда приходят к нелепейшим заключениям, так как относят на счет известных им причин такие следствия, которые в действительности вызваны другими обстоятельствами». В области наук о природе индукция—и в этом ее отличительное свойство—приводит к установлению естественных законов, распространяющихся на все случаи изучаемого явления. «А разве,—говорит Лексис,—разве мы, на основании данных опыта, когда-либо можем с такою-же уверенностью предсказать образ действий человека»—главного объекта статистических исследований, с какою можем утверждать, например, что железо намагничивается каждый раз, как вокруг него будет пущен электрический ток? Очевидно, нет, потому что наша абстрактная схема человеческого поведения по необходимости всегда будет неполною; для обоснования ее всегда окажутся выделенными только преобладающие, обнаруживающиеся, как правило, причины и последствия. А отсюда следует,—заключал Лексис, впадая в очевидное самопротиворечие,—что индуктивное заключение от наблюденных случаев к ненаблюденным в неисчерпаемом разнообразии человеческой жизни, приводит только к большей или меньшей степени вероятности»; самопротиворечие—потому что характерным для индукции является

именно достоверный, а не вероятный только характер ее заключений. У Зигварта мы находим детальный анализ обстоятельств, затрудняющих применение методов индукции к изучению общественных явлений,—затруднений, которые кульминируют в том обстоятельстве, что при анализе статистических рядов мы никогда не можем с исчерпывающею точностью установить тождества всех прочих, кроме данного, условий; самое большее, что мы можем сделать, это—«принять, что при достаточно большом числе случаев, остальные, остающиеся неизвестными, условия, с их вариациями, взаимно уравновешиваются»; предположение, которое, как знает всякий статистик, всегда в большей или меньшей мере висит в воздухе, потому что среди остающихся неизвестными, или хотя-бы даже известных, но не учтенных при статистическом анализе, обстоятельств, всегда могут оказаться такие, которые либо связаны с принятыми в расчет факторами прямою или обратною причинною зависимостью, либо, будучи независимы от них, однако, не уравновешиваются в массе, а оказывают свое определенное влияние, так или иначе перекрещивающееся с влиянием учтенных при анализе факторов. И, тем не менее, и у Лексиса, и у Зигварта, статистический метод остается разновидностью индукции, отличающеюся техникою собирания и разработки материала, но не отличающеюся в самом логическом существе заключения и получаемых из него результатов.

Более принципиально, еще в 60-х годах прошлого столетия, поставил вопрос Рюмелин. Он категорически формулировал то положение, что «статистический метод выступает на сцену, в области эмпирических наук, именно тогда, когда индукция, т. е. заключение от единичного типичного случая, отказывается служить»; что статистический метод «вступает в дело везде, где в объединенных для целей исследования явлениях имеются изменчивые моменты», и что поэтому «массовое наблюдение не может быть рассматриваемо, как простое вспомогательное средство индукции, а должно быть поставлено рядом с нею, как нечто координированное, параллельное».

Однако, отчетливо формулированная Рюмелиным мысль, можно сказать, заглохла, и только в очень недавнее время возродилась в работах А. А. Чупрова: в его напечатанной в 1905 г. немецкой статье о «задачах статистического метода», и затем в его «Очерках по теории статистики», где данному вопросу посвящена самая ценная часть—весь второй «очерк», озаглавленный, как мы знаем, «Номографические функции статистического метода».

Основная предпосылка применимости методов индукции в их чистом виде, из которой исходит А. А. Чупров,—это исчерпывающее знание всего комплекса причин, под влиянием

которых слагается изучаемое явление, и всего комплекса следствий, к которым приводит данная совокупность причин. Результаты того опыта, на котором строится индуктивное умозаключение, должны полностью укладываться в форму: причины $A + B + C$ имеют своим следствием $A_1 + B_1 + C_1$; никаких больше элементов не должно участвовать ни на стороне предшествующих, ни на стороне последующих, и притом это должны быть, в самом деле, те именно, неразложимые далее, элементы, которые стоят между собой в отношениях причины и следствия. В действительности, во всей области общественных явлений, а в значительной мере и в сфере явлений внешней природы, этой предпосылки налицо не оказывается, а потому «трафареты индуктивных методов в их чистых, отшлифованных логикою, формах, не применяются». Канонические схемы методов индукции предъявляют к постановке исследования определенные технические требования. «Если эти требования не выполнены, то вывод остается не доказанным. Если-же он не теряет силы, то лишь потому, что опирается, в действительности, не на те приемы, которые провозглашаются за руководящие начала, а на иные правила научной работы,—более сложные, и в силу того—менее очевидные, но за то и менее требовательные, лучше мирящиеся с реальными условиями научной работы». Чистые методы индукции требуют лишь строго ограниченного, очень небольшого числа наблюдений—метод разницы всего двух, метод сходства—столько, сколько есть причин, комбинирующихся с искомою причиной и подлежащих элиминированию, и приводят к выводам абсолютной достоверности. В практике признаваемого за индуктивное исследования, с одной стороны, довольствуются «не строго доказанным, а лишь более или менее правдоподобным выводом», с другой,—прибегают к «накоплению экспериментов», смысл которого, отчасти, в неправдоподобности случайного совпадения получаемых при многочисленных наблюдениях результатов, отчасти в том, что повторение «может выяснить нам все причины явления», — и тогда остается только установить, какие из всех этих причин имелись налицо в данном частном случае»[1]).

Бесконечно разнообразные случаи, когда опытное исследование приходится вести в обстановке, не удовлетворяющей лежащей в основе чистой индукции формуле: «причины $A+B+C$ имеют своим следствием $A_1 + B_1 + C_1$», могут быть подведены под две главных категории. Одна из них — неполное знание причин и следствий. В краткой формулировке Борткевича, сущность дела здесь в том, что «ни в одном опыте, предпринимаемом с целью выяснения того, находятся-ли явления A и B между собою в отношении причины к следствию, не представляется возможности составить полный список тем

[1]) Bain, Logique, стр. 120.

обстоятельствам, которые даны в опыте слитно с A, и относительно которых, путем сопоставления результата данного опыта с результатом других опытов, следует доказать, что они н е суть причины B», между тем, как «при изложении канонических методов индукции обычно предполагается, что означенные обстоятельства могут в каждом данном случае быть перечислены исчерпывающим образом». «Работая экспериментально в неизученной еще области, — говорит А. А. Чупров, — исследователь не в состоянии облекать результаты опыта в ту форму, какая требуется правилами методов индукции: причины A + B + C имеют своим следствием $A_1 + B_1 + C_1$. Он принужден к комплексу причин, или-же следствий, или-же к обоим, добавлять (или точнее было-бы сказать — мириться с присутствием! А. К.), кроме перечисленных explicite элементов A, B и C и A_1, B_1 и C_1, еще такие, которые ему доподлинно неизвестны, и входят в комбинацию, так сказать, инкогнито». Иначе говоря: «результаты наших наблюдений и экспериментов, как-бы тщательно ни производить их..., неизменно облекаются в форму связи причин $A + B + C + X$ со следствиями $A_1 + B_1 + C_1$ (или причин $A + B + C$ со следствиями $A_1 + B_1 + C_1 + Y_1$)». Такие привходящие элементы неизбежны и при искусственном эксперименте,—как-бы тщательно ни работал экспериментатор, он никогда не в состоянии поручиться за то, что ему удалось устранить в с е мельчайшие привходящие причины, которые могут, так или иначе, присоединиться к принятым им в рассчет обстоятельствам; как-бы тщательно ни был поставлен вегетативный опыт с выращиванием пшеницы, исследователь никогда не может поручиться за то, что на результатах эксперимента не отразились движения воздуха при открывании дверей помещения, задержки солнечного света неуловимыми неровностями оконных стекол, неуловимые индивидуальные различия семян, не идеально равномерное смешение почвы и т. п. Однако—замечу здесь-же с тем, чтобы к этому вернуться в дальнейшем, — в искусственном эксперименте влияние этих привходящих моментов может быть сведено к такому минимуму, при котором они совершенно не будут влиять на результат. Совсем другое в области явлений, изучаемых статистически. Положим, мы исследуем влияние тех или других факторов на величину посевной площади, и допустим даже, что мы свободно располагаем самым совершенным орудием статистического анализа — нужными нам комбинационными таблицами. В таком случае, мы можем выделить влияние, напр., таких факторов A, B, C, в лучшем случае D, как размер земельного надела, обеспеченность рабочим скотом, отношение к промыслам, племенной состав; мы можем выделить еще и пятый фактор E — рабочий состав домохозяйств, и выяснить влияние этого пятого фактора при установленном нами (допустим даже, достаточно полном) равенстве первых четырех. Однако, даже и в этом, мыслимо благоприятном случае (комбинационные таблицы с пятью признаками в практике почти

не встречаются) остается еще чрезвычайно сложный X, в состав которого могут входить и качество надела, и условия арендования земли, и различия в культурной обстановке, и чисто бытовые особенности жизни данной общины и данной группы дворов, и случайности: вроде пожара, градобития и пр., и пр.,—и относительно которого мы никоим образом не можем постулировать «равенства прочих условий», а напротив — очень часто имеем полное основание предполагать, что те или другие из его элементов, так или иначе, переплетаются и скрещиваются с учтенными при нашем комбинационном анализе факторами. «Фактически,— замечает А. А. Чупров,—этот таинственный X может сводиться, иной раз, к нулю, если мы случайно введем в состав перечисляемых обстоятельств, действительно, *все* элементы, которые состоят в каком-либо отношении к тем или иным частям рассматриваемого следствия», или— как весьма часто бывает при естественно-историческом эксперименте— если неучтенный остаток совершенно не отражается, ощутимым образом, на результате,—«в таких условиях вывод, опирающийся на применение правил индуктивных методов к результатам эксперимента, может оказаться вполне точным». В виде правила осторожный исследователь на такую, в сущности случайную, удачу не рассчитывает — он, как мы видели, либо довольствуется, в самом деле, небольшим числом экспериментов, но тогда придает своему выводу предположительное значение, либо прибегает к накоплению экспериментов, и в таком случае опыт сходит с почвы чистых методов индукции.

Другое обстоятельство, создающее затруднения для применения методов индукции, — это *множественность причин и следствий*; если можно так выразиться, не *количественное*, а *качественное* несоответствие конкретного состава причин и следствий формуле: причины $A+B+C$—следствия $A_1+B_1+C_1$. Разбор этого случая — одно из самых ценных мест в «Очерках» А. А. Чупрова. «Вопрос о множественности причин и следствий,—справедливо замечает Борткевич,—автору удалось изложить с удивительною ясностью, чему не мало способствовало широкое пользование примерами из различных областей науки и житейского опыта». Правда, готовую почву для своих выводов Чупров нашел у целого ряда логиков, начиная с Милля и кончая Венном и Минто, но все эти авторы занимались исключительно множественностью причин, тогда как Чупров показал применимость совершенно аналогичной конструкции и к случаю множественности следствий [1]); обстоятельство—отмечу сейчас-же— имеющее для нас особенно важное значение, потому что именно к случаю множественности следствий непосредственно привязывается наиболее типичный для статистики случай обоснования статистического вывода на принципе вероятности. Как мы видели, множественность при-

[1]) „Задачи и концепции", стр. 351—352.

чин выступает уже у Милля, как главное основание малой доказательности выводов, полученных методом совпадения или сходства. Но в качестве антитезы множественности причин у логиков выступает не множественность следствий, а смешение следствий. Случаю множественности следствий, — по замечанию самого А. А. Чупрова, — в учебниках логики уделяют менее внимания или точнее— вовсе не считаются с ним. «Но фактически, — подчеркивает Чупров, — она имеет еще большее значение, ибо на ней покоится вся система исчисления вероятностей» [1]) и даже более того,—как я уже сказал,— на ней покоится возможность применения самого принципа вероятности к заключениям обычного в статистике типа.

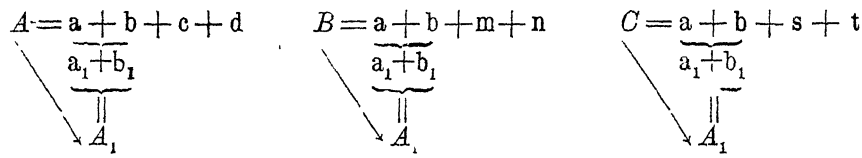
В краткой формулировке Борткевича, сущность множественности причин и следствий сводится к тому, что «при установлении причинной связи между А и В никогда нельзя поручиться, что в составе А и В, помимо элементов, соответствующих один другому, нет элементов, не стоящих в связи между собой. Если такие посторонние элементы входят в А, но не содержатся в В, то получается «множественность причин». Обратно, если они отсутствуют в А, но имеются в В, то это влечет за собой «множественность следствий». Возможны, конечно, и такие случаи, когда множественность причин сочетается с множественностью следствий».

На первый взгляд, самое представление о множественности причин, равно как и о множественности следствий, противоречит существу причинной связи, как оно выяснено в предшествующем изложении: если имеет место причина А, за нею непременно должно последовать явление A_1, если имеет место явление B_1, ему непременно должна была предшествовать причина В. Повышение температуры непременно имеет своим последствием поднятие уровня ртути термометра, и ни в каком случае не может иметь своим последствием его понижение; вода непременно составлена из двух атомов водорода и одного атома кислорода. А между тем, существование и множественности причин, и множественности следствий—факт, с которым приходится считаться и жизни, и научному исследованию: в одних случаях известные причины ведут за собою так-таки одни, в других — другие следствия; в одних случаях известные явления проистекают из одних, в других— от иных причин. Как и почему это могло получиться? Ответ на этот вопрос, в конце концов, довольно прост: на ту однозначную причинную связь, при которой за А непременно следует A_1, а B_1 имеет своим обязательным предшествующим В, мы можем рассчитывать в том лишь случае, когда имеем дело с элементарными, далее неразложимыми причинами и последствиями: как-бы ни понимать истинное существо явлений тепла и явлений расширения,—как-бы ни по-

[1]) Die Aufgaben d. Theorie d. Statist., стр 433.

нимать действительный состав химических элементов и глубочайшие причины, лежащие в основе их соединений, — для практики научного исследования повышение температуры и поднятие уровня ртути, частицы водорода и кислорода и совокупность свойств, характеризующих воду, представляют собой именно такие элементарные причины и последствия, которые в своих взаимодействиях не могут быть разложены на какие-либо более простые элементы. Но наряду с такого рода явлениями, где, значит, мы спокойно можем исходить из существования однозначных причинных связей, мы в очень многих областях подвергаемой научному исследованию действительности, в частности, во всех тех областях явлений и при работе во всех тех направлениях, где приходится применять статистический метод, имеем дело с такими *сложными* причинами и с такими *сложными* следствиями, из которых каждое представляет собой *требующий*, по существу дела, *разложения* на более простые, элементарные причины, но по техническим условиям нашего научного анализа, располагающего лишь более или менее несовершенными орудиями исследования, *не поддающийся такому разложению*, комплекс переплетающихся и перекрещивающихся более простых причин и следствий: изучаемая конкретно «причина» A состоит, в действительности, из неподдающейся расчленению системы элементарных причин $a_1 — a_2 — a_3$, а конкретно-изучаемое «следствие» B состоит из неотделимых друг от друга элементарных следствий $b_1 — b_2 — b_3$, причем фактически *именно эти* a_1, a_2, a_3, с одной стороны, и эти b_1, b_2, b_3 или точнее— некоторые из них, только и стоят между собой в действительной причинно-следственной связи. Вот, *при таких условиях*, в самом деле, возможны *многозначные* причинно-следственные отношения; при таких условиях у одной, конкретно только и поддающейся изучению, но на самом деле сложной, причины *могут* оказаться различные последствия, и одно следствие, конкретно-изучаемое нами, как нечто единое, но в действительности сложное, *может* проистекать от нескольких различных причин, конкретно изучаемых, как единые, но в действительности сложных. «Предположим, — говорит А. А. Чупров, — что сложная причина A слагается из элементов $a + b + c + d$, тогда как в состав сложного следствия, приводимого с нею в связь, входят лишь элементарные следствия $a_1 + b_1$. В таком случае, для того, чтобы имело место A, вовсе не требуется, как необходимое условие, чтобы осуществилось A (*все* A!). Достаточно, чтобы осуществились лишь те его составные элементы, которые соответствуют элементарным следствиям в составе A_1, т. е. a и b. Если a и b налицо, то за ними последует A_1 всегда и везде, независимо от того, присоединятся-ли к ним c и d, которые вместе дают явление A_1. Следствие A_1 наступит и в том случае, если к цепи причин присоединятся элементы m и n, которые в совокупности с a и b дают явление B. У следствия A_1 будет не одна только

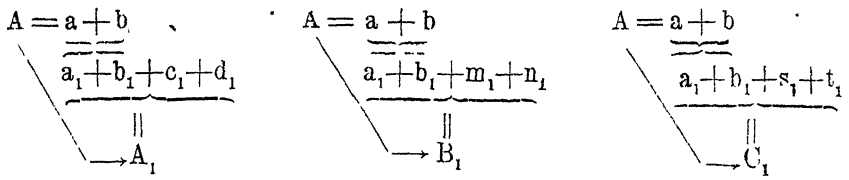
причина A, но и другая, B, a, может быть, и еще целый ряд других причин, сходствующих между собой в том, что в них входят элементарные причины a и b, но различающихся тем, что кроме a и b, в них входят различные элементы m и n, и т. д.». Схематически это рассуждение можно изобразить таким образом:



— следовательно, все три конкретно-наблюдаемые причины A, B, C, благодаря присутствию в их составе элементов a и b, дают ту совокупность непосредственно-связанных с ними элементов a_1 и b_1, из которых слагается конкретно-наблюдаемое, тождественное для всех трех комплексов причин, следствие A_1. Смерть, при явлениях удушения, может иметь конкретно-поддающееся констатированию причиною и утопление, и задушение подушкою или веревкой, и дифтерит, или попавшую в дыхательное горло рыбью кость. Элементарная причина a, сопровождаемая не имеющими, сами по себе, решающего значения добавочными причинами (затянутая вокруг шеи веревка, заполнившая дыхательное горло вода, попавшая туда кость и т. п.), во всех этих случаях о д н а—прекращение воздуха в легкие; с привхождением тех или других совокупностей других элементарных причин, эта единая действительная причина облекается в конкретные формы повешения, утопления и т. п. Повышение хлебных цен в экспортирующей стране или области может быть вызвано и ненормально-ниским урожаем в данной стране или местности, и неурожаем в покупающих от нее хлеб или в конкурирующих с нею, в роли поставщиков хлеба, областях или странах; и мерами таможенной политики ввозящих стран, и облегчающими вывоз мерами в области тарифной политики и техники сухопутных и морских перевозок, нагрузки и выгрузки, и обесценением денежных знаков вывозящей страны, и усовершенствованием торгового и кредитного аппарата, и т. п., и т. п. Элементарная причина a во всех этих случаях будет о д н а—изменение, в определенную сторону, соотношения между предложением хлеба и спросом на него, или проще — уменьшение предложения хлеба по сравнению с внутренним спросом. С присоединением к ней других элементарных причин, эта действительная, единая для всех случаев, причина выступает перед исследователем в образе таких конкретно-наблюдаемых, чрезвычайно разнообразных причин, как неурожай, благоприятные экспортные конъюнктуры и т. п.

Совершенно аналогичным образом объясняется и м н о ж е с т в е н н о с т ь с л е д с т в и й — повторяю, та сторона вопроса, на которую впервые обращено внимание А. А. Чупровым. «Если причина

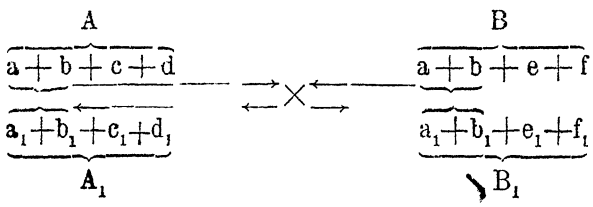
слагается из элементов $a + b$, тогда как следствие A_1 состоит из элементов $a_1 + b_1 + c_1 + d_1$, в таком случае у нашей причины будет не одно только следствие A_1, но может быть много иных, похожих друг на друга тем, что во все входят элементарные следствия a_1 и b_1, но отличающихся одно от другого остальными составными элементами». Или, изображая это рассуждение, опять-таки, в виде схемы:



Следовательно, конкретно-наблюдаемая причина A, слагающаяся из элементарных причин a и b, во всех трех случаях влечет за собой непосредственно с ними связанные элементарные следствия a_1 и b_1, которые, однако, благодаря прихождению в одном случае добавочных следствий c_1 и d_1, в другом—m_1 и n_1, в третьем—s_1 и t_1, имеющих своим источником совершенно другие комплексы причин, принимают вид совершенно различных конкретных «следствий» A_1, B_1 и C_1. Простуда может иметь своим последствием и простой насморк, и смертельное воспаление легких, и припадок острого ревматизма со всеми его осложнениями, и некоторые формы желудочных расстройств, и заболевания в полости уха. Во всех этих случаях рассматриваемая причина A будет иметь, в сущности, одно элементарное следствие a_1. В соединении с данным общим состоянием организма, с определенною наследственностью, с теми или другими бактериальными зараженими и т. п., это единое элементарное следствие получит конкретное выражение в форме того или другого из перечисленных, могущих последовать за простудою, заболеваний. Или возьмем другой пример — промышленный кризис. Его влияние на благосостояние народных масс может выразиться в самых разнообразных направлениях: и в усилении смертности, и в сокращении брачности, и в повышенном уровне преступности, и в сокращении размеров потребления, и в уменьшении вкладов в сберегательные кассы, и в увеличении числа и стоимости закладов в ссудных учреждениях, и т. п. Элементарное следствие a_1 во всех этих случаях одно: понижение трудовых и иных доходов народных масс; в комбинации и с разными другими системами элементарных следствий, такое понижение конкретно выразится в разнообразнейших, поддающихся непосредственному наблюдению и исследованию, «следствиях» или симптомах кризиса.

Вообще,—заключает Чупров,—«если приводятся в связь явления, где причина сложнее следствия, возникает множественность причин. Если, наоборот, следствие сложнее причины, то это порождает множественность следствий. Если-же

как причина, так и следствие, имея некоторые элементы общими, дополняются элементами, независимыми друг от друга (например, причина A слагается из $a+b+c+d$, а следствие A—из $a_1+b_1+m_1+n_1$), то возникает «множественность причин и следствий»: причина будет иметь, кроме данного, несколько иных следствий, следствие будет иметь, кроме данной, несколько иных причин. Изобразим и этот, наиболее сложный, но весьма обычный, случай в виде схемы:



Следовательно, конкретно-наблюдаемые причины A и B, включая в себя одинаковые элементарные причины a и b, могут одинаково повести за собою элементарные следствия a_1 и b_1, которые, комбинируясь, в одном случае, с элементарными следствиями c_1 и d_1, а в другом—с e_1 и f_1, принимают вид конкретных следствий A_1 и B_1, из которых, значит, каждое одинаково может иметь своими предшествующими конкретные причины A и B. Так, упадок крестьянского благосостояния может иметь бесчисленное множество причин, сплетающихся между собой в самых разнообразных комбинациях, и может облекаться в самые разнообразные и тоже причудливо переплетающиеся формы; и конкретно-наблюдаемые причины, и конкретно-наблюдаемые следствия могут быть, значит, сколь угодно разнообразны. Но элементарная причина во всех случаях одна — изменение в неблагоприятную сторону отношения между доходами и расходами; элементарное следствие во всех случаях тоже одно —сокращение тех источников, за счет которых крестьянские массы могут удовлетворять своим хозяйственным и личным, в том числе как материальным, так и культурным потребностям.

В конечном выводе,—как подчеркивает, вслед за Миллем и другими логиками, А. А. Чупров,—«множественность действий, как и множественность причин, не представляет из себя реального факта, лежащего в природе вещей и меняющего наше представление о причинности». Мы, просто, «оказываемся вынужденными считаться с множественностью причин и с множественностью следствий, как с фактом, которого не вычеркнешь ссылками на определение причинности. Множественности причин и следствий нет — но считаться с ними нужно; внимательное отношение к процессу раскрытия причинозависимости неуклонно приводит к такому парадоксу». Та и другая проистекает просто из нашего неумения выделять группы элементов, слагающиеся из одних лишь соответствующих друг другу причин и следствий. Научный анализ «не может идти путем изучения лишь таких

сложных комплексов причин и следствий, которые сами стоят в неразрывной связи; он вынужден подвергать рассмотрению и менее тесные формы связи—отношения, характеризуемые множественностью причин и следствий. Но для исследования таких, более свободных отношений причинной связи методы индукции непригодны... Их нельзя ни обосновать, ни применять, так как, пользуясь ими в подобных условиях, мы рискуем или не прийти ни к какому выводу, или прийти к выводам неверным». Вот, для изучения таких, более свободных, причинных связей и служит статистический метод. «Статистические методы — таково вытекающее из всего сказанного заключение А. А. Чупрова, почти дословно совпадающее с цитированным выше положением Рюмелина,—подают руку помощи там, где индуктивные методы отказываются служить. Они не субординированы, а координированы индуктивным. Обе группы приемов уловления причинных связей между явлениями взаимно дополняют друг друга», чем и определяется место статистического метода в общей системе методов научного исследования, его теории — в общей системе научной логики. Или, как Чупров резюмировал эти свои положения в немецкой статье о «задачах статистического метода»: фактически «многие, если не большая часть научных результатов получаются методами, которые не могут быть без остатка сведены к известным правилам индуктивного метода; совокупность таких приемов исследования, служащих для изучения связей, характеризуемых множественностью причин и следствий, и есть то, что обычно обозначают названием «статистического метода». Благодаря этому определению статистический метод приобретает равноправное с индуктивным приемом положение в системе формальной логики. Оба способа исследования преследуют одну цель: подняться, путем переработки данного в опыте эмпирического материала, к установлению «естественных законов»,— но только применяются при различных предпосылках»; в частности, при невозможности установить неразрывную причинную связь, «работают различными формами статистического метода. Оба приема взаимно дополняют друг друга, — где один отказывается служить, его место заступает другой» [1]). Но если статистическое умозаключение утрачивает привычную для нашего представления опору в методах индукции и в лежащем в основе последних принципе неразрывной причинной связи, то оно должно искать себе какой-нибудь другой опоры. Чтобы возможно было схватить явления, стоящие в свободной причинной связи, должна быть найдена и для этого случая такая характеристика связи причины с следствием, к которой могли-бы примкнуть правила статистических методов, подобно тому, как примыкают к признаку неразрывности пра-

[1]) Die Aufgaben der statist. Methode, стр. 437.

вила методов индукции. «Такую характеристику,—заключает Чупров,—мы находим в математической вероятности». В первоначальном своем виде теория вероятностей рассчитана исключительно на один из двух видов множественности—как раз на тот, с которым общая логика, до А. А. Чупрова, не считалась: на множественность следствий; при известной комбинации условий может наступить одно следствие или другое; как велика вероятность наступления каждого из них? Но наряду с множественностью следствий, статистические приемы анализа должны также считаться с множественностью причин. Необходимо, следовательно, найти такую характеристику связи причины с следствием, которая пригодна для случая, когда одно действие имеет несколько разных причин. Математическая вероятность принимает на себя и эту функцию»,—это становится возможным, благодаря одной из теорем теории вероятностей, о которых будет идти речь в дальнейшем—теореме Байеса, позволяющей от наличных следствий заключать о вероятности возможных их причин.

Таково существенное содержание соображений А. А. Чупрова по вопросу о взаимоотношении между статистическим методом и методами индукции. Как я уже дважды отмечал, заслуга его в данном вопросе, во всяком случае, велика—это один из тех пунктов, где ему удалось, в самом деле, сказать свое слово в истории развития статистической теории: он до конца продумал те логические последствия, которые вытекают из факта множественности причин и следствий; сделал логические выводы из тех сомнений и оговорок, которыми многие и до него обставляли применение индуктивных методов в сфере общественных наук. Он, с другой стороны, подвел широкий теоретический фундамент под ясно формулированное, в свое время, Рюмелиным положение о «соподчиненности», независимости статистического метода от методов индукции.

То, что можно возразить против изложенных соображений Чупрова, может быть сведено, в общей формуле, к чрезмерной широте того обобщения, которое А. А. Чупров построил на недостаточно широком фундаменте. Те пункты, в которых соображения Чупрова вызывают возражения, как в фокусе сведены в уже цитированных нескольких строках из немецкой его работы о «задачах статистического метода»: «многие, если не большая часть научных результатов, получаются методами, которые не могут быть без остатка, сведены к известным правилам индуктивного метода». Статистический метод—это совокупность всех «приемов исследования, служащих для изучения связей, характеризуемых множественностью причин и следствий»; как и индукция, он «преследует одну цель: подняться... к установлению «естественных законов», но только применяются они при различных предпосылках».

Это последнее положение лишь воспроизводит, только в другой форме, уже рассмотренную и отброшенную нами характеристику статистического метода, как метода, выполняющего «номографические функции»,—способного приводить к раскрытию «номографических законов». Приведенные по этому поводу соображения получают лишь некоторое добавочное подкрепление в только-что изложенных соображениях А. А. Чупрова касательно взаимоотношения между статистическим методом и методами индукции: о каких, в самом деле, «естественных» или «номографических» законах может быть речь, когда первою предпосылкой применения статистического метода является неполное знание причин и следствий, когда к известным нам причинам и следствиям всегда привходит некоторый X и некоторый У, могущий и усилить, и ослабить, и совершенно парализовать влияние связи между учтенными при анализе причинами и следствиями? И тем более, когда налицо есть только «более свободные причинные связи», — когда, благодаря множественности причин и следствий, одна и та-же конкретно-наблюденная причина может влечь за собой различные следствия, а одно и то-же наблюденное конкретное следствие может проистекать от разнообразнейших причин?

Э т а сторона вопроса может, значит, считаться исчерпанной. Несколько подробнее я остановлюсь, поэтому, только на другой стороне, которая обнимает, в сущности, оба остальных, только-что подчеркнутых слабых пункта соображений А. А. Чупрова: в самом деле— положение, что статистический метод есть совокупность «в с е х таких приемов, которые могут быть сведены без остатка к правилам индуктивных методов», стоит в органической связи с тем положением, что такими методами получаются «многие, если не большая часть научных результатов».

Между тем, совершенно неправильно, прежде всего, видеть в статистическом методе совокупность в с е х приемов, не могущих быть сведенными, без остатка, к строгим правилам индукции. Не вытекает из этих правил,—как справедливо подчеркивает Чупров,—и простое п о в т о р е н и е наблюдений, поскольку оно преследует, главным образом, контрольные цели, и даже поскольку оно имеет в виду обосновать конечный вывод на невероятности случайного совпадения получающихся результатов: повторное наблюдение не есть еще м а с с о в о е наблюдение, и результаты повторных наблюдений могут устанавлять такого рода неразрывные связи, получение которых совершенно выходит из возможностей статистического метода. Не отвечает принципам индукции и тот, также отмеченный А. А. Чупровым, случай, когда исследователь довольствуется малым числом наблюдений, но придает своему выводу предположительный характер: в этом случае уже окончательно отсутствует существеннейший признак статистического метода, — именно м а с с о в о е наблюдение; а одной неполной досто-

верности результата, очевидно, недостаточно, чтобы охарактеризовать прием исследования, как статистический.

Повторяю, однако: это чрезмерно расширенное понимание статистического метода, как совокупности *всех* приемов научного исследования, служащих для изучения связей, характеризуемых множественностью причин и следствий, стоит в непосредственной связи с чрезмерно расширенным представлением А. А. Чупрова о тех кругах явлений, где, с одной стороны, неполное знание причин и следствий, а с другой—множественность причин и следствий, препятствуют применению методов индукции. Излагая соображения А. А. Чупрова, я не отмечал, именно, того обстоятельства, что вопрос об условиях, препятствующих применению методов индукции, трактуется им в самой общей форме, не приурочиваясь ни к какой определенной области или группе областей научного исследования. Это относится одинаково и к «Очеркам по теории статистики», и к только-что цитированной немецкой работе, и в особенности к несколько более поздней формулировке взглядов А. А. Чупрова в его юбилейной речи «Закон больших чисел в современной науке» [1]). Читая рассуждения Чупрова, выносишь впечатление, что *нигде*, ни в *одной* области научного исследования нет и не может быть ни полного знания причин и следствий, ни вполне однозначных причинных связей: что *везде*, *во всех* областях, возможность строго индуктивных умозаключений устраняется как привхождением к учитываемым обстоятельствам остающихся неизвестными Х-ов и У-ов, так и множественностью причин и следствий. Более того: А. А. Чупров совершенно не приводит примеров из тех областей и тех направлений научной работы, где, в самом деле, находит себе применение статистический метод; напротив, он прямо говорит об «экспериментаторе», работающем «в неизученной области», и свои примеры берет исключительно из сферы естественно-исторического эксперимента.

С *такою* постановкою вопроса едва-ли возможно согласиться Конечно, *безусловной* точности эксперимента и тем более — наблюдения, и *безусловно* полного знания *всех*, без исключения предшествующих и всех, без исключения, последующих нет, в самом деле, нигде. Даже в астрономии — и то к влиянию учитываемых при вычислении орбиты какой-нибудь планеты притяжений приходит не только влияние притяжения неведомо где проносящихся комет или падающих болидов, но даже «бактерия, двигающаяся в своем питательном бульоне», и та своим передвижением как-то влияет на сумму действующих в мироздании притяжений. И в химии нет *идеально-точных* взвешиваний; не все вещества, употребляемые при анализе, могут быть получены в идеально-чистом, беспримесном виде; при мыслимой тщательности анализа все-таки остается вне внимания

---

[1]) „Статист. Вестник", 1914, № 1—2.

исследователя, или, во всяком случае, не может быть устранено, не малое число привходящих влияний. В физике нет идеально-точного эксперимента — нельзя создать абсолютно-безвоздушного пространства, нельзя абсолютно устранить передачи тех или других, идущих извне толчков, устранить малейших колебаний температуры или малейших движений воздуха. В вегетативных опытах экспериментальной агрономии всегда останутся неустранимые мельчайшие индивидуальные различия экземпляров семян, не может быть достигнута безусловная однородность состава почвы, безусловно равномерное распределение частиц испытуемого удобрения и т. п.

Но все дело в степени — в большей или меньшей ощутимости действия привходящих влияний, в большем или меньшем конкретном значении того сложного состава причин и следствий, который мог-бы явиться препятствием к установлению неразрывных причинных связей. Как отметил еще Курно, — если ребенок топнет ногою о землю, какая-то дифференциально-ничтожная доля влияния передается до антипода; но никакой исследователь не подумает считаться с этим дифференциалом влияния. Я напомню приведенные выше соображения Орженцкого по поводу условий, требующих применения статистического метода: совершенно правильно, он говорит не об отсутствии «остальных признаков», «остальных условий», а о том, что они «либо вовсе не имеют значения для данных целей познания, либо имеют второстепенное значение», а потому оставляются без внимания: при всех неточностях наблюдения, при всей невозможности полного учета и элиминирования привходящих влияний, при всей, может быть, сложности причин и следствий, научное исследование, во всех приведенных примерах дает строго определенный, однозначный результат, могущий быть, в самом деле, облеченным в форму «закона природы», а возможное влияние ошибок или неполного знания устраняется не массовым наблюдением, а небольшим числом контрольных опытов или наблюдений: в астрономии орбиты земли, луны или, скажем, кометы Галлея вычислены с такою степенью точности, которая делает возможным точнейшее предсказание; в химии установлены совершенно точные законы соединений и разложений; в физике с абсолютною строгостью установлен закон качаний маятника, закон падения тел и т. д. Во всех подобных случаях мы совершенно спокойно можем говорить если не об абсолютном, то, во всяком случае — о вполне достаточном соответствии наших заключений идеально-строгим требованиям индукции; наше заключение, значит, в существе своем сохраняет индуктивный характер, а характеристикою его является подобающая индуктивному умозаключению достоверность.

Совершенно иначе обстоит дело уже при коллективном полевом сельскохозяйственном опыте: здесь результат единичного опыта, без всякого сомнения, существенно зависит от неуловимых случайностей

обработки, удобрения, погоды, от далеко неполной однородности почвы, не говоря уже о том, что почва, погода, удобрение представляют собою не элементарные, неразложимые далее причины, а сложные комплексы причин более элементарного характера. То-же самое и в медицине, которая, ведь, может быть рассматриваема, как экспериментирование над больными индивидами: и здесь влияние тех общих законов, из которых исходят врачи, изобретая и применяя определенные способы лечения, в каждом отдельном случае скрещивается с уловимыми и неуловимыми индивидуальными особенностями больного и с всякого рода привходящими к основному ходу болезни и к действию данного метода врачевания случайными влияниями. То-же самое и в биологии, поскольку речь идет о варирующих индивидуальных свойствах животных, растений и человека; то-же самое, уже собою разумеется, имеет место по отношению ко всей массе явлений жизни человека в обществе. Во всех этих областях исследователь, в самом деле, не располагает исчерпывающим знанием условий — нередко он вовсе ничего не знает об условиях, определяющих индивидуальную физиономию отдельного случая или индивида; ему известны лишь некоторые, очень часто немногие, основные условия, и всегда остается бесконечно сложный, неучтенный им остаток. Во всех этих и подобных случаях исследователь не имеет дела и с однозначными причинными связями,—и те причины, и те следствия, которые поддаются его непосредственному наблюдению, более или менее сложны, иногда чрезвычайно сложны, взаимно спутаны и не поддаются никакому разделению и расчленению.

И, конечно, в наиболее резкой форме все эти затруднения, или, как тут уже правильнее будет выразиться, препятствия к применению методов индукции выступают в сфере социальной статистики. Как было отмечено в главе 1-ой, уже самый человеческий организм—человек, как разновидность органического мира, представляет собою верх сложности и индивидуальности. Эта сложность и индивидуальность еще усугубляется, прежде всего, влиянием психического момента, который отражается, ведь, даже на физической жизни человека и имеет решающее влияние в области сознательных действий человека; в частности, как-бы ни решать вопрос о свободе индивидуального самоопределения, в о л е в о й м о м е н т, конкретно, выступает в роли самостоятельно действующего, «случайного» по отношению к прочим, фактора, осложняющего влияние всех других, физических и психических факторов и вносящего в человеческие поступки элемент крайнего разнообразия и совершенной неопределенности и непредвиденности. Дальнейшим привходящим моментом является о б щ е с т в о, с его непроизвольными и произвольными воздействиями на деятельность и даже на жизненные функции человека, с создаваемыми жизнью человека в обществе разнообразными категориями взаимоотношений между людьми и человече-

скими группами. Это все—с одной стороны. С другой, в первой части этой главы было достаточно выяснено все техническое несовершенство статистического метода, который даже и в наиболее благоприятном случае, при возможности пользования комбинационными таблицами, оказывается способным учесть лишь небольшое число влияющих на изучаемое явление факторов и вынужден игнорировать всю бесконечно сложную массу других привходящих причин, которые он рассматривает как «случайные» и потому взаимно уравновешивающиеся в массе, тогда как на самом деле такое уравновешение далеко не всегда имеет место; который даже и эти немногие, принимаемые в рассчет, факторы учитывает, как правило, лишь в очень грубом виде,—учитывает, притом, по большей части, не подлинные причины, которых он не способен уловить, а лишь те статистически-уловимые симптомы, за которыми кроются или, во всяком случае, могут крыться самые разнообразные, фактически влияющие причины или комплексы причин.

В конечном результате, в области изучаемых статистическим методом массовых явлений мы, действительно, менее, чем где бы то ни было, имеем возможность достичь того полного «равенства прочих условий», которое является первым и необходимым условием применимости «канонических методов» индукции. Как-бы далеко мы ни пошли здесь в деле расчленения материала,—мы всегда можем изолировать лишь небольшое число основных факторов, и всегда остается нерасчлененная масса разнообразнейших побочных условий, которые мы только предполагаем взаимно уравновешивающимися в массе. Иначе сказать, мы менее чем где-либо располагаем здесь «полными списками причин и следствий»—этою первою предпосылкою применимости методов индукции в их чистом виде. Мы более, нежели где бы то ни было, имеем здесь дело с сложными комплексами, которых мы не в состоянии разложить на элементарные причины и следствия, действительно стоящие между собою в отношениях причины и следствия, причем элементарный состав того явления, которое мы принимаем за «причину», может быть и шире, и уже элементарного состава того явления, в котором мы предполагаем следствие, и, таким образом, открывается безгранично-широкое поле как для множественности причин, так и для множественности следствий. Случаи однозначной причинной связи встречаются в этих областях разве только в виде самых редких исключений, не имеющих значения с точки зрения принципиальной логической характеристики статистического метода. В области статистически-изучаемых массовых явлений, и в особенности явлений человеческого общежития, мы, значит, действительно имеем дело с такими «менее тесными формами причинной связи», с такими «более свободными причинными отношениями», для исследования которых обычные методы индукции оказываются непригодными и при наличности которых статистическое умо-

заключение, в самом деле, не может быть рассматриваемо как разновидность обычной индукции.

Ясно, при таких условиях, что весь комплекс явлений, изучаемых статистическим методом, решительно не отвечает обязательным условиям применимости методов индукции. Здесь, в самом деле, *нельзя* оперировать методами, основною предпосылкою которых является неразрывность и однозначность причинной связи и полное знание всей совокупности причин и следствий. Здесь, в самом деле, приходится анализировать менее тесные формы причинной связи, характеризуемые множественностью причин и следствий, при неизбежной неполноте наших знаний как относительно первых, так и относительно вторых. При *таких* условиях «статистические методы»—в самом деле—оказываются «подающими руку помощи там, где индуктивные отказываются служить»; они, в самом деле, «не субординированы, а координированы индуктивным». При *таких* условиях, в частности, нельзя присоединиться и к приведенному выше [1]) взгляду Орженцкого, от которого, впрочем, он и сам в значительной мере отказался в несколько позднее выпущенном им в свет «Учебнике математической статистики» [2]). Он и здесь настаивает, правда, на том, что «с логической точки зрения, сводные величины», с которыми имеет дело статистика, «поддаются сведению к действию элементарных методов, доступных точному учету». Но ему приходится признать, что «с фактической стороны дело обстоит иначе: те совокупности, с которыми мы имеем дело на практике, представляют слишком сложное строение, и сводные правильности являются результатом действия столь большого числа различных изменяющихся моментов, что фактически мы не в состоянии выделить их, подвергнуть учету и исследованию. Благодаря именно этой сложности,—заключает отсюда Орженцкий,—*отсутствуют условия, необходимые для приложения к эмпирическим совокупностям точной индукции* (курс. мой, А. К.), и мы не можем ни свести эмпирические сводные величины к элементарно-простому выражению,

---

[1]) Стр. 116—117.

[2]) Небезинтересно отметить, что тот-же, по существу, взгляд был высказан, за четверть века перед тем, в небольшой, но для своего времени весьма ценной студенческой работе В. А. Косинского „О приемах научной обработки статистических данных“ (М. 1890): Косинский подчеркивает здесь, что различие между достоверным событием только количественное, а потому приложение индуктивных методов к вероятным явлениям так-же возможно, как по отношению к явлениям достоверным; все дело только в том, что „при выводе заключений относительно вероятного явления необходимо предварительно освободить его от действия случайных причин, для чего необходимо большое число наблюдений... .; с результатами массового наблюдения мы можем поступать совершенно так-же, как и с результатами наблюдений над явлениями достоверными. Выводы из массового наблюдения приблизительны,—но они приблизительны и когда мы оперируем над достоверными явлениями; разница только количественная, в *степени приблизительности* получающихся выводов. (Назв соч. стр. 20—21).

ни установить связь их в таком виде с какими-либо другими простыми моментами и сообщить сводным величинам и зависимостям характер точного закона» [1]). При охарактеризованных на предыдущих страницах условиях статистическое умозаключение, в самом деле, должно искать для себя такой характеристики связи причины с следствием, какою, для случаев типичной индукции, является принцип неразрывности причинной связи, и «такую характеристику» статистический метод, в самом деле, «находит в математической вероятности» [2]). Это неизбежно вытекает и из указанных только-что особенностей техники статистического метода и из самого существа изучаемых статистическим методом явлений. В самом деле: индукция, несмотря на все встречаемые ею затруднения, в конце концов приводит к определенным, однозначным, необходимым результатам. Если мы, определенным образом, привели в соединение две доли водорода и одну долю кислорода,—мы всегда и непременно получим чистую воду; если мы подвергнем анализу чистую воду, она обязательно окажется состоящею из двух частей водорода и одной части кислорода. Если увеличить время падения тела, в соответственной обстановке физического эксперимента, с t до 2t, скорость непременно возрастет с первоначального v до 4v, и обратно: увеличенная вчетверо скорость падения будет наблюдаться не в какой-либо иной, а именно во второй промежуток времени. Если один маятник вдвое длиннее другого, продолжительность его качания будет ровно вдвое больше, и наоборот—маятник с вдвое большим временем качания непременно будет вдвое длиннее маятника с более коротким периодом качания. Все это—характерные гипотетические суждения, носящие характер полной достоверности и не оставляющие места для понятия вероятности.

Совсем другое в сфере приложения статистического метода. Если одно поле удобрено вдвое или втрое интенсивнее другого,—урожай с первого может получиться и больше, чем со второго, но отнюдь не непременно в той-же пропорции; между сравниваемыми полями может и вовсе не оказаться никакой существенной разницы; мало того, урожай с лучше удобренного поля может получиться и меньший, нежели с хуже удобренного—в зависимости от неуловимых, или даже уловимых, различий в почве, в обработке или в семенном материале,

---

[1]) Орженцкий, Учебн. матем. стат., стр. 21.

[2]) Впрочем, и сам Чупров не безусловно последовательно выдерживает свою точку зрения на статистический метод, как на нечто, стоящее рядом с методами индукции и совершенно независимое от них. В той самой немецкой работе, откуда заимствована приведенная выше вполне отчетливая формулировка этого его взгляда, мы находим указание на то, что в случае сравнения данных непосредственным наблюдением статистических масс, мы, как только установлен неслучайный характер частот, попадаем в русло (ins Geleise) индуктивных методов, со всеми присущими им трудностями (die Aufg, стр. 469).

от места данного посева в севообороте, от случайностей выпадения дождя и т. п.; и обратно—если урожай с одной полосы в полтора раза или вдвое больше, нежели с другой, из этого решительно ничего не следует относительно унавоженности, почвенных условий, обработки той и другой полосы. Если взять попарно общины или иные группы крестьян, лучше и хуже обеспеченных землею—в одних таких парах лучше обеспеченные землею общины окажутся лучше живущими, нежели хуже обеспеченные, и притом в самых различных отношениях, в других парах заметной разницы не окажется, еще в других лучше обеспеченные землею общины окажутся живущими хуже, нежели малоземельные; крестьянское благосостояние, несомненно, так или иначе, зависит от размеров земельного обеспечения,—но, во-первых, кроме этого фактора оно зависит и от множества других, с ним слабо связанных или вовсе не связанных, и, во-вторых, самое влияние размеров земельного обеспечения бывает далеко не однозначным, особенно благодаря некоторой полярности этого момента с состоянием земледельческой техники у крестьян. И обратно—если в одних общинах признаки благосостояния явно более благоприятны, нежели в других,—из этого решительно ничего не следует относительно размеров их земельного обеспечения, потому что высокий уровень благосостояния может быть следствием и благоприятных условий наделения, и выгодных условий арендования, и хороших не-земледельческих заработков, и особо выгодных условий сбыта, и хорошего ведения земледельческого хозяйства, и чисто субъективных моментов интеллектуального и морального порядка. Если санитарно-гигиеническая обстановка жизни известной группы людей лучше, нежели другой,—одни из входящих в состав этой группы индивидов проживут дольше, и, может быть, гораздо дольше, но другие проживут и столько-же, и меньше, и даже гораздо меньше, нежели те или другие индивиды в группе с гораздо худшею, может быть, санитарно-гигиеническою обстановкой, и т. д.

Во всех этих случаях мы имеем дело с разделительными или дисъюнктивными суждениями. Достоверным является лишь какое-либо из нескольких, или многих, или даже неопределенного числа возможных следствий данной причины, или из причин данного следствия.[1] Каждое отдельное из возможных следствий данной причины, или причин данного следствия, является только вероятным. И, понятно, влияние каждой данной причины не будет непременно проявляться в единичных случаях и по отношению к единичным индивидам или экземплярам: к любой «общей» или «постоянной» причине, т. е. той, влияние которой наше исследование должно выяснить,—скажем, к постоянной причине A, в каждом данном случае могут привзойти, может быть, не связанные или слабо связанные с нею, может быть, напротив, связанные с нею более или менее определенною обратною зависимостью, «случайные» причины a, b,

c, d, или их комбинации ab — ac — bc — ad — abc — abd — bcd — abcd и пр., и в соответствии с этим за причиной A наступят совершенно различные следствия A_1, A_2, A_3, ... A_n. Влияние данной, интересующей нас, «постоянной» причины обнаружится, в конце концов, только в *большом числе* соответственным образом сгруппированных наблюдений, в результате происходящего в большом числе уравновешения всякого рода случайных причин. Но закон большого числа — это *закон вероятности*, и окончательная его формулировка и обоснование представляют собою *выводы из положений теории вероятностей*. Отсюда — естественный вывод: статистическое умозаключение *всегда* носит лишь характер *вероятности*, и *в этом* его принципиальное отличие от индуктивного заключения, которое, как таковое, приводит к выводам с характером достоверности. Отсюда и критерий, позволяющий провести определенную границу между методами индукции и статистическим методом: пока вывод, полученный хотя-бы в результате более или менее значительного числа контрольных наблюдений, носит, с точки зрения научной практики [1]), характер достоверности, или — уже само собою разумеется — пока вывод, хотя-бы и не отличающийся полною достоверностью, получен *не* из массового наблюдения, — до тех пор мы имеем дело с индуктивным исследованием. С *статистическим* методом, принципиально отличным от методов индукции, мы имеем дело тогда, когда делаем выводы из данных *массового наблюдения*, с чем неразрывно связан не достоверный, а только *вероятный* характер наших заключений.

Главная часть этой книги и будет посвящена основам теории вероятностей, как теоретической базе статистического метода. Сейчас-же подчеркну, с тем, чтобы к этому вернуться в одной из заключительных глав: я имею в виду именно *теорию вероятностей*, а не *исчисление вероятностей*, не *вычислительную*, а *принципиальную* сторону этого математического учения. Ибо, с моей точки зрения, которую я—повторяю—разовью в одной из заключительных глав, в основе статистического метода лежат *не формулы исчисления*, а *принципы, идеи теории* вероятностей,—лежит *самая идея вероятности*; не столько *математическая* вероятность, сколько то, что Курно называет *философскою* вероятностью,—иначе говоря, *идея невероятности случайных совпадений*, которые более или менее приближались-бы к тем или другим, более или менее простым законам. *Формулы*-же исчисления вероятностей имеют для теории статистики—как мы увидим из всего дальнейшего—лишь ограничен-

[1]) Эта оговорка имеет в виду возможность гносеологических соображений, отрицающих, вообще, возможность достоверного знания.

ное значение, и еще более ограниченное значение они имеют для практики научно-статистического и, в частности, каузального анализа.

Статистическое умозаключение, поскольку оно дает материал для установления каких бы то ни было закономерностей, и в особенности поскольку оно раскрывает причинные связи и зависимости, базируется, главным образом, на различиях статистических коэффициентов. «Но где положения, связывающие эмпирические правильности, связывают разнородные явления, там,—говорит Зигварт, — они определенно указывают на причинную связь,—безразлично, будет-ли это прямая зависимость одного феномена от другого, или-же они оба суть сопринадлежные следствия одного и того-же основания». Почему это так? Потому, что «столь часто повторяющееся, просто, временное совпадение или согласие между периодами независящих друг от друга событий, представляет собою нечто столь невероятное, что невольно напрашивается допущение, что тут имеет место реальная зависимость». То, что в приведенных словах Зигварта получило несколько неопределенную формулировку, и притом только по отношению к одному частному случаю—параллелизма колебаний во времени, может быть с совершенною ясностью прослежено на каждом из намеченных в предыдущей главе типов статистического умозаключения. Эти приемы—это, прежде всего, простое констатирование постоянства или однообразия, заставляющее нас доискиваться какого-либо внестатистического объяснения; затем — констатирование тенденций роста, убыли или более или менее правильных колебаний отдельного статистического ряда, рассматриваемого в самом себе—констатирование, наводящее, опять-таки, на те или другие внестатистические объяснения; далее—констатирование различий частных совокупностей, разгруппированных по тому или иному, количественному или качественному признаку,—констатирование, уже непосредственно указывающее на существование определенных причинных зависимостей; наконец, констатирование параллельного или противуположного характера колебаний двух или нескольких рядов, либо, просто, путем непосредственного, так сказать, глазомерного их сопоставления, либо путем применения различных обобщающих приемов, венцом которых является «метод вторичной количественной группировки»,—констатирование, тоже непосредственно указывающее на существование той или иной зависимости причинного характера. Во всех перечисленных случаях в основе статистического умозаключения лежит, в самом деле, вероятность, притом вероятность в двояком смысле: во-1-х, в смысле невероятности случайного подбора чисел в том или другом определенном направлении,—невероятности случайного соответствия коэффициентов частных совокупностей вариациям группового признака, случай-

ного параллелизма или антагонизма колебаний, и т. д.: и, во-2-х — в смысле самого характера статистического умозаключения, как заключения только вероятного, а отнюдь не достоверного, даже по отношению к целой совокупности. На этой последней стороне дела, после всего сказанного выше, нам уже нет надобности сколько-нибудь подробно останавливаться—достаточно иллюстрировать это положение несколькими наудачу взятыми примерами. Английские исследования выяснили вполне определенное влияние профессии на смертность: смертность духовенства, при надлежащем расчленении, оказывается значительно ниже смертности железнодорожников, смертность земледельческого населения значительно ниже общей смертности в стране,—но это ничего не предрешает, во-первых, относительно времени наступления смерти каждого отдельного лица, а обусловливает лишь более или менее высокие вероятности, находящие себе оправдание только в массовых данных,—и, во-вторых, лишь с известною вероятностью позволяет предполагать подобные-же соотношения в других странах, отнюдь не исключая совсем иного рода соотношений, если условия жизни духовенства, или земледельческого населения, будут иные, нежели в Англии. Статистическими исследованиями с совершенною определенностью установлено влияние возраста вступления в брак на бездетность,—это дает лишь высокую вероятность рождения детей при раннем, и почти столь-же высокую вероятность бездетности при очень позднем вступлении в брак, но ни мало не препятствует тому, что некоторая часть женщин, рано вступающих в брак, останется бездетною, а та или другая женщина, вступившая в брак очень поздно, будет иметь детей. Статистические данные установили зависимость повышенной смертности от неурожаев, усиленной преступности от высоких хлебных цен—это, опять-таки, только вероятности, оправдывающиеся в массах, и они, во-первых, ничего не предрешают относительно смерти того или другого индивида, или относительно совершения им имущественного преступления; и, во-вторых—эти вероятности не позволяют утверждать ничего определенного относительно существования таких-же соотношений в других странах; напротив—неурожай в промышленной стране не повлечет за собою повышения смертности, а высокая хлебная цена не поведет к усилению преступности ни в такой земледельческой стране, где масса населения продает хлеб, ни в такой, где благосостояние населения зависит, главным образом, от промышленной конъюнктуры, и благоприятная конъюнктура перевешивает возможное влияние высоких хлебных цен. Вообще, везде, в любом конкретном случае статистическое умозаключение носит лишь характер вероятности—большей или меньшей вероятности данного события; но оно ничего не говорит относительно входящих в состав данной совокупности единиц, и даже для массы—как любой другой массы, так и для данной массы в дру-

гое время, всегда остается открытою возможность иных закономерностей и иных соотношений, в зависимости от привхождения каких-либо посторонних влияний, или от различий, либо изменений принятой в расчет, при нашем исследовании, системы постоянных причин.

Не менее отчетливо можно проследить на любом из типов статистического умозаключения значение другого, столь-же существенного аспекта идеи вероятности — невероятности случайных совпадений. Годичная рождаемость, распределение самоубийств по полу, душевое потребление соли в течение продолжительного периода, выражаются в почти тождественных коэффициентах—мы признаем совершенно невероятным, чтобы такое правильное повторение тождественных или близких цифр было делом простой случайности—совершенно столь-же невероятным, как то, что из хорошо перемешанной колоды карт двадцать раз кряду выпется туз, или, положим, все одни восьмерки и девятки; в постоянстве чисел статистического ряда, мы—именно в силу невероятности случайного совпадения—видим доказательство существования какой-то постоянной действующей причины, которую мы и стремимся выяснить. Далее: смертность, брачность, рождаемость представляют собою почти правильно убывающие, производство и потребление известных массовых продуктов—почти правильно возрастающие ряды. Опять-таки, совершенно неправдоподобно, чтобы такое непрерывное наростание или убыль были простою случайностью, как невероятен случайный выход, при игре в лото, хотя-бы такого непрерывно возрастающего ряда чисел, как 2—4—7—11—15—23—29—37 и т. д. Значит, нам ничего не остается, как видеть в растущем, или падающем, или более или менее правильно-волнообразном характере ряда чисел прямое указание на наличность постоянно-действующих, именно в данном направлении, причин, выяснение которых мы и делаем предметом нашего исследования. Еще гораздо менее правдоподобно, разумеется, случайное совпадение в случае сколько-нибудь ясно выраженного параллелизма или противуположности колебаний двух или нескольких рядов, сгруппированных по тождественному признаку—смертности и урожаев, брачности и банкротств, того и другого с производством и ценами чугуна; так-же неправдоподобно, как одновременное наростание или убыль номеров, вынимаемых из двух ящиков с лотерейными билетами; вероятность того и другого так бесконечно мала, что мы практически можем не считаться с нею, и имеем полное право видеть в параллелизме или антагонизме колебаний статистических рядов доказательство существования некоторой, может быть, прямой, может быть, косвенной, причинной зависимости между явлениями. Наконец, и в случае анализа методом, в особенности, количественной группировки — урожайность в зависимости от интенсивности удобрения, бездетность в зависимости от возраста вступления в брак,

посевная площадь в зависимости от обеспеченности семьи рабочею силой,—мы исходим все из той-же невозможности предполагать случайное совпадение (или противуположность) в порядке нарастания цифр изучаемого ряда с вариациями группового признака; случайность такого совпадения (или такой противуположности) так-же неправдоподобна, как случайность выхода растущих, в среднем, номеров из урн, означенных растущими порядковыми нумерами; и здесь, и там вероятность случайного подбора цифр столь ничтожна, что ее можно совершенно не принимать в расчет; и, следовательно, мы, с близкою к полной уверенности вероятностью, можем заключить, что соответствие между колебаниями коэффициентов и вариациями группового признака проистекает от какой-то причинной зависимости между данным факториальным и данным функциональным признаком.

В следующей главе мы и перейдем, прежде всего, к ближайшему выяснению чисто методологической связи статистического метода и теории вероятностей, а затем—к рассмотрению основных положений этой последней.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

Закон большого числа и основы теории вероятностей.

Вся теория статистического метода строится из закона большого числа и около закона большого числа, который и в своем окончательном обосновании, и в своей математической формулировке, является выводом из начал теории вероятностей и из формул исчисления вероятностей. Поэтому, мы сначала вернемся к житейскому понятию и к житейскому обоснованию закона большого числа, с тем, чтобы, затем, отсюда непосредственно перейти к основным началам теории вероятностей, а от них—к математической формулировке и к математическому обоснованию того-же закона.

«В большом числе—такова житейская формулировка закона, как ее дает Майр, составляющем результат статистического, массового наблюдения, выступают такие правильности — правильности как в строении известной социальной (и, конечно, всякой другой) массы, так и в наступлении поступков и событий, которые не могут быть познаны на произвольно взятых дробных частях этой массы».

В приведенном только-что определении нет основания для недоразумений: в этом определении говорится о «правильностях в строении», о «правильностях в наступлении поступков или событий»,— правильности могут носить какой угодно характер: они могут быть правильностями в постоянстве, но могут быть и правильностями в тех или других различиях или изменениях. Обычно, когда говорят о законе большого числа, мыслят более или менее исключительно «постоянство», «устойчивость» больших чисел. Даже в «Очерках» А. А. Чупрова, наряду с установившимся в статистической теории, по почину Лексиса, употреблением слова «устойчивость» в смысле отношения между теоретически вычисленною, в соответствии с началами исчисления вероятностей, и действительною колеблемостью статистических чисел, говорится и просто об «устойчивости статистических чисел», об «их свойстве колебаться... лишь в

известных, ограниченных пределах», как о наиболее ярком проявлении закона большого числа; как об «эмпирически устанавливаемом факте», имеющем «громадную научную и жизненную важность» [1]), — и лишь на втором месте делается далеко недостаточная оговорка, что «устойчивыми оказываются далеко не все числа, устанавливаемые статистиками».

Но если можно говорить об «устойчивости», как существеннейшем проявлении закона большого числа, — то это будет все-таки не устойчивость в обычном словоупотреблении, более или менее равносильном «постоянству»; это будет *устойчивость в смысле близости статистических чисел к некоторому уровню, соответствующему действию данного комплекса постоянных или общих причин*. В этом смысле устойчивость — далеко не синоним *неизменности, тождественности* или близости статистических чисел. Постоянство, неизменность, тождественность цифр в пространстве и во времени; такие факты, как повторяющееся во всех странах и во все времена, известное соотношение мужских и женских рождений, как постоянство пропорции женских самоубийств, как почти совершенная неизменность средних цифр потребления соли, раньше всех других проявлений закона большого числа обратили на себя внимание и наиболее сильно поразили человеческое воображение, — но *суть дела не в постоянстве и не в неизменности*. То влияние общих или постоянных причин, которое проявляется при большом числе наблюдений, может проявляться в очень различных формах и в самых различных направлениях. Оно может, в самом деле, проявляться в более или полной неизменности статистических чисел во времени и тождественности в пространстве, — если данный комплекс постоянных причин так или иначе ведет к поддержанию известного явления на одном постоянном уровне. Но оно может проявляться и в *определенных различиях* в пространстве — характерные для отдельных стран, отдельных местностей, отдельных отраслей промышленности постоянные причины обусловливают определенные различия в грамотности, в урожайности, в смертности и рождаемости, в размерах заработной платы и т. п. Оно может выражаться в *изменениях* во времени — в росте среднего размера предприятий, или добычи каменного угля, или процента грамотных и т. п.; в понижении процентов брачности, рождаемости, смертности; в волнообразных изменениях чисел, характерных для колебаний промышленного цикла; наконец, даже и в лишенных всякой видимой правильности колебаниях, поскольку таковые обусловливаются причинами, действующими *во всей массе, во всей совокупности* случаев или индивидов, из которых слагается данное массовое явление. *Суть*

[1]) „Очерки", 2-ое изд., стр. 286.

дела во всех этих случаях, поскольку речь идет о законе большого числа, не в неизменности или постоянстве, не в росте или убыли, не в волнообразном или зигзагообразном характере колебаний, а в том, что то постоянство и однообразие, те пространственные и иные различия, те тенденции роста или убыли, правильных или неправильных колебаний, в которых находит себе выражение действие данного комплекса общих или постоянных причин; что, например, приблизительное равенство, или точнее, определенная пропорция мужских и женских рождений; преимущество, положим, бельгийского сельского хозяйства перед германским, а этого последнего перед французским, или перевес смертности у менее обеспеченных групп населения, или большая производительность труда грамотных рабочих; тенденция роста добычи каменного угля или выплавки чугуна, или повышения процента грамотных; наклонность смертности, рождаемости и брачности к понижению; резко повышенная смертность в годы эпидемий и т. п.—все это находит себе ясное выражение только в больших массах и в символизирующих их больших числах, в отдельных-же случаях—у отдельных лиц, семей, рабочих, сельскохозяйственных и промышленных предприятий и т. п.—и в небольших группах случаев все эти общие тенденции могут совершенно заслоняться и фактически, в очень большой части случаев, совершенно заслоняются влиянием бесконечно разнообразных комплексов причин индивидуального или случайного—по отношению к данным постоянным причинам—характера, которые находят себе осязательное выражение в уклоняющихся от всякой правильности малых числах.

Житейское объяснение закона большого числа очень просто. Статистика изучает не-типические или индивидуальные явления. Характерная для явлений этой категории черта—что в отдельных случаях, у отдельных индивидов или экземпляров, в малых группах случаев или индивидов, конкретный вид каждого данного явления определяется индивидуальною комбинациею случайных причин, которые заслоняют, маскируют действие причин постоянного характера. В большом числе влияние этих случайных причин сглаживается и уравновешивается, плюсы сверх нормального численного выражения данного явления покрываются минусами, и благодаря этому с более или менее полною отчетливостью выступает действие общих или постоянных причин—общий закон данного явления. «Когда мы упускаем из виду единичного человека—так формулировал эту мысль Кетле—и рассматриваем его только как дробную часть целого, мы устраняем все имеющее случайный характер; индивидуальные особенности, не влияющие или мало влияющие на массу, сгладятся сами собой и позволят уловить общие результаты». Эти общие результаты, это.

выявление общего закона обусловливаются просто «присутствием постоянных причин в предшествующих обстоятельствах, вызывающих явление: действие непостоянных, переменных влияний, так сказать, интерферируется для наблюдателя в общей массе однородных явлений и тем самым дает возможность выступить постоянным действиям причин постоянных» (А. К. Власов). «Отклонения от общей правильности «уравновешиваются для нас в умножаемых нами наблюдениях, так что становится видимым общий закон. Отклонения зависят, именно, от множества подчиненных причин случайного характера. Эти случайные причины нарушают действие постоянных, но в массе взаимно уравновешиваются, благодаря чему восстановляются первоначальное соотношение причины и следствия» (Адольф Вагнер).

Закон большого числа, таким образом, с необходимостью вытекает из существа объединяемых в «совокупности» не-типических явлений. «Когда мы имеем дело,—говорит тот-же Майр,—с многочисленными случаями, преобладающее влияние приобретают доминирующие и более или менее постоянно действующие основные причины, обусловливающие строение статистически-изучаемой массы в ее движении, эти причины настолько перевешивают редко и неправильно проявляющиеся—каждая в отдельности—побочные причины»; перевешивают именно потому, что эти последние проявляются «редко и неправильно», «что найденная в массе правильность является необходимым следствием перевешивающего влияния этих основных причин». Неправильность,—замечает Майр (очевидно, по адресу тех, кто склонен был видеть в постоянстве статистических чисел нечто свидетельствующее о наличности каких-то извне привходящих регулирующих влияний),—а наоборот, отсутствие правильности могло-бы поражать и изумлять нас. Это взаимно-погашающееся или «интерферирующееся» в большем числе влияние случайных причин, которое, по мере увеличения числа наблюдений или испытаний, позволяет выявиться действию общих или постоянных причин, можно проследить на любом примере, начиная с специально приспособленных для этой цели экспериментов и кончая любым массовым явлением человеческого общежития. «Отношение числа вынутых белых шаров,—говорит Лаплас, по поводу известных опытов с вынниманиями шаров из урны,—в первых тиражах, будет, чаще всего, очень неправильно; но непостоянные причины этой неправильности производят действия, поочередно (конечно, не в смысле строгой очереди! А. К.), благоприятствующие и не благоприятствующие правильному ходу событий, — действия, которые, взаимно уничтожаясь при большом числе тиражей, делают все более заметным отношение содержащихся в урне белых шаров к черным, или соответствующие возможности изъятия из нее белого или черного шара при каждом тираже» — значит, делают все более заметным влияние постоянной причины: состава шаров в урне, которое в отдельных слу-

чаях и при небольшом числе первых тиражей маскируется влиянием причин случайного характера: случайным распределением шаров в урне, случайными вариациями движения руки экспериментатора и т. п. Ничего не может быть более обычного, как то, что в единичной семье два—три года подряд не будет рождений и смертных случаев, или, наоборот—рождения будут происходить ежегодно, или в одном году последует несколько смертных случаев. Если взять деревушку в десяток дворов,—тоже еще вполне мыслимо, что в одном году рождений не будет вовсе или почти вовсе, а в следующем их будет вдвое или вчетверо больше против обычной цифры; что в одном году совершенно или совершенно не будет смертных случаев, а в следующем дифтерит выкосит более или менее всех детей. Но совершенно невозможно себе представить, чтобы в сколько-нибудь большом городе, в одном году или в одной части города, вовсе не было рождений или смертных случаев, или чтобы их оказалось в десять, или в двадцать раз больше, либо меньше, чем в другом году или в другой части города [1]). Это почти так-же невозможно, как невозможно, чтобы при проливном дожде, какая-нибудь одна плита осталась совершенно сухою. Позволю себе напомнить приводившиеся уже при другом случае строки из Бертрана: «Если,—говорит Бертран,—на Place du Carrousel целый день идет дождь, все камни мостовой будут одинаково мокры. Это, в упрощенном виде, сущность закона большого числа. Конечно, — продолжает Бертран, — могло-бы случиться, что дождь лил-бы потоками, а одна плита оставалась-бы сухою; ни одна капля не имеет особого предназначения именно к н е й—их рассеевает случай, и случай м о ж е т все их разнести на соседние плиты. Однако, никто не предположит этого серьезно».

---

[1]) В моей книге „Теория и методы статистики" приведена довольно длинная выдержка из одной из Abhandlungen Лексиса, где он дает пространное объяснение устойчивости явлений человеческого общежития, и, в частности, тех, которые изучаются моральною статистикою. Здесь я позволю себе привести аналогичные, но изложенные в гораздо более сжатом виде, соображения Лексиса из его более ранней работы—Einleitung in die Theorie der Bevölk.-Statistik. «Медленность изменений, приблизительное постоянство статистических чисел для известных периодов,—говорит здесь Лексис,—вполне понятно: уже поверхностное наблюдение обнаруживает нам устойчивость, с которою sich behaupten—сохраняют свою величину многочисленные группы, образуемые по различиям в экономическом и социальном положении, в обычных формах жизни, умственном образовании, религиозных воззрениях, нравственном чувстве и пр., и внутри этих групп, уже на основании житейского опыта, приходится признавать определенные события, при одних условиях, весьма вероятными, при других—крайне невероятными. Отсюда получается некоторое представление von der relativen Abstufung der Wahrscheinlichkeit desjenigen Tuns und Leidens des Menschen, welches bedeutsame Massenerscheinungen erzeugt. А с этою идеей связывается и представление, что эти, инстинктивно постигнутые, отношения вероятностей будут обладать, по крайней мере, временною устойчивостью—einen vorläufig dauernden Bestand. Точным анализом явлений, ближайшим исследованием производящих массовые результаты внешних влияний, психологическим проникновением в мотивы, премму-

То-же самое и в более общей форме: «случайные события подобны дождевым каплям—лишь-бы они были достаточно многочисленны, — случай распределяет их равномерно между всеми возможными разновидностями, не благоприятствуя особо ни одной из них».

Однако, этот образ—лишь иллюстрация к так называемой гипотезе исчерпания случая (или, как, может быть, было-бы лучше выразиться — исчерпания случайностей), которая может считаться приобретшею право гражданства и в философской литературе, и в новейшей теории вероятностей, но, которая, в сущности, только воспроизводит, в терминах философии и теории вероятностей, все ту-же «житейскую» точку зрения. Намек на эту гипотезу мы находим уже в ранней работе Виндельбанда—в его диссертации «Die Lehren vom Zufall», когда он подчеркивает, что «большим числом дается гарантия разнообразия»,—что «суть дела не в большом числе, а в обусловливаемом им разнообразии». Более подробно данный принцип разработан у Зигварта: он разбирает сначала случаи чередования случайных событий во времени, потом—случаи распределения их в пространстве,—первое на примере последовательных бросаний монеты, второе—на примере бросания зерен на доску с разноцветными полями, и из анализа обоих этих случаев приходит к такой общей формуле: «если определенное число известных a может комбинироваться с определенным числом известных b и c, и никакие обстоятельства не благоприятствуют одной комбинации перед другою, то комбинация ab будет наблюдаться столь-же часто, как и комбинация ac, если b и c имеются в одинаковом количестве. Если-же b и c имеются в различном количестве, то комбинации ab и ac будут стоять в том-же самом численном отношении, как b и c, и наблюденное общее отношение ab и bc, а также и их необходимых следствий β и γ, позволит сделать вывод об отношении b к c». Отчетливее и определеннее, однако, данный принцип формулирован у

щественно влияющие на человеческие поступки, этому неопределенному постижению относительной устойчивости вероятностей в человеческих делах дают большую научную основу. И когда статистика дает точное изображение численных правильностей человеческих массовых явлений, то это ничто иное, как подтверждение относительного постоянства Chancensysteme, которое для многих рядов явлений может быть принято на основании данных обыденного опыта, для остальных может быть предполагаемо. Таким образом,—заключает Лексис,—статистические постоянства дают нам точное понятие о действительном строении явлений—именно, о лежащем в основе их Chancensystem; и в виду везде уловимой и понятной устойчивости вероятностей в человеческих делах, мы можем принимать, что это Chancensystem будет лишь медленно изменяться, а, следовательно, в ближайшем будущем будет еще порождать сходные численные отношения» (назв. соч. 1875, стр. 123—124). Читатель видит, что некоторая придача терминов теории вероятностей нисколько не мешает приведенному объяснению носить, в существе, чисто житейский характер—базироваться на повседневном опыте и на тех или других естественных предположениях.

Брунса, в свою очередь, опирающегося на те соображения Криса, о которых мне приходится говорить несколько ниже. Брунс подчеркивает самодовлеющее значение исчисления вероятностей, как математического метода. Это значение,—говорит он,—независимо от его приложимости к конкретным явлениям. Но, с другой стороны, такая приложимость еще не вытекает из понятия математической вероятности. Она вытекает из положения о Ausgleichung des Zufalls—об уравновешении случая, или о gleichmässige Erschöpfung—о равномерном исчерпывании возможных случаев, которое при бесконечном числе испытаний будет полным, при конечном числе их—приближенным. «Обоснование этого положения —как подчеркивает Брунс —не в понятии случая, не в определении математической вероятности, а исключительно в полученном индукцией обобщении наблюденных фактов [1]). Я—между прочим—обращаю внимание читателя на последние слова приведенной цитаты: я вижу в них подтверждение моего убеждения в бесполезности слишком углубленного анализа таких самоочевидных понятий, которые опираются, в конце концов, на «полученное индукцией обобщение наблюденных фактов», вроде падения дождя или снега,—вообще, в конце концов, все на тот-же простой житейский опыт.

Тем не менее, здесь мы не можем ограничиться простою ссылкою на гипотезу или принцип исчерпания случайностей. Раз речь идет о строго-научном обосновании закона большого числа,—этот принцип играет лишь роль моста, связывающего начала теории вероятностей с реальною действительностью. Из начал теории вероятностей вытекает окончательное научное обоснование закона большого числа. Она-же позволит разобраться и в тех разнообразных формах, в которых этот закон проявляется в действительной жизни и находит себе применение в разных областях статистического анализа; она-же подводит принципиальный фундамент под многие из тех приемов статистической работы, которые выработались в статистической практике, в фазисах как собирания, так и разработки массовых данных, и дает им теоретическое объяснение и оправдание.

Связь закона большого числа с теорией вероятностей формулирована Лапласом в таких выражениях: «среди изменчивых и неизвестных причин, которые мы обнимаем под именем случая, и вследствие которых нарушается правильность хода событий, видна, по мере их умножения, поразительная регулярность, о которой так и хочется сказать, что она исходит из известного плана. Правильность эта— здесь переход к теории вероятностей — есть развитие взаимных возможностей простых явлений, которые тем чаще должны повторяться, чем они вероятнее». Теория вероятностей привела к математическому обоснованию

[1]) Bruns, Wahrsch.—Rechn und Koll.-Masslehre, стр. 13—14.

закона большого числа. А такое обоснование «дало возможность сделать более доступною нашему пониманию эмпирически-констатированную устойчивость различных статистических коэффициентов, рассматривая последние, как более или менее точные выражения определенных вероятностей, лежащих в основе массовых явлений» (Борткевич). В применении, в частности, к статистике населения закономерность такого рода сведения статистических коэффициентов к приближенным значениям вероятностей обосновывается Лексисом на таких соображениях: в статистике населения,—говорит он (но, конечно, и во всякой другой отрасли статистики),—речь может идти «о двоякого рода совокупностях: с одной стороны, о численных отношениях таких совокупностей, из которых одна вытекает, hervorgegangen, из другой; с другой стороны об отношениях таких совокупностей, которые возникли независимо друг от друга». Так как статистике населения приходится иметь дело, главным образом, с совокупностями первого рода, то это естественно приводит к исчислению вероятностей: их численные отношения «могут быть сведены к той точке зрения, что со всеми индивидами совокупности были произведены испытания, в определенном числе, и из них тоже определенное число дало определенного рода результат. Обработка наблюденных событий по правилам исчисления вероятностей дает точный, хотя, может быть, и не удовлетворяющий преувеличенным ожиданиям, ответ на вопрос, насколько в области явлений данной отрасли статистики может быть речь о закономерности» [1]). И несколько дальше: в статистике движения населения — как, опять-таки, в любой другой отрасли статистики, изучающей эволюцию явлений, «мы имеем дело с известным числом случаев начального состояния, из которых исходит известное число случаев конечного состояния; о лежащих между этими состояниями физических процессах мы, как статистики, знаем так-же мало, как о сложных движениях катящейся игральной кости, по отношению к которой нас интересует исключительно то положение, в котором она остановится». При таком положении вещей—здесь, опять-таки, следует переход к теории вероятностей—нам остается только одно: «мы подвергаем L_a живых возраста a испытанию в течение года, подчиняя их чрезвычайно сложному разнообразию угрожающих жизни причин, и наблюдаем, сколько из них, в данном возрасте, действительно получает угрожающий удар». В предположении равенства шансов смерти, «отношение числа смертных случаев к числу подвергнутых испытанию живых станет мерою действительного влияния шансов смерти, и эта мера будет тем точнее, чем больше число равновозрастных живых, подвергнутых испы-

[1]) Einleit in die Theorie d. Bevölk.-Stat., 1875, стр. 4.

танию. Если-бы это число было бесконечным, то данное отношение изображало-бы точную вероятность смерти каждого из подвергнутых испытанию однородных, живущих на $(a+1)$ году жизни. Эта вероятность смерти—единственное выражение, которым мы можем охарактеризовать систему шансов смерти, и мы считаем данную систему постоянною, пока она обусловливает ту-же вероятность смерти».

Это, с одной стороны, непосредственный логический путь, а с другой—существенный смысл перехода от эмпирических представлений о статистических соотношениях к теоретическим представлениям теории вероятностей. Принципиальная связь теории вероятностей с статистикой, и, в частности, с теорией статистического метода, сама собою вытекает из существа той и другой. Теория вероятностей—это такое математическое учение, которое «изучает способы наилучшего использования находящихся в нашем распоряжении доводов при решении какого-либо вопроса, относительно которого мы не имеем достаточно полного знания или в силу того, что некоторые обстоятельства остались пока нам неизвестными, или в силу того, что эти обстоятельства настолько сложны, что не поддаются никакому описанию и потому не могут быть использованы» (А. К. Власов), т. е., иначе сказать, при тех самых условиях (неполное знание причин и следствий, множественность и неразложимо-сложный характер тех и других!), которые специфически характерны для всей сферы приложения статистического метода и которые обусловливают как самую необходимость в таком особом методе, так и своеобразный логический характер статистического умозаключения. Неполное знание лежит в основе понятия «случайного события», на котором строится все учение о вероятностях. Но оно-же, как мы видели, лежит и в основе того понятия «случая», «случайной причины», из которого мы исходили, когда нам нужно было уловить существенный смысл статистического метода и охарактеризовать его сферу приложения. А этим само собою устанавливается связь между статистическим методом и математическою теориею вероятностей. Во всей сфере приложения первого имеются налицо те самые условия, которые являются принципиальною предпосылкой применения исчисления вероятностей, и которые Czuber формулирует таким образом: «рядом с общими причинами, оказывающими влияние на все единичные случаи, или, во всяком случае, на главную их массу, существуют еще и индивидуальные причины, изменяющиеся от случая к случаю, и, таким образом, данная область представляет полную аналогию с теми случайными состояниями и событиями, которые являются объектом исчисления вероятностей». Если-же «провести эту параллель до последней границы, какую представляют собой такого рода случайные события, в основе которых, в течение их осуществления, лежат постоянные причины», то такого рода явления могут быть подведены под схемы

исчисления вероятностей: «для них оказывается возможным вычислить их вероятное течение в будущем, и опыт показывает, что такого рода предвидение, в существенных чертах, подтверждается действительным течением событий».

К той-же связи мы уже подошли, в предыдущей главе, и другим путем, исходя из категорий формальной логики. Мы установили принципиальное отличие статистического умозаключения от выводов, получаемых методами индукции. Формула индуктивного заключения: если имело место явление А — должно наступить и явление В. Это — строгая причинная связь, имеющая своим предикатом необходимость Статистический метод вступает в свои права там, где такой строгой причинной связи установить нельзя, в виду-ли неполноты наших знаний о причинах и следствиях, или благодаря множественности причин и следствий, и получаемые статистическим путем выводы облекаются в такие формы: если имеет место причина А, за нею последует одно из явлений B_1, B_2, B_3....; если наблюдается явление В, оно могло быть обусловлено причинами A_1, A_2, A_3.... Но это—принципиально другой тип суждений: суждение дисъюнктивное или разделительное, в противоположность гипотетическим суждениям чистой индукции. С гипотетическим суждением мы имеем дело, значит, когда при наступлении известного условия имеет место и определенное последствие; если, при наступлении данного условия, за ним может последовать одно из нескольких возможных событий, то суждение носит дисъюнктивный или разделительный характер. В первом случае событие, рассматриваемое как следствие, носит достоверный характер, во втором — оно является возможным или вероятным. Сущность гипотетического суждения может быть, таким образом, сведена к тому, что «с некоторою предпосылкой связывается некоторое следствие, как ее необходимый результат; его типическая форма — «если верно А, то верно и В»; или: «если наступит А, то случится и В». Посылка и заключение стоят, таким образом, в отношении причины и следствия; характер суждения есть характер необходимости (достоверности)». В случае дисъюнктивного, разделительного суждения «разделение выражается в установлении и перечислении мыслимых следствий; отдельные последствия являются членами дисъюнкции. Типическая форма разделительного суждения может быть выражена словами: «если случится А, то наступит либо B_1, либо B_2, либо B_3» Между предпосылкой и совокупностью членов дисъюнкции существует, как и при гипотетическом суждении, отношение необходимости; напротив, каждый отдельный член дисъюнкции, или каждая отдельная группа членов, стоит к предпосылке в отношении возможности, которая и составляет действительное содержание разделительного суждения: осуществление пре по-

сылки может иметь последствием данный член, или один из данной группы членов дисъюнкции, но может иметь следствием и другой» (Czuber), — и каждое из этих событий в той или другой мере вероятно. Значит — раз имеет место дисъюнктивное суждение, тем самым осуществляется переход к вероятности. Тем самым — замечу мимоходом — устраняется всякий вопрос о взаимоотношении между вероятностью и причинностью — вопрос, где даже такой авторитет, как Лексис, не остался свободен от недоразумения. С точки зрения Лексиса вероятность как-бы становится на место причинности, и применение исчисления вероятностей и основанного на ней статистического метода к явлениям человеческого общежития вытекает именно из того, что человеческие поступки по существу своему индивидуальны и лежат вне рамок причинности. Между тем, разделительное суждение, к которому, логически, непосредственно привязывается, как мы видели, вероятность, есть именно суждение о причинной связи, только не строго однозначной, а многозначной, характеризуемой множественностью следствий данной причины. Как категорически подчеркивает Вундт, не знающая исключения Kausalität — прямая предпосылка научного применения понятий вероятности и случая: «что, действительно, следует или должно следовать из данных причин, то достоверно; что может следовать, при известных условиях, из данных причин, то вероятно, и сопоставление отношения предполагаемых причин к другим, приводящим к другим результатам, дает степень вероятности» [1]). В то время, поэтому, как Лексис «видит в сведении статистических закономерностей к схемам исчисления вероятностей замену для недопустимого», по отношению к определенным категориям явлений, «причинного объяснения», А. А. Чупров противополагает такому пониманию тот совершенно правильный взгляд, что «исчисление вероятностей само должно стать средством для установления причинных связей», ссылаясь, в частности, на исследования Криса, который уже «привел вероятность в столь близкое соприкосновение с причинностью, что перебросить мост через пропасть между обеими уже не составляет труда».

Таким образом, понятие вероятности необходимым образом привязывается к факту широко распространенной множественности возможных результатов и возможных решений. Такое понимание вероятности в научной логике и в самой теории вероятностей не расходится с обыденным смыслом, или даже лучше сказать — представляет собой ничто иное, как рационализированный и сведенный к точной формуле, обыденный смысл представления или даже, если угодно, чувства вероятного. В жизни, в самом деле, мы на каждом шагу исходим из пред-

---

[1]) Wundt, Logik т. I, стр. 436.

ставлений о вероятности, раз данный жизненный вопрос допускает несколько решений; «большинство вопросов жизни,—говорит Лаплас,—ничто иное, как задачи теории вероятностей. Человек перед их разрешением перебирает всевозможные случаи и, руководствуясь здравым смыслом, оценивает качественно различную степень вероятия каждого из них, и соображает с этою оценкой свои поступки». Теория вероятностей старается оценить степень вероятия того или другого события количественно,—и, таким образом, теория вероятностей, в конце концов, «есть здравый смысл, переложенный на вычисление». Как подчеркивает Пуассон, ее принципы являются «необходимым дополнением логики, так как есть много вопросов, где искусство рассуждать не способно привести нас к полной достоверности». Эту характеристику вероятности, как необходимого дополнения логики», как «здравого смысла, положенного на вычисление», мне кажется необходимым подчеркнуть—она понадобится нам в дальнейшем изложении.

Еще раз: с представлениями о вероятности мы, на каждом шагу, считаемся в практической жизни. «Вероятно», «невероятно», «совершенно невероятно», «более» или «менее вероятно»—это все состояния большей или меньшей уверенности или неуверенности в наступлении желательного или, напротив, нежелательного нам события. Но в практической жизни это — именно только субъективные психические состояния, не поддающиеся выражению в числах, а, следовательно, не могущие лечь в основу математических построений. Этому не противоречит тот факт, что в жизни мы иногда пытаемся выразить степень нашей уверенности или неуверенности в числах: мы готовы держать десять против одного, или мы не дадим одного против десяти, за то, что такой-то больной выздоровеет, или что такой-то коммерсант преуспеет в своих операциях. Такие численные оценки являются, сплошь и рядом, только способом выражения и больше ничем,—но они приобретают и практическое значение в случаях пари при неравных шансах, в азартной игре, на тотализаторе и т. п.

Однако, и такое, численно оцениваемое, субъективное представление о вероятности,—это тоже еще не математическая вероятность. Пуассон прямо противуполагает субъективную вероятность, probabilité, объективной вероятности, выражаемой в цифрах,—chance или chance propre, определяя первую, как «основание думать, что событие случится или случилось», и подчеркивая, что она «всецело зависит от сведений, которые мы имеем о событии», а потому «может быть неодинакова для разных лиц по отношению к одному и тому-же событию»; на этом, между прочим, основывается возможность честного пари, т. е. такого, при котором ни одна сторона не идет заведомо на то, чтобы использовать к своей выгоде неведение другой: каждая сторона, в этом случае, на основании «сведений, которые она

имеет о событии», ожидает наступления составляющего предмет пари события.

Такому субъективному представлению или ощущению вероятности противополагается вполне конкретное понятие объективной вероятности. «Математическая вероятность,—так характеризует ее наиболее яркий представитель объективного понимания, Курно,—рассматриваемая объективно или как мера возможности случайных событий, может быть определена только наблюдением или опытом». При бесконечном числе наблюдений она может быть определена точно и с достоверностью; «если число испытаний только очень велико, получается лишь приближенная вероятность, но можно считать весьма вероятным, что истинное значение ее не отличается заметно от полученных из наблюдений». Этим, математическим вероятностям объективного характера, Курно противополагает «вероятности, не поддающиеся выражению в числах, и, тем не менее, составляющие основу многих, и даже важнейших, из наших суждений. Они вытекают, главным образом, из нашей идеи простоты законов природы, порядка и связи явлений, и может быть названа философскою вероятностью». Сознание таких «философских» вероятностей «составляет основу философской критики», применяемой далеко за пределами и статистики, и собственно теории вероятностей; «но оно не может быть выражено в формулах или числах и, таким образом, переведено в область математического учения о вероятностях, если не желать впасть в грубые ошибки и заблуждения»[1]). Однако, эта «философская вероятность, по Курно, играет важную роль и в математической теории вероятностей: все основные положения последней, включительно до «принципа Бернулли», он строит как простой и непосредственный вывод из формул комбинаторики—теории сочетаний. «До сих пор,—говорит он, вслед за изложением «принципа Бернулли»,—«мы занимались чисто арифметическими исследованиями...». Для перехода от абстрактного отношения к действительному закону реальных явлений необходимы не чисто математические соображения, а «философская критика», центром тяжести которой, как мы увидим ниже, является понятие так называемой «физической невозможности».

Небезинтересно отметить, что на той-же почве стоит, из русских специалистов по теории вероятностей, проф. А В Васильев, в своих изданных в 1886 году лекциях по теории вероятностей. В его сжатой резюмирующей формулировке, «субъективная вероятность есть точная мера ожидания какого-либо случайного события, степень веры, что оно случится Объективная вероятность есть мера возможности известного случайного события, проявившаяся при большом числе испыта-

[1]) Cournot, Wahrsch-Rechn, перев. Schnuse, стр. 219—220.

ний». Собственно математическая вероятность, или то, что обычно называют априорною вероятностью, выражаемая отношением числа благоприятствующих случаев к числу всех возможных случаев, есть, во-1-х, «простейшая функция, могущая заменить сложную функцию, выражающую субъективную вероятность, и, во-2-х, первое численное приближение к объективной вероятности». Субъективная вероятность,—так развивает проф. Васильев эти положения,—не более, как «субъективное состояние недоумения, сомнения», являющееся результатом нашего незнания. Но «в большей части случаев мы не находимся по отношению к случайному событию и в состоянии полного незнания; мы знаем, например, число карт в колоде и число в ней фигур и т. д. В таком случае, мы можем вычислить «меру вероятия», которая, однако, представляет собою, все-таки, лишь выраженную в числах субъективную вероятность; «как мера, меняющаяся с человеком и с обстоятельствами, она не может быть предметом науки», — ее «нельзя точнее определить, и поэтому на ней нельзя строить никаких выводов». Некоторое приближение к истинной вероятности получается только, если допустить, «что степень ожидания случайного события зависит не от абсолютной величины чисел m и n, но от их отношения $\frac{m}{n}$, и потому вид функции есть $\frac{m}{n}$. «Так как вид функции невозможно определить, то в теории вероятностей по необходимости рассматривается простейшая из функций этого вида, т. е. отношение $\frac{m}{n}$; но такое отношение никоим образом не есть точная мера вероятия, а потому и «наука, основанная на изучении отношения $\frac{m}{n}$, математической вероятности, не может иметь психологического значения». Математическая вероятность — только первое приближение к мере вероятия, а потому и она носит субъективный характер. Что касается до объективной вероятности, chance, то она существовала-бы «для лица, идеально-хорошо знающего строение монеты», в случае опыта с бросаниями последней. В области реальных явлений она невычислима a priori, — она может быть определяема только из опыта, при большом числе событий; это потому, что «математическая вероятность, вычисленная в предположении, что мы имеем идеальное знание о всех постоянных причинах .., а потому не зависящая уже больше от степени нашего знания, должна непременно проявиться при большом числе событий».

Аналогичное противуположение объективной и субъективной вероятности мы находим и у Вундта. «Пока дело,—говорит он,—не идет о количественном определении степени вероятности, заключение есть обыденное заключение о вероятности — gemeiner Wahrscheinlichkeitsschluss». Оно играет известную роль и в науке, поскольку, при невозможности количественного определения степени вероятности, тем не менее, не удерживались от заключения о наличности вероятности». Но обычно в научном исследовании стремятся к оценке, Schätzung, степени вероятности,—и тогда gemeiner Wahrscheinlichkeitsschluss превращается в numerischer Wahrscheinlichkeitsschluss. Здесь суждения, из которых оно слагается, имеют форму уравнений, и в каждом уравнении предикат, или его члены, снабжены численными коэффициентами, выражающими в посылках относительную частоту единичных случаев, в заключении их относительную вероятность». Корень самой идеи вероятности лежит в том, что «всякая объективная вероятность носит непосредственный характер, а потому находится в постоянном противоречии — liegt in stetigem Streit с недостоверностью. Поскольку предположения, противоречащие данному, остаются мыслимыми, оно обладает лишь большею или меньшею сте-

пенью вероятности. Эта последняя имеет два вида: качественную и количественную. Качественная—такая, «при которой, хотя и может иметь место большее или меньшее приближение к действительности, но которая никогда не допускает количественной или численной оценки ее степени». При количественной вероятности «количественное выражение не только возможно, но, раз требует научная точность, необходимо». При качественной вероятности устранение неопределенного характера приводит проблематическое суждение либо к отрицательному, т. е. к устранению сделанного предположения, либо к аподиктическому суждению, т. е. к достоверности, тогда как аналогичный прием при количественной вероятности может привести лишь к превращению суждения о вероятности в более определенное». Поэтому, качественная вероятность по своему характеру есть «нечто преходящее»—очевидно, связанное, как я добавлю от себя, с нашим незнанием, что и сближает это понятие с субъективною вероятностью Курно. Количественная вероятность есть eine definitive—имеет окончательное значение: она необходимо обоснована в существе заключения о вероятности и в его предпосылках». Количественная вероятность получается там, где из фактической частоты события в данных случаях заключают к частоте, ожидаемой в других случаях. От аналогии это, более тесное, понятие вероятности отличается тем, что первая относится к другим, качественно-отличным, вероятность—к качественно-однородным случаям. «Благодаря качественному равенству членов отношения, различающихся только своею количественно-обозримою частотою, количественная вероятность приобретает точный характер. Но в то-же время она исключает переход в достоверность, weil sie auf eine Vielheit von Ereignissen geht».

При каких-же условиях, спрашивается, простое психическое состояние большей или меньшей уверенности или неуверенности обращается в математическую вероятность? Иначе сказать, на чем покоится возможность количественного выражения вероятности? Она покоится на наличности определенного рода знания о предмете суждения. Это знание касается двух величин—«общего объема тех возможностей, которые наступают при наличности данных общих условий,—и той части этого общего объема, которая с необходимостью влечет за собою наступление определенного последствия; раз удалось численно определить оба эти объема, то частное от деления второй из указанных величин на первую может охарактеризовать положение данного последствия в ряду всех возможных последствий» (Czuber); и это-то частное и называют математическою, и в частности—апріорною, вероятностью явления. Об «объеме возможностей»—выражение, введенное в обращение Крисом, можно говорить в двух смыслах: фигуральном, образном—и действительном. В обычных случаях вычисления вероятностей «объем» является лишь синонимом числа возможностей—числа, с одной стороны, шансов или случаев, благоприятствующих явлению, и числа всех относящихся к определенной сфере явлений случаев, где данное явление могло-бы иметь место, но где оно может и наступить и не наступить: всякий вынутый шар, при определенной постановке опыта, может быть белым или черным, всякая карта, вынутая из колоды,

может оказаться тузом пик, всякая женщина, состоящая в браке, может иметь детей, всякий человек мыслится способным к совершению преступления; общее число шаров, карт, замужних женщин, людей, в определенным образом очерченной совокупности, и принимается за все число возможных, в перечисленных вопросах, случаев—и, повторяю, частное от деления числа благоприятствующих случаев—белых шаров, тузов пик, случившихся рождений, содеянных преступлений, на число всех возможных случаев (иначе говоря, на сумму случаев, как благоприятствующих, так и неблагоприятствующих событию), представляет собою математическую вероятность. Не трудно уяснить себе, откуда произошел такой способ выражения меры вероятности. Суть дела, в трех словах, прекрасно резюмирована в цитированной в предыдущей главе студенческой работе В. А. Косинского: выраженная указанным способом вероятность есть «характеристика связи постоянных причин с данным не-типическим явлением», указывающая, «какая часть действия этих причин падает на долю данного явления» [1]). Или, как несколько подробнее развито у А. А. Чупрова, в его немецкой работе о «задачах статистического метода»: исходная точка всякого вычисления вероятности—это случай множественности следствий. Как дать, спрашивается, характеристику связи между причиною и возможными следствиями? Взамен твердой причинной связи проще всего—es liegt nahe, использовать число следствий—отношения $^1/_2$, $^1/_6$, $^1/_{100}$ «способны весьма наглядно характеризовать тесноту этой связи». Возьмем самые простые случаи: как измерить основание ожидать выхода одного из шести очков игральной кости—например, трех? Какова вероятность вынутия одного из двенадцати шаров в урне—например, единственного зеленого? Может выйти каждый из шести номеров в одном случае, каждый из 12 шаров — во втором; нас интересует, следовательно, нашему интересу «благоприятствует», только один из всех возможных исходов, значит, в первом примере одна шестая, во втором—одна двенадцатая часть всех возможностей. Ясно, что если имеется один «благоприятствующий» и один «неблагоприятствующий» нашему заданию исход, а всего два возможных исхода, то связь между причиною и интересующим нас следствием будет впятеро теснее, а наше ожидание впятеро сильнее, чем если «неблагоприятствующих» девять и, значит, всех возможных исходов десять; связь в первом случае будет в 50 и в 500 раз теснее, чем если возможных исходов 100 или 1.000, и, следовательно, неблагоприятствующих осуществлению нашего задания шансов 99 или 999. Значит, в общей форме: если нас интересует только один из всех

[1]) Косинский, О приемах научн. разработки стат. данных. М. 1890, стр. 9.

мыслимых исходов, то сила нашего законного ожидания, т. е. вероятность, выразится дробью с единицею в числителе и с знаменателем, равным числу всех возможностей; следовательно, она будет обратно пропорциональна знаменателю—числу всех возможных случаев.

Это—случай так называемых равновозможных или простых статочностей, примерами которого являются: игральная кость, где каждое из шести, игра в лото, где каждое из 90 чисел встречается один раз; тиражи из ящика с шарами, если речь идет о единственном белом шаре при большом числе черных; колода карт — если вопрос поставлен о тузе пик или любой другой одной определенной карте. Несколько осложняется дело, если желаемый исход может получиться не в одном единственном, а в нескольких возможных видах или случаях: если, например, в урне не один, а три белых шара из десяти; если речь идет о вероятности вытянуть туза, или черную карту, или фигуру, при том известном обстоятельстве, что в колоде 4 туза, 16 фигур, 26 черных карт, и т. п. В таком случае мы рассуждаем так: вероятность выхода каждого шара, следовательно, и каждого белого шара, равна $^1/_{10}$; вероятность выхода каждой карты, следовательно, и каждого из четырех тузов, равна $^1/_{52}$. Белым будет, безразлично, и первый белый, и второй белый, и третий белый шар; сила нашего ожидания каждого из них равна $^1/_{10}$, значит, сила ожидания любого из трех—либо первого, либо второго, либо третьего, равна $^3/_{10}$. Туз может быть или тузом пик, или треф, или бубен, или червей,—значит, «туз» может получиться в четырех случаях; сила ожидания каждого из четырех тузов равна $^1/_{52}$,—следовательно, сила ожидания любого из них равна $^4/_{52}$ или $^1/_{13}$. Или обобщая приведенные примеры: если m возможных случаев «благоприятствует» нашему заданию, а n нет, то вероятность каждого из благоприятствующих случаев равна $\frac{1}{m+n} = \frac{1}{s}$, а вероятность любого из них, т. е., иначе говоря, общая вероятность интересующего нас события, будет равна $\frac{m}{m+n} = \frac{m}{s}$. Или в общей формулировке: «если наше положительное знание о предмете суждения допускает разложение имеющихся возможностей на поддающуюся счету массу равновозможных случаев, то вероятность события, покоящегося на данной совокупности условий, выражается как частное от деления числа благоприятствующих ему случаев на число всех возможных случаев». И вот, именно, такую, «количественно выраженную вероятность, в отличие от общего понятия вероятности, как противоположения достоверности, называют математическою вероятностью» (Czuber). Или другое, более сжатое, определение, принадлежащее Лексису: математическою вероятностью «мы

называем дробь, которой читатель изображает число особых случаев, происшедших из образующего знаменатель большего числа случаев или единиц наблюдения», — определение, точный смысл которого имеет в виду, главным образом, так называемые «генетические» отношения, — т. е. те случаи, когда определенное явление рассматривается как исходящее из определенной среды, но которое, конечно, в полной мере может быть распространено и на случаи «аналитических» отношений, показывающих расчленение известной массы на части, когда в знаменателе будет стоять общее число единиц в данной массе, в числителе—число тех из них, которые обладают определенным признаком.

Однако, ни в том, ни в другом определении мы не находим еще некоторых условий, имеющих существенное значение для установления понятия математической вероятности. Более исчерпывающий характер будет, поэтому, иметь хотя-бы такое определение, которое я беру у С. Е. Савича: «математическою вероятностью наступления события называют дробь, знаменатель которой показывает число равновозможных случаев, несовместимых между собою и исчерпывающих все явление, а числитель—число случаев, благоприятствующих событию», причем «равновозможными»—мы ограничимся пока этим кратким пояснением, с тем, чтобы потом вернуться к понятию равновозможности—события признаются, «если при данных условиях нет никакого основания предполагать, что одно из них может совершиться предпочтительно перед другими»; они будут исчерпывающими, «если какое-нибудь явление связано с наступлением одного или нескольких определенных событий, и если по отношению к этому явлению никаких других событий ожидать нельзя»; несовместимы события, «если при наступлении одного из них другое уже не может иметь места». Если в урне имеется, положим, два шара—белый и черный, то выход одного из них будет одним из двух исчерпывающих событий, потому что никакого третьего шара в урне нет; оно будет одним из двух несовместимых событий, потому что шар не может быть одновременно белым и черным (тогда как он может быть одновременно, положим, белым и костяным, черным и деревянным); оно будет одним из двух равновозможных событий, потому что, при добросовестной постановке опыта—при строго-одинаковой величине, форме, тяжести, полировке шаров и т. п., при тщательном перемешивании и при отсутствии у экспериментатора каких-либо предвзятых намерений, нет никакого основания ожидать, чтобы белый шар попал нам под руку скорее, нежели черный, или наоборот.

Вернемся теперь к вопросу о способах выражения математических вероятностей и в частности—к той категории случаев, когда понятие об «объеме возможностей» утрачивает свой фигуральный характер; иначе сказать, когда простой счет равновозможных случаев усту-

пает место иным способам определения «объема возможностей». Дело в том, что простой счет возможен лишь при конечных числах определенно отграниченных друг от друга возможностей—случаев, единиц или экземпляров. Число таких возможностей может быть очень велико, даже чрезвычайно велико, — только-бы оно было конечным; как-бы огромны ни были числа всех и числа благоприятствующих случаев,— вероятность, представляющая собой отношение последнего из этих чисел к первому, может быть получена счетом и простыми действиями, основанными на счете, и величина ее—как отмечено Курно—определяется цифрами, занимающими высшие места в числителе и в знаменателе. Положение дела изменяется с переходом к бесконечным числам всех и отдельно—благоприятствующих данному событию возможностей, причем эти последние могут вовсе не носить характера определенно-отграниченных друг от друга единиц и, следовательно, вовсе не поддаваться. счету,—что, однако, не мешает отношениям между суммами возможностей иметь конечное, вычислимое значение, переходом, в результате которого «математическое исчисление вероятностей, которое первоначально было лишь ветвью комбинаторики, распространяется гораздо дальше, чем сама комбинаторика», и становится «применимым и к случаям, где не только нет возможности образовать отдельные комбинации, но даже высчитать их число, ибо оно неограничено или бесконечно велико». Это—категория случаев, особенно важная для изучения явлений природы, где, в силу присущего им свойства непрерывности, число возможных случаев нередко, в самом деле, не может быть выражено конечными числами. Чтобы приспособить определение и способ выражения вероятностей к случаю бесконечного числа шансов с непрерывным переходом от одного к другому, «надо вместо чисел подставить непрерывные величины; из всех непрерывных величин наиболее непосредственно поддается постижению протяжение, объем»; отсюда—определение вероятности, как дает его Курно: как «отношения объема благоприятствующих событию случаев к объему всех возможных случаев, причем слово объем, как правило, должно быть понимаемо фигурально, но в известных случаях может иметь и свое действительное значение»,—это именно в том случае, если речь идет о соотношении геометрических величин. В практике исчисления вероятностей при анализе вводят воображаемую непрерывность, позволяющую—как подробнее будет объяснено в одной из следующих глав—применить к вычислению вероятностей приемы и принципы интегрального исчисления,—это, как подчеркивает тот-же Курно, один из плодотворнейших методов для определения вероятностей больших чисел, счет которых, абстрактно говоря, мыслим, но неосуществим практически.

О приемах сосчитывания «случаев» или «статочностей», «шансов», и получения вероятностей сложных событий из вероятностей бо-

лее простых событий, будет речь в следующей главе. Теперь-же мы остановимся еще на некоторых соображениях, могущих послужить к лучшему выяснению существа вероятности и, прежде всего, на нескольких особых случаях выражения вероятностей, и на связанных с ними представлениях и понятиях.

Вероятность наступления события, как ясно из сказанного выше, тем больше, чем большее число равновозможных случаев ему благоприятствует, и, наоборот—тем меньше, чем большее число случаев ему не благоприятствует; следовательно, при данном числе благоприятствующих случаев, она тем меньше, чем больше общее число всех равновозможных случаев Если в урне три белых шара из десяти, вероятность выхода белого будет в три раза больше, чем если белый один; если в урну поместить еще десять не-белых шаров, вероятность извлечения белого из трех десятых превратится в три двадцатых, т. е. уменьшится наполовину. Если в урне имеется всего один белый шар, а общее число шаров будет сначала два, потом десять, 100. 1.000 и т. д., то вероятность извлечения единственного белого уменьшится в 5, в 50, в 500 раз. Если число благоприятных шансов равно числу неблагоприятных,—напр., если число белых шаров, будет-ли оно равно одному, десяти или ста, равняется числу черных, то вероятность извлечения белого, очевидно, выразится дробями $\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$, $\frac{10}{10+10}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$, $\frac{100}{100+100}=\frac{100}{200}=\frac{1}{2}$,—т. е., во всяком случае, будет равна половине. А с другой стороны, наш здравый смысл говорит нам, что и такого рода случаях, когда число благоприятных возможностей точно равно числу неблагоприятных, мы не имеем никакого основания ожидать наступления данного события преимущественно перед его ненаступлением, или наоборот: игра, положим, в орлянку основана именно на том, что играющие не имеют абсолютно никакого основания ожидать выхода «орла» скорее, нежели «решетки». Поэтому, вероятность, равная половине, может быть рассматриваема, как символ полного незнания, полной неопределенности, — «мы не будем иметь определенных стимулов направить наши ожидания в ту или другую сторону; положение будет для нас сомнительным», и, таким образом, «вероятность, равная половине, характеризует сомнительность рассматриваемого события» (Власов).

У Пуассона мы находим другое доказательство — подходящее к вопросу с противоположной стороны — того положения, что случай полного незнания, полной неопределенности, должен получить выражение в виде дроби ½ Предположим, что в урне имеется n шаров, и что больше мы о ее содержании ничего не знаем. В таком случае возможно n + 1 гипотез или предположений относительно числа белых в урне: ни одного, один, два и т. д., включительно до одних только, значит, до n, белых шаров. Вероятность каждого из

этих предположений будет $\frac{1}{n+1}$. По теоремам сложения и умножения вероятностей, о которых будет речь в следующей главе, вероятность извлечения белого при каждой из этих $n+1$ гипотез будет $\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n}{n}+\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n}+\cdots+\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n}$,—следовательно, полная вероятность извлечения белого—иначе говоря, вероятность этого события при любой из мыслимых гипотез, будет (за выведением $\frac{1}{n+1}$ за скобки) равна $\frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n}+\frac{n-1}{n}+\ldots+\frac{n-n+1}{n}+\frac{n-n}{n}\right)$. Вычисление значения этой суммы по формуле арифметической прогрессии дает половину.

Еще раз: вероятность, равная половине, характеризует полную неопределенность, неизвестность, сомнительность данного результата—«ни да, ни нет». В теории вероятностей принято события, имеющие вероятность $\frac{1}{2}$, называть просто «вероятными» событиями—в частности, говорят о «вероятном» отклонении, «вероятной» ошибке, имея в виду ту величину ошибки наблюдения или отклонения единичных случаев от средней, выше и ниже которой можно ожидать по равному числу наблюденных единиц или полученных при измерении определенной величины погрешностей. Конечно, вопросы терминологии не имеют слишком существенного значения, и нам в дальнейшем придется пользоваться данным термином. Но нелишнее все-таки заметить, что употребление, в данном смысле, слова «вероятный», противоречит общепринятому значению этого слова: когда мы говорим о «вероятном» наступлении известного события, мы всегда имеем в виду б о́ л ь ш у ю вероятность наступления, чем ненаступления события. Между тем, вероятность, равная половине, означает, как-раз обратное—что наступление данного события н е более вероятно, нежели его ненаступление. «Вероятное» значение какой-либо величины,—как подчеркнул, опять-таки, Курно,—«вовсе не более вероятно, чем остальные значения»; в частности, при не идеально-правильном распределении отклонений, а, тем более, при резко-неправильном, «оно может отвечать даже наименьшей ординате, или даже ординате 0», в каковом случае именуемое «вероятным» значение «не будет ни одним из значений, какие может получить данная величина».

Для нас, однако, особенно важен не этот, а другие особые случаи выражения вероятностей. Очевидно, что, по мере того, как вероятность события увеличивается, начиная от половины и постепенно приближаясь к единице, т. е. начиная от такого положения вещей, когда мы не имеем н и к а к о г о основания ожидать наступления события преимущественно перед его ненаступлением, и кончая таким, когда у нас есть в с е основания ожидать первого и не допускать второго, «мы из состояния сомнения переходим в состояние все большей уверенности в том, что ожидаемое событие произойдет». В конце концов, когда в с е шансы говорят за наступление ожидаемого события, и н и о д н о г о нет против,—когда, значит, вероятность его наступления,

по формулированному выше правилу, должна выразиться дробью $\frac{n}{n} = 1$, событие, очевидно, становится достоверным: оно, наверно, случится, если все имеющиеся налицо причины или все возможные комбинации причин производят именно это событие. Вероятность его—еще раз—будет отношение некоторого числа к самому себе, или единица: 2 : 2, 10 : 10, 500 : 500 и т. д. Событие, наоборот, наверно не случится, если ни одна из действующих причин не производит этого события, и вероятность этого события, в таком случае, выразится отношением нуля благоприятствующих случаев к некоторому числу всех возможных случаев—т. е. будет 0. Значит, вероятность 1 становится символом достоверности, вероятность 0—символом невозможности события. Говоря вообще, однако, теория вероятностей имеет дело и с нулем, и с единицей лишь как с пределами мыслимых вероятностей: с единицей—как с пределом вероятности, возрастающей до бесконечности и сколь угодно приближающейся к достоверности, с нулем—как с пределом вероятности, бесконечно убывающей и сколь угодно приближающейся к невозможности. Вероятности, так-таки, равные нулю и единице—иначе сказать, события безусловно достоверные и события, безусловно не могущие иметь места, уже не принадлежат к кругу представлений теории вероятностей: «между сколь угодно близкою к нулю вероятностью события,—говорит Czuber,—и невозможностью его, с одной стороны, между сколь угодно близкою к единице вероятностью и его достоверностью, с другой, существует различие принципиального характера; вероятность и достоверность (равно как и невозможность)—понятия с существенно различною природой, и между тою и другою не может быть перекинуто никакого мостика». Обстоятельство это существенно не только с чисто-математической стороны,—оно имеет некоторое значение и с точки зрения теории познания, как существенный аргумент против довольно распространенного взгляда, что всякое знание только вероятно: положение «вероятно,—говорит по этому поводу Вундт,—если допускается хоть возможность противоположного»; оно «достоверно, если его отрицание признается невозможным». Поэтому, о вероятности может быть речь только тогда, когда допустимо несколько предположений, в пользу каждого из которых говорит «ein gewisses Gewicht von Tatsachen—известная совокупность веских фактов». Значит, полное заключение о вероятности всегда заключает в себе хотя-бы подразумеваемую большую посылку,—именно, дисъюнктивное суждение, членами которого являются различные предположения, между которыми возможен выбор. Где, напротив, речь идет о достоверности, там все члены дисъюнкции становятся нулем, кроме одного, который достоверен. А отсюда вывод, в применении уже к теории вероятностей: «поскольку вероятность может безгранично прибли-

жаться к достоверности, последнюю допустимо рассматривать, как предельный случай первой; но она так-же мало становится вероятностью, как нуль не становится величиной от того, что бесконечно убывающая величина приближается к нулю».

У Пуассона мы находим, опять-таки, остроумное математическое доказательство или демонстрацию разницы между абсолютно невозможною вещью и событием с вероятностью, сколь угодно близкою к нулю. В числе следствий теоремы умножения вероятностей имеется формула $r = (1-p)^n$, выражающая вероятность того, что событие наступит, по крайней мере, один раз. Из этой формулы путем логарифмирования можно вычислить число n, соответствующее сколь угодно близкой к нулю вероятности p, откуда следует, что при сколь угодно малой вероятности p, достаточно большое число наблюдений n даст сколь угодно высокую вероятность r, что событие наступит, по меньшей мере, один раз. «В этом,—говорит Пуассон,—разница между абсолютно невозможною вещью и событием с чрезвычайно малою вероятностью невозможное никогда не случится, а сколь угодно мало вероятное событие, весьма вероятно, случится в достаточно длинном ряде испытаний» [1].

Не лишнее, однако, заметить, что изложенный только-что взгляд на вероятности 1 и 0, как на нечто уже выходящее из круга представлений теории вероятностей и принципиально от них отличное, не может считаться безусловно общепризнанным. В уже цитированной работе Косинского последовательно проводится обратный взгляд на «достоверность, как на частный случай вероятности», откуда, между прочим, делается тот непосредственно относящийся к теории статистики вывод, что типическое явление, т. е. такое, относящиеся к которому суждения носят характер достоверности, есть лишь частный случай, а не противоположность не-типическому [2]. В применении к определенной категории случаев к тому-же пониманию примыкает и А. А. Марков, в своем «Исчислении вероятностей»: он, именно, без оговорок, определенно говорит о вероятности 1, как синониме достоверности, и о вероятности 0— как синониме невозможности, «по крайней мере тогда, когда эта вероятность установлена прямым счетом равновозможных случаев»,—иначе говоря, когда таким прямым счетом установлено отсутствие неблагоприятных возможностей, в одном случае, и благоприятствующих статочностей, в другом [3]. О невозможности, выражаемой нулем, о вероятности и о достоверности, выражаемой единицей, как о простых Grössenabstufungen одного и того-же понятия, говорит и Брунс, причем, однако, и он оговаривает, что нуль не всегда выражает невозможность; что в каждом данном случае надо уяснить себе, произошла-ли вероятность 0 из абсолютного отсутствия, или-же от небольшого числа благоприятных при бесконечном множестве неблагоприятных шансов [4]. Только если доказано первое — например, если

---

[1]) Poisson, Recherches, стр. 39—41.
[2]) Косинский, О прием. научн. разработки стат данных, стр. 9.
[3]) Марков, Исчисл. вероятн., 3-е изд., стр. 5.
[4]) Bruns, W-R., стр. 17.

все шары в урне белые,—данные вероятности 0 и 1 выражают, в самом деле, невозможность и вероятность; если первое не доказано, или заведомо имеет место второе предположение, то 0 и 1 являются лишь символами чрезвычайно малой и чрезвычайно высокой вероятности. Такое противуположение двух значений вероятностей 0 и 1 может быть перенесено и в область пространственных представлений, в их противуположении простому счету: при конечных числах статочностей 0 есть символ, так-таки, невозможности $\left(\frac{0}{n}\right)$; при бесконечных числах—как это развивает А. В. Васильев в своих лекциях теории вероятностей — $p = 0$, если площадь, в которую надо попасть при выстреле (бесконечно-малым снарядом), обратится в точку, ибо мера точки есть нуль; однако, попасть в точку возможно, следовательно, в этом случае $p = 0$ есть символ не материальной или действительной невозможности, а только «моральной» невозможности —невозможности в какой бы то ни было мере рассчитывать попасть в заданную точку, а $p = 1$, при таких-же условиях, есть символ не безусловной, материальной, а только нравственной достоверности [1]).

Понятия практической или физической невозможности, практической или моральной достоверности—это понятия или представления, с которыми мы постоянно считаемся в жизни. Солнце наверно взойдет и завтра, и через год—хотя можно представить себе мировую катаклизму, при которой солнце уже не взойдет, или, по крайней мере, не взойдет для нас; я наверно попаду к себе домой, если я иду домой,—хотя может случиться, что я попаду под шальную пулю, или под кусок обвалившегося карниза. В соответствии с этим и теория вероятностей знает понятия «нравственной» или «практической» достоверности, т. е. «чрезвычайно высокой вероятности», чрезвычайно мало отличающейся от единицы, и «практической или «физической» невозможности», т. е. чрезвычайно близкой к нулю вероятности. Если в урне имеется всего один, или хотя-бы и десяток, черных шаров—подсыпая тысячу, сто тысяч, миллион, десять миллионов белых, мы постепенно создаем такое положение, при котором мы с все более полною уверенностью будем ожидать выхода белого шара, а выход черного, в конце концов, станет окончательно невероятным—таким событием, с возможностью которого мы можем вовсе не считаться. И вот, «событие, вероятность которого может быть приближена как угодно близко к единице, но никогда не может быть равною единице»—потому что один черный шар все-таки есть в урне,—называется «нравственно достоверным», а противуположное событие, «не будучи абсолютно невозможным, будет представляться нам

[1]) Васильев, Теория вероятн., стр. 68—69.

«необычайным событием»—практическою или «физическою невозможностью» (Власов).

Надо, однако, помнить, что понятие «необычайного» события далеко не всегда носит объективный характер; корня его, сплошь и рядом, приходится искать не столько в действительных условиях вероятности, сколько в наших субъективных представлениях, совершенно также, как «случаем» мы считаем не все бесчисленные совпадения не связанных между собой событий, а только те из них, которые почему-либо привлекают к себе наше внимание. Дело в том, что всякое необычайное событие чрезвычайно мало вероятно, но не всякое чрезвычайно мало-вероятное событие представляется нам «необычайным»,—малая вероятность есть необходимое, но не всегда достаточное условие для того, чтобы мы признали событие необычайным. Случай извлечения единственного черного шара при наличности сотен тысяч белых будет, действительно, и объективно необычайным событием, потому что черный шар так-таки *единственный* с столь ничтожною вероятностью выхода. Совсем другое—выход, например, полной масти, от туза до двойки, при извлечениях наудачу из полной колоды: выход полной масти ровно столь-же мало-вероятен, как любая другая, заданная наперед, комбинация из 13 карт, и лишь *представляется* нам исключительно необычайным событием, в виду особой роли этой комбинации в играх в карты, и даже просто в виду производимого ею на нас зрительного впечатления Вынуть наудачу из ящика с буквами алфавита, при шести последовательных извлечениях, комбинацию букв, положим, М—О—С—К—В—А, или А—А—А—А—А—А, не более и не менее вероятно, как получить любую другую комбинацию из шести одинаковых или разных букв Но на какую-нибудь комбинацию К—В—Ф—Е—У—Д или Я—М—Б—Д—У—Н, мы не обратим никакого внимания, а комбинации М—О—С—К—В—А и А—А—А—А—А—А покажутся нам «необычайными»· первая—в виду особого значения получающегося слова «Москва», а вторая—просто, в виду особого зрительного впечатления, производимого шестикратным повторением одной буквы.

Значение этих понятий и особенно понятия «физической невозможности» выдвинуто, в особенности, Курно, к которому тесно примыкает, в данном вопросе А. А. Чупров. Понятию «физической невозможности» Курно приписывает большую роль в обосновании понятия случая (случай — не более, как наступление «физически-невозможного» события) и еще важнее — в перенесении как понятия вероятности, так и выводимого из начал теории вероятностей закона больших чисел, из области чистого математического умозрения в область реальной действительности. Как мы уже видели, Курно сначала развивает основные положения исчисления вероятностей, включительно до «принципа Бернулли», как «чисто-арифметические исследования», для перехода-же от абстрактных математических отношений к действительным законам реальных явлений он считает нужным исходить из «философской критики». Он начинает с уже известного нам анализа понятия случая, как явления, вызванного «совпадением нескольких причинно-независимых явлений», и связывает это понятие с только-что выясненным нами понятием «физической невозможности»: связь этих понятий — именно в независимости обстоятельств, могущих привести к «случайному» или—

что все равно—к необычайному событию. Всякое случайное и всякое физически-невозможное событие — это «такое, которого математическая вероятность бесконечно мала, и лишь чрез это теория математической вероятности получает объективное значение в мире действительности». «Физически невозможное» событие,—поясняет он,—мыслится как математически или логически возможное; но в действительности оно не случается, ибо нет основания, почему единственное случайное соединение случайных причин или явлений, которое могло-бы привести к физически невозможному событию, наступило-бы скорее, чем бесконечное множество других соединений». В частности, в применении к «принципу Бернулли»: при бесконечном числе испытаний имеется бесконечно малая вероятность сколь угодно малого отклонения действительно полученной частоты от вероятности события — сколь угодно малое отклонение становится физически-невозможным; вследствие этого, и т о л ь к о вследствие этого, «учение о математической вероятности примыкает к понятию физической невозможности, и математическая вероятность из абстрактного отношения, зависящего от нашего взгляда, становится выражением отношения, определяемого природой вещей и получаемого из наблюдения». Совершенно естественно принимать, что «событие тем легче может случиться, или тем скорее «физически возможно», чем чаще оно действительно случается при большом числе испытаний; математическая вероятность становится, таким образом, мерою физической возможности, и одно из этих выражений может быть принимаемо за другое» [1]).

Не могу не заметить, что мне все это построение кажется искусственным и бесполезным: для распространения на явления действительной жизни, как теоремы Бернулли, так и вообще положений и выводов теории вероятностей, поскольку имеются налицо необходимые для численного выражения вероятностей условия, нет надобности прибегать к посредствующему понятию «физической невозможности», которое, притом, и само по себе, вызывает принципиальные сомнения: идеи «моральной вероятности»,—замечает по этому поводу Вундт,—стоят «совсем вне понятия настоящей вероятности», — «соображения этого рода относятся к психологии, а не к учению о вероятности. То-же относится и к попыткам установить нижнюю границу вероятности, при которой она, по своей субъективной ценности, должна быть рассматриваема, как равная нулю»,—«наши опасения и надежды, завися от субъективных условий, не допускают allgemeingültige objektive Grenzbestimmung» [2]). Но даже, если допустить законность понятия «физической невозможности»—во введении этого понятия для обоснования приложимости теории ве-

---

[1]) C o u r n o t, W.-R., перев. Schnuse, стр. 68—69.

[2]) W u n d t, Logik, Bd. I, стр. 431.

роятностей к явлениям действительной жизни, я не вижу надобности. Теория вероятностей — не простые «арифметические исследования» — это «здравый смысл, переложенный на вычисление». И самый способ выражения вероятности, и теоремы произведения, и суммы вероятностей, — все это лишь математические способы выражения вещей, с которыми мы на каждом шагу считаемся именно в реальной жизни: повышения наших надежд с увеличением числа благоприятных шансов и ослабления их с увеличением числа неблагоприятных; большей трудности рассчитывать на совпадение событий, чем на каждое из них в отдельности; большей, напротив, легкости рассчитывать на наступление события, если оно может наступить несколькими способами, и т. д.,—а потому введение понятия «физической» невозможности, как мостика, перебрасываемого между простыми вычислениями и мерою реальных возможностей, является простою тавтологией: мостика не требуется, потому что нет никакой пропасти или оврага, через который требовалось-бы перейти.

Сказанное только-что непосредственно приводит нас к вопросу об объективном или субъективном характере вероятности,—вообще, к вопросу об ее логических первоосновах. Мне кажется, однако, более удобным подойти к этому вопросу с несколько другой стороны, а для этого вернуться к предпосылкам математической или количественно-выразимой вероятности. В числе этих предпосылок понятия «несовместимости» и «исчерпывающего» характера подлежащих счету «случаев» не требуют особых разъяснений. Иначе обстоит дело с понятием «равновозможности». В природе равновозможности нет — всякое событие предопределено своею, определенною совокупностью причин. Даже в опытах и играх, основанных на случае,— и то мы при каждом данном исходе — каждом извлечении карты или шара, выходе номера лотереи и пр., имеем объективно-предопределенную встречу двух скрещивающихся цепей причин: расположения карт, шаров или лотерейных билетов — и движения руки экспериментатора или игрока. Здесь, однако, мы имеем максимум независимости, о каком, предположительно, можно говорить лишь в немногих областях биологической статистики, и решительно нельзя говорить во всей обширной области социальных явлений. Я извлек данный черный шар — это было объективно-необходимым событием. Но достаточно прочесть пространное рассуждение на стр. 183—186 второго издания «Очерков» А. А. Чупрова, чтобы убедиться в том, что двоякая цепь причин, приведших к выходу данного шара, в данный момент находившегося в данном месте урны, нисколько не связана с тем, черный-ли он или красный, и потому цвет шара, в самом деле, является признаком максимально-независимым от всей совокупности условий данного испытания.

В конце концов—повторяю—всегда, даже в специально приноровленной к достижению мыслимой равновозможности обстановке опытов и игр, основанных на случае, объективной равновозможности нет. Мы только не знаем ни той, ни другой цепи причин, приведших к выходу данного шара или данной карты, а тем более—той совокупности обстоятельств, которая привела к их совпадению. Именно в силу этого незнания мы говорим о равновозможности событий, потому что субъективно, в самом деле, не имеем никакого основания ожидать выхода белого, а не черного шара, двойки пик, а не туза бубен. Тем более в реальной действительности, изучаемой статистикой, и в особенности в области явлений человеческого общежития. Умрет-ли в течение года А или Б — это не равновозможные случаи: А, может быть, уже носит в себе смертельную инфекцию, тогда как Б еще предстоит прожить многие годы. Для А, может быть, о возможности преступления не может быть и речи, тогда как Б, действительно, стоит накануне совершения преступления. Но массовое наблюдение не знает ни А, ни Б — оно знает только «людей», человеческие единицы, которые все одинаково рассматриваются, как «подвергнутые испытанию» на смерть или на преступление; иначе говоря — из которых каждая рано или поздно должна умереть, и каждая — рассуждая отвлеченно — может оказаться преступником.

И здесь, таким образом, мы видим ясную связь понятий и представлений, лежащих в основе теории вероятностей, с понятиями, лежащими в основе статистического метода, и, в частности, с понятием случая, случайного события: наступление одного из «равновозможных» событий, обусловливаясь встречею определенной конфигурации постоянных условий с специфическими обстоятельствами единичного испытания или события—например, данного состава шаров в урне с данным их смешением и данным движением руки, вполне подходит под понятие «случайного события», вытекающего из скрещивания независимых серий причин. А так как это скрещивание, в свою очередь, вполне независимо от общего комплекса постоянных причин (состав шаров в урне или карт в колоде!), то по отношению к целой серии испытаний данное событие может быть рассматриваемо, как результат действия «случайных причин» в более тесном специфическом смысле—случайных по отношению к данному комплексу постоянных причин. Или, если взглянуть на эту связь с несколько другой стороны: «равновозможность» — ничто иное, как другой термин для обозначения принципа «уравновешения случайностей»; если события «случайны», каждое из них, в большом числе случаев, имеет одинаковые шансы наступить.

Попутно отмечу важное практическое следствие, вытекающее из начала равновозможности,—важное для практики всякого научного и в частно-

сти—статистического анализа. Следствие это относится к способу выполнения тех наблюдений, которые должны давать материал, могущий быть использованным основанными на принципах теории вероятностей способами. Если именно—поскольку речь идет о самих явлениях или событиях—равновозможность должна быть понимаема в некотором условном смысле, то она должна быть безусловною, поскольку речь идет о выполнении опытов и наблюдений. «процесс осуществления общих условий», или, проще, организация наблюдений или опытов, «должен быть таков, чтобы им исключалась возможность осуществления какого-либо намерения со стороны наблюдателя или экспериментатора, благоприятствующего наступлению той или иной определенной группы случаев» (Czuber). Нечего уже говорить о предвзятых намерениях. Но отсутствия таковых еще недостаточно: пока усмотрению наблюдателя, либо экспериментатора предоставлен какой-либо простор в выборе подлежащих наблюдению или учету случаев, односторонность подбора может получиться даже совершенно независимо от осознанной предвзятости, от намерения повлиять на результат наблюдений, либо опытов: предвзятая идея, укоренившееся представление о нормальном и должном, даже просто привычка, могут повлиять на результат отбора, даже и при лучших намерениях и абсолютной субъективной добросовестности. Наблюдение или эксперимент должны быть, поэтому, организованы так, чтобы для усмотрения исследователя не оставалось ни малейшего простора Поскольку речь идет об играх или опытах с шарами, это достигается тщательной тасовкой карт, перетряхиванием мешка с лотерейными нумерами и т. п. В сфере статистического наблюдения возможность одностороннего подбора устраняется либо путем исчерпывающего перечета всех случаев, входящих в состав данного массового явления, либо, если идет речь о выборочном исследовании, т. е. о таком, которое планомерно ограничивается лишь определенною частью случаев,—«механическим» отбором: по жребью, по алфавитному порядку и т. п. Если отбор в какой-либо мере зависит от усмотрения или соображений наблюдателя, он может и в самом деле оказаться совершенно свободным от какой-либо односторонности и соответствующим принципу «равновозможности», но объективных гарантий этого нет, и всегда остается возможною та или другая односторонность подбора.

Прежде чем идти дальше в рассмотрении вопроса о «равновозможности», представляется необходимым остановиться еще на одном понятии, могущем рассматриваться, как частный случай равновозможности, имеющий, однако, место не всегда и не необходимо: именно, на независимости отдельных случаев — наблюдений или испытаний. Такая независимость имеет место, если каждый из мыслимых результатов последующих испытаний остается одинаково возможным — «равновозможным» при всяком исходе предыдущих. Пусть было произведено три испытания — a, b и c; их возможные исходы $a_1 — a_2 — a_3 \ldots$, $b_1 — b_2 — b_3 \ldots$, $c_1 — c_2 — c_3 \ldots$ и т. д... Независимость будет иметь место, если b_1, b_2, $b_3 \ldots$ остаются «равновозможными» при всяком a, а c_1, $c_2 \ldots$ остаются равновозможными при всяком a и при всяком b, и т. д. В опытах с извлечениями шаров и карт независимость будет иметь место, если вынутый шар или вынутая карта после каждого испытания возвращаются в урну или в колоду, — в противном случае испытания станут зависимыми, по-

тому что после каждого испытания и общее число карт или шаров, и состав урны или колоды, будут не те, что до испытания; в первом случае вероятности каждого исхода при последующих испытаниях остаются точно те-же, что при первом испытании, во втором случае возможности отдельных результатов и вероятности их изменяются. Если взять простейший пример — урну с 7 белыми и 3 черными шарами: в случае возвращения вынутых шаров в урну, состав шаров все время будет оставаться неизменным, и вероятность белого все время будет $^7/_{10}$; если вынутый шар не будет возвращаться в урну, вероятность белого при втором испытании будет, смотря по тому, какой шар вынулся при первом, $^7/_9$, или $^6/_9$, при третьем—$^7/_8$, $^6/_8$ или $^5/_8$, и т. д... Конечно, даже и в случаях первого типа мы имеем дело не с объективною независимостью и равновозможностью последующих испытаний: расположение шаров в урне или карт в колоде, даже движение руки экспериментатора при последующем испытании так или иначе связано с расположением шаров и карт и с движением руки при предыдущем, — но эта связь для нас совершенно неуловима, а потому мы и здесь, как и в более общем случае, можем говорить о «равновозможности» в том ее частном значении, которое отвечает понятию «независимости». В одном, однако, между общим случаем равновозможности и частным случаем независимости есть существенная разница: равновозможность в общем смысле — condito sine qua non применимости теории вероятностей,—мы не имеем вовсе права вычислять математических вероятностей, если имеем основания предполагать неравновозможность отдельных случаев; напротив, зависимость событий не устраняет возможности вычисления вероятностей, если только она укладывается в определенные, выразимые математическими символами формы; она только заставляет видоизменять формулы и приемы вычисления, при помощи которых мы приходим к ответам на те или другие вопросы. В этом мы будем иметь возможность убедиться в следующей-же главе, когда будем говорить об основных теоремах теории вероятностей, а затем, с особыми формулами для зависимых событий нам придется встретиться, когда мы перейдем к вопросу об устойчивости и дисперсии статистических рядов.

Вернемся, однако, к общему вопросу о равновозможности. В противность весьма простым понятиям «несовместимости» и исчерпывающего характера шансов или статочностей, понятие равновозможности— это «именно то понятие, к которому, в сущности, сводится проблематичность значения теории вероятностей для методологии эмпирических наук» (Борткевич)—проблематичность, в результате которой, как мне придется развивать в заключительных главах этой книги, существенное значение, в частности, для статистики, имеют не столько самые приемы исследования, сколько основные принципы теории ве-

роятностей. «Вопросом о том, как следует толковать понятие равновозможности статочностей, занимались много и усердно, и мнения тут разделились. «Субъективистам», для которых «равновозможность» не что иное, как известное отношение познающего ума к явлениям, можно противопоставить «объективистов», согласно которым пользоваться теорией вероятностей в целях изображения действительно происходящего в мире можно лишь при том условии, чтобы понятию равновозможности соответствовало нечто реальное, вне нас существующее», причем «и субъективистическая, и объективистическая точки зрения допускают различные оттенки» [1]). Разноречие между этими точками зрения не останавливается, однако, на вопросе о тех кругах явлений, где можно, или где нельзя предполагать равновозможность, и где, поэтому, уместно или неуместно применять теорию вероятностей,—оно идет и дальше и распространяется и на самое существо понятия равновозможности. Мы встречаемся здесь с двумя принципиально различными точками зрения—одною, из которой исходили первые теоретики учения о вероятностях в его современном виде: Бернулли и Лаплас, и которой держатся такие видные логики, как Дж. Ст. Милль и Зигварт,—и другою, которая может считаться господствующею в настоящее время. Первая—«принцип отсутствующего основания», Prinzip des mangelnden Grundes; вторая—«принцип необходимого» или «решающего основания» (Prinzip des zwingenden Grundes). «Так как нельзя усмотреть основания к тому, чтобы считать различные случаи неравновозможными, то они признаются за равновозможные»,—такова, по Czuber'у, сущность первой из этих точек зрения [2]). Представители второй считают допустимым говорить о «равновозможности» только в том случае, если для этого имеются достаточные, решающие основания. Мы ничего не знаем о том, есть-ли железо на Сириусе, или нет; с первой из охарактеризованных точек зрения вероятность присутствия железа может быть

[1]) Борткевич, „Задачи и концепции", стр. 354.

[2]) Приведу, в виде примера, формулировку этой точки зрения, как она дается у Дж. Ст. Милля. Он исходит из того положения, что вероятность того или другого события не есть качество этого события, а лишь название для той степени основательности, с какою мы или кто-либо другой можем его ожидать". И исходя из этого положения он считает необходимым допустить, что даже и в том случае, если у нас нет совершенно никаких сведений, которыми мы могли-бы руководиться в наших ожиданиях, кроме того, что все случающееся должно представлять собою одну из известного числа возможностей,—даже и тогда мы все-таки можем составить разумное суждение о том, что „одно какое-либо суждение более вероятно для нас, чем другое". Если, например, мы знаем только, что в ящике есть черные и белые шары, „то, с точки зрения благоразумия, совершенно безразлично, на каком цвете мы остановимся; мы должны здесь действовать совершенно так, как если-бы нам заранее было известно, что в ящике находится равное количество черных и белых шаров". Более того—если мы знаем, что число шаров того и другого цвета разное, но не знаем, каких больше и каких меньше,—все-таки „и белый и черный шар будут для

принята равною половине, со второй, при таком полном незнании, вообще, не может быть речи о вычислении математической вероятности. Мы знаем, что в урне есть белые шары, но не знаем сколько; с точки зрения принципа отсутствующего основания, белый и черный шар будут равновозможными событиями, и вероятность белого будет половина, — с точки зрения принципа решающего основания, мы, при столь недостаточном знании, тоже не можем ничего сказать относительно вероятности того и другого цвета. С тем или другим принципом связывается и определенный взгляд, вообще, на объективный или, наоборот, субъективный характер самого понятия вероятности. «Положительное знание представляет собою нечто неизменное, постоянное в предмете нашего суждения, и придает выведенной из него вероятности о б ъ е к т и в н ы й характер,—объективный, ибо независящий от произносящего суждение субъекта. По отношению к такому предмету суждения, о котором нет подобного рода объективного знания, мыслящий субъект может пытаться оценивать объем возможности осуществления отдельных членов дисъюнкции, исходя при этом из имеющейся у него общей осведомленности о предмете, и из результатов подобного рода оценки образовывать вероятности; последние будут, однако, иметь с у б ъ е к т и в н о е значение, будут меняться от субъекта к субъекту, будут меняться даже у данного, произносящего суждение, субъекта, если изменится объем его осведомленности о предмете» (Czuber). «В трактатах по логике—замечает Czuber—обычно выдвигается вперед последнего рода понимание, и исчисление вероятностей характеризуется, как математическая формулировка учения о разделительных суждениях. В работах, имеющих в виду применение исчисления вероятностей, все более выступает на первый план объективный момент, а следовательно, вместе с ним, и принцип необходимого основания».

С отвлеченной точки зрения исчисления вероятностей, как ч и с т о - м а т е м а т и ч е с к о г о учения, весь этот вопрос или вся

нас одинаково вероятным: у нас не будет никакого основания делать ставку скорее на один цвет, чем на другой; выбор между ними будет безразличен, другими словами— будет одинаково случайного характера". То-же самое и в том случае, если нам известно, что шары в урне—трех цветов: при наличном состоянии нашего знания, разумная вероятность против белого шара равна двум шансам против одного, и такая вероятность может быть положена в основу нашего поведения. Ни один здравомыслящий человек не поставил-бы равного со своим противником заклада в пользу белого цвета против черного и красного; но выставить такой заклад против одного черного или одного красного не было-бы неблагоразумно". И в конечном выводе: „даже и в том случае, когда вам неизвестно ничего, кроме числа взаимно друг друга исключающих возможностей, и когда мы находимся в полном неведении относительно их сравнительной повторяемости,—даже и тогда мы можем иметь основания (и притом—подчеркивает Милль—численно определимые), которые заставят нас руководствоваться скорее одним предположением, нежели другим (Милль, Логика, стр. 487—489).

эта совокупность вопросов не имеет значения. «Как ветвь чистой математики,—замечает Лексис,—исчисление вероятностей не имеет надобности считаться с значением вероятности для объективного мира или с отсутствием такого значения; оно ставит его, как определение, и выводы из него рассматривает, как самодель. Достаточно принять, как предпосылки, гипотезу чистого случая, равновозможность и—отчасти—независимость, безразлично, осуществляется-ли какая-либо из них в действительности,—и исчисление вероятностей «строится с такою-же последовательностью и строгостью, как строится из своих основных понятий и аксиом любая другая отрасль математики» [1]). И в соответствии с этим в трактатах с строго математическою трактовкою учения о вероятностях, вроде известного курса А. А. Маркова, мы не находим никаких соображений в обоснование и оправдание понятий равновозможности и т. п., а находим лишь простое перечисление этих предпосылок. А в уже цитированной рецензии на «Очерки» А. А. Чупрова, А. А. Марков не довольствуется простым игнорированием всей интересующей нас проблемы, а высказывается по поводу нея вполне категорически: «Я не стану—говорит он здесь—останавливаться на безнадежном вопросе о том, каковы должны быть данные, чтобы можно было рассматривать вероятность, как определенное число; но я должен установить факт, что исчисление вероятностей всегда предполагает их удовлетворяющими этому условию». А. А. Марков «не защищает основных теорем, связанных с основными положениями исчисления вероятностей—о равновозможности, о независимости событий и т. д.»; он «знает, что можно спорить без конца даже об основных положениях такой, признаваемой всеми точною, науки, как геометрия»,—но этими спорами он не интересуется: «тот, кто не желает признавать основных положений той или иной науки, спокойно может отрицать и все ее выводы, до тех пор, пока он сам не будет на нее опираться. Но тот, кто желает пользоваться выводами науки, прикладывая ее к реальным фактам, не может отрицать основных ее положений и не придавать известной степени реальности ее объектам, не впадая в противоречие с самим собою [2]).

Но для теории статистики положения и выводы теории вероятностей важны не сами по себе, а именно в применении к известным областям реальной действительности. Для теории статистики важно, именно, знать, может-ли, вправе-ли статистик «прилагать выводы науки» исчисления вероятностей «к реальным фактам». А при такой точке зрения на значение теории вероятностей вопрос ставится иначе. Конечно, уже a priori ясно, что в известных пределах теоретическое построение учения о вероятности не может

[1]) Lexis, Z. Th. d. Messenersch., стр. 14

[2]) Марков, „Об основных положениях исчисления вероятностей и о законе больших чисел“, Журн Мин. Нар. Просв., 1911 г., № 2, стр. 369–370.

обойтись без «отсутствующего основания» — в каких, об этом будет речь несколько ниже; потому что иначе мы имели-бы дело не с дисъюнктивным суждением, предполагающим неизвестность того или другого из определенных исходов, и не с вероятностью, а с гипотетическим суждением и с достоверностью. Совершенно другой вопрос, может-ли такое построение о б о й т и с ь о д н и м принципом отсутствующего основания — можно-ли признать его д о с т а т о ч н о ю базой для теории вероятностей. Опять-таки, уже по априорным соображениям почти очевидно, что нет: невозможность обойтись одним этим принципом непосредственно вытекает из самого определения и из способа выражения математической вероятности. Если мы, в самом деле, н и ч е г о не знаем—то откуда берется счет всех возможных и благоприятных статочностей, и что могут, в таком случае, означать сами статочности? Можно-ли говорить о статочностях? Возьмем хотя-бы классический вопрос о существовании железа на Сириусе. Раз мы н и ч е г о не знаем, то какие основания приписывать существованию железа столько-же статочностей, сколько не-существованию? и не мыслимы-ли, в таком случае, любые гипотезы, при которых существование железа, или несуществование его, окажется более, или напротив, менее вероятным? Если мы ничего не знаем о составе шаров в урне, то какое основание исходить из предположения равенства числа белых и черных шаров, когда шары могли быть подобраны в каком угодно составе? Вероятность, равная половине, означает неопределенность — но только в том случае, если данное событие и событие ему противуположное имеют за себя, в самом деле, р а в н ы е шансы; в таком случае, но именно только в таком, мы имеем дело с т о ю неизвестностью, которая символизируется дробью ½. А если число шансов в пользу события есть некоторый x, то число шансов против него может быть любым y'ом, и следовательно, вероятность выразится формулой $\frac{x}{x+y}$, могущей принять какие угодно значения.

Принцип «отсутствующего основания» приводит к безысходным противоречиям, подробно разобранным Крисом на нескольких примерах. Какова, спрашивается, вероятность падения метеора на данной части земной поверхности, раз мы не имеем никаких данных для определения этой вероятности? Мы можем мыслить земной шар разбитым на любое число частей — Дания, Мексика, Московский уезд, Ялта, Благовещенская волость и т. д.; пусть таких частей будет n, в таком случае вероятность падения метеора в той или другой из этих частей будет $\frac{1}{n}$. Мы можем, однако, исходить из совсем другого деления—например, из пяти «частей света» и пяти океанов — тогда вероятность получится $^1/_{10}$; можно считать «части света» иначе — например, считать северную Америку отдельно от южной или принять Европу вместе с Азией за

одну Евразию — получится опять другая вероятность. Но с другой стороны, густо населенная и дифференцированная Европа может распадаться на 1.000 отдельных частей, а Африка—всего на 300—в таком случае падающая на долю Европы общая вероятность $^1/_{10}$ будет $\frac{1.000}{n}$ падающая на долю Африки будет $\frac{300}{n}$ —значит, вероятности при одном способе счета будут равны, при другом—совершенно различны. Или в примере с железом на Сириусе: вероятность присутствия железа на Сириусе (если просто ставить вопрос—есть оно или нет), согласно принципу отсутствующего основания, будет половина. Но если поставить вопрос иначе: вероятность присутствия меди и любого другого из семидесяти земных элементов тоже половина, значит, вероятность, что на Сириусе нет ни одного из земных элементов, по правилу умножения вероятностей, выразится чрезвычайно малою дробью $(^1/_2)^{70}$; если-же поставить вопрос в общей форме — есть-ли на Сириусе земные элементы, и рассматривать присутствие или отсутствие их вообще, как данное и противуположное событие, то вероятность их присутствия выразится, просто, дробью половина.

Ясно, что такой разноголосицы в ответах на один и тот-же вопрос, в зависимости от его постановки или от способов счета, не может быть, и что, значит, принцип отсутствующего основания, приводящий к таким абсурдам, не может выдержать критики. Но это ясно и по другим, частью уже затронутым, соображениям. Из самого определения математической вероятности и из постулата реальности ее положений и выводов неизбежно вытекает, что для установления вероятностей должно быть налицо достаточное основание: надо вполне определенно знать число всех возможных и число благоприятствующих шансов или статочностей, и надо достаточно определенно знать, что это — шансы или статочности, которые мы имеем право принимать за равновозможные, или которых мы, во всяком случае, не имеем основания предполагать неравновозможными. Только в таком случае вероятности и выводы из них получают определенное, реальное, объективное значение и могут служить опорою для научных выводов. Если этих условий нет налицо, мы имеем дело не с настоящими математическими вероятностями, а лишь с некоторыми суррогатами вероятностей.

Изложенные только-что соображения приводят нас назад к уже затронутому в предыдущем изложении противуположению понятий chance и probabilité, как оно было формулировано Пуассоном и Курно. Математики—так формулирует это противуположение Курно — применяют теорию вероятностей к двум совершенно различным категориям вопросов: «к вопросам возможности, имеющим совершенно объективное значение, и к вопросам вероятности, в вульгарном смысле этого слова, относящимся, в самом деле, частью к нашим

сведениям, частью к нашему незнанию», — последняя характеристика имеет в виду формулировку понятия вероятности, принадлежащую Лапласу. Первый случай имеет место, если мы знаем, что кости безусловно правильны, второе—если мы не знаем, каковы свойства данных костей. «Вообще, — продолжает Курно, — если, по несовершенству наших знаний, мы не имеем никакого основания ожидать одной комбинации скорее, чем другой, хотя-бы эти комбинации были события, которых физические возможности имеют одинаковую меру», вероятность «не выражает реального и объективного отношения между вещами и принимает чисто субъективный характер, меняясь от одного субъекта к другому, смотря по степени его осведомленности». Такие вероятности заслуживают внимания философа или моралиста, изучающего мотивы наших суждений,—но они «лежат вне приложений математической теории, имеющей предметом величины, которые можно сравнивать с определенною единицею меры»[1]). Как поясняет комментатор Курно—Mentré, такие вероятности могут иметь и практическое значение, как правило поведения при необходимости выбрать то или другое решение, — «но их значения не будут настоящими мерами, а будут определять лишь ordre de préférence»—степень предпочтения того или другого решения стоящего перед нами вопроса. Для той математической вероятности, выводы которой должны получить приложение к жизненным фактам, в частности, найти себе применение в статистике, необходимо — повторяю — достаточное основание: надо знать число шансов и их равновозможность.

Но «равновозможность», в свою очередь, покоится на двух основаниях: во-1-х, на некоторой объективной осведомленности относительно свойства тех статочностей, из которых надо исходить при вычислении вероятности, и во-2-х, все-таки, на принципе отсутствующего основания, который, значит, не имея права притязать на роль основного принципа теории вероятностей, выступает, однако, в некоторой вспомогательной роли. Мы можем, в самом деле, с некоторым, хотя-бы даже очень значительным, приближением знать те свойства имеющихся «шансов», которые позволяют считать их «равновозможными»,—но не можем иметь убеждения в безусловном тождестве возможностей каждого из шансов; это «физически невозможно», потому что некоторые, может быть, бесконечно малые, различия в возможностях отдельных «шансов», всегда могут остаться неуловленными, даже при самых точных приемах исследования. Мы считаем «шансы» равновозможными, потому что мы не знаем никаких обстоятельств, делающих одни из них более или менее возможными, нежели другие: мы достаточно точно знаем однородность формы и вещества шаров — и ничего не знаем о ка-

[1]) Cournot, Wahrsch.-Rechn., стр. 65—68.

ких-либо деталях в полировке, или о неуловимых различиях в плотности и удельном весе вещества, которые могли-бы определенным образом отражаться на размещении шаров; мы достаточно точно знаем форму и вещество игральной кости — и ничего не знаем о существовании или отсутствии неуловимых неправильностей кости, или таких неравномерностей в распределении массы вещества, которые влияли-бы на местонахождение ее центра тяжести, а следовательно — на возможность падения ею тою или другою гранью кверху. Значит, с одной стороны, мы, так-таки, имеем определенные данные о свойстве каждой из статочностей, а с другой — не имеем данных предполагать неравновозможность. Мы, значит, «все-таки опираемся на принцип отсутствующего основания: мы приписываем каждой из сторон игральной кости равную возможность выхода именно потому, что не имеем основания предполагать какого-либо уклонения ее от правильной формы, которое благоприятствовало-бы выходу какой-либо определенной стороны преимущественно перед другими» (Czuber). И, значит, отвергнутый нами, в качестве основного, принцип отсутствующего основания необходим нам в качестве вспомогательного принципа, ибо без него нельзя было-бы постулировать «равновозможности», а следовательно, нельзя было-бы вычислять вероятностей.

Но именно только в качестве вспомогательного принципа, при наличности, все-таки, достаточно определенного знания данных, говорящих за равновозможность. Как развито Брунсом все на том-же случае игральной кости, от степени приближенности этих данных зависит и характер заключения о вероятности: если кость заведомо правильна, то, во-1-х, нет никаких доводов против равновозможности, и во-2-х, данное строение исключает всякое другое предположение, и принцип отсутствующего основания разрешает вопрос о равновозможности в мыслимо категорической форме. Если правильность кости установлена лишь приблизительно, — этот принцип не может служить, потому что могут быть определенные возражения против равновозможности; ее можно, однако, допустить, как приближение, — но тогда и выводы будут приближенными. Если кость заведомо неправильна, невозможно и такое приближение. Невозможно оно и в том случае, если форма кости заведомо не кубическая, — в таком случае надо подыскать совсем другие соотношения вероятностей, отвечающие этой, не-кубической форме кости [1]). И конечный вывод, опять-таки, гласит, что для обоснованного Wahrscheinlichkeitsansatz — численного определения вероятности, необходимо, прежде всего, определенное объективное знание.

Но такое решение вопроса о роли знания и незнания в обосновании математической вероятности решает и вопрос об объективном

[1]) Bruns, W-R, стр. 15—16

или субъективном характере этой последней — вопрос о том, относится-ли вероятность к известному событию, или-же лишь к нашему суждению об этом событии. «Вероятность того или другого события,—говорит один из ярких представителей последней точки зрения, Дж. Ст. Милль, — не есть качество самого этого события, а лишь название для той степени основательности, с какою мы или кто-либо другой можем его ожидать. Вероятность данного события, как она представляется одному лицу, отлична от вероятности того-же самого события для другого лица или даже для того-же лица, раз оно получит новые данные относительно того-же события. Вероятность для меня того, что тот или другой человек, относительно которого я не знаю ничего, кроме его имени, умрет в течение настоящего года, совершенно меняется, если мне затем скажут, что этот человек находится в последнем периоде чахотки. Однако, это новое сведение не влечет за собой никакой перемены ни в самом событии, ни в тех причинах, от которых оно зависит. Само по себе всякое происшествие достоверно, а не вероятно: если-бы мы знали все, то нам было-бы положительно известно, случится оно, или не случится. Вероятность-же его для нас обозначает ту степень основательности, с какою наши наличные сведения дают нам право ожидать, что данное событие будет иметь место в действительности» [1]). Решительно противуположной точки зрения держится, например, Курно: с его точки зрения «математическая вероятность должна быть рассматриваема, как мера возможности события или легкости его осуществления, и имеет, следовательно, объективное значение, выражая закон, которому подчинены явления и который существует независимо от наших больших или меньших знаний относительно обстоятельств их осуществления» [2]). С не меньшею категоричностью формулируется та-же точка зрения, например, у Вундта: и ему представляется «ясным, что количественная вероятность, в ее разных формах, а равно качественная, опирающаяся на аналогию и индукцию, имеет не менее объективный характер, чем достоверность. Поэтому — настаивает Вундт — нельзя, по примеру некоторых логиков, отделять ее, как чисто-субъективное состояние (Verhalten) от объективной достоверности. Она не более субъективна, чем всякий акт познания, при котором мы auf unsere eigene Gedanken reflektieren» [3]).

Ясно, что выбора между этими двумя точками зрения не может быть. Если стоять на точке зрения необходимости определенного знания — а она единственная, совместимая с существом математической вероятности, то нельзя не признать вместе с Czuber'ом, что вероятность относится к событию, т. е. носит объективный характер, ибо в ее основе лежит положительное знание; это положительное знание

[1]) Милль, Логика, пер. В. Н. Ивановского, стр. 487—488.
[2]) Cournot, назв. соч., стр. 218.
[3]) Wundt, Logik, Bd I, стр. 430—431.

есть «то постоянное, длящееся, что придает вероятностям объективное, ибо независящее от судящего субъекта, значение» [1]).

Все сказанное относится, однако, к равновозможности в одном лишь смысле: в смысле более или менее полного тождества обстоятельств, входящих в состав постоянных условий и связанных с ними постоянных причин, управляющих известным явлением: таких причин, как число шаров и распределение их по цветам, а также свойства шаров—форма и однородность вещества кости,—как состав колоды карт и т. п. Остается, однако, огромная и бесконечно сложная категория случайных причин, участие которых нам известно (а, может быть, и не известно), но о конкретных комбинациях которых мы ничего не знаем; таковы, например, ход тасовки колоды карт или перемешивания шаров в урне, движения руки игрока или экспериментатора и т. п. Здесь можно, просто, сослаться на принцип «исчерпания случая» или на самое понятие случая, которое предполагает, ведь, возможность всех, каких угодно, разновидностей случайного события. Можно, однако, стремиться и доказать равновозможность этого рода случайных условий и обстоятельств. Наиболее обстоятельный анализ этого рода условий, в частности, в применении к играм, основанным на случае, мы находим у Криса, в его Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Этот анализ можно настоятельно рекомендовать вниманию читателя, пользующегося настоящею книгой, как руководством (полезно не только прочесть, но даже прореферировать его!). Но следовать за Крисом в этом анализе мы здесь не будем—это заняло-бы слишком много места, и притом едва-ли вызвалось-бы и особою необходимостью; аргументация Криса представляет собою слишком уже подробное разъяснение таких вещей, которые, в конце концов, самопонятны, а кому они непонятны, тому останутся непонятны и после разъяснений Криса. Если уже нужно, в данном вопросе, какое-либо доказательство, то для этого, во всяком случае, достаточно известной читателю из первой главы схемы Poincaré (стр. 11—12), и в частности—первого ее типа: минимальных различий в причинах, ведущих за собою совершенное изменение следствий. Таких минимальных различий в причинах, с того или другого конца влияющих на исход каждого данного случая, бесконечное множество, и бесконечное множество их комбинаций ведет к наступлению одного—другого—третьего, вообще, каждого из возможных исходов. При малейшем изменении, в одну или другую сторону, данного комплекса случайных причин, вместо одного исхода получается другой: при малейшем, совершенно неуловимом, изменении тасовки, при малейшем уклонении руки, выйдет одна карта вместо другой, или один шар вместо другого. При таких условиях, в самом деле, нет основания считать какой-либо один исход более воз-

[1]) Czuber, W.-R., Bd I, 3-te Anfb., стр. 7.

можным, нежели другой, и есть полное основание считать все возможные исходы равновозможными.

Так или иначе—в понятие «равновозможности» всегда, в большей или меньшей мере, привходит и элемент «отсутствующего основания», неполного знания, и потому точная объективная вероятность, даже в условиях игр, основанных на случае, в самом деле может быть окончательно установлена только опытом, эмпирическою проверкой: априорно вычисленная, в предположении равновозможности, вероятность, будет действительно объективною вероятностью, если величина ее окажется точно совпадающею с полученною из наблюдения частотою. Сплошь и рядом этого не оказывается—повторяю—даже в обстановке опытов и игр, основанных на случае. Приведу характерный пример, заимствованный у Udny Yul'я. Было произведено 4.096 бросаний, каждый раз по 12 костей; за «успех» считался выход 4, 5 или 6 очков, и подсчитывалось число «успехов» в каждой серии бросаний. Само собою очевидно, что, при безусловной «равновозможности» выхода любого очка каждой из костей, число испытаний, не давших ни одного успеха, должно было-бы строго равняться или лишь случайно отличаться от числа испытаний, давших все 12 «успехов», число испытаний с 1, 2 и т. д. успехами должно было-бы равняться числу испытаний с 11, 10 и т. д. успехами, случайные-же отклонения от строгого равенства должны были-бы иметь место в разных направлениях. В действительности, серия из 4.096 12-кратных испытаний дала такие результаты:

0	«успехов»	—	12	«успехов»	—
1	»	7	11	»	11
2	»	60	10	»	71
3	»	198	9	»	257
4	»	430	8	»	536
5	»	731	7	»	847
6	»	948			

Читатель видит: все без исключения комбинации результатов с перевесом «успехов» над «неуспехами» (кроме комбинации с нулем и с 12 «успехами»), дали значительно бо́льшие числа, нежели соотносительные с ними комбинации с перевесом «неуспехов». Очевидно, «равновозможность» была нарушена—какие-то обстоятельства, коренящиеся в форме или в распределении массы костей (может быть, перемещение центра тяжести ближе к граням с меньшим числом очков) более благоприятствовали выходу 4, 5 и 6, нежели выходу 1, 2 или 3 очков.

Однако, и это обстоятельство ничего не изменяет в объективном характере вычисляемых, при наличности рассматриваемых предпосылок, математических вероятностей Эмпирическая проверка может вы

яснить обусловленную недостаточною полнотою наших сведений неточность вычисленной вероятности,—но неточности наблюдения неизбежны при наблюдении любых явлений и процессов, и наши ошибки наблюдения нисколько не мешают объективному характеру этих явлений и процессов. То-же самое и в данном случае: мы можем сделать какую угодно ошибку в определении вероятности,—но раз имеется налицо определенное число и определенное распределение статочностей, раз притом существуют какие-то определенные условия равновозможности,— то вероятность существует вполне объективно, независимо от того, умеем-ли мы или не умеем ее определить, даже независимо от того, будем-ли мы, вообще, ее определять. Это, так сказать, потенциальная вероятность, которая может оставаться нам неточно известною и даже вовсе неизвестною, может вовсе ни в чем не проявляться, но которая непременно проявится, раз будут произведены соответственные наблюдения или предприняты соответственные испытания.

Итак, еще раз: математическая вероятность, интересующая нас, имеет о б ъ е к т и в н ы й характер, и в основе ее непременно должно лежать о п р е д е л е н н о е з н а н и е числа шансов или статочностей и определенные основания считать их равновозможными. Но эти предпосылки относятся именно только к м а т е м а т и ч е с к о й вероятности. Между тем, как выше отмечалось, понятие вероятности, вообще, гораздо шире: в жизни мы постоянно «прикидываем» в с е возможности и сопоставляем их с б л а г о п р и я т с т в у ю щ и м и возможностями,—постоянно приходим к суждениям с характером в е р о я т н о с т и, и этими суждениями руководимся в своих поступках. Э т о, конечно, уже чисто субъективные вероятности, которые каждый, при тех-же обстоятельствах, может представлять себе весьма различно, в зависимости не только от степени своей осведомленности об этих обстоятельствах, но и от своей способности к верной их оценке, от своего, так сказать, глазомера, даже просто от своего более сангвинического или более нерешительного темперамента. И, конечно, т а к и е вероятности не допускают точного количественного выражения. В обыденной жизни, как тоже было выше отмечено, и такие вероятности сплошь и рядом вычисляют в числах. И против этого ничего нельзя иметь, потому что такое численное выражение—один против десяти, пять против одного и т. д.—ясно выражают силу или слабость нашего субъективного ожидания. Но это, все-таки, т о л ь к о способ выражения нашего субъективного, индивидуального психического состояния, а не м а г е м а т и ч е с к и е в е р о я т н о с т и, — и даже выраженные в числах, такие вероятности не могут претендовать ни на малейшее объективное значение: у двух или нескольких наблюдателей или, вообще, интересующихся вопросом лиц, каждая из таких вероятностей может получить совершенно различное численное значение.

ГЛАВА ПЯТАЯ.

Приемы вычисления вероятностей.

В предыдущей главе мы не пошли дальше выяснения существа понятия вероятности вообще и математической вероятности — в частности,—ее предпосылок и способов ее выражения. Математические вероятности — предмет всего математического учения о вероятностях — теории или исчисления вероятностей. Его основа — вероятность единичного события; его задача — определение вероятностей разных, более или менее сложных, событий, так или иначе слагающихся из простых событий с данными вероятностями. Чтобы уяснить себе, каким образом теория вероятностей подходит к разрешению этой своей основной задачи, мы должны вернуться к тому самому понятию «равновозможности», анализом которого мы закончили предыдущую главу.

Читатель познакомился в предыдущей главе с почти безвыходными принципиальными трудностями, с какими мы встречаемся в вопросе о равновозможности. Есть, однако, и другие трудности, осложняющие технику определения математических вероятностей, но при целесообразной технике вполне разрешимые, — и благодаря именно этого рода трудностям иногда легко признать за равновозможные такие события, которые не равновозможны даже и в разъясненном на самых последних страницах предыдущей главы, несколько условном смысле. Не все то представляется «событием», «случаем» с точки зрения теории вероятностей, что есть событие с обыденной, житейской точки зрения, или что непосредственно воспринимается при научном наблюдении. Сплошь и рядом событие, понимаемое в житейском смысле, может наступить в нескольких различных видах,—и тогда каждую из таких разновидностей приходится считать, при вычислении вероятности, за особое «событие» или «случай». Если в урне пять шаров пяти различных цветов—выход шара каждого цвета будет, действительно, равновозможным с выходом всех остальных цветов «событием», потому что каждое из этих «событий» может наступить только одним способом. Каждая из шести граней игральной кости отмечена соответствующим одному из шести первых чисел количеством очков,—

значит, выход, при бросаниях кости, единицы, тройки или пятерки будут тоже событиями вполне равновозможными. Совсем другое, если в урне имеется, положим, два белых и восемь черных шаров—в таком случае извлечение белого и черного *не* будут событиями равновозможными, потому что «белыми» будут всего два, «черными»—восемь могущих быть извлеченными, каждый порознь, шаров; извлечение «черного» может, значит, последовать в виде вчетверо большего числа «событий», нежели извлечение белого,—«черным» может оказаться *один из восьми* могущих попасться под руку шаров, «белым»—только *один из двух*. Равным образом, при бросаниях монеты—игре в орлянку, *не* будут равновозможными «событиями»: бросить два раза орел—или бросить орел и решетку. Два раза орел может получиться только одним способом: орел — еще раз орел, тогда как орел и решетка — двумя: орел — решетка, решетка — орел. Значит, практически интересующее игрока сложное событие: орел и решетка, будет комбинацию, за которую есть вдвое больше возможностей, чем за комбинацию орел — орел. Последствия ясны. Если ошибочно признать, в первом примере, выход черного и белого за равновозможные «события», вероятность каждого такого события будет половина; если принять в рассчет разницу в числе шаров того и другого цвета, вероятность белого будет $^2/_{10}$ или $^1/_5$, вероятность черного—$^8/_{10}$ или $^4/_5$; если признать равновозможными «событиями» двукратный выход орла и орел—решетку, вероятность той и другой комбинации будет половина; если учесть разницу в числе соответственных возможностей, вероятность первой комбинации будет ¼, второй—½. Значит, дело первостепенной важности: выяснить в каждом конкретном случае, в какой мере явления или события, как они понимаются в житейском смысле, или как они непосредственно представляются нашему наблюдению, могут быть рассматриваемы, в самом деле, как равновозможные «события» или «случаи»,—если-же они оказываются *не* равновозможными, то разложить каждое из них на простейшие, в самом деле равновозможные события, сосчитать последние и вычислить вероятности составляющихся из них сложных событий или явлений.

Наиболее непосредственный прием разрешения вытекающих из обстоятельств указанного характера задач *с неравновозможными статочностями* — это *простой счет* возможных комбинаций. Поясним сущность этого приема на нескольких примерах,— подчеркивая, однако, заранее, что это — именно не более, как примеры, потому что приемы счета могут быть весьма различны, иногда и очень сложны, и едва-ли могли-бы быть уложены в какие-либо общие правила.

1 Так называемая «задача Даламбера» Вычислить вероятность выхода орла, при двух бросаниях, *хотя-бы один раз*. Возможные комбинации:

ОО — ОР — РО — РР.

Всех комбинаций четыре; орел, «хотя бы один раз», получается в первых трех комбинациях,—следовательно, искомая вероятность ¾.

Сам Даламбер допустил, при решении этой задачи, известную в истории учения о вероятностях «ошибку Даламбера». Он рассуждал так: если сразу вышел О, то второе испытание не нужно; если первое дало Р, второе может дать либо О, либо Р,—следовательно, может иметь место всего три комбинации:

О — РО — РР

—всего, значит, три возможных комбинации, из которых отвечают заданию две,—вероятность $^2/_3$. Ошибка в том, что перерыв игры не уничтожает возможности связанных с первым результатом комбинаций; между тем, за первым результатом могло бы последовать и О, и Р,—значит, этот первый результат соответствует не одному, а двум шансам, следовательно, он не элементарен и не равновозможен с остальными.

2. При двух бросаниях игральной кости, какова вероятность, что хотя бы один раз получится 6 очков? Шесть очков может получиться или при одном только первом броске—получаются комбинации

61 — 62 — 63 — 64 — 65,

или только при втором — соответствующие комбинации будут

16 — 26 — 36 — 46 — 56,

или при обоих,—этот случай дает одну комбинацию

66

—всего получается 11 комбинаций, отвечающих заданию. Общее число всех статочностей получаем, комбинируя каждый из возможных результатов первого броска с каждым из возможных результатов второго: одно очко при первом испытании может комбинироваться с 1, 2, 3, 4, 5 и 6 при втором, то же самое два, три и т. д. очков,—значит, каждый из возможных шести результатов первого испытания может комбинироваться с шестью возможными результатами второго. Значит, всех возможных комбинаций 6 . 6 = 36, а искомая вероятность получается $^{11}/_{36}$.

3. Определить вероятность всех возможных сумм очков, какие могут получиться при двух бросках кости.

Число всех возможных статочностей получено при решении предыдущей задачи—оно равно 36. Статочности для отдельных сумм вычисляются следующим образом.

Суммы 12 и 2 могут получиться, каждая, только одним способом (6 6 и 1 1) — вероятность каждой из них $^1/_{36}$.

Суммы 11 и 3 могут получиться, каждая, двумя способами. 11 может получиться только как сумма из 5 и 6,—но эти числа могут получиться двояко: 5—при первом и 6—при втором бросании, или наоборот; подобным же образом сумма 3 может получиться только из 1 и 2, но тоже двояким способом. Следовательно, вероятности каждой из этих двух сумм $^2/_{36} = ^1/_{18}$.

10 очков может получиться как сумма из 5 и 5, 4 и 6, 6 и 4; подобным же образом 4 может получиться из комбинаций 2 и 2, 3 и 1, 1 и 3; той и другой сумме отвечает, значит, три статочности,—следовательно, вероятность каждой из них $^3/_{36} = ^1/_{12}$.

9 очков может получиться из комбинаций 4 и 5, 5 и 4, 3 и 6, 6 и 3; подобным же образом 5 очков может получиться как сумма из 1 и 4, 4 и 1, 2 и 3, 3 и 2; каждой из этих сумм отвечает, значит, четыре статочности, а следовательно, их вероятности будут $^4/_{36} = ^1/_9$.

8 очков может получиться пятью способами: 4 4—3 5—5 3—2 6—6 2; пятью же способами может получиться сумма 6, именно. 3 3—2 4—4 2—1 5—5 1; вероятности каждой из них $^5/_{36}$.

Сумма 7 может получиться шестью способами: 6 1—1 6—2 5—5 2—4 3—3 4; вероятность ее $^7/_{36}$.

4. Вычислить вероятность получения, при трех бросках, сумм 9, 10, 11 и 12

Общее число всех статочностей получаем, комбинируя каждый из 36 исходов, возможных при первых двух бросаниях, с шестью возможными исходами при третьем,—получается $36 . 6 = 216$ Полный перечет числа благоприятных статочностей делаем только для суммы 9 она может получиться из чисел

1 2 и 6 (в вариантах 1 2 6—1 6 2—2 6 1—
2 1 6—6 1 2—6 2 1)—всего статочностей .. 6
1 3 и 5 (1 3 5—1 5 3—3 1 5—3 5 1—
5 1 3—5 3 1)—всего статочностей 6
1 4 и 4 (1 4 4—4 1 1—4 1 4)—всего статочн ... 3
2 2 и 5 (2 2 5—2 5 2—5 2 2)—всего статочн. ... 3
2 3 и 4 (2 3 4—2 4 3—3 2 4—3 4 2—
4 2 3—4 3 2)—всего статочностей 6
3 3 и 3—может получиться только одним способом 1

—всего, значит, 25 статочностей, и, следовательно, вероятность данной суммы $^{25}/_{216}$. Для облегчения дальнейшего счета статочностей достаточно заметить, что комбинация трех одинаковых чисел дает всего одну возможность, комбинации, где входит по две одинаковых, дают по три, комбинации с тремя разными числами—по шести статочностей. Применяя этот принцип, получаем:

для суммы 10—такие комбинации 1 3 6 (6 ст.), 1 4 5 (6 ст.), 2 2 6 (3 ст.), 2 3 5 (6 ст.), 2 4 4 (3 ст.), 3 3 4 (3 ст.)—всего 27 статочностей, и вероятность данной суммы $^{27}/_{216} = ^1/_8$;

для суммы 11—комбинации: 1 4 6 (6) —1 5 5 (3) —2 3 6 (6) —2 4 5 (6)—3 4 4 (3) – 3 3 5 (3),—всего 27 статочностей, и вероятность $^{27}/_{216}$ или $^1/_8$;

для суммы 12—комбинации: 1 5 6 (6) —2 5 5 (3) —2 4 6 (6) —3 4 5 (6)—3 3 6 (3) —4 4 4 (1),—всего 25 статочностей, и вероятность $^{25}/_{216}$.

Общая сумма статочностей для всех четырех комбинаций $25 + 27 + 27 + 25 = 104$, а общая вероятность получить любую из этих сумм $= ^{104}/_{216}$.

Уже в последнем из приведенных только-что примеров непосредственный счет статочностей потребовал бы—особенно, если вычислять вероятности всех сумм, от минимальной 3 и до максимальной 18, довольно громоздких, хотя, в конце концов, и очень простых вычислений. Между тем, это еще один из мыслимо простейших случаев. Вычисления, оставаясь простыми, станут, однако, чрезвычайно затруднительными, если задать себе аналогичные задачи для 10, для 20 бросаний, и они станут «физически невозможными», если разрешать этим приемом какую-либо из тех мало-мальски сложных задач, с какими приходится иметь дело теории вероятностей. Ясно, что для сложных случаев нужны какие-то другие, менее громоздкие приемы. Таковыми являются, в первую очередь, формулы комбинаторики, иначе—

теории соединений к которым—как читатель припомнит—Курно сводит, и из которых он непосредственно выводит всю, собственно математическую, теорию вероятностей.

Самую простую из этих формул мы уже получили, в сущности, на двух последних из только-что разобранных частных примеров Это именно.

1. Формула вариаций. Характер и смысл ее станет окончательно ясным, если мы проследим несколько последовательных стадий решения одной из простейших задач этого типа. Требуется определить число всех возможных комбинаций чисел при последовательных бросаниях игральной кости.

При двух бросаниях: одно очко первого бросания может комбинироваться с каждым из шести очков при втором—6 комбинаций; два очка первого тоже—6 комбинаций, подобным же образом по шести комбинаций получается для каждого из остальных возможных исходов первого бросания, значит, каждому из шести возможных результатов первого бросания, от 1 до 6, отвечает по шести возможных комбинаций с результатами второго, тоже от 1 до 6,—всем шести возможным результатам первого бросания — $6 \times 6 = 36$, или 6^2 комбинаций.

При трех бросаниях: 1 при третьем бросании может комбинироваться с 1 1, 1 2, 1 3..., 2 1, 2 2. 2 3..., 3 1, 3 2..., 6 1, 6 2, . ., 6 5. 6 6,—итого с 36 возможными комбинациями результатов первых двух бросаний; подобным же образом, с 36 комбинациями первых двух бросаний может комбинироваться второй возможный при третьем бросании результат 2,—равным образом результат 3 и т. д.—вообще каждый из возможных при третьем бросании шести результатов. Значит, всех возможных, при трех бросаниях, комбинаций $36 \times 6 = 216$, или 6^3.

При четырех бросаниях каждый из возможных результатов четвертого бросания, от 1 до 6, может комбинироваться с каждою из 216 комбинаций, мыслимых при первых трех бросаниях,—следовательно, общее число возможных комбинаций будет $216 \times 6 = 1.296 = 6^4$.

Ясно, что то же рассуждение может быть продолжаемо до любого, сколь угодно большого, числа бросаний и распространено на любые числа возможных первоначальных результатов,—откуда вытекает такая общая формула вариаций:

$$V_n^r = n^r,$$

где n число элементов, r число повторений, и притом r может быть и меньше и больше n

Более непосредственное значение для дальнейшего имеет

2. Формула перестановок: из n предметов составить все возможные группы, куда входили бы все n предметов, составляя группы, различающиеся между собой не составом (который во всех случаях один: n данных предметов), а только порядком предметов Соответственную формулу легко вычислить, проследив несколько простейших случаев

Два предмета, которые означаем цифрами 1 и 2:

$$\left.\begin{matrix}1\ 2\\2\ 1\end{matrix}\right\}\ 2\ \text{комбинации} = 1 \times 2$$

Три предмета, которые обозначаем 1, 2 и 3:

$$\left.\begin{matrix}1\ 2\ 3,\ 1\ 3\ 2\\2\ 1\ 3,\ 2\ 3\ 1\\3\ 1\ 2,\ 3\ 2\ 1\end{matrix}\right\}\ 6\ \text{комбинаций} = 1 \times 2 \times 3$$

Четыре предмета—1, 2, 3 и 4:

$$\left.\begin{matrix}1\,2\,3\,4,\ 1\,2\,4\,3,\ 1\,3\,2\,4\\ 1\,3\,4\,2,\ 1\,4\,2\,3,\ 1\,4\,3\,2\end{matrix}\right\}\ \text{6 комбинаций.}$$

—подобным же образом получается по шести комбинаций, начинающихся с 2-х, и по шести комбинации, начинающихся с трех и с 4-х,—всего, значит, 24 комбинации $= 1 \times 2 \times 3 \times 4$.

Обобщая эти частные случаи на любое число предметов n, получаем общую формулу перестановок

$$P_n = 1 \times 2 \times 3 \ldots n,$$

т. е. так называемый «факториал» числа n,—произведение всех кряду целых чисел от единицы до n, обозначаемое, обычно, символом $n!$. И совершенно понятно, почему должна получаться именно такая формула: каждый новый, n-ый элемент комбинируется со всеми возможными перестановками n—1 элементов, притом в каждой комбинации этот новый элемент может быть вставлен на каждое из n мыслимых мест [n 1 2 ... (n—1), 1 n 2 3 ... (n—1), 1 2 n 3 ... (n—1), ... , 1 2 3 ... (n—1) n].

Какие при этом получаются числа, видно из следующих примеров $P_5 = 1 \ldots 5 = 120$, $P_7 = 1 \ldots 7$ или $7! = 5040$, $P_{10} = 1 \ldots 10$ или $10! = 3.628.800$ и т. д.

Чтобы перейти к дальнейшим формулам, начнем с частных примеров. Слово МОСКВА дает, по формуле $P_6 = 6! = 720$ перестановок. Но возьмем, например, слово САМАРА. В этом слове трижды повторяется одна и та же буква А, тогда как в слове МОСКВА нет повторяющихся букв. Если обозначить каждый из трех случаев появления буквы А особым значком—a_1, a_2, a_3, то любая комбинация согласных, например, С М Р с тремя означенными вариантами А на трех последних местах даст такие комбинации:

С М Р a_1 a_2 a_3, С М Р a_1 a_3 a_2, С М Р a_2 a_1 a_3, С М Р a_2 a_3 a_1,
С М Р a_3 a_1 a_2, С М Р a_3 a_2 a_1,

а всего 6, или $1 \times 2 \times 3$ комбинации. Теперь, общее число всех мыслимых комбинаций из шести букв, составляющих слово САМАРА, считая каждый вариант А за особую букву, будет, по формуле $P_6 = 6! = 720$. Но ведь в действительности все три варианта А—это одна и та же буква, а потому каждые шесть комбинаций с одинаковым размещением гласной А между тремя одинаково размещенными согласными—например, все шесть комбинаций СМРааа, все шесть СаРааМ и т. д., должны считаться за одну комбинацию, независимо, если можно так выразиться, от индивидуальности каждого а. Значит, каждые шесть из 720 комбинаций, полученных по формуле $P_6 = 6!$, должны быть рассматриваемы, как одна комбинация, и, следовательно, общее число комбинаций 720 должно быть уменьшено в шесть раз. Следовательно, общее число комбинаций из шести букв слова САМАРА будет

$$\frac{720}{6} = \frac{6!}{3!} = 4.5.6 = 120$$

Обобщая этот частный случай, получаем формулу

3. Перестановок с повторениями, отличающуюся от предыдущей тем, что она имеет в виду перестановки при наличности одного или нескольких повторяющихся элементов:

$$P_{n\,(k)} = \frac{n!}{k!}, \quad P_{n\,(k,\,l)} = \frac{n!}{k!\,l!}, \quad P_{n\,(k,\,l,\,m)} = \frac{n!}{k!\,l!\,m!},$$

где n—общее число элементов, k, l, m и т. д.—числа повторений первого, второго и т. д. повторяющихся элементов.

В виде примеров можно взять буквы слова ПЕРЕПРАВА—четыре повторяющих элемента — П, Е, Р, А, каждый по два раза. Число перестановок будет

$$P_{9\ (2,\ 2,\ 2,\ 2)} = \frac{9!}{2!\ 2!\ 2!\ 2!} = 22.680.$$

Буквы слова КОЛОКОЛ—три повторяющихся элемента: К и Л по два раза, О—три раза. Число перестановок будет

$$P_{7\ (3,\ 2,\ 2)} = \frac{7!}{3!\ 2!\ 2!} = 210.$$

Дальнейшая формула—это

4 Размещения s предметов по m — группы, содержащие по m предметов из общего числа s предметов, при чем, конечно, m может быть только меньше или равно s (в последнем случае, очевидно, размещения переходят в перестановки, и к ним применяется предыдущая формула),— и отличающиеся и составом, и порядком. Возьмем, например, известные «три карты» из Пушкинской „Пиковой Дамы": тройка — семерка — туз. Это будет одно из мыслимых «размещений» из 52 карт по три; для игрока было важно не только, чтобы вышли данные три карты, но и то, чтобы они вышли именно в определенном порядке.

Подойдем к выводу формулы от частных случаев. Берем размещения первых четырех чисел по два—мыслимы такие комбинации. 2 1 — 1 2, 1 3 — 3 1, 1 4 — 4 1, 2 3 — 3 2, 2 4 — 4 2; 3 4 — 4 3,—всего 12 мыслимых комбинаций $= 4 \times 3 = 4 \times (4 - 2 + 1)$.

Берем затем размещения первых пяти чисел по три. Первые три числа возможны в таких комбинациях: 1 2 3 — 1 3 2 — 2 1 3 — 2 3 1 — 3 1 2 — 3 2 1,—значит, в шести перестановках; затем возможны комбинации чисел: 1 2 4 (6 перестановок), 1, 2, 5 (6 перестановок), дальше по шести же перестановок каждой из следующих групп по три: 1 3 4, 1 3 5, 1 4 5, 2 3 4, 2 3 5, 3 4 5,—всего, значит, десять групп по три (остальные группы, начинающиеся с 2, 3, 4 и 5, были бы повторениями той или другой из этих десяти—например, группа 2 1 3 была бы повторением группы 1 2 3), каждая в шести перестановках,—всего, значит, 60 возможных соединений $= 5 \times 4 \times 3 = 5\ (5-1)\ (5-2) = 5\ (5-1)\ (5-3+1)$.

Обобщая эти примеры, получаем общую формулу:

$$A_s^m = s\ (s-1)\ .\ .\ .\ (s-m+1)$$

Общее доказательство этой формулы:

Размещения из m предметов по одному — все равно, что простой перечень. 1, 2, 3.... m

Размещения по два: 1 с 2, с 3, с 4 ..., с m,—всего m—1 размещений (ибо с самим собой число комбинироваться не может)
2 с 1, 2 с 3.....; 2 с n.,—всего m—1 размещений
3 с 1, 3 с 2.. ..., 3 с m,—всего m—1 размещений
. . . . . .
m с 1, m с 2 ....., m с m—1,— всего,

} m раз

значит, мыслимых комбинаций

$$m\ (m-1) = m\ (m-2+1).$$

Размещения по три: (1 2) 3, (1 2) 4, (1 2) 5, ..., (1 2) m — к каждому

размещению по два приписываются остальные элементы; их оставалось m—2,— следовательно, размещений по три, начинающихся с единицы, возможно m — 2 Подобным же образом, m—2 размещений по три получается из каждого размещения по два; но последних было m (m — 1), следовательно, общее число всех возможных размещений по три будет

$$m(m-1)(m-2) = m(m-1)(m-3+1).$$

Замечаем, что в последнем множителе вычитаемое всегда на единицу меньше числа элементов, входящих в каждую отдельную перестановку, — следовательно, при числах s и m, т. е в формуле, выраженной в общем виде, последний член будет (s — m + 1), и вся формула получает уже известный нам вид

$$A_s^m = s(s-1)(s-2)\ldots(s-m+1).$$

По этой формуле, вероятность комбинации «тройка—семерка—туз» вычислится следующим образом:

$$A_{52}^3 = 52\ (52-1)\ (52-2) = 52\ \ 51.\ 50 = 132.600,$$

и вероятность $p = \frac{1}{132.600}$.

Непосредственно из этой формулы и из формулы перестановок получается наиболее важная для нас формула.

5 Сочетаний, под каковыми разумеются группы из s предметов по m, отличающиеся только составом, но не порядком, который, таким образом, представляется безразличным. С этим случаем мы имели бы дело, если бы для игрока, по условиям игры, было безразлично, выйдут ли «три карты"—тройка, семерка, туз—в этом именно, или в любом ином порядке.

Характер формулы для этого типа комбинаций ясен из каждого «сочетания», т е каждой комбинации из определенного числа предметов, независимо от их порядка (например, из комбинаций 1 с 2 и с 7, 1 с 3 и с 7, 1 с 4 и с 7 и т. д), может получиться столько «размещений», сколько «перестановок» возможно из данного числа предметов Следовательно, число „размещений во столько раз больше числа «сочетаний» и обратно, число «сочетаний» во столько раз меньше числа размещений, сколько возможно перестановок из входящего в каждую комбинацию числа элементов Значит, если обозначить формулу сочетаний через C_s^m (где s общее число элементов, а m число элементов, входящих в каждую комбинацию), и остаться при принятых выше обозначениях для формул размещений и перестановок, то, очевидно, из одного сочетания получится P_m размещений, а из C_s^m сочетаний — $C_s^m \cdot P_m$ размещений. Отсюда

$$C_s^m \cdot P_m = A_s^m,$$

а, следовательно,

$$C_s^m = A_s^m : P_m$$

или, подставляя вместо A_s^m и P_m выведенные для них выше формулы

$$C_s^m = \frac{s(s-1)\ldots(s-m+1)}{1.\ 2.\ 3\ldots.\ m}.$$

Ту же самую формулу выражают и в другом виде. Именно, умножая и числителя. и знаменателя на (s—m) ..... 2 1, получаем.

$$C_s^m = \frac{s(s-1)\ldots(s-m+1)(s-m)\ldots.\ 2.1.}{1.\ 2.\ 3.\ldots.\ m.(s-m)\ldots.\ 2.\ 1} =$$

$$= \frac{1.\ 2.\ 3.\ldots\ s}{1.\ 2.\ 3.\ldots\ m.\ 1.\ 2.\ 3.\ldots.\ (s-m)} = \frac{s!}{m!\,(s-m)!}$$

Так как, собственно, эта формула-та, которая будет иметь для нас, в дальнейшем, наиболее существенное значение, то представляется нелишним привести здесь несколько примеров:

а Собрание из 100 депутатов выделяет из своей среды, по жребию, комиссию из 5 человек. Какова вероятность того, что все эти пять человек окажутся из состава меньшинства данной палаты, в котором числится 40 депутатов?

Очевидно, числителем, т. е. числом благоприятствующих нашему заданию случаев, будет n_1—число всех мыслимых сочетаний по пяти, какие можно образовать из 40 депутатов меньшинства, знаменатель, т. е. общее число всех возможностей, будет n_2—число всех возможных сочетаний, какие можно образовать из всех ста депутатов, беря их тоже по пяти; сочетаний, а не размещений, потому что порядок, в каком пять депутатов будут выходить по жребию, безразличен, а важен только состав комиссии. Пользуясь приведенною только-что формулою C_s^m в первом виде, получаем.

$$n_1 = C_{40}^5 = \frac{40.39.38.37.36}{1.2.3.4.5}, \quad n_2 = C_{100}^5 = \frac{100.99.98.97.96}{1.2.3.4.5}$$

и, следовательно, искомая вероятность p (за сокращением знаменателей) будет

$$p = \frac{40.39.38.37.36}{100.99.98.97.96} = \frac{13.19.37}{10.11.98.97} = \frac{9139}{1,045,660}, \text{ т. е около } \frac{1}{114}.$$

б При тех же условиях определить вероятность того, что в составе комиссии будут пропорционально представлены большинство и меньшинство, т. е будет из большинства три, и из меньшинства два депутата. Мы имеем здесь случай умножения вероятностей (см. ниже), потому что такое распределение мест в комиссии представляет собою совпадение двух событий—вхождения стольких-то из большинства и стольких-то из меньшинства Следовательно, обозначая вероятность вхождения трех членов от большинства через $p_б$, и двух членов от меньшинства через $p_м$, а общую вероятность интересующего нас состава комиссий через p, получаем

$$\left.\begin{aligned} p_б &= \frac{n_б}{n_I} = \\ &= \frac{60.59.58}{100.99.98} \end{aligned}\right\} \text{ где } n_б = \frac{60.59.58}{1.2.3}, \; n_I = \frac{100.99.98}{1.2.3}$$

$$\left.\begin{aligned} p_м &= \frac{n_м}{n_{II}} = \\ &= \frac{40.39}{100.99} \end{aligned}\right\} \text{ где } n_м = \frac{40.39}{1.2}, \quad n_{II} = \frac{100.99}{1.2}$$

Откуда

$$p = p_б \cdot p_м = \frac{60.59.58}{100.99.98} \cdot \frac{40.39}{100.99}$$

При помощи той же формулы могут быть разрешены, например, такие задачи:

в. Определить вероятность выхода, при игре в лото с 90 нумерами, одного из девяти однозначных чисел.

г. Определить число всех возможных комбинаций по пяти чисел в той же игре.

д. Определить число всех возможных сдач карт из полной колоды в 52 карты, считая, что карты раздаются четырем игрокам.

Возвращаясь, затем, к приведенным выше двум выражениям формулы C_s^m, скажем два слова по вопросу о том, какая из них удобнее для пользования. Некоторая разница, в этом отношении, есть только в том случае, если число элементов, входящих в отдельные комбинации m, значительно меньше общего числа элементов s Если первое из этих чисел лишь немногим меньше второго, то сколько-нибудь существенной разницы нет Это ясно видно хотя бы на таких двух примерах:

C_{10}^2 по первой формуле напишется $\frac{10.9}{1.2}=45$

по второй » » $\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}{1.2.1.2.3\ 4.5.6.7.8}=45.$

Ясно, что первая формула в этом случае и короче и требует несравненно меньшего количества вычислений.

C_{10}^8 по первой формуле будет $\frac{10\ 9.8.7.6\ 5\ 4\ 3}{1.2.3.4.5.6.7.8}$

по второй » » $\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}{1.2.3.4.5.6.7.8.1.2}$

Здесь такой резкой разницы, очевидно, нет.

Собственно нам формулы комбинаторики или теории соединений нужны, главным образом, для дальнейшего—именно для вывода математической формулировки закона большого числа (теорема Бернулли-Лапласа). В остальном формулы комбинаторики, в рамках занимающих нас вопросов, имеют мало применения. Гораздо более непосредственное значение для нас имеют так называемые «основные теоремы» теории вероятностей, играющие в этой теории и в исчислении вероятностей приблизительно такую же роль, какую известные «четыре правила» или четыре действия играют в арифметике. С применением их приходится встречаться на каждом шагу, при разрешении самых разнообразных вопросов; в частности, они позволяют несравненно проще решать и многие из таких вопросов, какие могут быть решены и при помощи формул комбинаторики.

Эти основные теоремы — теорема суммы или сложения вероятностей и теорема произведения или умножения вероятностей. В краткой формулировке Борткевича, сущность этих двух теорем следующая: «1. Вероятность события, которое может наступить несколькими, взаимно друг друга исключающими, способами, равна сумме вероятностей наступления каждого из этих способов. 2. Вероятность сложного события, представляющего одновременное или последовательное совпадение нескольких, независимых одно от другого, простых событий, равна произведению вероятностей этих простых событий», при чем—как мы уже знаем—«понятие независимости событий имеет здесь тот смысл, что вероятность одного из простых событий не претерпевает никакого изменения от наступления или ненаступления другого такого же события»

Для выяснения, в самом общем виде, существа, сразу, той и другой теоремы, берем, сначала, простейший пример: вычисления вероят-

ности каждой из возможных комбинаций результатов при одновременном или последовательном бросании трех монет. Всех мыслимых здесь комбинаций или результатов, в том смысле, как они непосредственно интересуют игрока, четыре: три раза орел, два раза орел и один раз решетка, один раз орел и два раза решетка, три раза решетка. Падение монеты орлом (О) или решеткой (Р)—события, предполагаемые равновозможными, и вероятность каждого из этих двух возможных результатов однократного бросания равна ½. Но комбинации этих простейших событий не равновозможны: троекратный выход орла мы можем представить себе только в одном виде: О—О—О,— также точно и троекратный выход решетки. Напротив, комбинация двух О и одного Р может иметь место в трояком виде: О—О—Р, или О—Р—О, или Р—О—О,—иначе говоря, монета может упасть решеткой и при первом, и при втором, и при третьем бросании, и это не отразится на практически важном результате; тремя же способами может получиться двукратный выход решетки и однократный выход орла— орел может получиться и на первом, и на втором, и на третьем месте. Равновозможных «случаев», каждый из которых будет комбинацией из трех простых «событий», может быть, значит, не четыре, а восемь, которые естественным образом сгруппируются в четыре категории, соответствующие четырем, могущим интересовать нас, результатам испытаний:

ООО . . . . . — трехкратный выход орла,
РОО — ОРО — ООР — дважды орел и раз решетка,
РРО — РОР — ОРР — дважды решетка и один раз орел, и
РРР . . . . . — трехкратный выход решетки.

Всех мыслимых комбинаций из трех единственно возможных простых событий—повторяю восемь, вероятность каждого из них ⅛. Из них одна приводит к троекратному падению орла и одна — к троекратному падению решетки—иначе говоря, та и другая комбинация может осуществиться только в одном виде или в одном случае из восьми; значит, вероятность той и другой ⅛. Напротив, к двукратному падению орла и однократному выходу решетки приводят три из перечисленных комбинаций, и три же приводят к однократному падению орла и двукратному падению решетки; значит, три из восьми возможных комбинаций, имеющих, каждая, вероятность ⅛, благоприятствуют результату 2 О и 1 Р, и столько же— результату 1 О и 2 Р, и ни одна из этих трояко-возможных, приводящих к данному результату, комбинаций, не имеет за себя больше оснований, нежели остальные пять. Следовательно, вероятность того и другого из этих двух, если можно так выразиться, смешанных результатов выражается дробью ⅜.

Все сказанное представляет собою простой перечет возможных статочностей. Между тем, на одном этом примере мы уже сразу мо-

жем убедиться в справедливости обоих выше формулированных теорем. Вероятность каждой из единственно-возможных при трехкратном бросании комбинаций, сущность которых сведется, ведь, к совпадению трех более простых событий, равна одной восьмой, то-есть ½ × ½ × ½,—произведению вероятностей трех единственно-возможных простейших событий. Вероятность как двукратного выхода орла при однократном выходе решетки, так и двукратного выхода решетки при однократном выходе орла, т. е., в том и другом случае результатов, каждый из которых может получиться в трояком виде, равна трем восьмым или ⅛ + ⅛ + ⅛, т. е. сумме вероятностей наступления события каждым из тех трех различных способов, какими может осуществиться та и другая комбинация.

Разберем теперь обе эти теоремы несколько подробнее, в связи с понятиями полной и сложной вероятности.

Полная вероятность, или, как ее, очень удачно, характеризует Czuber, вероятность des Entweder-Oder, вероятность любого из подходящих под определенную субсуммирующую характеристику событий, — это вероятность события, могущего наступить несколькими исключающими друг друга способами, каждый из которых, в таком случае, обладает своею, «частичною» вероятностью. Значит, полная вероятность, т. е. вероятность одного, или другого, или третьего (Entweder-Oder) из возможных исходов, каждый из которых подходит — повторяю — под определенную субсуммирующую характеристику, равна сумме частичных вероятностей.

Нужно ли, спрашивается, доказывать эту теорему? У Брунса мы находим довольно пространное и притом запутанное доказательство; у Czuber'a — очень короткое и чрезвычайно простое; у Бертрана — даже никакого, так что данное положение формулируется не как теорема, а скорее, как некоторая аксиома. И доказательства, пожалуй, в самом деле, не нужно: в момент, когда мы, в наших рассуждениях по поводу способа численного выражения вероятностей, переходили от случая равновозможных статочностей и отвечающих им вероятностей имеющих числителем единицу, к случаю событий с разным числом статочностей (стр. 166),—от простейшего случая с одним черным на 10, на 100, на 1.000 и т. д. белых шаров, переходили к несколько более сложному случаю трех черных на 10, или 24 черных на сто и т. д. шаров,—мы, в сущности, уже делали сложение вероятностей: вероятность «черного», например, $^3/_{10}$, есть вероятность одного, или другого, или третьего черного шара, и получается она, как сумма их вероятностей— $^1/_{10} + ^1/_{10} + ^1/_{10} = ^3/_{10}$.

Однако, доказательство будет, может быть, все-таки нелишним. Начнем с конкретного примера. Студент, идя на экзамен, знает хорошо 20 билетов, посредственно 24 билета—остальных 4-х из общего числа 48 билетов курса он не успел пройти. Какова вероятность, что он вытя-

нет хорошо или посредственно известный ему билет? Сначала — хорошо известный: в пользу этого исхода говорит 20 шансов — потому что хорошо наш студент знает 20 билетов; вероятность этого исхода — $^{20}/_{48}$. Какова вероятность, что билет вынется посредственно известный нашему студенту? Посредственно он знает 24 билета, следовательно, вероятность — $^{24}/_{48}$. Какова вероятность, что ему достанется хорошо или посредственно известный билет? Общее число хорошо или посредственно знакомых нашему студенту билетов — 20 + 24 = 44, всех билетов 48, следовательно, вероятность получить хорошо или посредственно известный билет будет $^{44}/_{48}$, — т. е. дробь, равная именно сумме тех дробей, в которых выразилась вероятность каждого из двух вариантов, одинаково подходящих под обобщенную формулировку третьего, более широкого вопроса.

Доказательство теоремы в общем виде непосредственно вытекает из самого определения полной вероятности: некоторое событие E (в рассмотренном только-что примере — так или иначе знакомая часть курса) имеет разновидности E_1, E_2 .... E_n (в нашем примере — хорошо и посредственно знакомые билеты); из общего числа m статочностей (в нашем примере — билетов) g_1 относятся к разновидности E_1 (хорошо знакомая часть курса), g_2 — к разновидности E_2 (посредственно знакомая часть) и т. д.; событию E вообще, в той, или другой, или в n-той разновидности, отвечает всего g статочностей. Но E_1, E_2 ... именно только разновидности, частные случаи события E, — последнему будут, значит, благоприятствовать:

g_1 шансов разновидности E_1
g_2 » » E_2
. . . . . .
g_n » » E_n

а всего $g_1 + g_2 + \ldots g_n$ шансов.

Следовательно, число шансов или статочностей, благоприятствующих событию E в любой из его разновидностей, которое мы в общем виде обозначили через g, будет

$$g = g_1 + g_2 + \ldots g_n$$

откуда, деля оба члена этого равенства на общее число статочностей, как благоприятных, так и неблагоприятных, m, получаем новое равенство

$$\frac{g}{m} = \frac{g_1}{m} + \frac{g_2}{m} + \ldots \frac{g_n}{m}$$

или, иначе сказать,

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots p_n ,$$

которое и выражает нашу теорему: вероятность события E равна сумме вероятностей каждой из его разновидностей.

Переходим теперь к **сложной** вероятности или, как ее характеризует Czuber, вероятности des Sowohl-Als,—вероятности наступления «как того, так и другого» события Сложная вероятность это—вероятность события, или лучше сказать, комбинации событий, состоящей в совпадении нескольких (притом безразлично, одновременно или последовательно наступающих) простых событий. Такое совпадение может иметь место по отношению к событиям друг от друга независимым, или, напротив, по отношению к событиям зависимым—последнее в том, поясненном уже выше, смысле, что вероятность последующего события так или иначе изменяется в зависимости от того, наступило ли предыдущее событие или нет. Значит, в то время, как в случае полной вероятности речь идет о вероятности одного или другого исхода, в случае сложной вероятности вопрос идет о вероятности, одновременно или последовательно, обоих или нескольких событий вместе. И вот, вероятность такого сложного события равна произведению вероятностей составляющих его простых событий.

Формулировка эта требует двух пояснений. Во-1-х, по общему содержанию теоремы, по принятому в теории вероятностей несколько условному словоупотреблению, здесь имеется в виду не только совпадение самостоятельных событий, но и совпадение признаков, характеризующих известное событие. Например, под данную теорему подойдет не только такой случай, как одновременное или последовательное извлечение двух или трех разных карт — что само собою разумеется; но под нее же может быть подведено и извлечение такой карты, которая характеризовалась бы, одновременно, двумя или тремя разными признаками, — не только, значит, туза и короля, или туза, короля и дамы, но и короля-бубен, или дамы-пик-из красной колоды, предполагая, что тиражи производятся из двух перемешанных колод В этих последних случаях событие мысленно представляется в виде комбинации. карты, которая, будучи королем, в то же время есть бубновая, или карты, которая, будучи дамой, в то же время принадлежит к пиковой масти и, вместе с тем, к красной колоде. С точки зрения вычислительной — или иначе сказать, с точки зрения верности получаемого результата, применение теоремы умножения в этом последнем смысле не встречает затруднений. В первом из приведенных примеров вероятность выхода из колоды в 52 карты единственного в ней короля бубен, есть $^1/_{52}$; разлагая это событие на его элементы, получаем вероятность выхода одного из четырех королей $^4/_{52} = ^1/_{13}$, вероятность выхода одной из 13 бубен $^{13}/_{52} = ^1/_4$; произведение этих вероятностей $^1/_4 . ^1/_{13} = ^1/_{52}$. Во втором примере вероятность единственной, в числе 104 карт двух смешанных колод, дамы пик из красной колоды непосредственно получается равною $^1/_{104}$. Разлагая это событие на его три совпадающих элемента, получаем: вероятность выхода одной из восьми дам $^8/_{104} = ^1/_{13}$; выхода одной из 26 пик $^{26}/_{104}$ или ¼; одной из 52 карт красной колоды $^{52}/_{104}$ или ½; перемножая эти три результата, получаем $^1/_{13} . ¼ ½$ или $^1/_{104}$. Арифметически—повторяю, результат получается правильный. Но по существу, думается мне, одновременное обладание двумя или каким угодно числом признаков, характеризующих предмет или явление с двух или нескольких различных сторон, и действительное совпадение двух или нескольких, в самом деле различных, событий остаются совершенно различными вещами.

Во-2-х, некоторое пояснение требуется по поводу приведенного выше определения понятия «зависимости» или «независимости»: в определении этом идет речь о «предшествующем» и «последующем событии» — этого «предшествия» и «последования» не надо разуметь в буквальном смысле, в смысле действительного предшествования и последования во времени. Зависимость может иметь место и в случаях одновременного совпадения событий, когда, значит, ни одно из совпадающих событий не является предшествующим или последующим во времени, но когда, тем не менее, наступление или ненаступление одного из долженствующих совпасть событий определенным образом отражается на вероятности другого. Это имеет, именно, место, когда вопрос идет о совпадении двух или нескольких одинаковых событий: раз требуется совпадение m из n могущих иметь место одинаковых событий, то за наступлением события один раз вторичное его наступление может иметь место уже не из числа n, а из числа n — 1 остающихся возможностей, наступление в третий раз—из числа n—2 возможностей и т. д.. Например, если речь идет об извлечении, хотя бы одновременно, трех тузов, то каждый туз может извлечься только один раз; раз он извлечен, второй туз, одновременно с ним, может выйти уже только как один из трех, третий туз—только как один из двух остающихся и т. д.

Для случая независимых событий доказательство теоремы умножения вероятностей, хотя и несколько менее самоочевидно, нежели доказательство теоремы сложения, но все же достаточно просто и непосредственно вытекает из самого определения сложной вероятности. Для большей ясности мы начнем, однако, и в этом случае с конкретного примера (при чем—замечу тут же—берем этот пример, пока, в заведомо упрощенном виде).

Студент знает 32 билета из общего числа 48-ми, — вероятность вытянуть знакомый билет будет, очевидно, равна $^{32}/_{48}$ или $^{2}/_{3}$. Какова вероятность вытянуть два билета, оба из знакомой части курса? Чтобы определить общее число всех статочностей, как благоприятных, так и неблагоприятных, мы должны иметь в виду, что каждый из 48 вынутых, в виде первого вопроса, билетов может комбинироваться с каждым из 48 вынутых в виде второго вопроса. И путем самопонятного рассуждения, и по формуле $V_s^m = s^m$ мы получаем, что число возможных комбинаций 48 билетов по два достигает $48.48 = 2.304$. Чтобы определить число благоприятных шансов, мы должны иметь в виду, что отвечающий надеждам студента результат получится в том случае, если любой из 32 ему знакомых билетов попадется ему и в качестве первого, и в качестве второго вопроса,—при чем, очевидно, каждый из этих 32 билетов, вынутый при первом вопросе, может комбинироваться с каждым из них же при втором Общее число всех таких комбинаций и в этом случае определится по формуле V_s^m и будет равно 32.32 или 1024, откуда вероятность желаемого результата будет

$$p = \frac{1.024}{2.304} = \frac{4}{9} \text{ (приблизительно)}$$

— в то время, значит, как вероятность вынуть один знакомый билет была две трети, вероятность вынуть два знакомых билета будет уже меньше половины. Какова, далее, вероятность вынуть т р и знакомых билета? Для этого требуется, чтобы одна из рассмотренных только-что комбинаций из д в у х знакомых билетов совпала еще с третьим, тоже знакомым билетом. Вероятность такого счастливого для студента совпадения определится по таким соображениям: каждый из 48 билетов может комбинироваться, в качестве третьего вопроса, с каждою из $48.48 = 2.304$ комбинаций, бывших возможными в качестве первых двух вопросов Опять-таки, и простое рассуждение, и формула V_s^m приводят к заключению, что число всех мыслимых комбинаций по три билета будет 2.304×48, или иначе 48^3, т. е. 110 592. Подобным же образом, для того, чтобы студент выдержал экзамен, требуется, чтобы к любой из 1.024 благоприятных для него комбинаций первых двух билетов присоединился знакомый ему, один из 32-х, третий билет; аналогичным образом, число благоприятных комбинаций трех билетов получится 1.024×32, или 32^3, т. е. 32.768. Отсюда вероятность счастливого результата будет

$$\frac{32^3}{48^3}, \text{ т. е. } \frac{32.768}{110.592}, \text{ т. е. около } {}^2/_7$$

— она будет меньше уже не только половины, но даже трети, — и, значит, на этом частном примере мы убеждаемся в том, впрочем, с необходимостью вытекающем из способа выражения вероятностей в виде правильных дробей, обстоятельстве, что сложные вероятности всегда бывают меньше тех простых вероятностей, из которых они слагаются; обстоятельстве, в котором лишний раз сказывается основной смысл математической вероятности, как «здравого смысла, положенного на вычисление»: потому что, ведь, и здравый смысл говорит нам, что совпадение событий менее вероятно, чем каждое событие само по себе, взятое в отдельности, и что, в свою очередь, совпадение тем менее вероятно, чем больше должно в него войти совпадающих событий.

Перейдем теперь к о б щ е м у доказательству теоремы умножения, которое изложим, главным образом, следуя за Czuber'ом; как я сказал, оно несколько сложнее, нежели доказательство теоремы сложения, хотя по существу дело настолько просто, что, например, у Бертрана и эта теорема дается без всякого доказательства.

Для состава сложного события E (в нашем примере — последовательного извлечения нескольких знакомых билетов) требуется совпадение простых событий E_1, E_2, E_3 .... (в нашем примере — нескольких билетов, доставшихся из знакомой части курса). Каждому из этих простых событий соответствует о б щ е е ч и с л о в с е х возможных статочностей, считая как благоприятные, так и неблагоприятные, m_1, m_2, m_3, ... (в нашем примере каждому из простых событий отвечало

одно и то же число — число всех билетов, 48; но если бы поставить задачу иначе, например взять разные отделы курса, то числа m_1, m_2 и т. д. были бы разные); и каждому из этих событий отвечает некоторое число благоприятных статочностей g_1, g_2, g_3 .... (в нашем примере число знакомых билетов).

Каждый из общего числа всех m_1 шансов, отвечающих первому событию E_1, может комбинироваться с соответственным числом шансов m_2, соответствующим второму событию E_2 — таких комбинаций возможно всего $m_1 . m_2$. Каждая из этих $m_1 . m_2$ комбинаций может комбинироваться с каждою из m_3 всех статочностей, соответствующих третьему событию E_3—таких комбинаций по три возможно, очевидно, $m_1 . m_2 . m_3$ или $m_1 m_2 m_3$. Продолжая то же рассуждение, доходим до $m_1 m_2 \ldots m_{n-1}$ комбинаций общих чисел $m_1, m_2, m_3, \ldots m_{n-1}$ статочностей, отвечающих первым $n-1$ простым событиям, — каждая из этих комбинаций статочностей $n-1$ событий может, в свою очередь, комбинироваться с m_n статочностями, отвечающими последнему простому событию E_n,—таких комбинаций возможно $m_1 m_2 \ldots m_n$. Каждая из этих $m_1 m_2 \ldots m_n$ комбинаций представляет собою один из равновозможных «случаев», в том числе как благоприятных, так и неблагоприятных по отношению к событию E, рассматриваемому, как комбинация событий E_1, E_2, $E_3 \ldots E_n$, а следовательно,

$$m = m_1 m_2 m_3 \ldots m_n \quad \ldots\ldots \text{(A)}.$$

Благоприятными для события E случаями будут все мыслимые случаи совпадения событий E_1, E_2, $E_3 \ldots$, — следовательно, такие случаи получатся при совпадении одного из g_1 благоприятных шансов события E_1 с одним из g_2 благоприятных шансов для события E_2; так как каждый из g_1 благоприятных шансов первого может совпасть с каждым из g_2 благоприятных шансов второго, то всех мыслимых совпадений такого рода будет $g_1 g_2$. Каждая из таких $g_1 g_2$ комбинаций может совпасть с каждою из g_3 благоприятных статочностей события E_3,—таких совпадений по три может быть всего $g_1 g_2 g_3$. Продолжая то же рассуждение, получаем, что благоприятные статочности событий $E_1, E_2 \ldots E_n$ могут дать всего $g_1 g_2 \ldots g_n$ комбинаций, а так как каждая из этих комбинаций будет представлять собою один из g «случаев», благоприятствующих сложному событию E, то, значит,

$$g = g_1 g_2 g_3 \ldots g_n \quad \ldots\ldots \text{(B)}.$$

Деля равенство (B) на равенство (A), получаем такое новое равенство:

$$\frac{g}{m} = \frac{g_1 g_2 g_3 \ldots g_n}{m_1 m_2 m_3 \ldots m_n} = \frac{g_1}{m_1} \cdot \frac{g_2}{m_2} \ldots \frac{g_n}{m_n},$$

т. е.

$$p = p_1 p_2 p_3 \ldots p_n,$$

—а это и есть именно то, что требовалось доказать.

Напомню, однако, что тот конкретный пример, с которого мы начали наши рассуждения для обоснования теоремы умножения вероятностей, был взят в намеренно упрощенном виде. Упрощение заключалось в том, что мы предполагали, что билеты тянутся все время из одной и той же неизменной совокупности 48 билетов. Между тем, в действительности вынутый на экзамене билет *не* кладется обратно в общую кучу, и последующие билеты тянутся уже *только из оставшихся* в куче билетов. Но, в таком случае, мы имеем дело уже не с независимыми, а, напротив — с *зависимыми*, в пояснённом выше смысле, событиями. В случаях же этого рода «приходится считаться, начиная с второго события, уже не с их абсолютными, а с *их относительными* вероятностями, образованными в предположении, что все предыдущие события имели место», и отсюда вытекает такой вариант теоремы умножения вероятностей: «вероятность совпадения нескольких *зависимых* друг от друга событий равна произведению их вероятностей, вычисляя каждую в том предположении, что имели место все ему последовательно предшествующие» (Czuber). Или, как та же теорема формулирована в лекциях проф. А. В. Васильева: «вероятность сложного события, состоящего из совпадения двух событий, из которых одно зависит от другого, есть произведение вероятности события E_1 на вероятность события E_2, вычисленную в предположении, что E_1 случилось».

В тех же лекциях проф. А. В. Васильева, а также в «Исчислении вероятностей» А. А. Маркова, можно найти и доказательство этого варианта теоремы умножения. Для нас, однако, будет достаточно разобрать случай теоремы умножения вероятностей простых событий на конкретных примерах. Сначала вернемся к тому же нашему прежнему примеру, но рассмотрим его уже без допущенного ранее намеренного упрощения.

Требовалось вытянуть три знакомых билета, при условии, что знакомо 32 из 48 билетов. Вероятность вынуть *первый* знакомый билет, конечно,

$$p_1 = \frac{32}{48} = {}^2/_3.$$

Если вынут незнакомый билет, — разговаривать больше не о чем: ожидавшееся сложное событие уже *не* совершилось. Если вынут знакомый, то осталось всех билетов 47, из них знакомых 31, следовательно, вероятность вынуть *второй* знакомый билет будет:

$$p_2 = {}^{31}/_{47},$$

и, значит, вероятность вынуть два первых билета из числа знакомых будет:

$$p_{1\cdot 2} = p_1 p_2 = {}^{32}/_{48} \cdot {}^{31}/_{47}.$$

Если второй билет оказался незнакомый, дальнейшие вычисления отпадают—желаемое сложное событие не осуществилось. Если оба первых билета оказались знакомыми, осталось всего 46 билетов, из них 30 знакомы. Следовательно, вероятность извлечения третьего знакомого билета будет:

$$p_3 = {}^{30}/_{46},$$

а, следовательно, вероятность того, что все три билета будут знакомые, получается:

$$p_{1.2.3} = p_1 p_2 p_3 = {}^{32}/_{48} \cdot {}^{31}/_{47} \cdot {}^{30}/_{46}.$$

Рассмотрим теперь более ясный по своим результатам пример с сокращающимися числами.

Вероятность дважды вытянуть из колоды туза будет, если вынутая карта кладется обратно в колоду, ${}^1/_{13} \cdot {}^1/_{13} = {}^1/_{169}$, вероятность трехкратного — ${}^1/_{13} \cdot {}^1/_{13} \cdot {}^1/_{13} = \frac{1}{2.197}$, а четырехкратного — ${}^1/_{13} \cdot {}^1/_{13} \cdot {}^1/_{13} \cdot {}^1/_{13} = \frac{1}{28.561}$: как общее число карт в колоде, так и число тузов в ней все время остаются неизменными. Если вынутая карта откладывается в сторону, и если вынут туз, то при втором испытании в колоде будет уже только 51 карта, и из них только три туза—следовательно, вероятность извлечь второго туза будет уже только ${}^3/_{51}$ или ${}^1/_{17}$, а вероятность двукратного извлечения туза—${}^1/_{13} \cdot {}^1/_{17}$. После второго удачного извлечения (напоминаю, в случае неудачного—дальнейшие тиражи отпадают) в колоде останется уже только 50 карт, и из них два туза, после третьего—49 карт, в том числе уже только один туз,—следовательно, вероятность туза будет: при третьем извлечении ${}^2/_{50}$ или ${}^1/_{25}$, при четвертом—${}^1/_{49}$, и, значит, вероятности: трехкратного извлечения туза будут: ${}^1/_{13} \cdot {}^1/_{17} \cdot {}^1/_{25}$, четырехкратного—${}^1/_{13} \cdot {}^1/_{17} \cdot {}^1/_{25} \cdot {}^1/_{50}$. Без выполнения самих умножений ясно, насколько вероятности повторения тождественного события при извлечениях карт и других аналогичных играх понижаются при данном типе зависимости последующих событий от предыдущих, и, значит, насколько важно, при решении соответственных задач, точно выяснить себе, имеем ли мы дело с независимыми, или, напротив, с зависимыми событиями, и как эта зависимость должна отразиться на вероятности последующих событий. В рассмотренных двух примерах ошибка была невозможна. Но зависимость далеко не столь резко бросилась бы в глаза, если бы в формулировке задач речь шла об одновременных извлечениях шаров, карт, билетов и пр.; между тем, как видно из изложенных на стр. 205 соображений, мы и в этом случае имеем дело с зависимыми событиями, и, следовательно, должен применяться соответственный вариант теоремы умножения.

Итак, еще раз: вероятность совпадения нескольких зависимых друг от друга событий, притом совпадения как одновременного, так и последовательного, равна произведению их вероятностей, но уже вычисленных в предположении, что все предшествовавшие (или долженствовавшие сопутствовать) события уже имели место. Нелишнее будет отметить, что теорема умножения в таком виде, т. е. в применении к случаю зависимых событий, может быть рассматриваема и доказываема и, в самом деле, рассматривается и доказывается, напр., А. А. Марковым, в его «Исчислении вероятностей», как наиболее общая формулировка, по отношению к которой умножение вероятностей независимых событий представляет собой лишь очень просто выводимый частный случай.

Разберем теперь несколько, сравнительно, более сложных задач, между прочим, чтобы показать, насколько проще известные задачи решаются при помощи теорем сложения и умножения вероятностей, нежели при помощи формул комбинаторики.

1. Найти вероятность, при двукратном подбрасывании кости хоть один раз бросить шесть очков. При решении надо исходить от обратной гипотезы: найти вероятность дважды подряд бросить одно из чисел от единицы до пяти. Вероятность этого результата при каждом броске, очевидно, $^5/_6$, вероятность двукратного получения того же результата, по теореме умножения для независимых событий—$^5/_6 \cdot {}^5/_6 = {}^{25}/_{36}$,—следовательно, вероятность противуположного события: что одно из первых пяти очков получится не при обоих бросаниях, будет $1 - {}^{25}/_{36}$, или $^{11}/_{36}$.

2. Найти вероятность комбинации «тройка—семерка—туз» (или, конечно, любой иной, заданной наперед, комбинации из трех неповторяющихся карт при обычном в игре в штосс условии, что вынутая карта не возвращается в колоду): здесь, конечно, применяется теорема умножения для зависимых событий, но изменяется только знаменатель — общее число карт, числитель же остается единицей; следовательно, искомая вероятность будет

$$p = {}^1/_{52} \cdot {}^1/_{51} \cdot {}^1/_{50} = {}^1/_{132.600}$$

3. Найти вероятность, что в пятичленную парламентскую комиссию, при общем составе палаты в 100 человек, войдут, по жребию, только представители меньшинства, состоящего из 40 человек. Так как один и тот же депутат не может войти в комиссию дважды или трижды, то, значит, должна быть применена теорема умножения для зависимых событий в том самом виде, как при извлечениях карт и т. п.—с последовательным уменьшением на единицу как числителя, так и знаменателя. Искомая вероятность будет

$$p_{1\,2\,3\,4\,5} = p_1\, p_2\, p_3\, p_4\, p_5 = {}^{40}/_{100} \cdot {}^{39}/_{99} \cdot {}^{38}/_{98} \cdot {}^{37}/_{97} \cdot {}^{36}/_{96} = \text{около } {}^1/_{114}$$

4. Найти, при тех же данных, вероятность того, что состав комиссии будет пропорционален составу палаты: три члена из большинства и два—из меньшинства Читатель благоволит решить эту задачу сам.

5. Курс состоит из двух частей: в первой—16, во второй—32 билета, в том числе хорошо знакомых экзаменующемуся студенту 12 и 28 билетов. Какова вероятность вытянуть один хорошо знакомый билет из первой и один из второй части. предполагая притом, что билеты из обоих частей лежат в одной куче.

При первом извлечении заданию будет одинаково отвечать выход зна-

комого билета как из той, так и из другой части,—следовательно, должна быть применена теорема суммы вероятностей при чем общим числом статочностей будет общее число всех билетов в обоих частях. Следовательно, искомая вероятность будет

$$p_1 = {}^{12}/_{48} + {}^{28}/_{48} = {}^{5}/_{6}, \text{ или просто } {}^{40}/_{48} = {}^{5}/_{6}.$$

Отвечающее основной задаче задание при втором тираже будет зависеть от результата первого извлечения:

а) Если первый вынутый билет был из первой части: вероятность этого, предшествующего события была ${}^{12}/_{40}$ или ${}^{3}/_{10}$, вероятность второго будет ${}^{28}/_{39}$—общее число билетов уменьшилось на единицу, но число знакомых билетов из второй части осталось то же Следовательно, условная вероятность выхода вторым знакомого билета из второй части будет

$$p_a = {}^{3}/_{10} \cdot {}^{28}/_{39} = {}^{84}/_{390}$$

б) Если первый билет был вынут из второй части: вероятность этого предшествовавшего события — ${}^{28}/_{40}$ или ${}^{7}/_{10}$, вероятность последующего извлечения знакомого билета из первой части—${}^{12}/_{39}$, следовательно, условная вероятность выхода вторым знакомого билета из первой части будет

$$p_б = {}^{7}/_{10} \cdot {}^{12}/_{39} = {}^{84}/_{390}$$

Так как благоприятною для студента будет и та и другая комбинации, то, значит, вероятность, вообще, благоприятного для него второго билета будет, по теореме суммы вероятностей,

$$p_2 = p_a + p_б = {}^{84}/_{390} + {}^{84}/_{390} = {}^{168}/_{390} = {}^{84}/_{195},$$

а вероятность основного задания будет

$$p = p_1 \cdot p_2 = {}^{5}/_{6} \cdot {}^{84}/_{195} = {}^{14}/_{39}$$

Рассмотрим теперь еще один пример, совершенно аналогичный, по вычислительному процессу, с некоторыми из приведенных только-что примеров.

Имеется две урны: одна, которую мы обозначим через а, с одним белым и тремя черными шарами, и другая, которую мы обозначим через б, с тремя белыми и одним черным шаром. Надо вычислить вероятность белого шара, предполагая, что урна, из которой будет производиться извлечение, определяется по жребию.

Вероятность извлечения из урны а равна половине, вероятность извлечь из нее белый шар равна четверти,—следовательно, вероятность извлечь белый шар из урны а есть

$$p_a = {}^{1}/_{2} \cdot {}^{1}/_{4} = {}^{1}/_{8}$$

Аналогичным образом получаем: вероятность извлечения из урны б—половина, вероятность извлечь из нее белый шар будет три четверти,—следовательно, вероятность извлечь белый шар из урны б есть

$$p_б = {}^{1}/_{2} \cdot {}^{3}/_{4} = {}^{3}/_{8}$$

Но требующийся результат — выход белого шара — будет достигнут, безразлично, вынется ли белый шар из урны а или из урны б,—следовательно, вероятность этого требующегося результата, по теореме суммы вероятностей, будет

$${}^{1}/_{8} + {}^{3}/_{8} = {}^{1}/_{2},$$

—заметим здесь же, тот самый результат, как если бы все восемь шаров были в одной и той же урне.

Как я сказал, вычислительный процесс в данном случае тот же самый, как в ряде приведенных выше задач на теоремы умножения и сложения вероятностей. Но по существу мы имеем здесь дело с вопросом совершенно иного рода: там, и в особенности в задаче 5-ой, речь шла о совпадении различных событий, в данном случае речь идет о вероятности события, зависимого от некоторого другого события, или, иначе выражаясь — от осуществления некоторого предположения; это— частный случай того вида вероятности, с которым нам придется иметь дело в дальнейшем изложении, именно так называемой средней вероятности в собственном смысле слова. Общий вид рассмотренной только-что задачи будет такой.

Вероятности извлечения, положим, белого шара из каждой урны будут $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_к$, равные соответственно $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \ldots, \frac{m_к}{n_к}$, где n суть числа всех, а m—числа белых шаров в каждой урне; жребий тянется из особой урны с b билетами, из которых к каждой урне относятся $a_1, a_2, \ldots, a_к$ билетов. При таких обозначениях, общая вероятность извлечения белого шара—значит, извлечения белого шара из любой урны, определится как сумма вероятностей извлечения белого шара из всех выставленных урн, а каждое из слагаемых—вероятность извлечения белого шара из первой, из второй и т. д. урны—будет условною вероятностью, вычисленною в предположении, что жребий пал именно на данную урну. Следовательно, общая вероятность извлечения белого шара будет

$$p = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{a_1}{b} + \frac{m_2}{n_2} \cdot \frac{a_2}{b} + \ldots + \frac{m_к}{n_к} \cdot \frac{a_к}{b} = \frac{1}{b}\left(\frac{m_1}{n_1} \cdot a_1 + \frac{m_2}{n_2} \cdot a_2 + \ldots \frac{m_к}{n_к} \cdot a_к\right)$$

Это—ничто иное, как выраженная в математических знаках добавочная или производная теорема, которую Курно, а за ним, из русских теоретиков исчисления вероятностей, проф. А. В. Васильев, выставляют в ряду основных теорем теории вероятностей. У Курно эта теорема формулируется так: «абсолютная вероятность события, имеющего, в разных предположениях, разные вероятности, есть сумма сложных вероятностей, получаемых путем умножения вероятностей события в каждом из предположений, на вероятности самих предположений». Несколько, может быть, более точная математическая формулировка той же теоремы у А. В. Васильева гласит: «если некоторое событие E может случиться в нескольких предположениях (гипотезах)

C_1, C_2, . . ., C_n, взаимно исключающих друг друга, если, притом вероятности этих гипотез суть p_1, p_2, . . . p_n, а вероятности события E в каждом из этих предположений соответственно равны q_1, q_2, . . . q_n, то полная вероятность события E выразится формулой

$$p = p_1q_1 + p_2q_2 + \ldots + p_nq_n.$$

Как у Курно, так и у А. В. Васильева можно найти довольно сложное общее доказательство этой производной теоремы. Но останавливаться на нем едва ли есть необходимость, так как теорема уже достаточно обоснована изложенными только-что соображениями.

Рассмотренный только-что вопрос будет иметь для нас, в дальнейшем (см. ниже, гл. 8 и 9, посвященные изложению и критике учения о дисперсии и устойчивости статистических рядов), очень важное значение. Но уже и сейчас он непосредственно приводит нас к существенно важному принципиальному вопросу, являющемуся, вместе с тем, одним из наиболее спорных вопросов теоретической части учения о вероятностях, — именно к вопросу об отношении вероятности к отдельному случаю. Казалось бы, этот последний вопрос разрешается очень легко и просто, и притом в отрицательном смысле. В самом деле: на случаях только-что рассмотренного типа, мы частью уже могли, частью же нам предстоит убедиться еще в дальнейшем, в гл. 8 и 9, в том, что вероятности могут быть, а в сфере статистической действительности, как более или менее общее правило, бывают составные или средние,— и, в таком случае, вычисленная для целой совокупности общая вероятность не имеет вовсе никакого отношения к частным совокупностям, а тем более, конечно, к входящим в состав этих последних единицам. Так, в рассмотренном нами конкретном примере с двумя урнами, вероятность извлечения белого шара из той или другой урны, иначе сказать, общая вероятность извлечения белого шара, получилась равною половине; между тем, вероятность белого из первой урны—всего только четверть, из второй—три четверти. Если в двух урнах вместе имеется 10 белых и 10 черных, то общая вероятность выхода белого из той либо из другой урны будет тоже половина, — между тем, частные вероятности выхода белого из каждой из урн в отдельности могут оказаться, смотря по распределению шаров между двумя урнами, $^1/_{10}$ и $^9/_{10}$, $^1/_5$ и $^4/_5$, $^2/_3$ и $^1/_3$ и т. д. Или если взять общий случай: общая вероятность p не мешает частным вероятностям p_1, p_2, . . ., p_n быть сколь угодно различными, и притом совершенно произвольными, потому что всегда возможен будет такой подбор вероятностей отдельных гипотез, g_1, g_2 . . . g_n, при котором сумма произведений pg будет равна как раз данной общей вероятности p. Если к этому прибавить,

что строгая равновозможность чрезвычайно трудно достижима даже в искусственной обстановке игр, основанных на случае, а в статистической действительности она, конечно, совершенно не существует, и напротив — каждый индивидуум характеризуется своею, индивидуальною, неповторимою совокупностью свойств, а каждый единичный случай какого угодно события — рождения, смерти, заболевания, преступления и т. д., протекает в совершенно своеобразной индивидуальной обстановке, то, казалось бы, из всего сказанного с совершенною бесспорностью вытекает тот вывод, что вероятность любого действительного события относится только к некоторому математическому «некто», или к некоторому отвлеченному, массовому случаю, и не имеет никакого отношения ни к какому А, В, С и т. д., — потому что, повторяю, возможность смерти, заболевания, преступления и т. п. для каждого из этих индивидов определяется своею совокупностью условий, делающих невозможным какое бы то ни было предсказание относительно единичного индивидуума, случая или события.

Однако, в действительности рассматриваемый вопрос разрешается далеко не так просто — как я уже сказал, он является, напротив, одним из наиболее спорных вопросов теории вероятностей, очень остро задевающим, притом, и статистичекую теорию. Уже в 60-х г.г. прошлого столетия недавно умерший Адольф Вагнер полемизировал с тем взглядом, «будто закономерность, явственно обнаруживающаяся в больших числах, совсем не действует в малых числах». «Это — возражал Вагнер—совершенно неверно. Большие числа образуются, ведь, в свою очередь, из малых; даже в единицах, которые входят в состав этих малых, а затем и больших чисел, действует, очевидно, тот же импульс, который усматривается в больших числах из их закономерности», и если в неделимых и в малых числах закономерность не поддается наблюдению, то это «объясняется тем, что действующий в каждом неделимом импульс, выражением которого служит выведенный из большого числа закон, парализуется или приводится в скрытое состояние действием случайных причин». Эти соображения, в свою очередь, встречают решительные возражения со стороны А. А. Чупрова. «В отдельном случае — говорит последний — рассматриваемом независимо от ряда, никакого «импульса» не таится, никакие случайные и неслучайные причины в нем не борются. При данном расположении шаров в урне и определенном движении руки вынимается определенный шар. Где здесь импульс? Почему, рассматривая этот случай изолированно, мы одни причины признаем за случайные, другие—за неслучайные? Почему припишем одним большее влияние, другим—меньшее? Деление причин на две категории возникает на почве объединения отдельных случаев в ряд, и только с точки зрения ряда могут быть выделены причины общие и причины индивидуальные. Если мы объединим отдельные случаи в ряд по одному, то к общим причинам отой-

дут одни элементы, если объединим по другому, общими станут элементы иные. В исследовании о влиянии возраста родителей на пол детей, возраст отца будет причиною общею, а возраст матери—причиною индивидуальною, если мы объединим отдельные случаи в группы по возрасту отца, и наоборот... Который же из «импульсов» скрыт в «латентной форме» в единичном случае — тот ли, который обнаруживает при массовой группировке влияние возраста отца, или тот, который раскрывает влияние матери»? «Единственный, кое-как допустимый выход—полагает Чупров—это принять, что «закон больших чисел приложим к единичным явлениям, но особого рода, именно—к совокупностям. Ясно, однако,—замечает он тут же—что через это мы ничего не выигрываем в понимании закона больших чисел и его отношения к единичному случаю в обычном смысле слова. Целесообразнее признать, не играя словами, что с единичным случаем, ни объективная вероятность, ни закон больших чисел не имеют дела» [1]) (Курс. мой. А. К.).

Ту же точку зрения, и с не меньшею категоричностью, проводит Р. М. Орженцкий. «Вероятность события,—говорит он—выражаемая правильною дробью, не имеет никакого отношения к одному испытанию, хотя по внешней форме речь идет как будто бы именно о возможном исходе одного испытания; в действительности же, по логическому содержанию, понятие вероятности относится к известной совокупности испытаний. Для этой совокупности вероятность выражает знание части причин, составляющих каждое отдельное испытание, а именно—знание тех причин, в их взаимном численном отношении, которые остаются неизменными и постоянными в каждом испытании. Такое частичное знание не дает никакой возможности предсказать исход одного испытания (курс. мой. А. К.), зависящий не только от наличности постоянных причин, но и от своеобразной для отдельных испытаний комбинации причин комплементарных, изменчивых. Для одного испытания,—продолжает Орженцкий — вероятность выражает знание неполное и недостаточное. Но гипотетическое предположение относительно действия дополнительного комплекса причин — действия, приводящего к равновозможности и к независимости исходов—равносильно допущению, что в массе испытаний комплекс дополнительных условий даст возможность проявиться причинам постоянным в их численном отношении», а «благодаря этому знание такого численного отношения, выраженное в форме вероятности, будучи недостаточным и неполным для одного испытания, является достаточным для некоторой совокупности испытаний» [2]).

---

[1]) Чупров, Очерки, стр. 236—237. См. также стр. 374—375.

[2]) Орженцкий, Сводн. признаки, стр. 337.

На диаметрально-противуположной точке зрения стоит такой авторитетный представитель математической теории вероятностей, как А. А. Марков. «Основным объектом исчисления вероятностей — говорит он в рецензии на «Очерки» А. А. Чупрова — служит вероятность события при единичном испытании; если нет этой вероятности, то нет и закона больших чисел» — «не связывая вероятности с отдельным случаем, нельзя формулировать ни закона больших чисел», разумеемого в расширенном смысле теоремы Пуассона, «ни простой теоремы Бернулли». В частности, в расширенной, в Пуассоновском смысле, теореме «важную роль играет средняя арифметическая из вероятностей события при отдельных испытаниях». Но «если все вероятности различны, а возможность этого предполагается самою теоремой, то каждая вероятность связана именно с единичным случаем. Конечно, вероятность связана с единичным случаем и в теореме Бернулли, но там эта связь несколько маскируется одинаковостью вероятности для всех испытаний» [1]).

На первый взгляд, на той же точке зрения стоит В. И. Борткевич: «внесение понятия математической вероятности в статистическую область,—замечает он в рецензии на «Очерки» А. А. Чупрова,—неминуемо приводит к тому заключению, что каждый статистический коэффициент, поскольку он может быть рассматриваем как приближенное значение определенной вероятности, относится именно к единичному случаю». Но затем категоричность этого утверждения в значительной мере ослабляется, а самое утверждение утрачивает значительную долю своей определенности, благодаря следующей за приведенными словами оговорке: «единичному случаю, взятому, конечно, не во всей его конкретной обстановке, а более или менее абстрактно, в обобщенном виде» [2]). «При более точной формулировке,—справедливо замечает по этому поводу А. А. Чупров,—понятие абстрактно взятого единичного случая настолько приблизилось бы к понятию «общих условий», и от «единичного случая» в нем осталось бы так мало, что целесообразнее не присваивать ему такого наименования во избежание недоразумений и опасной игры словами, а приурочивать статистические коэффициенты, как приближенные значения определенных вероятностей, непосредственно к комплексу общих условий или употреблять какой-либо эквивалентный термин» [3]).

Какой же из приведенных, более или менее противуположных друг другу, взглядов признать правильным? Прежде всего, приходится остановиться на аргументации А. А. Чупрова, которая мне лично пред-

---

[1]) Марков, «Об основных положениях теории вероятностей и о законе больших чисел». Журн. Мин. Нар. Просв. 1911. № 2. стр. 370—371.

[2]) Борткевич, Задачи и концепции и т. д., стр. 359.

[3]) «Очерки», 2-е изд., стр. 237, примеч.

ставляется решительно неправильной—независимо от конечного вывода, именно как аргументация. На вопрос, «который же из «импульсов» скрыт в «латентной форме» в единичном случае» рождения, рассматриваемого в зависимости от возрастов матери и отца, ответ, мне кажется, простой: оба. Возраст потомства в каждом единичном случае определяется, в числе прочих моментов, также и определенною комбинациею возрастов матери и отца. Далее: конечно, в единичном случае цвет уже вынутого из урны шара ни в малейшей мере не зависит от «постоянной причины», каковою является, уже без всякого сомнения, состав шаров в урне. Но следует ли из этого, что состав шаров не имеет влияния на вероятность извлечения белого или черного шара в каждом единичном случае? Едва ли—вероятность, которая есть, ведь, в конце концов, не что иное, как возможная, и при определенных предпосылках, поддающаяся численному выражению мера нашего ожидания, конечно, в каждом отдельном случае, при каждом отдельном извлечении, будет всецело определяться пропорцией цветов в нашей урне. Если, поэтому, можно, в самом деле, утверждать, как утверждает Орженцкий, что лежащее в основе всякой вероятности частичное знание «не дает никакой возможности предсказать исход одного испытания», то лишь в том смысле, что вероятность не дает права на достоверное предсказание исхода единичного испытания. Но никоим образом нельзя утверждать, как утверждают и Орженцкий, и Чупров, что вероятность «не имеет никакого отношения к одному испытанию»,—что «с единичным случаем объективная вероятность . . . не имеет дела». Потому что, ведь, и объективная вероятность не есть, все-таки, простая правильная дробь, а есть выражаемое правильною дробью ожидание, есть именно вероятность, которая в каждом отдельном случае измеряется определенною численною величиною, в зависимости от наличной совокупности постоянных причин [1]).

---

[1]) К сходному выводу приходят и некоторые из — казалось бы — безусловных сторонников взгляда, что вероятность не имеет никакого дела с отдельным случаем. Когда достаточно обширный ряд наблюдений—говорит, например, Бэн—раскрывает нам постоянное отношение в повторении событий, эта пропорция есть то, что называют вероятностью воспроизведения события. Однако, это лишь фикция, выражающая лишь достоверность отношения или среднее в совокупности случаев. Установление вероятности—продолжает Бэн—«ни в малейшей мере не подвигает нас в определении единичного случая: единичный случай, взятый отдельно, должен быть рассматриваем как абсолютно неподдающийся предвидению; раз мы не рассуждаем относительно совокупности или целого, мы ничего не выигрываем, считаясь, по отношению к единичному случаю, с численным выражением вероятности». Казалось бы,—вполне определенно. Но затем следует оговорка, что, «так как в жизни есть много случаев, где мы можем относить средние к частным случаям, то получается, что, следуя мере вероят-

В принципе, таким образом, вероятность есть именно вероятность отдельного случая. Из этого, разумеется, не следует, что она всегда может быть распространяема на отдельный случай. Напротив, даже и в тех, более или менее исключительно относящихся к области искусственно-налаженных экспериментов или игр, случаях, где может, вообще, быть речь о необходимой для этого предпосылке—равновозможности отдельных случаев, надо предварительно установить, что мы имеем дело с простою, а не с среднею вероятностью, и в этом последнем случае определить пределы тех частных групп, внутри которых вероятность будет, в самом деле, вероятностью отдельного случая. В сфере же статистической действительности правилом является не равновозможность, а наоборот — совершенная индивидуальность каждого отдельного случая и невозможность сколько-нибудь полного учета тех причин, под влиянием которых данный случай принял свой конкретный вид, и потому здесь о каком-либо распространении вероятности на единичный случай не может быть и речи [1]).

Чтобы покончить с вопросом об отношении вероятности к единичному случаю и о законности, для единичного случая, основанных на вероятности предвидений и предсказаний, нужно остановиться еще на одном частном вопросе — на том, что Курно называет компенсацией «аномалий случая». Очень распространено, в самом деле, мнение, или— если угодно—представление, даже, может быть, лучше сказать— непосредственное чувство, что «аномалии случая», т. е. резкие отклонения от тех численных отношений, которые приблизительно отвечали бы данной вероятности, должны компенсироваться или погашаться последующими «аномалиями» или резкими отклонениями в противуположную сторону: что, значит, известное событие, слишком часто наступавшее в одном каком-либо периоде, в силу этого самого, реже будет иметь место в последующем периоде и т. п. В действительности,—замечает по этому поводу Курно,—«независимость последовательных событий, без которой они не могли бы быть названы случайными, исключает всякое влияние наступивших на будущие случайные события»; все дело в том, что человеческое воображение не может успокоиться на чисто математическом понимании лежащих в основе математического выражения вероятностей комбинаций, и «оно всегда

ностей во всех случаях и по всем предметам, мы чаще имеем успех в наших предположениях, чем если мы пренебрегаем численною оценкой вероятности». Это—заключает Бэн—и позволяет нам «строить предположения относительно отдельного случая, считаясь с полученною вероятностью (Бэн, назв. соч., стр. 136—137). Но это, ведь, и есть то, что составляет смысл количественно-измеримой вероятности.

[1]) См. относящиеся к данному вопросу соображения Вундта в начале следующей VI главы, в связи с его общими соображениями относительно взаимоотношения между априорною и эмпирическою вероятностью.

стремится приписать случаю, в некотором роде, существенную и производящую силу, которая как бы имеет свою энергию и свое назначение» [1]). Опять-таки, и в данном случае положение о совершенной независимости будущих событий от каких бы то ни было комбинаций событий прошедших, в том числе и от «аномалий случая», совершенно справедливое при наличности идеальных предпосылок теории вероятностей, в том числе совершенной «независимости» единичных случаев, не может быть признано верным в сфере статистической действительности. Здесь мы, как правило, этих идеальных предпосылок не имеем, а наоборот—приходится считаться с самыми разнообразными формами и проявлениями зависимости единичных случаев. Здесь, поэтому, нельзя говорить и о независимости последующих комбинаций случаев от предыдущих, об отсутствии всякого влияния наступивших на будущие события. Здесь, напротив, такое влияние может обнаруживаться самым определенным образом,—из чего, конечно, не следует, чтобы оно было непременно компенсирующим. Напротив, при известных формах зависимости оно легко может оказаться и усугубляющим «аномалии случая». Возьмем, хотя бы, общеизвестный пример—случайности погоды. Если, положим, первая половина лета исключительно дождливая, очень многие склонны ожидать, что вторая половина лета будет исключительно засушливой. Между тем, исключительное обилие дождей может зависеть от таких обстоятельств, которые будут влиять и во второй половине лета и благодаря которым и вторая половина лета будет не исключительно засушливою, а наоборот—исключительно дождливою.

Гораздо проще разрешается—хотя бы только в принципе—вопрос о том, возможно ли использовать указания математической вероятности в смысле массовых предсказаний. Этот вопрос разрешается, конечно, в утвердительном смысле, потому что в этом, ведь, собственно и весь существенный смысл самого понятия вероятности. Заключение от вероятности допустимо и законно как от целого к достаточно большим частям этого целого—настолько большим, чтобы могло иметь место уравновешение случайных причин, и чтобы могло выявиться влияние общих причин постоянного характера, так, обратно, от достаточно больших частей к целой массе; оно допустимо и законно от настоящего к будущему. Но, конечно, то и другое—лишь поскольку имеются налицо необходимые для этого предпосылки. Поскольку речь идет о заключении от целого к частям, или обратно от частей к целому, такою предпосылкою является наличность достаточных оснований предполагать, что части не представляют существенных отличий друг от друга, а, следовательно, и от целого. С точки зрения этой предпосылки несостоятельны, например, известные вычисления численности

---

[1]) Cournot, Wahrsch.-Rechn., пер. Schnuse, стр. 91.

населения всей Франции, произведенные Лапласом, на основании данных об отношении числа рождений к численности населения в нескольких департаментах страны: отношение числа рождений к населению, или иначе — коэффициент рождаемости не представляет собой чего-либо однообразного для всей страны; он может быть, напротив, очень различным, а потому из того, что в нескольких департаментах получился определенный коэффициент рождаемости, еще отнюдь не следует, что из этого коэффициента можно исходить при вычислении населения всей страны. Напротив, вполне допустимы заключения к целому от соотношений, полученных при помощи правильно-организованного выборочного исследования, потому что правильное выборочное исследование дает достаточную гарантию «репрезентативности» собранных данных и выясненных на основании этих данных соотношений; дает, иначе сказать, достаточную гарантию того, что выборочный материал отражает именно ту самую совокупность общих условий, которая управляет изучаемым явлением во всей «репрезентируемой» этим материалом массе.

Или обобщая: для того, чтобы делать заключения из вероятности от целого к частям или наоборот, надо иметь доказательства, или, по крайней мере, достаточные основания предполагать, «равновозможность», однородность данной массы, или, по крайней мере, не иметь противупоказаний против подобного рода допущения; надо, иначе сказать, иметь право опираться на принцип «уравновешивания случая» в большом числе наблюдений или испытаний.

Нечто подобное приходится сказать и относительно возможности массового предсказания от прошедших к будущим событиям: такие предсказания законны, поскольку не последовало, или поскольку нельзя предполагать, существенных изменений в том комплексе постоянных или общих причин, от которого зависит данное соотношение. С точки зрения этой предпосылки представляются крайне рискованными предсказания относительно размеров, положим, смертности, которая может подвергаться резким колебаниям, в зависимости от распространения эпидемий, от влияния таких изменчивых факторов экономического порядка, как урожаи, хлебные цены, условия рабочего рынка и т. п. Не менее рискованными будут предсказания, положим, относительно вероятных результатов определенного метода лечения той или иной болезни: результаты эти могут оказаться совершенно различными, смотря потому, придется ли иметь дело с более легкими или более тяжелыми формами данного заболевания, будут ли болезнь и лечение протекать при аналогичной, или же при иной, более, либо менее благоприятной обстановке; в частности, например, результаты, полученные в какой-нибудь образцовой факультетской клинике или хорошо поставленной лечебнице, вообще в той или другой исключительной обстановке, могут совершенно разойтись с результатами массового приме-

ления того же метода лечения,—значит, при гораздо более низком, как правило, качественном составе врачей и в гораздо менее приспособленной к целям лечения обстановке и т. п.

В заключение данного в этой и в предшествующей главах обзора основных положений теории вероятностей, остановимся, в самых кратких чертах, на понятиях математического и нравственного ожидания.

Понятие математического ожидания возникло из всякого рода чисто-житейских, деловых предприятий и отношений, связанных с тем или другим, большим или меньшим риском, и трактуется оно и до сих пор, по большей части, в связи с подобного рода предприятиями и отношениями. Так, у Курно исходною точкою рассуждений на тему математического ожидания является цена лотерейного билета, «как цена «эвентуального права на данный объект», которая необходимо должна быть пропорциональна вероятности получения данного объекта»; самое, вытекающее отсюда, понятие математического ожидания формулируется как понятие о «границе, к которой, при свободном обороте, приближается цена эвентуального (т. е. могущего получиться или не получиться) товара», или иначе говоря, о «справедливой цене эвентуальных ценностей, к которой приближается действительная цена, по мере сокращения операционных расходов». Еще определеннее чисто-«деловой», первоначально, характер понятия математического ожидания подчеркнут у Пуассона: он не только определяет математическое ожидание, просто, как «произведение выигрыша и надежды получить его», но считает нужным пояснить еще, что, смотря по его положительному или отрицательному характеру, как ожидания барыша или убытка, «оно представляет увеличение или уменьшение приращения имущества и должно быть учтено в его активе или пассиве, если не желают ждать исхода событий», с учетом по соображению с остающимся временем. В уже цитированных лекциях проф. А. В. Васильева прямо ставится вопрос: «каковы должны быть ставки игроков А и В, чтобы игра была справедлива» при различных вероятностях выигрыша. Ответ, подсказываемый, прямо, житейским здравым смыслом, гласит, что «ставки должны быть пропорциональны вероятностям выигрыша». Это чисто практическое правило «может быть выражено иначе—вводя особый термин» или «условившись называть» математическим ожиданием произведение ставок игроков на вероятности выигрыша каждого из них,—а из самого этого условного обозначения непосредственно вытекает «правило равенства математических ожиданий»: «математические ожидания игроков должны быть равны»; доказывается это правило чрезвычайно

просто: если вероятности выигрыша суть p и q, а ставки α и β, то из пропорции $\alpha : \beta = p : q$ непосредственно следует $\alpha q = \beta p$.

Итак, еще раз: понятие математического ожидания возникло в связи с такого рода житейскими отношениями и, главным образом, с такого рода финансовыми и коммерческими предприятиями, успех которых, в силу возможности тех или других случайностей, связан с риском, и обычные определения его и сейчас даются в применении к тем или другим, связанным с риском, денежным получениям. Приведу, в виде примера, еще определение А. К. Власова: «если получение какой-либо величины, напр., денежной суммы, зависит от случая, т. е. получение ее только вероятно, то произведение этой суммы на вероятность ее получения называется математическим ожиданием этой суммы, и лицо, ожидающее получения подверженной случайностям суммы, могло бы передать право на ее получение другому за сумму, равную ее математическому ожиданию». Купец отправил товар за океан и рассчитывает продать его за 100.000 рублей. Но плавание связано с серьезным риском, и вероятность благополучного прибытия товара и получения причитающихся за него денег не превышает ¾. Математическое ожидание суммы в 100.000 рублей, при таких условиях, будет равно произведению этой суммы на ¾, т. е. 75.000 р.; за эту сумму купец мог бы продать находящийся в пути товар—продать его «по справедливой цене», если бы захотел снять с себя риск, а не боящийся риска покупатель мог бы купить товар за эту сумму без чрезмерной вероятности убытка. Или другой пример. Устраивается лотерея с 2.000 билетов и одним выигрышем, положим, в 10.000. Вероятность выигрыша будет для владельца одного билета 1:2.000 или 0,0005, математическое ожидание—10.000 . 0,0005, т. е. 5 рублей, и это будет «справедливая» цена билета, при которой лотерея не даст убытка, а в то же время приобретатели билетов не понесут вероятного ущерба. В обычном, более сложном случае многих выигрышей, и притом различной величины, техника вычисления математических ожиданий будет значительно сложнее, но сущность дела остается столь же ясною и простою.

На втором из приведенных примеров сразу делается ясным обстоятельство, которое необходимо иметь в виду для понимания смысла математического ожидания: что последнее не имеет никакого значения для отдельного случая реализации данного события. В нашем примере каждый отдельный обладатель билета либо не выиграет, и в таком случае потерпит убыток в 5 рублей, либо выиграет все 10.000 рублей,—но ни в каком случае не получит тех пяти рублей, которые соответствуют его математическому ожиданию. Только когда мы имеем дело с массою аналогичных сделок, например, в организованной азартной игре или в страховании, математическое ожидание приобретает реальное значение, выражая собою реальную величину вероятного

для каждого покупателя билета приращения его имущества, или,—как при страховании,—ту норму страховых премий, которая будет достаточна, чтобы покрыть всю сумму вероятных убытков по застрахованным суммам.

Надлежит отметить еще и другое обстоятельство: принцип математического ожидания—отнюдь не определенное практическое правило, которым каждый разумный человек мог и должен был бы руководствоваться в своих деловых начинаниях и предприятиях. «Для практики,—как замечает Крис [1]),—вовсе нет определенного и общеобязательного принципа, в соответствии с которым мы могли бы приравнять ценность» каких-то ожидаемых, вероятных будущих благ к наличному обладанию имуществом определенного размера. Здесь все зависит от психики отдельного субъекта—один, чисто-психологически, боится всякого риска, другого риск, напротив, подзадоривает; и от индивидуальной обстановки данного предприятия, в смысле характеризующих его объективных условий; и от отношения суммы, о которой идет речь в каждом данном случае, к общему размеру имущества заинтересованного лица. В силу этого последнего соображения ставка в 1.000 или 10.000 рублей не представляет ничего угрожающего для профессионального банкомета или для рулетки в Монтекарло,—но она будет невозможной для игрока, которому пришлось бы поставить последние свои деньги,—на этом, в значительной мере, основывается рассчет игорных предприятий. Страхование всегда убыточно для клиентов страхового учреждения, как лотерея всегда убыточна для совокупности обладателей билетов,—потому что, в первом случае, сумма премий должна не только покрыть убытки, но и оплатить, по меньшей мере, расходы по управлению, а во втором—лотерея для того, ведь, и устраивается, чтобы дать известную выгоду устроителю. Но публика покупает лотерейные билеты под влиянием надежды выиграть крупный куш; отдельному обывателю выгодно и необходимо страховать имущество, чтобы избавить себя от риска потерять все, в случае пожара. Напротив, крупное железно-дорожное предприятие или ведомство, обладающее множеством недвижимостей, может обходиться без страхования, потому что даже и серьезный пожар уничтожил бы лишь ничтожную долю этого имущества.

Изложенные обстоятельства и соображения привели к возникновению в учении о вероятностях, особого, параллельного или дополнительного к понятию математического ожидания, понятия нравственного ожидания. «Так как выгода, доставляемая кому-либо выигрышем»—и, конечно, еще в большей мере ущерб, причиняемый проигрышем,—так формулирует основную сущность этого понятия Пуассон,—«зависит от его состояния,

[1]) Kries, Prinzip. der Wahrsch.-Rechn., стр. 185 и сл.

то эту относительную выгоду, в отличие от математического ожидания, назвали ésperance morale—нравственным ожиданием»; помощью интегрального исчисления, поясняет он дальше, из меры нравственного ожидания делают выводы относительно ведения каждым его спекуляций, согласующихся с правилами благоразумия. В результате этого исчисления нашли также основания не играть, даже à jeu égal, при равных шансах; «впрочем,—прибавляет Пуассон не без некоторой иронии,—не лучшие, какие можно было привести». Основное правило теории нравственного ожидания возникло из известной в истории теории вероятностей «Петербургской задачи», решение которой, по правилу равенства математических ожиданий, привело к абсурдному решению, что ставка играющего против сильного банка должна расти до бесконечности и что в таком случае ему обеспечен верный выигрыш. Лучшее объяснение этого парадокса дано было так называемою гипотезой Даниила Бернулли и Бюффона; они подметили тот указанный выше факт, что правило равенства математических ожиданий неприменимо к очень многим случаям, но вполне применимо при страховании, и, совершенно правильно, усмотрели причину этого обстоятельства в том, что это правило «имеет в виду только номинальное значение денег, без всякого отношения к имуществу лица, к его взгляду на деньги», и подчеркнули, в частности, особое значение «отношения величины проигрыша или выигрыша к имуществу игрока». Как вывод отсюда они формулировали необходимость оценки не только суммы денег, но и «нравственной выгоды, от них получаемой», т. е. «значения денег, меры их важности для известного лица». Конечно, учесть все моменты невозможно,—поэтому учитывается единственный объективно-измеримый момент, а вместе с тем и самый важный—значение состоятельности данного лица И вот, суть гипотезы Даниила Бернулли сводится к двум положениям. во-1-х, весьма малое приращение нравственной выгоды пропорционально весьма малому приращению получаемой суммы денег, и во-2-х, одна и та же весьма малая сумма денег доставляет лицу тем большее удовольствие, чем меньше имущество данного лица. Отсюда, путем уже чисто вычислительных действий и при условии введения переменного индивидуального коэффициента пропорциональности, получается тот конечный вывод, что «если приращения денег составляют геометрическую прогрессию, то приращения нравственной выгоды составляют арифметическую прогрессию». Отсюда и дальнейшее понятие «нравственного ожидания», которое «должно так же соответствовать понятию нравственной выгоды, как математическое ожидание соответствует математической выгоде или номинальной стоимости денег». Как подчеркивает проф. А. В. Васильев, из лекций которого заимствовано это изложение сущности теории «нравственного ожидания», гипотеза Даниила Бернулли имеет и более широкое значение: положение, что «приращения имущества должны быть прямо пропорциональны обладаемому, чтобы быть одинаково чувствуемыми», аналогично известному психофизическому закону Weber-Fechner'a, согласно которому «ощущение растет как логарифм раздражения». Но,—как подчеркивает тот же проф. Васильев,—значение этой гипотезы—«не столько для теории вероятностей, как математического учения, сколько для психологии и других наук». Или, как, еще гораздо более решительно высказывается Вундт, идеи моральной вероятности стоят «совсем вне понятия настоящей вероятности», относясь «к психологии, а не к учению о вероятности», в виду чего в таких более «строгих» руководствах, как «Исчисление вероятностей» А. А. Маркова, учению о нравственном ожидании вовсе не отводится никакого места. С математической точки зрения—да в значительной мере и по самому своему основному существу, учение о «нравственном ожидании» не выдерживает критики. Уже Курно категорически подчерки-

вал, что все приемы, предлагавшиеся для вычисления нравственного ожидания, «совершенно произвольны и не допускают действительного применения» [1]). Еще исходная точка зрения гипотезы Даниила Бернулли, хотя и не свободная от произвола, признается допустимою в качестве рабочей гипотезы. Но результаты не оправдывают ее применения: в свое время ее ценили за практический вывод—что всякая, даже «правильная», с математической точки зрения, игра «нравственно» убыточна для обоих сторон; но, с одной стороны, как было отмечено еще Пуассоном, осуждение азартной игры может базироваться и на других, во всяком случае не худших основаниях, а с другой, как подчеркивает Брунс, теория «нравственного ожидания» приводит к тождественному, но, конечно, совершенно праздному выводу относительно страхования. В силу этого, общая оценка данной теории хотя бы у того же Брунса, который в данном случае особенно характерен, потому что стоит близко к взглядам Фехнера и вполне оценивает близость гипотез Вебер-Фехнеровской и Даниила Бернулли,—совершенно отрицательная: в отдельных случаях она может привести к целесообразному выводу, но, в общем, это—Kunstelei, ухищрение, придуманное для устранения мнимого противоречия теории математического ожидания и не выдерживающее критики в применении к более серьезным вопросам [2]).

Совершенно иное приходится сказать объ учении о математическом ожидании. Практическое значение этого учения — как частью уже было отмечено выше — тоже ограничено. Как хорошо выяснено тем же Брунсом, обнаруживающееся в очень многих случаях расхождение или противоречие между выраженными в теории математического ожидания предписаниями «теории случая» и указаниями здравого смысла вытекает из превратного понимания самого смысла математического ожидания. Только при большом числе сделок, как вытекает из построяемых Брунсом «уравнений ценности», сумма математических ожиданий приобретает реальное значение; в случаях единичных сделок ставка есть определенная сумма, а ее противовес — либо полный выигрыш, либо нуль, а вычисленная величина математического ожидания — не более как пустой звук. Поэтому, если игрок идет на однократную игру, то «решающие доводы для такого его поведения — дело не теории случая, а темперамента». Корень превратного понимания — в самом термине — «математического ожидания», mathematische Hoffnung, который, в сущности, есть лишь обозначение для произведения суммы на вероятность ее получения и никакой «надежды» для единичного случая или для малого числа случаев обосновать не может. С этим обстоятельством — как между прочим отмечает Брунс, — считаются и в практике массовых игр (рулетка и т. п.), отклоняя слишком крупные ставки, как Einzelspiele, выходящие из рассчетов массовой игры, и в страховании, отклоняя или перестраховывая слишком крупные риски. И наоборот — страхователь, клиент страхового учреждения, идет на невыгодную для него, по рассчету из

[1]) Cournot, назв. соч., стр. 77.

[2]) Bruns, W.-R. und Koll.-Masslehre, стр. 74—75.

математического ожидания, сделку, потому что считает риск хотя и мало-вероятного, но за то могущего разорить его в корень, события большим, чем правильный платеж премии, хотя и превышающей математическое ожидание этого убытка. Раз только в одних руках скопляется *много* рисков, правила математического ожидания вступают в силу, и потому, например, для большого железнодорожного общества или другого подобного крупного предприятия страхование будет убыточно; *такие* предприятия, поэтому, поступают разумно, неся сами риск вероятных убытков, или, иначе говоря—действуя по принципу так называемого «самострахования» [1]).

Так или иначе — принцип математического ожидания имеет практическое значение только для больших предприятий с массою отдельных, аналогичных по существу, связанных с риском операций, из которых на первом месте надо назвать страхование и аналогичные ему организации распределения рисков, где имеют дело, с одной стороны, с большими поступлениями, а с другой — с большими рисками, и где массовый характер операции обеспечивает «уравновешение случая». Но за то для *такого* рода предприятий он играет, в самом деле, первенствующую роль, являясь основою всякого рода организованных лотерей, в том числе и государственных всякого рода, и— что, конечно, во много раз важнее—основою страховых, пенсионных и т. п. рассчетов. Не менее, если не еще более, важно значение учения о математическом ожидании в области как чисто-математического учения о вероятностях, так, до некоторой степени, и в приложениях ее к теории статистики. В чистой теории вероятностей принцип математического ожидания лежит в основе так называемой теоремы Чебышева, приводящей к наиболее обобщенной математической формулировке закона больших чисел, по отношению к которой теоремы Бернулли и Пуассона представляют собою лишь некоторый частный случай,—а также другой первостепенно важной теоремы—теоремы Байеса, на которой, в значительной мере, покоится принципиальное обоснование эмпирической вероятности в виде, в частности, так называемой обращенной теоремы Бернулли. В математически обоснованной теории статистики на принципе математического ожидания покоится формулированный и обоснованный Борткевичем так называемый «закон малых чисел», исходящий из понимания данных наблюдением абсолютных чисел единичных случаев, как математических ожиданий соответственных вероятных событий. Но, конечно, в применении к такого рода чисто-научным задачам самое определение математического ожидания освобождается от его «деловой» оболочки и дается, по крайней мере некоторыми из теоретиков учения о вероятностях, не в применении к играм и денежным суммам, а в обобщенном виде. В такой постановке математическое ожидание есть, просто, про-

---

[1]) Там же, стр. 64—70.

изведение ожидаемой величины на ее вероятность. А для того общего случая, когда ожидаемая величина может иметь несколько значений, отсюда вытекает даваемое А. А. Марковым в его «Исчислении вероятностей» определение математического ожидания величины как «суммы произведений каждого из ее значений на соответственную вероятность», при чем, конечно, значения могут и не быть различны друг от друга: каждый случай, которому соответствует одно из одинаковых значений величины, может быть разбит на несколько, отличающихся не величиною, а другими обстоятельствами. Здесь, в работе, посвященной изложению теории собственно статистического метода, входить в какое-либо дальнейшее рассмотрение вопроса о математическом ожидании, как, в частности, он трактуется у А. А. Маркова, не представляется возможности, и только в дальнейшем нам придется считаться с некоторыми, уже упомянутыми, приложениями принципа математического ожидания.

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

Априорная и эмпирическая вероятность. Математическая формулировка закона большого числа (теорема Бернулли-Лапласа).

В предыдущей главе мы имели дело исключительно с так называемою априорною вероятностью, вычисляемою на основании точно известных нам шансов или статочностей, благоприятствующих или, напротив, неблагоприятствующих интересующему нас событию; иначе сказать—с такого рода вероятностями, которые могут быть вычисляемы лишь при полном и точном знании постоянных причин, лежащих в основе данного явления, при чем эти причины должны быть таковы, чтобы допускать выражение в форме поддающихся счислению или общее — измерению шансов или статочностей. Теперь мы должны перейти к другому виду вероятности — к вероятности эмпирической или апостериорной, выводимой, как правило, при отсутствии такого рода знания об исчислимых или измеримых причинах явления, из непосредственного, статистического счета фактически наступивших событий, а равно и всей совокупности случаев, когда они могли иметь место.

По правильному замечанию А. А. Чупрова, вычисленная на основании исчерпывающих данных о равновозможных статочностях, априорная вероятность «не раскрывает нам никаких новых, дотоле неведомых причинных соотношений между явлениями, а лишь вкратце резюмирует то, что нам и без нее известно»: вероятность падения монеты орлом или решеткой кверху, равная половине, означает лишь, что монета имеет две стороны, и что, притом, ее форма, распределение вещества и т. п. обеспечивают равную возможность падения на ту и на другую сторону; вероятность выхода любой из граней игральной кости, равная одной шестой, или любой карты из колоды, равная $^1/_{52}$, означают только, что кость имеет шесть граней, а в колоде 52 карты, и что в том и другом случае имеются налицо, опять-таки, условия равновозможности. Су-

щественное значение теории вероятностей, в частности ее значение для статистики, «ее логические функции, покоятся главнейше на возможности устанавливать численные значения вероятностей путем не умозрительным, а эмпирическим,—без предварительного исчерпывающего знакомства с взаимоотношениями между интересующими нас причинами и следствиями, на почве статистического учета частости явлений. Свое методологическое оправдание понятие вероятности находит в той тесной связи между математическими вероятностями явлений и их эмпирическими частостями, которая устанавливается знаменитым «законом больших чисел». Или, как та же мысль несколько менее прозрачно, но короче, выражена у Czuber'a: «важным шагом в развитии теории вероятностей является распространение ее на такие события», относительно которых мы не обладаем знанием, позволяющим отграничить и сравнивать между собою возможности их наступления или ненаступления (Ausführungsmöglichkeiten), «но где мы располагаем данными о наблюденных результатах одной или нескольких серий событий (Realisierungen). Ибо — поясняет Czuber — применения теории вероятностей к явлениям природы и к происшествиям практической жизни имеют дело почти исключительно с событиями этого последнего рода». В самом деле: априорные вероятности существуют и могут существовать только в искусственной обстановке опытов с шарами, игр, основанных на случае, вроде орлянки, игры в кости, рулетки, азартных карточных игр и т. п., и вполне аналогичных с ними, по существу дела, лотерей: здесь, действительно, мы имеем дело с точно определенным числом всех возможных случаев и с не менее точно определенным числом случаев, отвечающих определенного рода заданию,—«благоприятствующих случаев», — и здесь же достижима хотя и не абсолютная, но во всяком случае могущая, при желании, быть мыслимо приближенною к идеальному совершенству, равновозможность. В жизни—ни в физическом мире, ни тем более в области социальных явлений, нет ни того, ни другого условия: мы не обладаем исчерпывающим знанием тех причин, которые лежат в основе каждого данного массового явления, а поскольку мы их и знаем, многие или даже большинство их не поддаются измерению и счету, вообще не могут быть облечены в пригодную для вычисления априорных вероятностей форму «статочностей» или «шансов»; мы, тем более, не имеем оснований для допущения равновозможности — напротив, мы определенно знаем, что более или менее во всех областях явлений, где применяется статистический метод, единичные случаи не представляются равновозможными. Следовательно, ни в реальном, физическом мире, ни в области социальных явлений, нет и не может быть априорных вероятностей. Нам приходится оперировать исключительно с эмпирическими вероятностями, выводимыми из наблюдения и счета действительных фактов—из статистического наблюдения. Если имеется некоторое число s наблюденных

случаев, где событие, по характеру этих случаев, могло наступить или не наступить, и если в m из этих s случаев оно наступило в действительности, то «частота» или «частость» интересующего нас события выразится дробью $\frac{m}{s}$. И вот, в силу закона большого числа—на этот раз уже в его математическом понимании и выражении—частота осуществления случайного события, при многократном повторении испытаний или наблюдений, приближается к априорной вероятности события, в виду чего частоту, при наличности определенных условий, и можно принимать за эмпирическое выражение вероятности—за эмпирическую вероятность явления. Если нам известно, что в урне имеется два или двадцать белых, три или тридцать черных шаров, мы можем определить априорную вероятность выхода белого шара. Если мы этого не знаем, мы обращаемся к эмпирическому способу определения вероятности: мы последовательно, раз за разом, производим извлечения и кладем вынимаемые шары обратно в урну, записывая результат каждого извлечения; результат тысячи такого рода испытаний будет близок к 400 белым и 600 черным, результат пяти и десяти тысяч—еще того ближе к 2.000 и 4.000 белым и, соответственно, 3 000 и 6.000 черным; получается частота или эмпирическая вероятность белого, равная отношению, приблизительно, 400 к 1.000, 2.000 к 5.000, 4.000 к 10.000,—в том, другом и третьем случае дроби, все более приближающиеся к априорной вероятности—к двум пятым.

Возникает теперь вопрос, с одной стороны, о степени достоверности или общее — о смысле, о познавательном значении того и другого вида вероятности, а с другой — после сказанного уже почти не вопрос о сфере их применимости. С точки зрения достоверности, познавательного значения, «нельзя произнести такого решения, которое было бы верным для всех случаев. Познавательная ценность априорного метода зависит от степени достоверности, с которою мы можем судить о мере возможности отдельных случаев. При эмпирическом—решающее значение имеет объем имеющегося опыта и правильная оценка значения отдельных наблюдений. Легко может, поэтому, случиться, что вычисленной на широкой эмпирической базе вероятности придется отдать преимущество перед априорною даже тогда, когда вычисление последней формально осуществимо, но по существу дела недостаточно надежно». Это — даже в коренной сфере априорных вероятностей — в области опытов и игр, основанных на случае: так, «вычисленные на основании длинного ряда испытаний вероятности падения каждой из шести сторон игральной кости могли бы считаться тверже обоснованными, нежели вычисленные, при всегда несколько ненадежном предположении равновозможности, априорные вероятности» (Czuber). И не только «могли бы», но и в самом деле могут считаться тверже обоснованными. Мы могли убедиться на приведенном на

стр. 189 примере, что подсчет действительных результатов многократных испытаний может с совершенною очевидностью выявить отсутствие предполагавшейся равновозможности и, напротив — наличность односторонне влияющих на результаты испытаний обстоятельств: грани кости могут оказаться не строго правильными, углы и ребра не одинаково резкими или, напротив, закругленными, центр тяжести, благодаря ли неравномерности распределения массы вещества или различному числу лунок на отдельных гранях, не строго соответствующим геометрическому центру кости, и т. п.—и в таком случае вероятность падения кости на определенное ребро не будет равна одной шестой, и в то же время более точная ее величина не может быть вычислена априорно, за совершенною невозможностью уловить а тем более вычислить, все необходимые поправки. Вот почему — как мы видели—Курно, а за ним А. В. Васильев, определенно настаивают на том, что «математическая вероятность, рассматриваемая объективно или как мера возможности случайных событий, может быть определена только наблюдением или опытом»; что априорная математическая вероятность — как подробнее развивает А. В. Васильев—есть только «первое приближение к мере вероятия», а потому носит субъективный характер; что такая априорно-вычисленная вероятность могла бы существовать с объективным характером только «для лица, идеально-хорошо знающего строение монеты», и что в области каких бы то ни было реальных явлений объективная вероятность может быть определена только из опыта, при большом числе событий. Это потому, что «математическая вероятность, вычисленная в предположении, что мы имеем идеальное знание о всех постоянных причинах, а потому уже не зависящая больше от степени наших знаний, должна непременно проявиться при большом числе событий». И в конечном счете объективная вероятность и у А. В. Васильева определяется как «мера возможности известного случайного события, проявляющаяся при большом числе испытаний», а априорная математическая вероятность — еще раз — лишь как «первое численное приближение к объективной вероятности».

Вопрос о взаимоотношении между априорною и эмпирическою вероятностью имеет, однако, и другую сторону, которая отмечена под логическим углом зрения, например, у Виндельбанда, а математически развита у Пуассона или у того же Czuber'a. Стоя — повторяю — на почве чистой логики, Виндельбанд указывает на то, что апостериорное заключение о вероятности менее надежно, чем априорное, уже потому, что при этом последнем близость получаемой при поверочных опытах частоты к априорной вероятности дает критерий для суждения и о достаточности числа случаев, и о верности самой априорной вероятности, тогда как для эмпирической или апостериорной вероятности такого критерия не имеется: при сколь угодно далеко идущем увеличении

числа наблюдений, все-таки остается открытою возможность случайной комбинации, в силу которой частота уклонится от действительной вероятности события. Пуассон математически доказывает, что вероятность равенства частот настоящих и будущих событий — иначе говоря достоверность предсказаний — при сопоставлении одних только эмпирических вероятностей в определенном отношении ($1 : \sqrt{1+h}$, где $h = \frac{m^1}{m}$) меньше, чем когда известна априорная вероятность события, и отсюда приходит к тождественному, в существе, с изложенными соображениями Виндельбанда заключению, что «есть существенная разница между вероятностями p и q, данными par hypothèse, априорно, и вероятностями $\frac{m}{s}$ и $\frac{n}{s}$, вычисленными из чисел наступления событий в очень большом числе испытаний», иначе говоря,—эмпирическими. В этом последнем случае, как уже упомянуто, вероятность повторения тех же отношений меньше; «эта разница—объясняет Пуассон—происходит оттого, что вероятности, выведенные из наблюдений, как бы велики ни были числа m и n, на которых они основаны, сами только вероятны, тогда как вероятности, данные a priori, имеют достоверное значение» [1]).

Очень интересную попытку отвести каждому из двух типов вероятностей самостоятельное и равноправное место делает Вундт, впрочем тоже признающий некоторые логические преимущества априорной вероятности перед эмпирическою. Его исходная точка зрения—положение, что всякое заключение о вероятности «от относительной частоты данных, состоящих из единичных случаев, фактов, заключает к вероятности будущего наступления таких же или однородных случаев. Так как современное событие может быть только утверждаемо или отрицаемо, то заключение о вероятности может относиться только к nicht Gegenwärtiges, к не случившемуся, значит, говоря вообще, к будущему». Если мы делаем заключения о вероятности прошедшего, «versetzen wir uns in der Zeit zurück,—мы мыслим себя перемещенными в то время, когда событие еще только предстояло, и при самом заключении мы и в этом случае имеем в виду предшествовавшие этому событию условия». Отсюда следует, что большая посылка такого заключения имеет форму дисъюнктивного суждения. Но такого рода суждение «может быть высказано под двоякого рода условиями: во-1-х, данные факты, из которых делается заключение, могут быть сами условиями для наступления ожидаемых событий ....., и во-2-х, данные могут быть предшествующими событиями того же рода, для которых должны быть предполагаемы тождественные, в общем, условия. В первом случае возникает априорная, во втором — эмпирическая вероятность» [2]). При априорной вероятности, — развивает Вундт несколько дальше,—посылками являются «условия, ожидаемые для данного события, а случаи, которых вероятность ищется, являются их следствиями». При этом коренная разница, возвращающая нас к уже рассмотренному в предше-

---

[1]) Poisson, Recherches, стр. 185.
[2]) Wundt, Logik, Bd. I, стр. 324.

ствующей главе вопросу, в том, что определение априорной вероятности «относится к единичному случаю или к сумме единичных случаев, которая, однако, всегда рассматривается как комбинация единичных случаев. От других отношений условия и следствия она отличается тем, что, во-1-х, каждому условию соответствует следствие, представляющее собою тождественный случай, и, во-2-х, тем, что единичное следствие или комплекс следствий, подлежащий определению, составляет лишь часть объема условий». Необходимое дополнительное условие априорной вероятности—что «все побочные обстоятельства, существующие на стороне условий и следствий, кроме упомянутых, тождественных друг другу элементов, таковы, что не дают ни одному из основных условий или следствий преимущества перед другими» (равновозможность!). Априорность же выражается в том, что «следствия предсказываются без предварительного испытания их действительного наступления, единственно из отвечающих им условий» [1]). С эмпирическою вероятностью мы имеем дело тогда, когда данные случаи—«не условия ожидаемых случаев, а сами следствия однородных условий..... На место предпосылки Einflusslosigkeit der Nebenumstande», иначе говоря, равновозможности, «здесь выступает предположение постоянства обусловливающих обстоятельств», при чем, в частности, «о различии главных и побочных обстоятельств не может быть речи, так как заключают не от причин к следствиям, а от следствий к следствиям, при чем для осуществления следствия требуется соучастие всех вообще влияющих (obwaltende) условий. А так как последние в каждом единичном случае как предшествующего, так и ожидаемого ряда событий могут варьировать в широких пределах, то для единичного случая, вообще, невозможно никакое определение вероятности, а последнее допустимо всегда лишь как заключение от многих случаев к многим случаям». Предпосылки эмпирической вероятности, отличные от предпосылок априорной, сводятся к тому, во-1-х, что «все условия, определяющие наступление ожидаемых событий, должны быть однородны со всеми условиями ожидаемых событий, и, во-2-х, условия должны быть таковы, чтобы они, при соединении массы случаев (число которых, впрочем, зависит от амплитуды индивидуальных колебаний), давали постоянное среднее значение». В этом последнем обстоятельстве косвенно выражается связь причины с следствием, без которой была бы невозможна и эмпирическая вероятность, ибо в основе этой предпосылки лежит другая: «что равным основаниям соответствуют равные следствия, как по роду, так и по величине». Так или иначе—«эмпирическая вероятность никогда не может нарушить своего принципа в том смысле, что она в последнем счете всегда допускает только заключение от многих случаев к многим случаям»; уподоблять вероятность для отдельного человека дожить до известного возраста вероятности определенного бросания кости—логическая ошибка, потому что средняя продолжительность жизни «не есть величина, вытекающая из условий... остающихся тождественными в каждом единичном случае, а есть результат, вытекающий из разнообразнейших влияний, которые все изменчивы от случая к случаю; а для единичного человека определяющим является индивидуальный склад этих влияний, а ни в малейшей мере не их средняя вероятность» [2]).

Таким образом, собственно по вопросу об отношении вероятности к единичному случаю, Вундт, идя другим путем и пользуясь несколько иною термино-

---

[1]) Там же, стр. 426.

[2]) Там же, стр. 427—428, 430.

логию, пришел к тому же, в существе, заключению, к какому мы уже пришли в посвященной данному вопросу части предшествующей главы. Что касается до основного существа взаимоотношения между априорною и эмпирическою вероятностью, то Вундт считает нужным еще раз и с особенным ударением подчеркнуть неправильность взгляда на эмпирическую вероятность, как на простое обращение априорной: такой взгляд,—настаивает он,—«более затемняет, чем раскрывает действительное логическое различие обоих случаев. Еще более недопустимо,—говорит он дальше,—сводить так-называемую априорную вероятность к эмпирической вероятности Априорность не имеет того значения, что определение вероятности независимо от всякого опыта; разница лишь в том, что в одном случае эмпирически известны постоянные условия ожидаемых следствий, в другом — предшествующие однородные следствия» [1]).

Однако, говорить о превосходстве — в какой бы то ни было мере и при каких бы то ни было условиях — априорной вероятности перед эмпирическою можно лишь для той узкой сферы искусственно созданных явлений, где, вообще, только и мыслим учет равновозможных статочностей, а следовательно, и вычисление априорных вероятностей, а не для явлений природы и событий и состояний жизни человека в обществе, где априорное определение шансов каждого данного события, как правило, либо вовсе не осуществимо, либо может быть лишь весьма мало достоверным, особенно в отношении равновозможности. Это приводит нас, однако, уже к другой, тоже ранее затронутой стороне вопроса — к вопросу о сфере применимости того и другого метода определения вероятности. Впрочем, на этой стороне вопроса нам, после всего уже сказанного, не придется долго останавливаться. Ясно, что в этом отношении эмпирический способ имеет значительное преимущество перед априорным, ибо «лишь только мы вступаем в область действительной жизни, априорный метод оказывается почти совершенно неприменимым. Вопросы, которые ставят в данном направлении и естествознание, и общественная жизнь, носят, большею частью, столь сложный характер, что об априорном вычислении вероятности не может быть и речи» (Czuber). «В действительной жизни мы не обладаем исчерпывающим знанием условий, взаимодействием которых определяется априорная вероятность событий»; тем более мы не обладаем точными сведениями об их равновозможности; мы даже определенно знаем, что «в действительности нет равновозможных случаев, а каждый случай представляет собою строго индивидуальный процесс, конечный член цепи причинностей, начало которой удаляется в бесконечность» (Лексис). А поскольку мы даже и обладали бы исчерпывающим знанием причин, — очень многие из них, если не большинство, таковы, что, просто, не допускают разложения на поддающиеся счету или измерению шансы или статоч-

---

[1]) Стр. 434.

ности Поэтому, нам приходится довольствоваться эмпирическими вероятностями, которые мы определяем, учитывая, как часто интересующее нас явление происходит в определенной среде, состоящей из случаев, где данное явление могло бы произойти. У нас нет и не может быть численно-выразимых данных о тех шансах, которыми обусловливается вероятность самоубийств, — тем более о тех, от которых зависит рост человека, рождаемость и т. п... Но мы в состоянии учесть действительное число самоубийств, можем учесть и ту среду, из которой исходят самоубийства (население!), и деление первой из этих величин на вторую дает нам «частоту», или эмпирическую вероятность самоубийства.

На чем же, спрашивается, основывается наше убеждение, что частота события, в самом деле, воспроизводит априорную вероятность, а потому может быть рассматриваема как воплощение эмпирической вероятности? И в данном случае, как и во многих других, обоснования этому нашему убеждению надо искать, прежде всего, в веками накопленном житейском опыте, воспринятом и философами, и математиками, и, в частности, теоретиками теории вероятностей: с одной стороны, в формулируемой Виндельбандом «философской предпосылке, что konstant Wirkendes ein Notwendiges sei, — что постоянно наступающие события тем самым являются необходимыми; что, поэтому, наблюдаемое в действительности приближение к постоянному простому отношению (частота!) не может быть беспричинным, а имеет свою основу в наличности постоянного Grundverhältnis — постоянного основного отношения»,—в том, что полученное из наблюдения отношение дано innerhalb der konstanten Bedingungen — в рамках наличных постоянных причин; с другой стороны—все на том же принципе «уравновешения случая»: в самом понятии равновозможных случаев — говорит тот же Виндельбанд — заключено, что при достаточно большом числе случаев каждой возможности открывается равное число случаев для ее реализации [1]).

Такого рода общих соображений, или даже еще проще — обыденного здравого смысла достаточно, чтобы понять, что полученная из более или менее широкого опыта частота не может быть случайной— что в основе ее должен лежать какой-то комплекс постоянных причин, находящий себе выражение в некоторой, хотя в большей части случаев и не поддающейся вычислению, истинной вероятности; значит, достаточно, чтобы обосновать наше право считать частоту приближенно-равною неизвестной нам вероятности. И это наше право укрепляется опытною проверкой — экспериментами, где частота, в самом деле, ока-

---

[1]) Windelband, Die Lehren vom Zufall, стр. 39.

зывается очень близкою к могущей быть априорно-вычисленною, в данной конкретной обстановке опыта, истинной вероятности.

Нужно ли, спрашивается, подставлять понятие вероятности вместо понятия непосредственно получаемой из наблюдения частоты, собственно в целях принципиального обоснования статистического метода? Я лично не убежден в такой необходимости, поскольку, повторяю, речь идет о принципиальном обосновании статистического метода. Читатель знает, и ниже нам придется говорить подробно о том, что «не при всяких условиях частость события связана с некоторою вероятностью так, как это отвечало бы формуле Лапласа»—закону большого числа в его математической формулировке; более того — «в обычных условиях статистической работы» даже «рисковано пользоваться» этою формулой «для перехода от учитываемой статистиком частости к лежащей в основе ее вероятности». Но если это так, то «какое же значение—справедливо спрашивает себя А. А. Чупров—имеет для статистика закон больших чисел, связывающий формулою Лапласа вероятности с частостями?» А отсюда дальнейший вопрос: «в чем именно смысл перехода от частостей к вероятностям? что, собственно, выигрывается с заменою одних другими?» [1]). Ответ на этот вопрос Чупров ищет, прежде всего, в анализе все того же эксперимента с игральною костью, из которого приходит к тому, как мне кажется, несвободному от ошибки petitio principii заключению, что получаемые путем многократного подбрасывания частости, «как несвободные от случайностей, мало пригодны для характеристики кости в интересующем нас отношении; из того, что очко шесть вышало чаще других, еще нельзя уверенно заключать, что неправильность кости благоприятствует именно очку шесть и что оно и впредь будет выпадать сравнительно часто: это могло быть и случайностью. Переход от частостей к вероятностям делает нашу позицию более прочною. Если мы в состоянии общим образом указать в чем именно состоит неправильность кости, то переход от частости к вероятности дает нам право сделать «общий вывод, что известная форма кости благоприятствует очку шесть». Если вероятность очка шесть более $^1/_6$, то, несомненно, благоприятствование очку шесть—характерное свойство структуры кости; это—вывод, приложимый, притом, «не только к этой кости, но и ко всем иным костям, с нею в определенном отношении схожим». Если даже мы не знаем, в чем неправильность кости, и, следовательно, не можем сделать такого обобщенного вывода, — «вычисление вероятности сохраняет, тем не менее, и в таких условиях некоторое значение. Пусть полученный вывод говорит только о данной кости, — но эта-то кость удерживает свою форму и в дальнейшем, и вычисленная вероятность дает о ней представление, на кото-

---

[1]) Чупров, «Очерки», стр. 276—277.

рое с уверенностью можно опираться при последующих подбрасываниях» [1]).

Повторяю — все это рассуждение кажется мне основанным на petitio principii: наша позиция укрепляется переходом к вероятности, поскольку мы убеждены в способности такого перехода укреплять нашу позицию. С точки зрения формулированного Виндельбандом философского принципа «необходимости постоянных действий» в таком переходе нет никакой необходимости. С другой стороны, я не вижу способа вычисления априорной вероятности как-раз в тех случаях неуловимой неправильности кости, которые вскрываются результатами многократного эксперимента,—и в то же время не вижу, каким образом указания подсчета этих результатов могут нам раскрыть сущность данной неправильности в структуре кости. В конечном же результате переход к вероятности не дает решительно ничего, чего не давала бы простая частость: решительно ничего, кроме и без того напрашивающегося ожидания, что данная кость и в дальнейшем даст, приблизительно, ту же частоту выхода каждого данного очка.

Однако, проф. Чупров и сам подчеркивает, что «для большинства устанавливаемых статистически частостей переход к вероятностям не сопряжен и с таким»—с моей точки зрения, более нежели проблематическим — «выигрышем», потому, что «мы не только не в состоянии характеризовать» здесь «общим образом почти неведомые нам общие условия, но — если нет к тому особых оснований — не имеем даже права рассчитывать, что эти неведомые условия останутся в дальнейшем без существенных перемен» [2]). Ясно,—говорит Чупров—что «вычисление вероятностей не представляет, в таких условиях, самостоятельного номографического интереса, ибо вероятность говорит нам о неподвергавшихся наблюдению явлениях столь же мало, как и частость. Это не делает, однако, — полагает Чупров — приложения теории вероятностей к статистике бесплодным: точка зрения на частости, как на расплывчатые отображения невидимых для невооруженного глаза вероятностей, сохраняет, несмотря на то, высокое научное значение. В области номографической (как ее разумеет А. А. Чупров) работы на ее долю выпадает весьма ответственная служебная роль: лишь с переходом от полу-случайных частостей к характерным для общих условий вероятностям открывается для нас возможность распутывать, что с чем связано в сложном клубке переплетающихся в поле нашего наблюдения обстоятельств. В области же работы идиографической она проливает свет на пресловутую устойчивость статистических чисел, которая своею мнимою загадочностью приводит в смятение исследователей, не располагающих поддержкою теории вероятностей. Лишь на

[1]) Там же, стр. 278—279.

[2]) Стр. 279.

почве теории вероятностей — заключает Чупров — удается осмыслить наблюдаемые в статистических числах колебания; лишь теория вероятностей открывает возможность прагматического их истолкования в каждом отдельном случае. Не обращаясь к ее конструкциям, статистик не в силах довести до завершения начертываемой им идиографической картины» [1]). В дальнейшем мы увидим, что те перечисляемые в процитированном только-что отрывке услуги, которые переход к вероятности оказывает статистике в ее «номографических» и «идиографических» функциях, далеко не столь существенны, и сам Чупров, в своих «Очерках», немало сделал для того, чтобы подорвать преувеличенную оценку этих услуг; утверждение же, что «лишь теория вероятностей открывает возможность прагматического истолкования, в каждом отдельном случае», наблюдаемых в статистических числах колебаний, решительно противоречит всему, что делалось и делается в практике каузального статистического анализа — области, где приложения теории вероятностей до сих пор, по крайней мере, не завоевали себе сколько-нибудь видного места, и где, однако, статистикой сделано очень много именно для «прагматического истолкования» колебаний статистических чисел. Не подлежит сомнению, что в сфере более тонкой разработки статистической теории нельзя обойтись без перехода от частостей к вероятностям, и что даже малую, в данном направлении, пригодность тех или других приемов, предлагаемых исчислением вероятностей, можно сколько-нибудь убедительно доказать, лишь исходя из его же собственных положений и аналитических приемов. Но, собственно, поскольку речь идет о принципиальном обосновании статистического метода, решающее значение, как частью уже выяснено в предыдущих главах, имеют не те или другие формулы исчисления вероятностей, в самом деле требующие для своего применения перехода от частот к вероятностям, а самая идея, сам принцип вероятности,—в частности, принцип невероятности случайных совпадений; не математическая, а «философская» вероятность, в том смысле, какой придавал этому слову Курно. И поскольку речь идет именно о принципиальном обосновании статистического метода, подстановка вероятности вместо частоты ничего не прибавляет к тому почерпнутому из указаний здравого смысла и из его философских обобщений убеждению, что полученная из достаточно широкого наблюдения частота является выражением определенной совокупности постоянных причин или, что то же самое, общих условий.

Однако, и все те, резюмированные только-что, житейские и общефилософские соображения, которые оправдывают наше убеждение в том, что частота, сама ли по себе или при посредстве вероятности,

---

[1]) Там же, стр. 280.

является отражением управляющего данным массовым явлением комплекса общих условий или постоянных причин, в конце концов имеют и своим начальным пунктом, и своим конечным выводом, все тот же закон большого числа; все они исходят от этого закона и к нему же приводят, потому что все они действительны только при наличности достаточно больших чисел.

Может быть, нелишнее еще раз напомнить житейскую формулировку закона большого числа: «в большом числе — гласит она по Майру — составляющем результат массового статистического наблюдения, выступают такие правильности—правильности как в строении известной массы, так и в наступлении поступков или событий, которые не могут быть познаны на произвольно взятых дробных частях изучаемой массы». На языке теории вероятностей «правильности», «постоянные причины» находят себе выражение в вероятностях; случайные отступления от правильностей, отвечающих действию постоянных причин — в единичных случаях и малых числах; проявление правильностей осуществляется в частотах — отношениях действительных чисел повторений события к общим числам наблюдений или испытаний, — но осуществляется именно только при достаточно больших числах наблюдений или испытаний. Отсюда получается математическая формулировка закона большого числа, которая, в простейшем своем виде (по Борткевичу), гласит: «вероятность того, что, при известном числе испытаний, отношение числа повторений события к общему числу испытаний (частота) будет отличаться от вероятности события (т. е. от того отношения, какое отвечает действию данного комплекса постоянных причин) не более, как на малую величину, произвольно взятую, с увеличением числа испытаний приближается к единице, т. е. к достоверности»; при большом числе испытаний «в высшей степени вероятно, что отношение числа случаев, где наблюдается известный признак, к общему числу случаев (т. е. опять-таки, частота), будет равно вероятности данного события». Или в еще более упрощенной формулировке, какую ему дает А. А. Чупров в своей немецкой статье о «задачах статистического метода»: в большом числе «относительные частоты, с которыми отдельные события участвуют в общей массе следствий», приблизительно пропорциональны объективным вероятностям, характеризующим связь соответственных следствий с общею всем причиной, и эта пропорциональность будет тем теснее, чем больше единичных событий объединено в одну массу [1]). Или, в еще более сжатом

[1]) Tschuprow, Die Aufgaben, etc., стр. 441.

виде: **известная нам априорная вероятность**, будучи отражением определенного комплекса общих или постоянных причин, с все возрастающею, по мере увеличения массы наблюдений, достоверностью позволяет ожидать все более приближающейся к ней частоты наступления данного события. Но это положение в той его вполне точной математической формулировке, к которой нам предстоит перейти сейчас,—это еще только первый, математически наиболее важный шаг. С точки зрения статистической, вообще с точки зрения опытных наук, гораздо важнее второй, обратный шаг—переход от известной нам, из наблюдения, частоты к неизвестной нам, объективной вероятности, — шаг, требующий особых логических соображений и особого математического обоснования.

Чтобы окончательно уяснить себе принципиальное различие между этими двумя шагами или стадиями, в которых нам представляется математически формулированный закон большого числа, напомним еще раз существо двух понятий вероятности. Априорная вероятность это—такая, которая вычисляется по имеющимся данным о равновозможных, благоприятных и неблагоприятных шансах или статочностях: пять белых и пять черных шаров в урне дают априорную вероятность белого ½, два белых и восемь черных—вероятность черного $^2/_{10}=^4/_5$. Эмпирическая или апостериорная вероятность определяется из действительного течения событий, находящего себе выражение в фактической частоте: из закрытого ящика с шарами вынимается 1.000 шаров, из них 487 черных—частота, позволяющая догадываться о вероятности ½; когда число извлечений достигает 10.000, из них оказывается белых 4.956—число, еще гораздо более близкое к половине и дающее нам почти полную уверенность, что число белых шаров в урне равно числу черных. Спрашивается, почему частота, по мере увеличения числа испытаний, все более и более приближается к половине? Потому, что частота воспроизводит неизвестную нам объективную вероятность, и, следовательно, может быть рассматриваема как ее эмпирическое выражение, как эмпирическая вероятность. И вот, еще раз, мы имеем дело с двумя положениями или аспектами закона большого числа:

1. **Закон большого числа в общепринятом смысле** этого слова — теоремы Бернулли и Пуассона, сущность которых сводится к тому, что при данной вероятности и очень большом числе наблюдений получается очень близкая к ней частота действительного наступления события.

2. Обратное, совсем особое положение: если дана известная частота действительного наступления события, то теоремы Бернулли и Пуассона, вообще математически доказанное первое положение, еще не дает нам права заключать, что объективная вероятность данного собы-

тия близка к этой, полученной из опыта, частоте. Чтобы иметь право утверждать это, требуется особый вывод, особое обоснование.

Остановимся сначала на первом из только-что формулированных «аспектов», нашедшем себе выражение в теоремах Бернулли (окончательно формулированной Лапласом) и Пуассона. Первая из них имеет в виду сравнительно простой случай, или точнее, группу случаев—именно те, когда при переходе от случая к случаю или от испытания к испытанию вероятность события не меняется; например, когда шары извлекаются из одной урны, с остающимся неизменным числом шаров каждого цвета, или когда подбрасывается одна и та же монета. Содержание ее сводится к двум положениям, из которых первое касается наивероятнейшей комбинации данного события и события ему противуположного, или, выражаясь иначе—наступления и ненаступления данного события, а второе — вероятности того, что отклонение действительного числа повторений того и другого события, или отношение этого числа к общему числу наблюдений или испытаний, где могло иметь место данное событие (частота), от наивероятнейшего не выйдет за известные, заданные наперед, тесные пределы. В формулировке Czuber'a положения эти гласят:

1. Если относительно двух противуположных событий E и E_1, обладающих постоянными вероятностями p и q, произведено s испытаний, то из всех возможных результатов наиболее вероятен тот, при котором отношение числа повторений событий m : n равно или стоит ближе всего к отношению их вероятностей p : q.

2. Если число испытаний s велико, то вероятность того, что число повторений события E, т. е. m, окажется в границах

$$sp-\gamma\sqrt{2spq} \text{ и } sp+\gamma\sqrt{2spq},$$

а отношение этого числа к общему числу испытаний, $\frac{m}{s}$, т. е. относительная частота наступления события E окажется в границах

$$p-\gamma\sqrt{\frac{2pq}{s}} \text{ и } p+\gamma\sqrt{\frac{2pq}{s}}$$

выражается так называемым «интегралом Лапласа» или «интегралом вероятностей», вид которого есть

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\gamma} e^{-t^2}dt$$

Смысл этого «Лапласовского интеграла» выяснится для читателя, даже мало подготовленного по математике, в дальнейшем изложении. Сейчас важно иметь в виду только одно: что при некоторых условиях, которые, опять-таки, выяснятся из дальнейшего изложения, это P может

быть сделано сколь угодно близким к единице, т. е. к достоверности. А отсюда следует, что соответствующие данной вероятности p границы абсолютного числа повторений данного события—числа m, с увеличением числа испытаний s, расширяются, но лишь пропорционально $\sqrt{s}$— корню квадратному из числа наблюдений или испытаний; и что, главное,—«соответствующие данной вероятности границы отношения $\frac{m}{s}$, т. е. относительной частоты появления события E, с возрастанием числа испытаний суживаются, и путем соответственного увеличения числа испытаний s могут быть сделаны сколь угодно тесными; число s может быть взято настолько большим, что с вероятностью, сколь угодно близкою к единице», т. е. с «практическою достоверностью», «можно будет ожидать, что относительная частота $\frac{m}{s}$ будет уклоняться от p не более, нежели в сколь угодно тесных пределах». В пределе—иначе сказать, при бесконечно большом числе испытаний, разность между частотою $\frac{m}{s}$ и вероятностью p стремится к нулю, и, значит, частота стремится к совершенному равенству с вероятностью.

Это—сущность теоремы Бернулли в математической формулировке, данной ей Лапласом. Напоминаю, что предпосылкою ее применимости является неизменная или постоянная вероятность p, с какою мы имеем дело при подбрасываниях одной монеты, при извлечениях карт из колоды или шаров из урны, при условии возвращения каждого вынутого шара в урну и каждой вынутой карты в колоду, — в игре в рулетку или в лото и т. п. Но в реальной действительности, — как во внешнем мире, так, в особенности, в области явлений человеческого общежития, — таких вероятностей нет, или, во всяком случае, они представляют собою редкое и потому не идущее в счет исключение. Поэтому принципиально (почему именно принципиально, а не практически,—это выяснится из дальнейшего) важным шагом вперед была другая теорема—теорема Пуассона, распространившая принцип теоремы Бернулли и на тот несравненно более обычный в реальной действительности, и единственно-мыслимый в действительности социальной, случай, когда вероятность события меняется от одного случая или испытания к другому—иначе говоря, когда в массовом явлении вероятности отдельных случаев и групп случаев рассматриваемого события различны; случай, например, когда шары извлекаются не из одной, а из множества урн, с различною, в каждой, пропорциею белых и черных шаров. По отношению к этой теореме—теореме Пуассона, теорема Бернулли, предполагающая постоянную вероятность, представляет собою лишь один из частных случаев. В таком обобщенном виде математически-формулированный закон большого числа не содержит уже никаких оговорок отно-

сительно характера вероятности и, следовательно, гласит—тоже по Czuber'у—так:

1. Если относительно двух противуположных событий E и E_1 произведено s испытаний, то наивернейшая из комбинаций всех возможных результатов есть та, в которой числа повторений событий E и E_1 относятся друг к другу так, как их средние вероятности, выведенные из всех сменяющих друг друга, по мере хода испытаний, отдельных вероятностей.

2. С весьма быстро приближающеюся к единице вероятностью, формула которой вполне аналогична Лапласовскому интегралу, но с некоторыми частичными отличиями, вытекающими из характера вероятности, как средней из множества частных вероятностей, следует ожидать, что абсолютное число повторений события E окажется лежащим в границах

$$sp - \gamma k\sqrt{s} \text{ и } sp + \gamma k\sqrt{s},$$

а относительная частота этого события—в границах

$$p - \frac{\gamma k}{\sqrt{s}} \text{ и } p + \frac{\gamma k}{\sqrt{s}}$$

где буква k, появившаяся на месте $\sqrt{2pq}$, есть некоторое сложное выражение, учитывающее всю совокупность изменяющихся частных вероятностей. Из этого второго положения, совершенно как и в теореме Бернулли-Лапласа, непосредственно следует, что «путем увеличения соответственного числа испытаний, границы, внутри которых отношение $\frac{m}{s}$ может быть ожидаемо с вероятностью сколь угодно близкою к единице, могут быть сделаны сколь угодно тесными». И отсюда, опять-таки, конечный вывод: что разность между частотою и вероятностью повторения данного события и при изменяющейся вероятности стремится к нулю и, следовательно, частота в пределе, т. е. при бесконечном числе наблюдений, совершенно совпадает с вероятностью.

Таким образом, теоремы Бернулли и Пуассона состоят из двух, совершенно сходных по существу положений, смысл которых заключается в следующем:

1. Если известна постоянная вероятность p, или средняя вероятность $\frac{p_1 + p_2 + \cdots p_r}{r}$, то наиболее вероятным числом повторений события E является произведение sp или произведение $s\frac{p_1 + p_2 + \cdots p_r}{r}$; наиболее вероятным отношением действительного числа повторений события к общему числу испытаний, частотою, будет дробь, равная p, или равная средней из изменяющихся вероятностей—$\frac{p_1 + p_2 + \cdots p_r}{r}$. Например, при $s = 1.000$ и вероятности, постоянной или средней, $^1/_2$, наиболее вероятным m будет 500, наиболее вероятным

$\frac{m}{s}$ будет $^1/_2$; при том же s и вероятности $^2/_5$, наиболее вероятным m будет 400, наиболее вероятным $\frac{m}{s}$ будет $^2/_5$; при том же s и вероятности $^1/_5$ наиболее вероятным m будет 200, наиболее вероятным $\frac{m}{s}$ будет $^1/_5$ и т. д.

Что значит, однако, «наиболее вероятным»? Это значит только, что $m = 500$ более вероятно, чем 499, 498, 495, 490 в одну сторону и чем 501, 502, 505, 510 и т. д. — в другую сторону; что $\frac{m}{s} = 0.5$ более вероятно, чем 0,497 или 0,492 в одну сторону и 0.503, 0,508—в другую. Но это отнюдь не значит, чтобы $m = 500$ и $\frac{m}{s} = 0,5$ были, так-таки, действительными значениями числа повторений события и его частоты. Мы не только не имеем права с сколько-нибудь значительной долею уверенности ожидать получить, при 1.000 экспериментах, именно эти значения—500 и $^1/_2$, но, напротив,—с большею долею уверенности можем ожидать, что получатся не точно эти, а только близкие к ним числа. Чего мы, однако, более или менее (но тоже, именно, только более или менее!) наверно можем ожидать—это то, что отклонение действительного числа повторений события и его частоты от «наиболее вероятных» значений не выйдет за известные пределы. Если $p = \frac{1}{2}$ и $s = 100$, то действительное число повторений события будет никак не 10 и не 90, если 1.000, то оно будет никак не 300 и не 700.— это все события, которые мы можем рассматривать как «физически невозможные»; оно будет в первом случае близко к 50, при чем, например, такие числа повторений, как 49, 51, 52 более вероятны, чем 47, 45, 42 в одну сторону и 53, 55 или 58—в другую; во втором случае оно будет близко к 500, при чем такие числа повторений, как 495 или 492, более вероятны, чем 485, 480, 475 и т. д. И вот,

2. Если дана определенная постоянная вероятность p или средняя вероятность $\frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_r}{r}$, то при всяком данном числе наблюдений s имеется, могущая быть точно вычисленною, растущая с числом наблюдений, вероятность, что действительное число повторений m отклонится от наиболее вероятного числа sp не дальше определенного предела $\pm \gamma\sqrt{2spq}$, а отношение этого числа повторений к общему числу испытаний $\frac{m}{s}$ не отклонится от вероятности p дальше тоже определенного предела $\pm\gamma\sqrt{\frac{2pq}{s}}$. Если число испытаний s незначительно, пределы возможных отклонений будут, — поскольку речь идет о частоте,—сравнительно очень широки: в известных опытах Джевонса, например, подсчеты по сто бросаний дали от 36 до 66 выходов орла и, соответственно, от 64 до 34 выходов решетки, и, следовательно, частота выхода орла

колебалась в таких широких пределах, как 0,36 и 0,66. Если s велико, пределы отклонений частоты от вероятности могут быть сделаны сколь угодно тесными,—иначе говоря, частота может быть сделана сколь угодно близкою к вероятности. При данных вероятности и числе испытаний, пределы эти могут быть вычислены с любою желательною степенью вероятности: и с вероятностью 0,9, и с вероятностями 0,99 — 0,999 — 0,9999 и т. д.,—при чем, заметим сейчас же, теоретически возможные пределы отклонений будут тем шире, чем большею задаваться вероятностью, и, наоборот,—тем теснее, чем меньшею степенью вероятности мы согласимся довольствоваться. Таким образом, второе положение теорем Бернулли и Пуассона обнимает два понятия: достоверности результата—и его точности; достоверность выражается величиною вероятности P, что результат не выйдет из определенных пределов, а точность—широтою или теснотою самих этих пределов. И совершенно как в житейском опыте, так и в теории вероятностей—этом «здравом смысле, положенном на вычисление», точность и достоверность изменяются в обратном друг с другом отношении. В действительной жизни стрелок с высокою степенью достоверности, наверняка, может рассчитывать попасть в мишень, положим, диаметром в аршин, но у него будет очень мало уверенности попасть во внутренний ее круг, диаметром в четверть аршина, а тем более—в центр. Теория вероятностей дает нам высокую вероятность результата при сравнительно малой точности—и гораздо меньшую вероятность, если мы задаемся более высокою степенью точности, иначе сказать, более тесными пределами отклонений.

Ко всему этому нам предстоит еще вернуться в дальнейшем изложении, где всему этому будет дана более точная и определенная формулировка. Теперь же я на численном примере, взятом в предположении вероятности события равной половине и вероятности результата P = 0, 99998, т. е. такой вероятности, которую можно принять равносильною «практической достоверности», покажу, как влияет увеличение числа наблюдений или испытаний s на точность результата—на пределы отклонений действительного числа повторений события и его частоты от наиболее вероятных величин:

Число наблюдений (s)	Пределы колебаний числа повторений события (m)	Пределы колебаний частоты $\left(\frac{m}{s}\right)$
200	70 — *130*	0,35 — 0,65
20 тыс.	9700 — *10300*	0,485 — 0,515
80 тыс.	39400 — *40600*	0,4925 — 0,5075
320 тыс.	158800 — *161200*	0,49625 — 0,50375
2 милл.	997000 — *1003000*	0,4985 — 0,5015
18 милл.	8991000 — *9009000*	0,4995 — 0,5005
200 милл.	99970000 — *100030000*	0,49985 — 0,50015

Подчеркнутые курсивом части высших пределов действительных чисел повторения события сразу показывают читателю, что эти пределы—поскольку, значит, речь идет об *абсолютных числах* повторений, с увеличением числа наблюдений или испытаний расширяются. Но так как расширение их идет пропорционально не числам наблюдений, а корням квадратным из них, следовательно, все более и более отстает от роста самого числа наблюдений, то пределы уклонений *частоты*, которые, ведь, получаются как частное от деления уклонений абсолютного числа повторений события на несравненно сильнее растущее число наблюдений, все более и более суживаются, и даже при таких, сравнительно умеренных, числах испытаний, как 320 тыс., даже 80 тыс., допустимое, с какою-либо степенью вероятности, отклонение частоты от вероятнейшего ее значения представляется совершенно ничтожным и, с точки зрения потребностей статистического анализа, абсолютно несущественным.

Таков—повторяю—смысл *обоих* теорем. Разница единственно лишь в том, что теорема Бернулли имеет в виду исключительно случай постоянных вероятностей p и q, тогда как у Пуассона имеется в виду случай средней вероятности $\frac{p_1 + p_2 + \cdots p_k}{k}$, при чем каждая из частных вероятностей может относиться к любым частным группам и принимать любые частные значения. В виде иллюстрации для теоремы Пуассона Бертран приводит опыт с шарами, но произведенный без требуемого условиями теоремы Бернулли тщательного перемешивания шаров: при *такой* постановке эксперимента не будет полной равновозможности—те или другие шары будут оставаться наверху и поэтому выниматься чаще, нежели другие. «Continuez, dit Poisson; pour prolongé que soit le désordre, il est embrassé lui même dans la loi des grands nombres; certaines boules sont dessus, vous les verrez dessous un autre jour, l'homme peu soigneux à faire le mélange aura un successeur plus consciencieux ou dont la négligence, qu'il faut prévoir, profitera à des combinaisons nouvelles; tout à la longue se compensera: продолжайте — таково рассуждение, отвечающее теореме Пуассона,—лишь бы беспорядок был достаточно продолжителен, он и сам объемлется законом больших чисел; некоторые шары остаются наверху—когда-нибудь они окажутся внизу; небрежный экспериментатор будет заменен более добросовестным, или же таким, которого небрежность будет благоприятствовать уже другим комбинациям, и, в конце концов, все придет к равновесию».

Отмечу, затем, теперь же следующее обстоятельство: в дальнейшем, поскольку будет итти речь о математически формулированном законе большого числа и о непосредственных его приложениях и ближайших выводах из него, мы будем иметь в виду *только* теорему Бернулли и вытекающие из нее формулы. Я не буду разбираться в общем вопросе о значении теоремы Пуассона—по господствующему

среди математиков мнению, справедливость которого я не берусь проверить, Пуассон сильно преувеличил это значение. «Открытие Пуассона—говорит, например, тот же Бертран—очень мало отличается от известных и до того законов случая, и один только Пуассон приписывал этому открытию важное значение» [1]). Остановлюсь только на той стороне вопроса, которая наиболее существенна с точки зрения теории статистики: при дальнейшем изучении явлений с изменяющеюся вероятностью (о чем подробнее будет итти речь в одной из последующих глав), выяснилось, что получающиеся для такого рода явлений средние вероятности представляют две основные разновидности: средние вероятности постоянного состава, т. е. выведенные из отдельных вероятностей, относящихся к резко разграниченным и остающимся постоянными, в своих границах, частям данной общей совокупности, и средними вероятностями в собственном смысле,— иначе сказать, средними вероятностями произвольно изменяющегося состава. С вероятностями первого рода приходится иметь дело исключительно или почти исключительно при специально для того приспособленных экспериментах, в действительной же жизни встречаются, более или менее исключительно, средние вероятности в собственном смысле слова, т. е. с произвольно изменяющимся составом частных вероятностей. Между тем, вероятности этого второго типа по существу аналогичны элементарным или постоянным вероятностям, и потому к соответственным рядам наблюдений или испытаний, чисто-математически, одинаково приложимы, как теорема Бернулли, так и теорема Пуассона. Это, выясненное в одной из работ В. І. Борткевича, обстоятельство, к которому нам придется вернуться в одной из следующих глав, значительно умаляет практическое значение Пуассоновского обобщения теоремы Бернулли, которая, при таком положении вещей, и в своем первоначальном виде оказывается приложимою во всей широкой области явлений, с которыми имеют дело как социальная, так и другие отрасли статистики; в частности, оказывается достаточной для обоснования, в приложении к ним, закона большого числа, а с ним—и статистического метода. Это и позволяет, например, Czuber'у сказать, что «в теореме Пуассона нет того важного обобщения теоремы Бернулли, как представлял себе Пуассон». Но такая оценка представляется мне справедливой только с точки зрения возможности приложения формул теоремы Бернулли к явлениям с изменяющимися вероятностями типа «средних вероятностей в собственном смысле». Но принципиальное ее значение все же очень велико. В теореме Бернулли имеется определенное условие неизменности основной вероятности,—следовательно, применение ее к явлениям с изменяющеюся вероятностью было принципиально недопу-

[1]) Bertrand, Calcul des probabilités, стр. XXXI—XXXII.

стимо. Обобщение Пуассона устранило эту принципиальную недопустимость и, наоборот—выяснило принципиальную общность математически формулированного закона большого числа и принципиальную независимость его от характера лежащих в основе данного массового явления вероятностей, и, таким образом, обосновало наше право применения интеграла вероятностей и известных—как мы увидим из дальнейшего—вытекающих из него формул и приемов исследования к явлениям с изменяющеюся вероятностью.

Еще гораздо сильнее, в частности под углом зрения статистической теории, значение теоремы Пуассона и вообще исследований этого последнего выразилось в том, что они позволили разобраться в вопросе о дисперсии и устойчивости статистических рядов и послужили основою для относящихся сюда теоретических построений Лексиса и Борткевича. Подробно и об этом будет идти речь в дальнейшем, в особой главе, посвященной учению о дисперсии. Сейчас я лишь упомяну о том, что Пуассон дал в совершенно готовом виде большую часть тех основных для учения о дисперсии формул, о которых там будет итти речь.

А затем, еще несколько слов о смысле обоих теорем. Здесь, именно, приходится отметить два существенных обстоятельства: одно—что обе эти теоремы, и, значит, вообще закон большого числа в его математической формулировке, устанавливают только вероятности известных массовых результатов, а, следовательно они, как и всякое другое положение теории вероятностей, не дают никакого непосредственного и безусловно достоверного представления о действительном течении событий. Пусть даже со сколь угодно высокою степенью вероятности будет установлено, что частота события должна лежать внутри точно определенных границ, сколь угодно близко лежащих к вероятности события; иначе говоря—пусть со сколь угодно высокою степенью достоверности будет установлена сколь угодно высокая степень вероятной точности результата массового наблюдения,—это не мешает тому, что ряд действительных испытаний может дать результат, весьма далеко выступающий за теоретически-допустимые пределы. В этом—если бы это случилось—не было бы ничего, что противоречило бы нашим теоремам, которые, ведь, устанавливают именно только чрезвычайно малую вероятность, но отнюдь не невозможность тех или других случайных событий или комбинаций событий. Сколь угодно мало вероятное событие, раз за него имеется хоть один шанс из сколь угодно большого их числа, хотя бы даже из бесконечности, может все-таки когда-нибудь случиться—это будет просто то, что в теории вероятностей условились называть «необычайным событием». Такое ограничение значения теорем, в которых нашел себе математическую формулировку закон большого числа,—ограничение, вытекающее из самого смысла понятия вероятности, находится в полном соответствии с житейским пониманием смысла этого закона: ведь

проявляющиеся в массовых явлениях правильности и закономерности обнаруживаются именно только в больших числах; для единичных случаев и небольших групп случаев они обосновывают только определенные ожидания, определенные расчеты, которые могут, однако, и не оправдаться, потому что влияние обусловливающих эти правильности постоянных причин, в отдельных случаях и небольших группах случаев, может совершенно заслониться и парализоваться действием тех или других комбинаций случайных причин, а потому единичный случай или небольшая группа случаев может принять вид, не имеющий ничего общего с установленными для всей большой массы групповыми признаками, ни мало не колебля этим установленной для массового явления закономерности. Я рассчитываю «наверняка» дойти домой, раз я отправился домой—но это вовсе не значит, что я, в самом деле, наверное дойду—я могу по дороге умереть скоропостижно и естественною смертью, и погибнуть от той или другой случайности.

Другое обстоятельство, которое нужно отметить,—это то, что обе наши теоремы, сами по себе, и не могут выражать собой чего-либо непосредственно относящегося к действительности, и в частности к статистической действительности. Они действительны в полной мере лишь при наличности тех идеальных предпосылок безусловной равновозможности и т. д., из которых исходит математическое учение о вероятностях. Поэтому, выраженные в них положения лишь путем наблюдения и эксперимента могут быть перенесены на явления действительности. Наиболее подходящая сфера для такого рода экспериментальной проверки—это, как уже отмечалось—опыты и игры, основанные на случае: здесь, с одной стороны, вполне возможно совершенно точное вычисление априорных вероятностей, а с другой—и самая экспериментальная проверка может быть произведена с максимально-мыслимою точностью, а потому и результаты ее будут обладать максимально-мыслимою степенью достоверности. В «Очерках» А. А. Чупрова приведен и систематизирован богатый материал этого рода—здесь мне нужно подчеркнуть только конечный результат в изобилии предпринимавшихся экспериментов этого рода,—именно, «тот решающий факт, что во всех случаях, где только предпринималась проверка в только-что указанном смысле, и где только были налицо предпосылки для вычисления априорной вероятности»—ограничение чрезвычайно серьезное, потому что такого рода предпосылки имеются налицо именно только в играх и специальных опытах—«во всех таких случаях могло быть установлено столь полное приближение относительных частот к вероятностям, сколь это вообще мыслимо при применении результатов чистого мышления к событиям действительной жизни». И вот, именно это,—именно «перенесенное, посредством опыта, из среды теории в область действительности»—хотя бы только действи-

тельности, созданной в искусственном эксперименте,—«положение о беспредельном приближении, при большом числе наблюдений, частоты событий к их вероятности, и составляет содержание того, что обычно называют законом большого числа» (Czuber).

Перейдем теперь к доказательству закона большого числа в его математической формулировке.

Только-что было отмечено, что исключительно наблюдение и, главным образом, искусственно-приспособленный эксперимент позволяют перенести в область действительности то, что в чистом своем виде представляет собой лишь чистую теорию. Но сумма жизненного наблюдения и научного опыта находит себе выражение и в определенных теоретических положениях. И вот, в данном случае, эта сумма данных наблюдения и опыта естественно приводит к мысли, что доказательство закона большого числа не может быть сведено к решению одной только чисто-математической теоремы. По схеме, исходящей от Курно и воспринятой, например, А. А. Чупровым, полное, в его «канонической» форме, доказательство закона большого числа „распадается на три части: две леммы (вспомогательных теоремы), из которых одна носит логический характер, а другая представляет из себя математическую теорему, и самое доказательство". Первая из этих лемм, т. е. промежуточных положений, лишь подготовляющих конечный вывод, в существе своем тесно соприкасается с теми, приводившимися выше, общежитейскими соображениями, в которых дается достаточное для житейских целей и для обыденной практики обоснование закона большого числа. Она гласит: „события, вероятности которых очень малы, не будут повторяться часто". „В такой формулировке,—справедливо замечает А. А. Чупров, не дооценивая, однако, всего значения этого замечания,—„наличность связи между вероятностями событий и числами их повторений почти не требует доказательств,—само собою разумеется, что мало вероятное событие не может повторяться часто, потому что иначе оно не было бы маловероятным". Вторая лемма «может облекаться в весьма разнообразные математические формы, представляющие, в разных вариантах, одну общую мысль: представляется—гласит она—крайне мало вероятным, чтобы в длинном ряде событий, стоящих под действием некоторых общих причин, частота различных следствий этих причин значительно уклонилась от их вероятностей. Сопоставляя обе эти леммы—продолжает Чупров—мы и приходим к закону больших чисел. Мы сперва доказываем, что малая вероятность обусловливает собою редкость—доказываем, значит, первую, в схеме А. А. Чупрова, лемму. Затем мы доказываем, что сильные отклонения частостей событий от их вероятностей маловероятны. Отсюда вытекает, что подобные

отклонения встречаются редко и, как правило, частости событий держатся близко к их вероятностям»[1]).

Первая—по схеме А. А. Чупрова—лемма может быть формулирована и математически, как вывод из теоремы деления вероятностей. Эта последняя непосредственно вытекает из теоремы умножения вероятностей, в ее относящемся к зависимым событиям варианте, и формулируется А. А. Марковым следующим образом: «вероятность события B, когда известно существование события A, равна отношению вероятности появления обоих событий A и B вместе к вероятности события A», или иначе—частному от деления общей вероятности совместного появления обоих событий на вероятность уже существующего события A. Например: вероятность выхода двух тузов при предпосылках зависимости, как мы видели (стр. 209), равна $^1/_{13} \times {}^1/_{17}$. Один туз вышел; его вероятность была $^1/_{13}$,—следовательно вероятность выхода второго туза есть $({}^1/_{13} \times {}^1/_{17}) : {}^1/_{13} = {}^1/_{17}$. Согласно этой теореме оказывается возможным, при помощи самых простых алгебраических выкладок (за которыми я, однако отсылаю читателя к «Исчислению вероятностей» А. А. Маркова [2], потому что для нас они не имеют существенного значения) решить две «задачи»: во-1-х, вычислить вероятность каждой из возможных причин имевшего место события, если, с одной стороны известны вероятности данного события при наличности каждой из стоящих под вопросом причин, а с другой—вероятности самих причин независимо от того, наступило или не наступило данное событие: во-вторых, при наличности тех же данных определить вероятность некоторого нового события, если, притом, известна вероятность этого последнего при наличности каждой из комбинаций первого события с могущими обусловливать его причинами. Решение первой из этих задач дает одно из доказательств и, может быть, самое удачное одного из важнейших положений теории вероятностей, о котором мне придется говорить в следующей главе,—теоремы Байеса, решение второй—формулу для выражения вероятностей будущих событий. Решение дальнейших, уже несколько более сложных «задач», основанных на той же теореме деления вероятностей, позволяет дать точный ответ, во-1-х. на вопрос, как изменяется вероятность различных предположений об истинной вероятности события, если известно, что при данном числе испытаний событие появилось столько-то, а противуположное ему—столько-то раз, т. е. когда дана частота данного события, и, во-2-х, как велика вероятность, что в некотором числе будущих испытаний интересующее нас событие появится столько-то раз, когда известна его частота при известном числе уже выполненных испытаний. И уже из ответов на эти две «задачи» выводятся два заключения: одно, выражающее собой интересующую нас первую «лемму» в полном доказательстве закона большого числа, — о малой вероятности больших отклонений вероятности от частоты, если число наблюдённых испытаний значительно; другое — что при большом числе сделанных и малом числе будущих испытаний вероятности различных предположений о числе появлений события при этих будущих испытаниях мало отличаются от тех, которые получатся, если при всех будущих испытаниях считать вероятность событий равною выяснившейся при уже сделанных испытаниях частоте.

В схеме обоснования закона больших чисел, принадлежащей самому Курно; то, что А. А. Чупров называет первою леммою, тесно связывается с известным нам понятием «физической невозможности». Как читатель припомнит, Курно рассматривает все основные положения и теоремы теории вероятностей, включительно до «принципа Бернулли», как «чисто-арифметические иссле-

[1]) Чупров, Очерки, стр. 227—229.

[2]) 3-е изд., стр. 203--217.

дования», для перехода же «от абстрактного отношения к действительному закону реальной жизни» считает необходимым исходить не из чисто математических соображений, а из «философской критики». Анализ понятий случая и случайного события приводит его к специальному понятию «физически-невозможного» события, т. е. «такого, которого математическая вероятность бесконечно мала, и лишь через посредство этого понятия — полагает Курно — теория вероятностей получает о б ъ е к т и в н о е значение в мире действительности». В частности, в применении к «принципу Бернулли» понятие «физической невозможности» вплетается в такое рассуждение: при бесконечно большом числе испытаний имеется бесконечно малая вероятность сколь угодно малого отклонения частоты события от его вероятности, — следовательно, такое, даже сколь угодно малое отклонение становится «физически невозможным», и именно вследствие этого принцип Бернулли, а с ним и все учение о математической вероятности примыкает к понятию физической невозможности, и математическая вероятность из абстрактного отношения, зависящего от нашего взгляда, становится выражением отношения, определяемого природой вещей и получаемого из наблюдения».

В дальнейшем мне придется высказать серьезные, как мне представляется, сомнения по поводу необходимости п е р в о й из входящих в конструированную А. А. Чупровым схему «вывода Курно», логической, по своему существу, леммы. Но если бы даже и считать ее необходимой и, вообще, принять всю данную схему обоснования закона большого числа в его математической формулировке,—все же остается неясным, почему две леммы должны следовать друг за другом именно в т а к о м порядке. У самого Курно (а также, напр., у Czuber'a, поскольку его соображения относительно необходимости перенесения теоретического положения в сферу реальной действительности можно ставить в параллель с «философскими» соображениями Курно) мы находим обратный порядок, который кажется мне более отвечающим логическому ходу рассуждения. Сначала рассматривается м а т е м а т и ч е с к а я теорема, доказывающая м а л у ю в е р о я т н о с т ь, в большом числе, значительных отклонений частоты от вероятности, и п о т о м это у ж е д о к а з а н н о е положение переносится на действительность посредством того, что у А. А. Чупрова является первою леммой: мало-вероятные события р е д к и, при крайне малых вероятностях они становятся ф и з и ч е с к и н е в о з м о ж н ы. Повторяю—т а к о й порядок изложения представляется мне гораздо больше соответствующим логике всего рассуждения, а потому я и буду держаться э т о г о порядка: начну с доказательства математической теоремы в постановке Бернулли-Лапласа, и уже потом выскажусь по поводу того, что в схеме А. А. Чупрова стоит на первом месте.

Здесь, в книге, специально посвященной изложению теоретических основ статистического метода и предназначенной, притом, главным образом, служить в качестве руководства для читателей, еще только собирающихся углубиться в статистическую теорию, мне кажется целесообразным проследить п о ч т и целиком весь ход вывода теоремы Бернулли-Лапласа, и лишь очень немногие из шагов этого вывода мне

придется просить читателя принять, некоторым образом, на веру; излагать ход этого вывода мне кажется необходимым с величайшею подробностью, останавливаясь на таких моментах и входя в такие пояснения, которые для читателей с более серьезною математическою подготовкой излишни и которые ему покажутся ненужным удлинением изложения. Такой способ изложения позволит тому читателю, которого я, главным образом, имею в виду, осмыслить получающиеся в результате вывода конечные формулы и вполне сознательно их применять.

Напомню читателю. прежде всего, уже известные ему, конечно, начальные стадии того рассуждения, которое, в конце концов, приводит к теореме Бернулли и Лапласовскому интегралу.

Исходною точкою являются здесь повторенные, сначала, немного раз опыты, например, с бросаниями монеты—опыты, при которых каждый из двух единственно-возможных результатов имеет вероятность $^1/_2$.

Возможные результаты д в у х бросаний: О О — О Р — Р Р; их вероятности $^1/_4$—$^1/_2$—$^1/_4$, или иначе 0,25 — 0,50 — 0,25.

Возможные результаты т р е х бросаний: О О О — О О Р — О Р Р — Р Р Р; их вероятности $^1/_8$ — $^3/_8$ — $^3/_8$ — $^1/_8$, или иначе 0,125 — 0,375 — 0,375 — 0,125.

Возможные результаты ч е т ы р е х бросаний: О О О О — О О О Р — О О Р Р — О Р Р Р — Р Р Р Р; их вероятности $^1/_{16}$ — $^1/_4$ — $^3/_8$ — $^1/_4$ — $^1/_{16}$, или иначе 0,0625 — 0,250 — 0,375 — 0,250 — 0,0625.

При д е с я т и бросаниях возможные результаты 10 О — 9 О и 1 Р — 8 О и 2 Р — 7 О и 3 Р — 6 О и 4 Р — 5 О и 5 Р — 4 О и 6 Р — 3 О и 7 Р — 2 О и 8 Р. 1 О и 9 Р — и, наконец 10 Р. Общее число всех возможных простейших комбинаций, по формуле V_2^{10} равно 1.024—это число и будет знаменателем всех дробей, выражающих вероятности каждой отдельной комбинации, числителями же будут числа тех простейших комбинаций, которые являются возможными вариантами каждого из приведенных одиннадцати результатов, а именно 1 — 10 — 45 — 120 — 210 — 252 — 210 — 120 — 45 — 10 — 1 [1]); приведенные в десятичные дроби, вероятности всех комбинаций составят такой ряд: 0,001 — 0,009— 0,044 — 0,117 — 0,205 — 0,246 — 0,205 — 0,117 — 0,044 — 0,009 —0,001.

На этих немногих простых частных случаях, и в частности на последнем, мы можем проследить в с е о с н о в н ы е м о м е н т ы, которые, в обобщенном виде, составляют то и другое положение теоремы Бернулли. Вероятности различных комбинаций данного события—положим—падения монеты орлом, и противуположного ему события—решетки, различны. Наибольшею вероятностью обладает та комбинация или (при трех—вообще при нечетном числе испытаний) те две рядом стоящие комбинаций, где число падений орла равно или почти равно числу выходов решетки,—где, значит, частота события равна или почти равна половине т. е. равна или почти равна его вероятности. С увеличением числа повторений, вероятность этой наивероятнейшей или этой пары наивероятнейших комбинаций уменьшается: с 0,5 она опускается до 0,375 для двух комбинаций потом до 0,375 для одной; при десяти испытаниях она не превышает уже

---

[1]) Эти числа получаются таким образом:

1. Общее число элементарных комбинаций представляет собой ничто иное, как число в а р и а ц и й, какие возможны для двух простых событий при десятикратном

0,246—менее половины вероятности наиболее вероятной комбинации при двух испытаниях. Но вероятности других возможных комбинаций понижаются еще в гораздо более сильной пропорции; так, вероятности крайних комбинаций, которые в каждом случае имеют за себя лишь по одной статочности, в приведенных нами примерах выражаются числами 0,25—0,125—0,0625—0,001; уже при десяти бросаниях вероятности двух крайних комбинаций в 250 раз меньше, чем при двух, испытаниях. С другой стороны, вероятности отдельных комбинаций тем меньше и убыль идет тем быстрее, чем дальше каждая данная комбинация отстоит от наивероятнейшей комбинации. Так, при десяти бросаниях вероятности двух непосредственно смежных с наивероятнейшею комбинаций составляют приблизительно пять шестых ее вероятности; вероятности комбинаций 8 О — 2 Р, и обратно 2 О — 8 Р,—уже только одну пятую часть вероятности наивероятнейшей и около трети вероятности непосредственно смежных с ними комбинаций 7 О — 3 Р и обратно; вероятности двух крайних комбинаций—выхода одного только О или одного только Р — уже только $^1/_{250}$ вероятности наивероятнейшей и около одной десятой вероятности смежных комбинаций 9 О — 1 Р и 1 Р — 9 О. В результате, уже при десяти бросаниях на долю ближайших к наиболее вероятному результатов или комбинаций приходится заметное большинство всех возможных простейших комбинаций, и сумма их вероятностей начинает заметно перевешивать сумму более многочисленных, крайних и ближайших к крайним, комбинаций: на долю трех комбинаций, от 6 О—4 Р до 4 О—6 Р, приходится сумма вероятностей 0,656, на долю восьми остальных 0,344, на долю средних пяти комбинаций приходится уже сумма вероятностей 0,890, на долю остальных шести уже только 0,110.

По мере увеличения числа испытаний все эти тенденции проявляются все более ясно и отчетливо. Так, при 100 испытаниях вероятность комбинации 50 — 50 равна уже только 0,0796—все-таки, однако, еще около $^1/_{12}$. Вероятности каждой из непосредственно смежных с нею комбинаций, 49 - 51 и обратно равны 0,078—отличаются от нее, значит, уже менее, чем на две тысячных. Вероятности комбинаций, например, 40 - 60 и обратно, составляют уже только 0,0108, - все-таки, однако, еще около одной седьмой вероятности наиболее вероятной комбинации. Но уже комбинации 30—70 и 70—30 имеют вероятности только

повторении испытания. По известной нам формуле вариаций V_2^{10} это число получится равным $2^{10} = 1024$.

2. Число элементарных комбинаций, приводящих к каждому из мыслимых 11-ти результатов, представляет собой ничто иное, как число сочетаний, в данном случае—сочетаний из 10 элементов, которые, однако, все представляют собою повторения двух тождественных элементов О и Р. Число элементарных комбинаций, отвечающих каждому из возможных результатов, определится по формуле

$$C_s^m = \frac{s!}{m!(s-m)!}$$

и будет равно, например, для комбинации 6 — 4:

$$\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}{1.2.3.4.5.6.1.2.3.4} = 210,$$

для комбинации 8 — 2:

$$\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}{1.2.3.4.5.6.7.8.1.2} = 45,$$

для комбинации 10 — 0

$$\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10} = 1.$$

0,000023,—каждая из них, значит, меньше вероятности средней комбинации приблизительно в 3.400 раз Вероятности не так многим более отдаленной от середины комбинации 25—75 и соотносительной с нею комбинации 75—25 равны уже только 0,0000002,—наконец, вероятности двух крайних комбинаций—выхода одного только О или одного лишь Р. составляют, каждая, $\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$, т. е. дробь, имеющую в числителе единицу, а в знаменателе 31-значное число. Сумма вероятностей семи средних комбинаций, от 53—47 до 47—53 включительно, равняется 0,516, сумма вероятностей 21 средней комбинации, от 60—40 до 40—60, составляет уже 0,9648, на долю же всех остальных мыслимых 80 комбинаций остается сумма вероятностей всего лишь 0,0352. При 500 испытаниях сумма вероятностей для 51 средней комбинации, от 225—275, до 275—225, равняется 0,975, сумма вероятностей для всех остальных, уже 450 комбинаций, не превышает 0,025.

Итак, чем дальше растет число испытаний, тем большая сумма вероятностей концентрируется около наивероятнейшей комбинации, и тем меньшая сумма вероятностей остается на долю громадного, при очень большом числе подавляющего, числа комбинаций.

Ясно, однако, что уже при 10 испытаниях простой подсчет статочностей, помощью которого мы без труда определяли вероятности разных результатов при двух, трех, пяти испытаниях, становится затруднительным. При 50, 100, тем более при 5.000 и еще бо́льших числах испытаний становится практически невозможным пользоваться и теми простыми формулами комбинаторики, которыми мы, без всяких затруднений, воспользовались для случая десяти испытаний. Приходится, значит, искать какого-то общего решения вопроса в сжатом виде, которое могло бы быть применено к любому частному случаю без „физически невозможных“ вычислений. К этому общему решению мы идем через те же правила комбинаторики, которые приводят нас к известной формуле бинома Ньютона. Так как обычный ход вывода может оказаться несколько трудным для читателей с слабою математическою подготовкой, то я пойду несколько иным путем, более длинным, но зато, несомненно, доступным и для тех из читателей, которые обладают даже самою слабою математическою подготовкой,— между тем, пройти через последующие рассуждения и вполне усвоить их, мне кажется безусловно необходимым для каждого читателя.

Вернемся к случаю десяти испытаний и возьмем наивероятнейшую комбинацию 5 О и 5 Р. То рассуждение, которое мы проделаем в применении к этой комбинации, будет иметь силу и для всякой другой возможной комбинации.

Откуда, спрашивается, получилась вероятность этой комбинации 0,246, или в первоначальном ее виде,—$\frac{252}{1.024}$? Вопрос этот мы можем расчленить на два частных вопроса: первый—каким образом может получиться сама эта комбинация, и второй—откуда взялось число 252. Комбинация или результат 5 О — 5 Р может получиться таким образом

О О О О О Р Р Р Р Р
О Р О О О О Р Р Р Р
. . . . . .
О О Р Р О Р О Р Р О
. . . . . .
Р Р Р О О Р О О Р О
. . . . . .
Р Р О Р Р Р О О О О
Р О Р Р Р Р О О О О
Р Р Р Р Р О О О О О

Общее число всех мыслимых комбинаций, отвечающих результату 5 О—5 Р, обозначим пока через N.

Ясно, что вероятность каждой частной комбинации есть „сложная“ вероятность события, состоящего в совпадении десяти определенным образом следующих друг за другом простых событий, и определяется она по теореме умножения вероятностей так:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1.024}.$$

Вероятность всех частных комбинаций, приводящих к результату 5 О—5 Р, есть „полная“ вероятность события, могущего наступить различными способами или в различных вариантах, и определяется она по теореме сложения вероятностей. Но так как частные вероятности равны, то мы, вместо сложения, можем просто умножить частную вероятность любой из частных комбинаций, $\frac{1}{1.024}$ на остающееся нам пока, неизвестным число N. Получаем

$$\frac{1}{1.024} N = \frac{N}{1.024}.$$

Это—простейший случай, где $p = q = \frac{1}{2}$, и где, поэтому, вероятности всех комбинаций имеют множитель $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ или знаменатель 1.024. Несколько сложнее дело при различных p и q, — например, если в урне имеется 8 белых и 2 черных шара, и, следовательно, вероятности p и q будут $^4/_5$ и $^1/_5$, или при 9 белых и одном черном и, значит, при вероятностях $^9/_{10}$ и $^1/_{10}$. Например, при 8 белых и 2 черных шарах вероятности каждой частной комбинации будут:

для результата 10 — 0 . . . . . $\left(\frac{4}{5}\right)^{10} = \frac{4^{10}}{5^{10}}$

„ „ 9 — 1 . . . . . $\left(\frac{4}{5}\right)^9 \frac{1}{5} = \frac{4^9}{5^{10}}$

„ „ 6 — 4 . . . . . $\left(\frac{4}{5}\right)^6 \left(\frac{1}{5}\right)^4 = \frac{4.096}{5^{10}}$

„ „ 5 — 5 . . . . . $\left(\frac{4}{5}\right)^5 \left(\frac{1}{5}\right)^5 = \frac{1.024}{5^{10}}$

для результата 2—8 . . . . . $\left(\frac{4}{5}\right)^2 \left(\frac{1}{5}\right)^8 = \frac{16}{5^{10}}$

„ „ 0—10 . . . . $\left(\frac{1}{5}\right)^{10} = \frac{1}{5^{10}}$

и опять—общая вероятность каждого из одиннадцати возможных общих результатов, начиная от всех белых и кончая всеми черными, будет произведением полученных таким образом частных вероятностей на некоторые числа N_1, N_2 и т. д. — замечу при этом сейчас же, что эти числа N будут т е ж е, что и при основной вероятности, равной половине, — что они, вообще, не зависят от основной вероятности.

Если, теперь, обобщить то, что мы видели на рассмотренном частном примере, то мы придем к такому положению: при любых вероятностях p и q, вероятность каждого возможного результата, состоящего из m повторений одного события и n повторений события ему противуположного, будет произведением вероятности каждой из элементарных комбинаций, отвечающих указанному условию, именно $p^m q^n$, на некоторые числа N_1, N_2 и т. д.

Что же такое, теперь, эти числа N_1, N_2 и т. д? Очевидно, это не что иное, как ч и с л о э л е м е н т а р н ы х к о м б и н а ц и й, отвечающих условию m-кратного повторения данного и n-кратного повторения противуположного ему события,—таких комбинаций, как:

О О О О О Р Р Р Р Р или Б Б Б Б Б Ч Ч Ч Ч Ч
О О Р Р Р О Р О О Р „ Б Б Ч Б Ч Ч Ч Б Ч Б
Р Р Р О О Р О Р О О „ Ч Ч Б Ч Б Б Ч Ч Б Б

и т. д., и т. д..

А раз это так, то подходящего общего выражения для этих чисел надо искать в формулах комбинаторики, и именно в формулах перестановок.

Чтобы подобрать подходящую формулу, вернемся к рассмотренным на стр. 196—197 буквенным примерам. Для комбинации букв М О С К В А получилась формула $P_6 = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6$. К данному случаю, однако, эта формула не вполне подходит, потому что в приведенной комбинации букв нет повторяющихся элементов. Ближе к нужному нам типу комбинаций были комбинации С А М А Р А или Т А Т А Р Е, для которых получились числа:

$$P_{6(3)} = \frac{1 . 2 . . 6}{1 . 2 . . 3 .}$$

и

$$P_{6(2,2)} = \frac{1 . 2 . . . 6}{1 . 2 . 1 . 2}$$

Однако, и эти комбинации не вполне аналогичны с теми, которые мы теперь рассматриваем, потому что в них входят, кроме повторяющихся, и неповторяющиеся элементы, каковых в комбинациях интересующего нас сейчас типа нет вовсе. Подходящею будет, например, буквенная комбинация П А П А для которой число перестановок определится по формуле:

$$P_{4(2,2)} = \frac{1 . 2 . 3 . 4}{1 . 2 . 1 . 2}$$

Это—формула перестановок с повторениями для того частного случая когда в перестановках участвуют только два повторяющихся элемента. Эта формула и подходит к интересующему нас вопросу, потому что в комбинациях данного и противуположного ему события участвуют именно только два повторяющихся, и никаких других элементов.

Таким образом, для определения чисел N мы должны воспользоваться формулою перестановок с повторениями

$$P_{s\,(m,n)} = \frac{s!}{m!\,n!}.$$

Для данного частного случая, где в перестановках участвует только два повторяющихся элемента и не участвует никаких других, — где, значит, общее число участвующих в перестановках элементов s равно сумме чисел этих двух повторяющихся элементов $m+n$, а число повторений любого из повторяющихся элементов, m или n, есть остаток, получающийся за вычитанием числа повторений другого элемента из общего числа повторений обоих участвующих в перестановках элементов, эта формула получает вид

$$\frac{s!}{m!\,(s-m)!} \text{ или } \frac{s(s-1)\ldots(s-m+1)}{1.2\ldots m},$$

где s—число всех элементов, m и n—числа повторяющихся элементов, и s равняется сумме $m+n$.

Применимость этой формулы нетрудно проверить на известных нам частных примерах:

При четырех испытаниях:

число перестановок средней комбинации (2—2) будет:

$$P_{4(2,2)} = \frac{1.2.3.4}{1.2.1.2} = 6$$

» » » комбинации 1—3 будет:

$$P_{4(3)} = \frac{1.2.3.4}{1.2.3} = 4$$

При десяти испытаниях:

число перестановок средней комбинации (5—5) будет:

$$P_{10(5,5)} = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}{1.2.3.4.5.1.2.3.4.5} = 252$$

» » комбинации 2—8 будет:

$$P_{10(2,8)} = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}{1.2.3.4.5.6.7.8.1.2} = 45$$

число перестановок для комбинации из десяти орлов или десяти шаров одного цвета:

$$P_{10(10)} = \frac{1.2\ldots10}{1.2\ldots10} = 1.$$

Эти примеры относятся к случаям с основными вероятностями $p = p = 1/2$. Но совершенно то же самое получится и при любых других основных вероятностях. Допустим, что эти основные вероятности $1/5$ и $4/5$ или $3/4$ и $1/4$ или какие угодно другие,—всетаки для средней комбинации, при десяти испыта-

ниях, $s=10$, а $m=5$ и $n=5$; для комбинации 2—8 s остается 10, $m=2$ и $n=8$ и т. д.,—следовательно, числа N, вычисленные по формуле $\frac{s!}{m!n!}$, будут 252, 45 и т. д.

Таким образом, для вычисления вероятности каждого из возможных результатов s испытаний, при элементарных вероятностях p и q, мы имеем два множителя:

вероятность каждой из элементарных комбинаций, $p^m q^n$,

и число таких комбинаций— $\frac{s!}{m!\,n!}$, или $\frac{s(s-1)\ldots(s-m+1}{1.2.3\ldots.m}$

и, следовательно, вероятность каждого из возможных результатов окончательно выразится формулой

$$\frac{s(s-1)\ldots.(s-m+1)}{1.2.3\ldots.m}\,p^m q^n \quad \text{или} \quad \frac{s!}{m!\,(s-m)!}\,p^m q^n.$$

Если теперь взять общий случай s испытаний и подставлять вместо m и n, поочередно, их возможные значения, то для всех отдельных коэффициентов получится нижеследующий ряд значений:

$$N_{s,0}=\frac{1\ldots.s}{1\ldots.s}=1$$

$$N_{s-1,1}=\frac{1\ldots.(s-1)s}{1\ldots.(s-1)}=s$$

$$N_{s-2,2}=\frac{1\ldots.(s-2)(s-1)s}{1\ldots.(s-2).1.2}=\frac{s(s-1)}{1.2}$$

$$N_{s-3,3}=\frac{1\ldots.(s-3)(s-2)(s-1)s}{1\ldots.(s-3).1.2.3}=\frac{s(s-1)(s-2)}{1.2.3}$$

$$N_{s-4,4}=\frac{1\ldots.(s-4)(s-3)(s-2)(s-1)s}{1\ldots.(s-4).1.2.3.4}=\frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{1.2.3.4}$$

и т. д.

А приписывая вторые множители—соответственные вероятности каждой из элементарных комбинаций, т. е. соответственные степени p и q, получаем вероятности каждого числа повторений данного и противуположного ему событий $W_{m,n}$:

$$W_{s,0}=p^s, \qquad W_{s-1,1}=sp^{s-1}q, \qquad W_{s-2,2}=\frac{s(s-1)}{1.2}\,p^{s-2}q^2.$$

Формула так называемого «общего члена», т. е. та, из которой путем подстановки соответственных m и n, можно сразу получить вероятность любого результата, будет:

$$W_{m,n}=\frac{s(s-1).\ldots.\ldots.(s-n+1)}{1.2.\ldots.n}\,p^m q^n.$$

Наконец, формулы нескольких крайних с противуположного конца членов будут

$$W_{2,s-2}=\frac{s(s-1)}{1.2}\,p^2 q^{s-2}, \qquad W_{1,s-1}=spq^{s-1}, \qquad W_{0,s}=q^s.$$

Соединяя все эти выражения знаком +, получаем формулу бинома Ньютона, представляющую собою разложение степени дву-

члена $(p + q)$. В каждом члене этого разложения произведения степеней основных вероятностей, типа $p^m q^n$, обозначают вероятность m-кратного наступления события E и n-кратного наступления противуположного события—E_1 в одном определенном порядке (например OOOP), по теореме умножения вероятностей; стоящие при этих произведениях коэффициенты представляют собою числа всех мыслимых комбинаций, в которых те же два события могут повторяться m и n раз, независимо от порядка их наступления (напр., в случае четырех бросаний O O O P, O P O O, O O P O, P O O O) а каждый член бинома в целом представляет собой вероятность наступления события E m раз и противоположного ему события E_1, n раз в любом порядке, по теореме сложения вероятностей. В наиболее общей форме, вероятность любой из возможных комбинаций двух противуположных событий выражается, как уже было отмечено, «общим членом» формулы бинома Ньютона:

$$\frac{s\,(s-1)\ldots.(s-n+1)}{1,\ 2,\ 3\ldots.n}\ p^m\ q^n,$$

который, как мы знаем, может быть приведен к виду

$$\frac{s!}{m!\ n!}\ p^m\ q^n,$$

где, напоминаю—символы m! n! и s! представляют собою произведение всех «натуральных» чисел» от единицы до m, до n и до s. Практически, для определения вероятности любой комбинации двух противуположных событий, пользуются обычно этой последней формулой, подставляя соответствующие условиям каждого данного случая m, n, $s = m + n$, p и q [1]).

---

[1]) Пуассон дает ряд вариантов биномиальной формулы для других, более сложных случаев:

Во-1-х, совершенно аналогичную формулу для случая трех событий:

$$\frac{1.2\ldots3\ldots.\ldots s}{1.2.3\ldots m.1.2.3\ldots n.1.2.3\ldots.o}\ p^m\ q^n\ r^o\ .$$

Во-2-х, вариант для случая изменяющейся вероятности—в этом случае вероятность повторения события определенное число раз зависит от закона этого изменения. Для частного случая вынимания шаров из урны без возвращения их в урну она будет

$$\frac{1.2.3\ldots s.1.2.3\ldots a.1.2.3\ldots.b.1.2.3\ldots c'}{1.2.3\ldots m.1.2.3\ldots n.1.2.3\ldots a'.1.2.3\ldots b'.1.23\ldots c} = \frac{s(s-1).\ldots(s-n+1)}{1.2.3\ldots n}\cdot \frac{a(a-1)\ldots(a-m+1)\,b\,(b-1)\ldots(b-n+1)}{c(c-1)\ldots(c-m-n+1)}.$$

где a, b, c—числа белых, черных и всех шаров до опыта, a′, b′ и c′—соответственные числа после опыта.

В 3-х, общую формулу для вероятности m и n повторений для любого вида переменной вероятности $k\,p_1\,p_2\,p_4\,p_7\,p_9\cdots p_{m-3}\,p_{m-1}\,q_3\,q_5\,q_6\cdots q_{m-2}\,q_m$, где k есть коэффициент m-го члена бинома (Recherches, стр. 56—61).

Курно дает для второго из этих случаев другую формулу, где разности обычной биномиальной формулы заменены соответственными факториалами.

Из предыдущего мы уже отчасти могли видеть, с какими трудностями сопряжено применение биномиальной формулы, а следовательно и вообще вычисление точных величин вероятностей разных чисел повторения событий, уже при таких числах испытаний, как 100, ем более при 500, 1000, 5000 и т. д. испытаний. Несмотря на очень большое число сокращений в рядах «натуральных» чисел числителя и знаменателя (по самому свойству этих рядов или m!, или n!, должно сократиться целиком, должна сократиться и значительная часть членов второго из рядов, входящих в знаменатель), все же остается очень значительное число множителей. Не говоря уже о простом перемножении, даже при пользовании логарифмическими таблицами, все-таки уже при приведенных, тоже еще очень умеренных числах испытаний, приходится проделывать сотни логарифмирований, а при тех значительно больших, а затем и огромных числах, с которыми должна считаться теория, а до некоторой степени и статистическая практика, эти логарифмирования тоже оказались бы безусловно невыполнимыми.

Поэтому, в применении к случаям с большими m и n, отказываются от мысли о точном вычислении величин вероятностей, а довольствуются приближенною формулой Стирлинга, которая дает вполне достаточное как для практических, так и для теоретических целей приближение и—что главное—очень легка для вычисления. Эту формулу я даю, просто, в готовом виде,— для читателя без высшей математической подготовки ее вывод не может быть сделан доступным, читатель же, обладающий такою подготовкой, найдет вывод в руководствах исчисления вероятностей. Вот эта формула в общем виде:

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n},$$

или иначе

$$\frac{n^n}{e^n} \sqrt{2\pi n},$$

где величины e (основание натуральных логарифмов) = 2,71828..., и π (отношение окружности круга к его диаметру) = 3,141529..., а вместе с тем и их логарифмы, даны раз навсегда, а величина n отвечает условиям каждого данного задания. Степень точности достигаемых при помощи этой формулы результатов в достаточной мере характеризуется приводимыми в подстрочном примечании примерами, заимствуемыми мною у Czuber'a [1]. Что же касается до легкости вычислений, то она

[1]) Для факториала 10!

истинное число	3628800
приближение по ф-ле Стирлинга.	3598699
Разница . .	30101 = 0,008 истинн. величины

должна быть ясна для всякого, знакомого даже только с элементарной алгеброй: вместо сотен и тысяч логарифмирований, какие требовались бы при точном вычислении произведений данного типа («факториалов» ! при больших числах s, m и n, приходится прологарифмировать только приведенную формулу. Получается такой ряд логарифмических величин

$$n \log n - n \log e + \tfrac{1}{2} (\log 2 + \log \pi + \log n).$$

Из входящих в состав этого ряда логарифмов, $\log e$, $\log \pi$ и $\log 2$ во всех случаях те же самые, и при том первые два даются особо во всяком математическом или техническом справочном издании, и, таким образом, остается найти один только $\log n$ и выполнить остальные очень простые действия.

Применяя теперь формулу Стирлинга к занимающему нас вопросу, т. е. определяя приближенную величину коэффициента $\frac{s!}{m!\,n!}$, мы должны по этой формуле приближенно выразить как произведения, составляющие числитель, так и оба произведения, составляющие знаменатель. Получаем:

$$\frac{s!}{m!\,n!} = \frac{s^s e^{-s} \sqrt{2\pi s}}{m^m e^{-m} \sqrt{2\pi m}\; n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}},$$

откуда, по сокращении величин, являющихся степенями и корнями e и π, получается

$$\frac{s^s \sqrt{s}}{m^m n^n e^{s-m-n} \sqrt{2\pi m n}}.$$

Этому выражению, имея в виду, что всякий $\sqrt{n}$ есть дробная степень $n^{1/2}$, можно придать такой вид:

$$\frac{s^{s+\frac{1}{2}}}{m^{m+\frac{1}{2}} n^{n+\frac{1}{2}} e^{s-m-n} \sqrt{2\pi}},$$

Для факториала 20!

истинное число . . . . . 2′′′432902′′008176′640000
приближение по ф-ле . . . 2′′′422786′′385510′400000

Разница . . . 10115′622666,240000 = 0,004 истинн. величины

Для факториала 30!

истинное число . . . . 265′′′′′252859′′′′ . . . . . .
по формуле . . . . . 264′′′′′517093′′′′ . . . . . .

Разница . . 735766′′′′ . . . . . = 0,0028 » »

Таким образом, а б с о л ю т н а я ошибка растет до не поддающихся воображению чисел, тогда как о т н о с и т е л ь н а я ошибка уже при 10! утрачивает практическое значение.

а так как $s = m + n$, то $s - m - n = 0$, и следовательно $e^{s-m-n} = e^0 = 1$, то это последнее выражение получает вид:

$$\frac{s!}{m!\,n!} = \frac{s^{s+\frac{1}{2}}}{m^{m+\frac{1}{2}}\, n^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (N)$$

а логарифмируя это выражение, получаем:

$$\log \frac{s!}{m!\,n!} = (s+\tfrac{1}{2}) \log s - (m+\tfrac{1}{2}) \log m - (n+\tfrac{1}{2}) \log n - \\ - \tfrac{1}{2} \log 2 - \tfrac{1}{2} \log \pi$$

Например, при $s = 100$, $m = 40$, $n = 60$:

$$\log \frac{100!}{40!\,60!} = \left(100+\tfrac{1}{2}\right)\log 100 - \left(40+\tfrac{1}{2}\right)\log 40 - \left(60+\tfrac{1}{2}\right)\log 60 - \\ - \tfrac{1}{2} \log 2 - \tfrac{1}{2} \log \pi,$$

значит, для приближенного вычисления данного коэффициента достаточно найти т р и логарифма (остальные два имеются готовыми), и затем сделать несколько совершенно простых арифметических вычислений.

Пойдем теперь дальше. В дальнейшем ходе вывода теоремы Бернулли-Лапласа подлежат разрешению д в а самостоятельных вопроса, по своему смыслу отвечающих двум положениям в уже известной нам конечной формулировке этой теоремы: п е р в ы й вопрос—какая комбинация данного события E, и противуположного ему события $\bar{E}$ представляется наиболее вероятною из всех; в т о р о й—какова вероятность того, что опыт или наблюдение дадут комбинацию событий E и E_1, отстоящую от наиболее вероятной не дальше определенного, наперед заданного, предела? Мы уже знаем из предыдущего: вероятности в с е х мыслимых комбинаций выражаются членами разложения $(p+q)^s$, которые при m и n равных s и 0 принимают вид p^s, при $s-1$ и 1—вид $s\,p^{s-1}q$, при $s-2$ и 2—вид $\frac{s(s-1)}{1.2}p^{s-2}q^2$, в общем же выражении имеют вид $\frac{s!}{m!\,n!}\,p^m\,q^n$. Так вот, для решения п е р в о г о из только-что формулированных вопросов нужно найти н а и б о л ь ш и й ч л е н этого разложения, т. е. те m и n, при которых вероятность данной комбинации событий E и E_1 будет больше вероятности всякой другой мыслимой комбинации тех же событий. В таком случае, показатели степеней при p и q будут обозначать наиболее вероятную комбинацию, т. е. наиболее вероятное число повторений событий E и E_1, а значение в с е г о выражения—вероятность именно этой, наиболее вероятной комбинации—вероятность появления событий E и E_1 именно это, наиболее

вероятное, число раз. Для решения второго вопроса надо вычислить все члены того же разложения, отклонения которых не выходят из наперед заданных границ, т. е., другими словами, вероятности всех мыслимых комбинаций событий E и E_1, уклонение которых от наиболее вероятной комбинации не выходит из заданных пределов; сумма их и представит собою интересующую нас вероятность того, что результат испытаний не выйдет из заданных границ; потому что, в самом деле: если данная комбинация „не выходит из заданных границ",— это, значит, одна из комбинаций, возможных внутри этих границ, а следовательно ее вероятность—это полная вероятность события, могущего наступить в любом из мыслимых, в известных пределах, вариантов, и, значит, по теореме сложения, она должна быть равна сумме всех частных вероятностей—вероятностей всех лежащих в заданных пределах комбинаций.

Для решения первого из намеченных только-что вопросов, т. е. для нахождения единственной, наиболее вероятной комбинации числа случаев наступления событий E и E_1, надо сопоставить значение того члена разложения $(p+q)^s$ или, иначе говоря, величину вероятности $\frac{s!}{m!n!}\,p^m q^n$ для тех значений m и n, которые мы принимаем за наиболее вероятные; или, говоря еще иначе,— величину того $\frac{s!}{m!n!}\,p^m q^n$, которое мы принимаем за максимум, с величинами предшествующего и последующего членов того же разложения. Раз мы приняли именно данный член за имеющий наибольшее значение—за максимум,— значит, он больше и предыдущего, и последующего члена, а они оба— меньше его. Следовательно, мы имеем право написать такое двойное неравенство:

$$\frac{s!}{(m+1)!(n-1)!}p^{m+1}q^{n-1} < \frac{s!}{m!n!}p^m q^n > \frac{s!}{(m-1)!(n+1)}\,^{m-1}q^{n+1}.$$

Сокращая обе половины этого двойного неравенства путем деления большего члена на меньший, получаем два таких неравенства:

$$1 < \frac{(m+1)!\,(n-1)!}{m!\;n!}\cdot\frac{q}{p} \text{ и } \frac{(m-1)!\,(n+1)!}{m!\;n!}\cdot\frac{p}{q} > 1$$

или в развернутом виде:

$$1 < \frac{1\ldots.m\,(m+1)\,.\,1\ldots.(n-1)}{1\ldots.m\,.\,1\ldots.(n-1)\,n}\cdot\frac{q}{p} \text{ и } \frac{1\ldots(m-1)\,1\ldots.n\,(n+1)}{1\ldots(m-1)\,m\,.\,1\ldots.n}\cdot\frac{p}{q} > 1,$$

откуда ясна возможность дальнейшего значительного сокращения обоих неравенств:

$$1 < \frac{m+1}{n}\cdot\frac{q}{p} \text{ и } \frac{n+1}{m}\cdot\frac{p}{q} > 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Б)}$$

или, оборачивая первое неравенство:

$$\frac{m+1}{n} \cdot \frac{q}{p} > 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(А)}$$

Но, согласно существу рассматриваемого вопроса,

$$n = s - m, \text{ и } q = 1 - p.$$

Поэтому неравенство (А) можно написать так:

$$\frac{m+1}{s-m} \cdot \frac{q}{p} > 1,$$

откуда (умножая обе части неравенства на знаменателей обоих дробей)

$$\begin{gathered}(m+1) \cdot q > (s-m)\ p,\\ mq + q > sp - mp,\\ mp + mq > sp - q,\\ m\ (p+q) > sp - q.\end{gathered}$$

А так как $p+q=1$, то

$$m > sp - q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1)}$$

Подобным же образом из второго неравенства (Б) получаем:

$$\frac{n+1}{m} \cdot \frac{p}{q} > 1,$$

или, заменяя n чрез $s-m$,

$$\frac{s-m+1}{m} \cdot \frac{p}{q} > 1$$

и производя дальнейшие преобразования:

$$\begin{gathered}(s-m+1)\ p > mq\\ sp - mp + p > mq\\ sp + p > mp + mq\\ sp + p > m\,(p+q)\\ sp + p > m\end{gathered}$$

или $$m < sp + p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(2)}$$

Соединяя неравенства (1) и (2), получаем двойное неравенство

$$sp - q < m < sp + p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(3)}$$

Значит, то число повторений события Е — то m, которому отвечает наибольшая вероятность, т. е. то, которое дает, по нашему заданию, наибольший член разложения $(p+q)^s$, лежит между $sp-q$ и $sp+p$ — оно больше первого и меньше второго из этих выражений.

Так как $sp+p$ и $sp-q$ отличаются друг от друга на единицу, то если $sp+p$, а следовательно, и $sp-q$ дробные числа, между

ними может быть заключено только одно целое число, и, следовательно, возможна только одна наивероятнейшая комбинация, при чем число повторения события — m — в этой комбинации будет точно равно sp, если sp целое число; если же sp дробное число, то за m принимается ближайшее к sp целое число.

Если $sp+p$, а, следовательно, и $sp-q$ — целые числа, то возможны две наивероятнейшие комбинации, при чем число повторений события — m — будет в этом случае равно $sp+p=sp-q$.

Последнее — как легко убедиться на частных примерах — всегда имеет место при нечетных степенях бинома $(p+q)^s$, т. е. при нечетных числах повторений данного события, — так, например, при трехкратном бросании монеты, как мы видели, одинаково наивероятнейшими будут комбинации 1 — 2 и 2 — 1, при пятикратном — комбинации 2 — 3 и 3 — 2, тогда как при четных числах повторений всегда будет только одна наивероятнейшая комбинация; например, при четырех бросаниях комбинация 2—2, при десяти бросаниях комбинация 5—5 и т. д.

Следовательно, число повторений m, обладающее наибольшею вероятностью, либо равняется $sp-q$, и тогда тою же наибольшею вероятностью обладает и число $sp+p$; либо оно лежит посредине между этими двумя величинами, отличаясь от той и от другой менее, чем на единицу — следовательно, оно лежит к ним ближе, нежели какое бы то ни было другое мыслимое целое число. А частота данного события $\frac{m}{s}$ либо равняется p, либо отличается от него на чрезвычайно малую, при большом s, величину меньшую, чем $\frac{1}{s}$. Но это и есть то, что выражено в первом положении теоремы Бернулли: наиболее вероятный результат испытаний, т. е. наиболее вероятное число повторений события E, есть тот, при котором отношение этого числа и числа повторений противуположного ему события E_1 равно или наименее отличается от отношения их вероятностей, а частоты того и другого события, или отношения чисел их повторений к общему числу испытаний, равны их вероятностям или наименее отличаются от них.

При сколько-нибудь значительном числе членов можно взять прямо, без сколько-нибудь ощутительной ошибки,

$$m = sp$$

и тогда

$$n = s - sp = s\,(1-p) = sq\,.$$

Подставляя эти наиболее вероятные значения m и n в общую формулу вероятности любой комбинации $\frac{s!}{m!\,n!}p^m q^n$, получаем для вероятности наиболее вероятной комбинации такое выражение

$$T_o = \frac{s!}{sp!\,sq!} p^{sp} q^{sq} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (I)$$

Применяя формулу Стирлинга (или точнее — подставляя, вместо m и n, их значения sp и sq в полученную на стр. 263 формулу N), придаем коэффициенту $\frac{s!}{sp!\,sq!}$ вид:

$$\frac{s^{s+\frac{1}{2}}}{(sp)^{sp+1/2}(sq)^{sq+1/2}\sqrt{2\pi}} =$$

$$= \frac{s^{s+\frac{1}{2}}}{s^{sp+sq+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} p^{sp+\frac{1}{2}} q^{sq+1/2}\sqrt{2\pi}}.$$

Так как $sp+sq=s$, то, сокращая степени s в числителе и знаменателе, получаем

$$\frac{1}{s^{1/2} p^{sp+\frac{1}{2}} q^{sq+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}} =$$

$$= \frac{1}{p^{sp+\frac{1}{2}} q^{sq+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi s}}.$$

Вводя приведенный в такой вид коэффициент в формулу (I), получаем для вероятности наиболее вероятной комбинации выражение

$$T_o = \frac{1}{p^{sp+1/2} q^{sq+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi s}} \cdot p^{sp} q^{sq} =$$

$$= \frac{p^{sp} q^{sq}}{p^{sp+\frac{1}{2}} q^{sq+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi s}},$$

или сокращая

$$T_o = \frac{1}{p^{1/2} q^{1/2}\sqrt{2\pi s}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi s p q}}.$$

Из самого вида этого выражения ясны и его свойства, совпадающие с теми, которые мы ранее могли уловить на частном примере (см. выше, стр. 253—254). T_o, т. е. вероятность наивероятнейшей комбинации, чрезвычайно быстро—но, однако, со скоростью, пропорциональною не числу наблюдений или испытаний s, а корню квадратному из этого числа,—уменьшается с увеличением числа испытаний: при четырех испытаниях и при $p = q = 1/2$ T_o приближенно равно $\frac{2}{5}$ —значит при 400, т. е. при в 100 раз большем числе, оно будет равно $^2/_{50}$, при 40000, т. е. при в 10000 раз большем числе испытаний, оно будет равно $\frac{5}{500}$ и т. д.

Далее: в знаменатель входит, под тем же знаком корня, еще и произведение pq. Значит при данном числе испытаний s значение выражения T_0 зависит от величины этого произведения—оно будет тем меньше, чем это произведение больше, и наоборот. Но это произведение будет наибольшим, и следовательно значение выражения T_0 наименьшим, при $p = q = 1/2$, и оно будет тем меньше, и следовательно значение выражения T_0 тем больше, чем больше p отличается, в ту или в другую сторону, от q, т. е. другими словами—чем более или напротив, чем менее правдоподобным представляется одно из двух возможных событий по сравнению с другим, ему противоположным. В самом деле:

при $p = 1/2$, $pq = 1/2 . 1/2 = 1/4$
„ $p = 1/4$, „ $1/4 . 3/4 = 3/16$, т. е. $< 1/4$
„ $p = 1/10$, „ $1/10 . 9/10 = 9/100$, т. е. $< 1/10$
„ $p = 1/50$, „ $1/50 . 49/50 = 49/2500$, т. е. $< 1/50$
„ $p = 1/100$, „ $1/100 . 99/100 = 99/10000$, т. е. $< 1/100$ и т. д.

Таким образом, мы вполне проследили как самый вывод первого положения теоремы Бернулли, приняв на веру только формулу Стирлинга, так и все вытекающие из это положения следствия относительно влияния числа наблюдений и вероятности испытуемых событий на вероятность наивероятнейшей комбинации.

Переходим теперь к разрешению второй задачи, приводящей нас к второму положению теоремы Бернулли. Для решения этой задачи нам нужно найти сумму всех членов разложения $(p+q)^s$, лежащих в заданных пределах, т. е. сумму вероятностей всех, лежащих в соответственных пределах, чисел повторений интересующего нас события. Чтобы найти эту сумму, нам нужно предварительно найти выражение для любого одного члена, отстоящего от наиболее вероятного на любое число мест или членов, — все равно, значит, будет ли это непосредственно-смежный член, или третий, или двадцатый, или тысячный. Мы можем исходить при этом из формулы общего члена бинома Ньютона, который выражает собой вероятность любой комбинации чисел повторения событий E и E_1, — следовательно может быть использован для вычисления вероятности не только наивероятнейшей комбинации, но и любой комбинации, отстоящей от нее на какое угодно число мест. Для этого нужно только вместо m и n подставить не sp и sq, а $sp+l$ и $sq-l$, где l есть произвольное, конечно целое, число, выражающее расстояние данного члена от наивероятнейшего.

Итак, пусть искомый член, который мы обозначим через T_l, отстоит от наибольшего члена T_0 на l—1 мест; тогда он будет равен,—

$$\frac{s!}{(sp+l)!(sq-l)!}\, p^{sp+l} q^{sq} = \quad ,$$

а симметрично лежащий по другую сторону, т. е. тоже отстоящий от наибольшего на $l-1$ мест, член T_{-l} будет равен:

$$\frac{s!}{(sp-l)!(sq+l)!}\,p^{sp-l}\,q^{sq+l}.$$

То и другое выражение подвергается преобразованию на основании формулы Стирлинга. После очень простых по существу, но довольно пространных вычислений, которых я здесь уже прослеживать не буду, отсылая интересующегося читателя к руководству Czuber'a (2-ое изд., стр. 116-117), для T_l и T_{-l} получаются очень сложные выражения. Но сумма их — сумма вероятностей двух комбинаций, симметрично лежащих на любом расстоянии от наивероятнейшей, получает, за всеми сокращениями, очень простой вид:

$$T_l + T_{-l} = \frac{2}{\sqrt{2\pi spq}}\,e^{\frac{-l^2}{2spq}}$$

а отсюда, вероятность любой одной комбинации, значит, и T_l, и T_{-l} и всякое T_x будет:

$$T_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi spq}}\,e^{\frac{-x^2}{2spq}}$$

Так как входящий в эти формулы множитель $\frac{1}{\sqrt{2\pi spq}}$ есть не что иное, как T_o, т. е. вероятность наивероятнейшей комбинации, то полученным только-что выражениям можно придать такой вид:

$$T \pm l = \frac{1}{\sqrt{2\pi spq}}\,e^{\frac{-l^2}{2spq}} = T_o\,e^{\frac{-l^2}{2spq}}$$

а любой член T_x, отстоящий от наивероятнейшего на x мест, получит такой вид:

$$T_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi spq}}\,e^{\frac{-x^2}{2spq}} = T_o\,e^{\frac{-x^2}{2spq}}$$

Посмотрим теперь, как, в силу свойств этого выражения, будет изменяться значение T, т. е. вероятность отдельных комбинаций событий E и E_1, по мере удаления комбинации от наивероятнейшей. Чтобы дать себе ясный ответ на этот вопрос, надо припомнить из элементарной алгебры, что всякая отрицательная степень равна единице, делен-

ной на ту же величину в соответственной положительной степени, или в общем виде:

$$a^{-k} = \frac{1}{a^k}$$

а в частности

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

Но всякая дробная степень есть лишь другой способ выражения корня той же степени, т. е. в общем виде:

$$a^{\frac{1}{t}} = \sqrt[t]{a};$$

а в применении к данному частному случаю

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},$$

и следовательно

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}.$$

Значит,

$$T_x = T_o \cdot e^{\frac{-x^2}{2spq}},$$

как отрицательная степень, равно

$$T_x = T_o \cdot \frac{1}{e^{\frac{x^2}{2spq}}},$$

а так как перешедшая в знаменатель степень—дробная, то

$$T_x = T_o \cdot \frac{1}{\sqrt[2spb]{e^{x^2}}} = \frac{T_o}{\sqrt[2spb]{e^{x^2}}}.$$

Следовательно, любое T_x получается из T_o путем деления на $\sqrt[2spq]{e^{x^2}}$. Но в этом делителе s, p и q даны в условиях каждой частной задачи; e есть постоянная величина (2,7182...). Следовательно,

значение T_x, при данных условиях задачи, зависит исключительно от x, т. е. от числа мест, на которое данная комбинация обладающих данными вероятностями событий, при данном числе испытаний, отстоит от наивероятнейшей комбинации. Но это x—непременно целое число; оно стоит, прежде всего, в знаменателе; затем — в показателе степени, и, наконец, в квадрате. Квадраты чисел больших единицы растут несравненно быстрее, нежели сами числа; увеличение показателя степени ведет за собою—раз только возвышаемое в степень число больше единицы — чрезвычайно быстрое, и притом все ускоряющееся, увеличение получающегося результата; а увеличение знаменателя равносильно соответственному уменьшению значения дроби. Так как e больше единицы, а x—как уже сказано—непременно целое число, начиная от единицы вверх, то из всего сказанного ясно, что с увеличением x знаменатель должен увеличиваться, притом в какой-то чрезвычайно быстрой прогрессии, а значение всего выражения—дроби

$$\frac{T_0}{\sqrt{e^{x^2}}}$$

должно убывать в той же прогрессии. Последовательный ход этого убывания легче всего уяснить себе на частном примере. Берем $s = 1000$, $p = q = 1/2$. В таком случае

$$2spq = 2.\ 1000.\ 1/2.\ 1/2 = 500.$$

Наиболее вероятное число повторений события

$$m_0 = 500,$$

а $$T_0 = \frac{1}{\sqrt{500.3{,}1415\ldots}} = \frac{1}{\sqrt{1570}},$$

т. е. приблизительно $= \frac{1}{40} =$ около 0,025.

Любое $T_x = T_0 : \sqrt[500]{e^{x^2}} = 0{,}025 : \sqrt[500]{(2{,}718)^{x^2}}$.

Величина вероятности смежных с наивероятнейшею из комбинаций будет

$T_1 = 0{,}025 : \sqrt[500]{(2{,}718)^1}$, — делитель чрезвычайно близок к единице,

а T_1 чрезвычайно близко к 0,025, т. е. к T_0.

$$T_2 = 0{,}025 : \sqrt[500]{(2{,}718)^4} = 0{,}025 : \sqrt[125]{2{,}718};$$

$$\text{даже } T_5 = 0{,}025 : \sqrt[500]{(2{,}718)^{25}} = 0{,}025 : \sqrt[20]{2{,}718}$$

— делитель, корень 20-й степени из 2,718, тоже еще очень близок к единице, а T_5 — вероятность пятой от наивероятнейшей комбинации, тоже еще очень близка к T_0.

Но уже для десятой по порядку комбинации получается другое:

$$T_{10} = 0{,}025 : \sqrt[500]{2{,}718^{100}} = 0{,}025 \sqrt[5]{2{,}718} =$$

приблизительно 0,025 : 1,2 = около 0,021, —

т. е. вероятность ощутительно, хотя и мало, отличающаяся от вероятности наивероятнейшей комбинации. Нечто довольно близкое получается и для комбинации, отстоящей на 20 мест от наиболее вероятной, именно

$$T_{20} = 0{,}025 : \sqrt[500]{2{,}718^{400}} = 0{,}025 : \sqrt[5]{2{,}718^{4}} =$$

приблизительно 0,025 : 2.2 = около 0,011.

С переходом к более отдаленным от средней комбинациям убыль вероятности становится значительно резче. Уже

$$T_{50} = 0{,}025 : \sqrt[500]{2{,}718^{2500}} = 0{,}025 : 2{,}718^{5} =$$

приблизительно 0,025 : 143 = около 0,00017

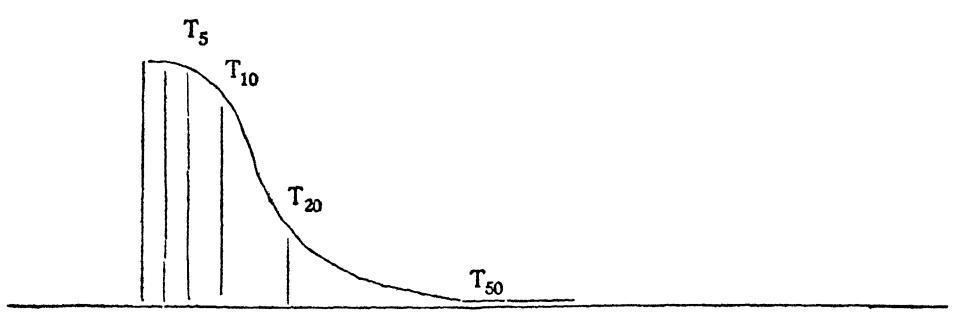
$$T_{100} = 0{,}025 : \sqrt[500]{2{,}718^{10000}} = 0{,}025 : 2{,}718^{20} =$$

приблизительно 0,025 : 4 милл. = около 0,000000006.

Нечего уже говорить о комбинациях, стоящих на 200-м, 400-м, 500-м, местах,—ничтожность таких вероятностей, как

$$T_{200} = 0{,}025 : \sqrt[500]{2{,}718^{90000}} = 0{,}025 : 2{,}718^{180} \text{ и т. п.},$$

не поддается воображению. Графически ход постепенных изменений значения T_x изобразится, приблизительно, так:



Изображение, конечно, до последней степени схематическое: в ближайших к средней ординате,—иначе сказать, к наивероятнейшей комбинации,—частях кривой, соответствующих, например, T_{10}, понижение кривой

должно было бы обозначиться еще гораздо слабее; напротив, в более отдаленных частях, соответствующих T_{50}, не говоря уже о T_{100}, T_{300} и т. д., чрезвычайно ничтожный размер этих величин не дает возможности как-либо выразить на графике чрезвычайно быстрое уменьшение соответственных, невообразимо-малых, вероятностей. Общий характер хода изменения вероятностей, однако, ясен. В виде вывода из общей формулы T_x вполне подтверждается и обобщается тот закон, какой мы могли уловить на частных случаях трех, четырех, десяти испытаний: вероятность даже наивероятнейшей комбинации, рассматриваемой отдельно, уже очень мала; вероятности некоторого числа ближайших к ней комбинаций убывают крайне медленно и остаются очень близкими к вероятности наивероятнейшей комбинации; начиная, примерно, с T_{10} убыль заметно усиливается, так что уже вероятности комбинаций, стоящих на 40-м, 50-м, 60-м местах, чрезвычайно малы, вероятности же более отдаленных комбинаций, отделенных от наиболее вероятной сотнями мест, меньше всякого представления. И это все—надо напомнить—при таком еще вовсе не большом числе, как 1000 испытаний; с дальнейшим увеличением числа испытаний все эти тенденции проявляются все более и более резко—все большая и большая доля общей суммы вероятностей концентрируется в относительно небольшой части ближайших к наивероятнейшей комбинаций, и все большая и большая доля мыслимых комбинаций отходит к числу таких, вероятность которых и каждой в отдельности и всех вместе, становится окончательно недоступною, по своей беспредельной ничтожности, для человеческого воображения, беспредельно далеко уходя в область того, что Курно называет «физическою невозможностью».

Продолжим, однако, вывод второго положения теоремы Бернулли. Мы, значит, установили, что любое

$$T_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi spq}}\, e^{\frac{-x^2}{2spq}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi spq}} : \sqrt[spq]{e^{x^2}} = T_0 : \sqrt[2spq]{e^{x^2}} \quad \ldots\ldots \text{(B)},$$

Это, напоминаю, о д и н, любой член ряда вероятностей—вероятность какой-либо о д н о й комбинации событий E и E_1. Интересующая нас вероятность отклонения действительного числа случаев наступления данного события m от вероятнейшего числа ps н е б о л е е чем на некоторое, наперед заданное число, которое мы обозначаем через l, есть с у м м а вероятностей всех отдельных комбинаций чисел случаев наступления события E и события, ему противуположного, лежащих в пределах между $sp - 1$ и $sp + 1$, т. е.

$$T_{-l} + T_{-(l-1)} + \ldots + T_{-1} + T_0 + T_1 + T_2 + \ldots + T_{l-1} + T_l = \sum_{-l}^{l} T,$$

где каждое T есть выражение вида (B):

$$T_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi spq}},$$

а любое

$$T_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi spq}} e^{\frac{-x^2}{2spq}} = T_0 e^{\frac{-x^2}{2spq}}$$

Значит, сумма этих величин

$$\sum_{-l}^{l} T = T_0 e^{\frac{-l^2}{2spq}} + T_0 e^{\frac{-(l-1)^2}{2spq}} + \ldots + T_0 e^{\frac{-1}{2spq}} + T_0 + T_0 e^{\frac{-1}{2spq}} +$$

$$+ T_0 e^{\frac{-4}{2spq}} + \ldots + T_0 e^{\frac{-(l-1)^2}{2spq}} + T_0 e^{\frac{-l^2}{2spq}}$$

или, вынося общий множитель T_0 за скобки,

$$T_0 \left(e^{\frac{-l^2}{2spq}} + e^{\frac{-(l-1)^2}{2spq}} + \ldots + e^{\frac{-1}{2spq}} + 1 + e^{\frac{-1}{2spq}} + \ldots \right.$$

$$\left. + e^{\frac{-(l-1)^2}{2spq}} + e^{\frac{-l^2}{2spq}} \right) = T_0 \sum_{-l}^{l} e^{\frac{-x^2}{2spq}},$$

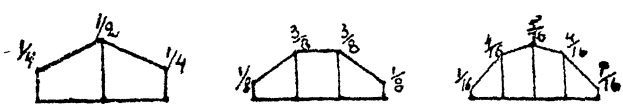
или, что то же самое, равняется удвоенной полусумме—сумме T, взятых в *одну* сторону от T_0, т. е.

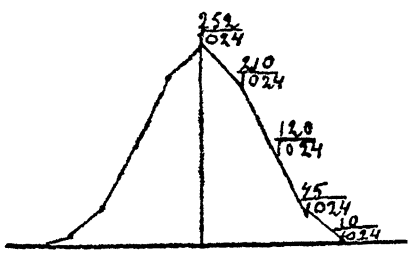
$$\sum_{-l}^{l} T = 2\, T_0 \sum_{0}^{l} e^{\frac{x^2}{2spq}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi spq}} \sum_{0}^{l} e^{\frac{-x^2}{2spq}}.$$

Дальнейший шаг, который остается сделать, чтобы получить формулу, применимую ко всем мыслимым числам случаев, а также к таким явлениям, где мы имеем дело не с раздельными и поддающимися перечету случаями, а с непрерывно изменяющимися величинами, а в то же время до последней степени облегчающую, для каждого конкретного случая, приближенное определение соответственных вероятностей, — это переход от суммы к интегралу; иначе говоря, от суммы малых, но отличающихся друг от друга, хотя и на сколь угодно малые, но все-таки конечные величины, к сумме бесконечно малых и тем более — бесконечно мало друг от друга отличающихся частей; в применении к занимающему нас вопросу—переход от суммы конечного числа отличающихся друг от друга на конечные величины к сумме бесконечного числа непрерывно убывающих, значит бесконечно

мало друг от друга отличающихся, вероятностей любых комбинаций чисел наступления интересующего нас и противуположного ему события.

Итак, еще раз: определенный интеграл $\int_{-1}^{1}$ есть сумма бесконечно малых и бесконечно мало друг от друга отличающихся, в силу непрерывного характера их изменения, однородных величин, заключающихся в определенных пределах — 1 и 1. В простой сумме — если ее изобразить графически — изменения значений данной величины находят себе выражение в ломаной линии; в интеграле эти изменения находят себе выражение уже не в ломаной, а в кривой линии, представляющей собою ту же ломаную, но слагающуюся из бесконечно-малых и бесконечно-мало отличающихся, каждая величина от смежной с нею, величин. Так, изображенные графически, вероятности различных комбинаций в случаях двух, трех, четырех, десяти испытаний с основною вероятностью, равною $^1/_2$ дадут такие ломаные линии:

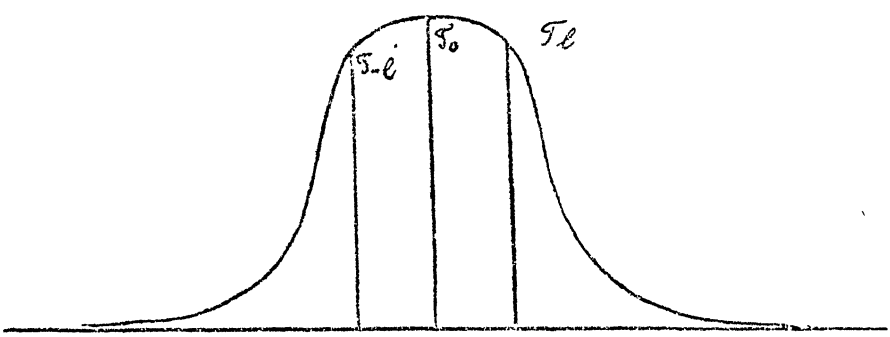




Кривая же, приблизительно отвечающая уже известным нам свойствам функции

$$T_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi spq}} e^{\frac{-x^2}{2spq}} = T_0 e^{\frac{-x^2}{2spq}}$$

примет, приблизительно, следующий вид:



Сумма вероятностей всех мыслимых комбинаций чисел наступления события E и противуположного ему события E_1 во всех случаях равняется единице, — это ясно и из способа получения вероятностей

отдельных комбинаций, и по существу дела: последнее потому, что одна из мыслимых комбинаций должна наступить наверно,—наступление одной какой-либо из мыслимых комбинаций, значит, есть достоверное событие, а достоверность имеет своим выражением единицу. Интересующая нас вероятность P — вероятность комбинации, не выходящей из заданных наперед пределов —l и l, есть сумма вероятностей всех комбинаций, лежащих между sp—l и sp+l. Пока мы имеем дело с простою суммою вероятностей конечного числа комбинаций, лежащих в заданных пределах, эта сумма должна находить себе выражение в сумме линий—ординат, выражающих собою вероятности отдельных комбинаций; между тем в элементарной геометрии, к области которой относятся подобного рода графики, линия рассматривается как имеющая только одно измерение — длину, а потому сумма линий никогда не может быть выражена площадью, имеющею два измерения. При переходе к интегралу вероятности отдельных комбинаций принимаются бесконечно мало отличающимися от вероятностей непосредственно-смежных комбинаций, и в соответствии с этим изображающие их линии ординат принимаются как бы за площади бесконечно малой ширины; иными словами, бесконечно сближающиеся между собой линии ординат как бы заполняют все пространство, ограниченное снизу абсциссою, сверху получившеюся кривою, а с боков ординатами пределов sp—l и sp+l, и сумма этих линий принимается равною площади этого пространства. Эта площадь и рассматривается как определенный интеграл, в пределах от —l до l, т. е. как сумма вероятностей бесконечно мало отличающихся друг от друга вероятностей всех предполагаемых бесконечно многочисленными комбинаций чисел повторений события E, лежащих в пределах от sp—l до sp+l.

Таким образом, существенный смысл перехода от суммы к определенному интегралу заключается в переходе от конечного числа величин, отличающихся друг от друга сколь угодно мало, но все же на конечные величины,—в данном случае вероятностей отдельных комбинаций, к бесконечно большому числу бесконечно мало различающихся друг от друга вероятностей. Самый переход от суммы $\sum_{-1}^{1}$ к интегралу $\int_{-l}^{l}$ требует определенного вычислительного процесса, который не может быть сделан доступным для читателя, не обладающего высшим математическим образованием. В результате получается

$$P = 2T_0 \int_0^l e^{\frac{-x^2}{2spq}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi spq}} \int_0^l e^{\frac{-x^2}{2spq}} dx \quad \ldots\ldots (\Gamma)$$

— выражение, почти во всем воспроизводящее ранее приведенное выра-

жение суммы конечного числа конечно-различающихся вероятностей; появившийся в выражении интеграла символ dx означает именно бесконечно малые варианты — д и ф ф е р е н ц и а л ы переменной величины, суммою которых и является интеграл. По существенному же своему смыслу P есть вероятность того, что отклонение действительного числа случаев наступления события E от наивероятнейшего числа sp не выйдет из наперед заданного предела, а получившееся для этой вероятности P выражение

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi spq}} \int_0^l e^{\frac{-x^2}{2spq}} dx$$

есть сумма вероятностей всех мыслимых отклонений действительного числа от наивероятнейшего, в предположении бесконечно мало друг от друга отличающихся вероятностей смежных комбинаций чисел наступления события E и противуположного ему события E_1.

Однако, формула (Г) представляет, с точки зрения научной практики, существенное неудобство, заключающееся в том, что для каждых данных s, p и l п р и х о д и т с я в ы ч и с л я т ь соответственное P; это потому, что возможные комбинации указанных трех величин бесконечно разнообразны и не могут быть заранее предусмотрены никакими готовыми таблицами или иными справочными пособиями; между тем, вычисление значений такого интеграла—дело, во всяком случае, трудное и хлопотливое, а для лиц, не обладающих высшею математическою подготовкой, и вовсе недоступное. Нужно было, поэтому, найти такой способ выражения вероятности P, иначе говоря, так преобразовать полученное выражение этого „интеграла вероятностей“ или, как его иначе называют, „интеграла Лапласа“, чтобы получить возможность з а р а н е е в ы ч и с л и т ь е г о з н а ч е н и я для всех возможных случаев. Для этой цели прибегли к так называемому приему введения н о в о й п е р е м е н н о й величины: ввели переменную

$$t = \frac{x}{\sqrt{2spq}},$$

откуда, путем самых простых алгебраических вычислений, получаются значения

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{2spq}}, \text{ а } dx = dt\sqrt{2spq}.$$

В приведенной выше формуле (Г) определенный интеграл $\int_0^l$ выражал собою сумму всех мыслимых значений данной величины для всех мыслимых значений переменной x,—с введением новой перемен-

ной t данный определенный интеграл будет выражать собою сумму значений интересующей нас величины для всех мыслимых значений новой переменной t. Предел l в формуле (Г)—одно из значений переменной величины x, произвольно задаваемое нами, как предел отклонения действительного числа случаев наступления события от наивероятнейшего. Из этого следует, что если вместо переменной x введена другая переменная

$$t=\frac{x}{\sqrt{2spq}},$$

то вместо l надо ввести соответственное ей частное значение переменной t

$$\gamma=\frac{l}{\sqrt{2spq}}$$

и тогда

$$l=\gamma\sqrt{2spq}.$$

Таким образом, мы вместо прежней переменной x ввели новую переменную t, а вместо прежнего предела l ввели новый предел γ; в результате этого, для вероятности P получается такое новое выражение:

$$P=\frac{2}{\sqrt{2\pi spq}}\int_0^{\gamma} e^{-t^2}\,dt\sqrt{2spq}.$$

Вынося постоянные, при данном конкретном задании, величины $\sqrt{2spq}$ за знак интеграла, получаем

$$\frac{2\sqrt{2spq}}{\sqrt{2\pi spq}}\int_0^{\gamma} e^{-t^2}\,dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\gamma} e^{-t^2}\,dt,$$

где — повторяю — t есть новая переменная, явившаяся в замену x, а γ есть любое, произвольно заданное наперед, значение этой новой переменной.

$$\gamma=\frac{l}{\sqrt{2spq}}.$$

Но ведь и обратно —

$$l=\gamma\sqrt{2spq}$$

— следовательно, пределы, к которым будет относиться значение вероятности P, отвечающее данному значению γ, будут

$$m=sp\pm\gamma\sqrt{2spq},\quad \frac{m}{s}=p\pm\gamma\sqrt{\frac{2pq}{s}}.$$

Значит, значение вероятности P зависит уже не от непосредственно интересующих нас пределов для числа повторений события l и для относительной частоты его $\frac{l}{s}$, — а от γ, т. е. от произвольного коэффициента при вычисляемых, в соответствии с конкретными условиями данного частного задания, выражениях $\gamma\sqrt{2spq}$ или $\gamma\sqrt{\frac{2pq}{s}}$. Отсюда ясна выгода сделанного преобразования первоначально полученного выражения «интеграла вероятностей»: зная отвечающие данному частному заданию величины s, p и q (= 1 — p) мы можем вычислить и выражение $\sqrt{2spq}$, и выражение $\sqrt{\frac{2pq}{s}}$, — а вычислив их и задавшись произвольным, каким нам угодно, пределом отклонения действительного числа случаев наступления события от наиболее вероятного—l, мы можем непосредственно получить

$$\gamma = \frac{l}{\sqrt{2spq}} \text{ или } \gamma = \frac{\frac{l}{s}}{\sqrt{\frac{2pq}{s}}}.$$

Таким образом, благодаря произведенной нами замене переменной, отвечающее условиям любого конкретного задания значение P зависит уже не от бесконечно разнообразных комбинаций трех, могущих принимать какие угодно значения, величин s, p и l, а от одной только величины γ, при чем, как мы сейчас увидим, в научной практике приходится иметь дело лишь с небольшими значениями этой величины, обычно не более 3-х, в самом крайнем случае до 4-х или до 5-ти. А раз, это так, то отсюда вытекает возможность заранее вычислить все значения интеграла вероятностей, отвечающие всем тем мыслимым значениям переменной γ, с которыми приходится иметь дело в научной и всякой иной практике.

Заметим еще следующее: из существа вероятности и из известных нам способов ее выражения вытекает, что при $\gamma = \infty$, вероятность P, т. е. вероятность любой из всех мыслимых комбинаций чисел наступления события E и события, ему противуположного, включая самые крайние и, следовательно, самые маловероятные комбинации, должна быть равна единице: какая-либо из мыслимых комбинаций должна наступить наверно. Но это вытекает и из математического выражения формулы Лапласа: математики доказали, что

$$\text{пред.} \int_0^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

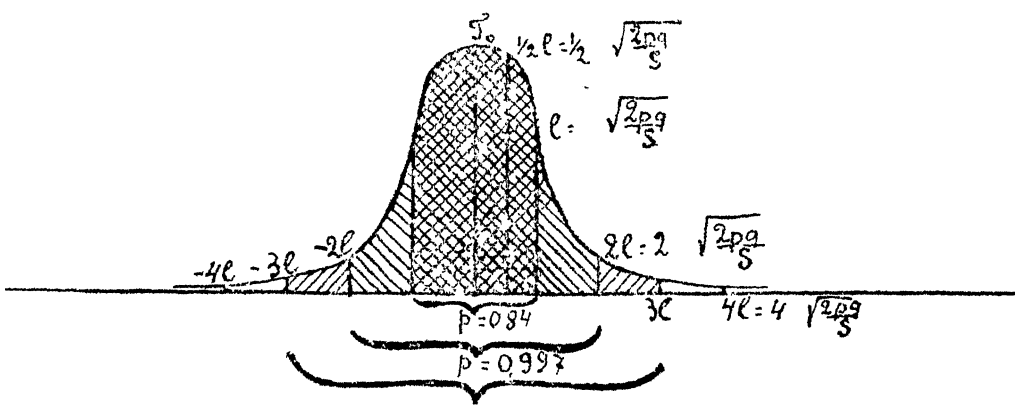
а с присоединением множителя $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ формула Лапласа получает значение

$$P=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}=1.$$

Итак, еще раз: интеграл вероятностей или интеграл Лапласа P есть вычисленная, в предположении одной постоянной основной вероятности p и чисто случайного характера отклонений отдельных случаев, вероятность того, что отклонение действительного числа повторений события E от наивероятнейшего не выйдет из пределов $sp\pm\gamma\sqrt{2spq}$, а отклонение относительной частоты появления события $\frac{m}{s}$ от его вероятности p — из пределов $p\pm\sqrt{\frac{2pq}{s}}$. Значения p (а следовательно и вероятности противуположного события $q=1-p$) и s даны в условиях каждого данного конкретного вопроса, при разрешении которого приходится прибегнуть к интегралу вероятностей,—следовательно, из тех же условий непосредственно вытекают и соответственные значения выражений $\sqrt{2spq}$ и $\sqrt{\frac{2pq}{s}}$. А γ есть произвольное число, которое может быть принято равным 0,1, 0,5, 1, 2, 3 и т. д. Приняв то или другое значение γ и взяв его коэффициентом при выражениях $\sqrt{2spq}$ или $\sqrt{\frac{2pq}{s}}$, мы тем самым принимаем то же самое значение γ за верхний предел интеграла P, и этому пределу будет отвечать определенное значение самого интеграла P. Каждому определенному значению этого верхнего предела γ соответствует определенное значение вероятности P, каждому значению вероятности P — определенное значение верхнего предела γ,—большим значениям одного соответствуют большие значения другого; но только растут и убывают эти величины, как мы увидим из дальнейшего, в совершенно разной прогрессии. При данных, по условиям наблюдения или опыта, значениях s и p (а следовательно и q), P зависит т о л ь к о от γ, и γ зависит т о л ь к о от P,—вероятность того, что число повторений и частота события не выйдут из определенных пределов, растет с расширением самих этих пределов, но только—как я уже сказал - в совершенно различной прогрессии. Для всех мыслимых значений предела γ, с какими приходится считаться в условиях научной и всякой другой практики, вычислены соответствующие им значения интеграла вероятностей P, и имеются очень небольшие по объему таблицы, где по каждому значению верхнего предела γ можно найти отвечающее ему P, и по каждому P можно найти отвечающие ему значение верх-

него предела γ. В том или другом виде, такого рода таблицы можно найти в „Очерках“ А. А. Чупрова, в „Исчислении вероятностей“ А. А. Маркова, в „Теории страхования“ С. Е. Савича, в „Wahrscheinlichkeitsrechnung“ Czuber'a, у Курно и т. д.,—при чем следует иметь в виду, что разные авторы придерживаются различных способов обозначения: для верхнего предела интеграла вероятностей мы находим обозначения γ, u, x, θ—для самого интеграла P обозначения $\varphi(\gamma)$, F(u), U и т. д.

Как я сказал, значения P м о г у т быть вычислены для любых значений верхнего предела γ: и 0,001, и 0,1, и 1, 2, 5, 10, 100 и т. д. Но р е а л ь н о е значение имеют только вероятности P, соответствующие относительно небольшим значениям предела γ—до 3-х, в самом крайнем случае до 4-х или до 5-ти. Дело в том, что при увеличении предела γ от 0, т. е. от значения, соответствующего полному совпадению действительного числа повторений с наиболее вероятным, а частоты—с вероятностью, до 2, 3, 4 и т. д., вероятность P, которая имеет ведь непереходимый ни для какой вероятности максимум—единицу, растет, сначала очень быстро (приблизительно до $\gamma = {}^2/_3$ почти пропорционально γ), но затем рост P постепенно замедляется, и при $\gamma = 4$, тем более 5, соответственные значения P настолько близки друг к другу, а вместе с тем и к единице, и дальнейшее повышение верхнего предела сопровождается столь безгранично-ничтожным увеличением значения вероятности P, не могущим играть роли ни при какой степени точности научной работы, что дальнейшее вычисление значений этой вероятности утрачивает всякий смысл. Это вполне соответствует установленному выше, на стр. 271—273 закону изменения вероятностей отдельных комбинаций T_1, и может быть наглядно показано на нижеследующем чертеже:



Не менее ясно или даже еще яснее закон роста вероятностей P, в зависимости от роста верхнего предела γ, можно усмотреть из сопоставления нижеследующих, наиболее характерных значений того и другого:

γ	P	γ	P	γ	P
0,01	0,0113	1,00	0,8427	2,327	0,9990
0,10	0,1125	1,164	0,9000 ($^9/_{10}$)	2,461	0,9995
0,20	0,2227	1,386	0,9500	2,50	0,9996
0,477	0,5000 ($^1/_2$)	1,50	0,9661	3,0	0,9999779
0,684	0,6666 ($^2/_3$)	1,822	0,9900	3,5	0,9999993
0,75	0,7112	1,985	0,9950	4,0	0,99999998
0,813	0,7500 ($^3/_4$)	2,00	0,9953	4,5	0,9999999998

Мы видим: уже при $\gamma = 3$ вероятность отклонения действительного числа повторений от наиболее вероятного, или частоты от вероятности, на величины $\gamma\sqrt{2spq}$ или $\gamma\sqrt{\frac{2pq}{s}}$ отличается от единицы немногим больше чем на две стотысячных—вероятность, уже вполне соответствующая тому, что принято считать за „практическую достоверность"; при $\gamma = 4$ вероятность P отличается от единицы уже всего только на две стомиллионных, при $\gamma = 4{,}8$ вероятность P выражается дробью с цифрой 9 на одиннадцати первых местах,—ясно, в самом деле, что добиваться какого-то дальнейшего повышения и без того беспредельно высокой вероятности не имело бы никакого смысла.

В связи со всем предыдущим изложением, эти цифры показывают нам еще нечто для нас несравненно более важное: именно, сколь угодно высокую (напоминаю, что уже такая вероятность, как 0,9999779, вполне отвечает нашему представлению о практической достоверности, не говоря уже о таких вероятностях, как 0,99999998 или 0,99999999999) вероятность того, что действительное число повторений события E не отклонится от наиболее вероятного числа больше чем на $\gamma\sqrt{2spq}$, а частота не отклонится от вероятности дальше чем на $\gamma\sqrt{\frac{2pq}{s}}$. Величина γ в том и другом случае не больше чем 3, в самом крайнем случае 4 или 5; между тем, произвольно увеличивая число наблюдений или испытаний s, мы можем сделать $\sqrt{\frac{2pq}{s}}$ меньше всякой наперед заданной величины; следовательно, беспредельно можно уменьшить и $\sqrt{\frac{2pq}{s}}$, умноженное на 3,4 или 5,—для этого нужно только еще увеличить s, пропорционально квадратам этих чисел, т. е. в 9, 16, 25 раз.

Тем самым, значит, доказано второе положение теоремы Бернулли—доказано, что, при соответственном увеличении числа наблюдений или испытаний, соответствующие данной

вероятности p границы отношения $\frac{m}{s}$, т. е. относительной частоты события, могут быть сделаны сколь угодно тесными; при достаточном увеличении числа наблюдений, с вероятностью, сколь угодно близкою к достоверности, можно ожидать, что относительная частота уклонится от вероятности не далее сколь угодно тесных пределов, и при безгранично большом числе испытаний частота стремится к равенству с вероятностью.

Итак, мы проследили почти полностью, приняв на веру лишь немногие моменты вычислительного процесса, вывод обоих положений теоремы Бернулли: первого, которое гласит, что наиболее вероятным числом повторений события, обладающего постоянною вероятностью, является произведение этой вероятности на общее число наблюдений или испытаний (если это произведение целое число, или ближайшее к нему целое число, если это произведение дробное число), а относительной частоты события—сама вероятность; и второго, гласящего, что при достаточно большом числе наблюдений или испытаний с вероятностью, сколь угодно близкою к достоверности, можно ожидать, что относительная частота события не отклонится далее сколь угодно тесных пределов от его вероятности, и, при бесконечно большом числе испытаний, первая из этих величин стремится к совершенному совпадению со второю.

Но теорема Бернулли еще не признается—как мы видели—за полное доказательство закона большого числа в его математической формулировке. Она рассматривается только как одна из двух: у Курно, или в порядке моего изложения, первая, в схеме А. А. Чупрова—вторая из тех двух лемм, из совокупности которых слагается окончательное доказательство. Сама по себе она доказывает только теоретически или математически-ничтожную вероятность, при значительном числе наблюдений или испытаний, сколько-нибудь существенных отклонений действительного числа событий от наивероятнейшего, относительной частоты события от его вероятности. Между тем, говоря словами А. А. Чупрова, чисто-математические построения, приводящие к теореме Бернулли, „отделены пропастью от закона больших чисел, устанавливающего связь между вероятностями событий и их частостями. Они представляют собою лишь теоремы из области теории сочетаний. Мало вероятно,—говорят они,—чтобы частости событий и их вероятности при значительном числе испытаний сильно различались. Но требуется новая предпосылка—первая (в порядке моего изложения вторая) лемма, устанавливающая факт связи между малою вероятностью и редкостью, чтобы из мира вероятностей, больших и малых, перенестись в мир частостей. На этой предпосылке,—полагает А. А. Чупров,—и покоится переход от математики к статистике, составляющий содержание за-

кона больших чисел". Эта другая, уже не математическая, а логическая, или как ее характеризует Курно, философская, лемма гласит:

„События, которых вероятности малы, не будут повторяться часто".

Напомню затем, что эта вторая лемма может быть,—как это сделано у А. А. Маркова,—доказываема и математически, как вывод из теоремы „деления вероятностей". По существу же ее смысл сводится,—как подчеркнуто и А. А. Чупровым,—к „житейскому доказательству закона большого числа". Так то же было развито в предшествующей части этой главы, те „философские соображения", при помощи которых „перекидывается мост" между чисто-„арифметическими" соображениями и явлениями действительности, подробно развиты у Курно (в виду чего А. А. Чупров и называет сконструированную им трехчленную схему полного доказательства закона большого числа „выводом Курно"), в связи с введенным им в научный обиход понятием „физической невозможности". Относящиеся сюда соображения Курно также были изложены в предшествующей части этой главы,—в краткой формулировке Maunion'a, сущность их сводится к „возможности предсказания, почти наверняка, события, противоположного крайне невероятному" или „физически-невозможному" „событию", иначе сказать, к „практической достоверности" таких событий как, например, невыход одновременно шести костей по пяти или какому-угодно другому одинаковому числу очков, как не-случайное получение, при извлечении наудачу букв, десятибуквенного слова и т. п.

Должен сказать, что необходимость этой второй, логической или „философской", леммы представляется мне сомнительной. Как и вся теория вероятностей, так и являющаяся одним из ее построений теорема Бернулли-Лапласа есть, все-таки, не совокупность совершенно абстрактных математических выкладок, а „здравый смысл, положенный на вычисление", а потому она, мне кажется, не требует возвращения к здравому смыслу, чтобы стать применимою к явлениям действительной жизни. Теорема Бернулли-Лапласа—„математическая лемма", в самом деле, представляет собою вывод из анализа комбинаций простейших элементов. Но сам этот анализ—не более, нежели обобщение наблюденных фактов; не более, как точное математическое выражение и обобщение того наблюдаемого на каждом шагу и точно установленного путем специальных экспериментов факта, что определенные комбинации имеют за себя много возможностей и потому могут случаться и действительно случаются часто, другие имеют за себя меньше, третьи весьма мало возможностей, и потому встречаются реже или весьма редко; весьма вероятные события—это именно те, которые могут случаться и действительно случаются обычно, более или

менее часто, в соответствии с мерою их вероятности,—маловероятные и невероятные события—это именно такие, которые могут случаться и действительно случаются редко. Самый смысл „чрезвычайно большой вероятности"—именно в используемой нами почти полной уверенности в наступлении известных событий или последствий, в их „практической достоверности", самый смысл „чрезвычайно малой вероятности", хотя бы она получалась путем простого изучения схематически-воображаемых комбинаций—в возможности игнорирования, в „физической невозможности" невероятных событий. Иначе говоря: малая—очень малая—бесконечно малая вероятность и есть выраженное в схематической форме математических символов и математически-обобщенное представление о редкости—крайней редкости—чрезвычайной редкости—совершенной невозможности ожидать известного, маловероятного или чрезвычайно невероятного события. И, значит, вторая (в схеме Чупрова первая), логическая или „философская" лемма—не самостоятельное звено в обосновывающей закон большого числа аргументации, а только объяснение смысла слов, или, быть может, даже просто тавтология.

Это не противоречит приведенному выше указанию Czuber'a на необходимость проверки применимости положений теоремы Бернулли на эмпирических фактах. Но смысл такой проверки н е в д о к а з а т е л ь с т в е р е а л ь н о с т и в ы в о д о в т е о р и и в е р о я т н о с т е й, к числу которых принадлежит теорема Бернулли,—о н и, во всяком случае, так же реальны, как реален закон равномерно-ускоренного движения, или закон тяготения, независимо от того, следуют ли данные конкретные события этим законам, или нет; смысл ее—в установлении наличности, в данной области явлений реального мира, тех условий, при которых положения теоремы Бернулли, и вообще выводы теории вероятностей, имеют не только потенциальное, но и действительное применение.

Так или иначе—со второю леммою или без нее—смысл теоремы Бернулли-Лапласа (равно как и теоремы Пуассона, дающей, как читатель припомнит, те же два положения, только в применении к случаю изменяющихся вероятностей) сводится к тому, что „при бесконечном числе испытаний самое ничтожное уклонение частости от вероятности представляется редким свыше всякой меры",—„физически невозможным", чем-то таким, что можно игнорировать и с чем можно не считаться ни в научных соображениях, ни в практических расчетах. Или, формулируя несколько иначе: сущность математически-формулированного закона большого числа—беспредельное, по мере бесконечного возрастания числа наблюдений или испытаний, приближение действительной частоты наступления события к его вероятности. Но в е р о я т н о с т ь—это отношение, слагающееся под влиянием одних только п о с т о я н н ы х данных, в результате действия одних только

постоянных причин, вне зависимости от тех изменчивых причин, которыми обусловливаются случайные колебания. Следовательно, беспредельное приближение, в большом числе, частоты события к его вероятности равносильно беспредельно-близкому, при бесконечно большом числе наблюдений, отражению, в действительном наступлении событий, тех постоянных причин, которые лежат в основе данного явления.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ.

Применения теоремы Бернулли-Лапласа. Обращенная теорема Бернулли.

Существенный смысл обоих теорем, в которых нашел себе выражение математически формулированный закон большого числа — как теоремы Бернулли-Лапласа, так и теоремы Пуассона, сводится к тому, что „при бесконечном числе испытаний самые ничтожные отклонения частоты от вероятности представляются редкими превыше всякой меры" — „физически невозможными", и что поэтому научная и иная практика могут совершенно не считаться с возможностью подобных отклонений.

Но ни в научной, ни в иной практике, в особенности же в практике статистического наблюдения и статистического анализа, мы не имеем дела с бесконечными числами наблюдений или испытаний. Поэтому—как формулирует А. А. Чупров—практически для нас не столь важен способ проявления закона большого числа в предельном случае бесконечно больших чисел, сколько возможность уловлять и точно определять связь „степени редкости расхождения между частостью и вероятностью с его размерами при каждом данном, конечном числе испытаний", — иначе сказать, возможность определять вероятность того, что действительный результат статистического наблюдения, частота, не отклонится от вероятности дальше того или другого, нами наперед заданного предела, степень тесноты которого устанавливается нами в соответствии с нашими познавательными целями; или, еще иначе сказать — возможность с определенною степенью достоверности определять степень точности получаемого из статистического наблюдения результата. Это — одна из „задач", которые—поскольку речь идет собственно о технике решения, о вычислительной стороне, очень просто разрешаются при помощи интеграла вероятностей.

Другая задача или категория задач, также разрешаемых при помощи интеграла вероятностей,—определить число наблюдений или испытаний s, необходимое для приобретения определенной степени уверенности в том, что действительный результат наблюдения, частота $\frac{m}{s}$, не отклонится от истинной вероятности p дальше заданных наперед пределов,—иначе сказать, число наблюдений, достаточное для достижения определенной степени достоверности и точности получаемого результата.

Наконец, третья задача—найти те крайние пределы отклонений l, до которых отклонения частоты от вероятности можно объяснять влиянием случайных причин, или, иначе сказать, до которых можно предполагать влияние одних только случайных причин, и за которыми такое допущение становится „физически невозможным",—следовательно за которыми приходится предполагать различие или изменение в основной вероятности, другими словами в том комплексе постоянных причин, который лежит в основе данного явления.

На этих дальнейших, второй и третьей, задачах или категориях задач я остановлюсь в дальнейшем изложении. Сейчас я буду говорить только о первой из них—об определении степени достоверности и точности получаемого из статистического наблюдения результата, поскольку, конечно, та и другая зависят от предусматриваемых математическою формулировкою закона большого числа условий и прежде всего—от числа наблюдений. Предварительно сделаю, однако, одно общее замечание: именно отмечу, что все три задачи разрешаются на основании данных, содержащихся в готовом виде в упомянутых в конце предшествующей главы таблицах значений интеграла вероятностей, и совершенно не требуют какого-либо непосредственного обращения к самому этому интегралу. Для пользования упомянутыми таблицами, при разрешении задач каждого из охарактеризованных только что трех типов, достаточно ясно представлять себе, что тот интеграл вероятностей—P, $\varphi(v)$, или F(u), значения которого даются готовыми в таблицах, есть теоретически вычисленная, в предположении действия одной постоянной причины, или такого комплекса постоянных причин, который находил бы себе выражение в определенной постоянной или средней вероятности, и чисто-случайного характера отклонений, вероятность того, что отклонения частоты наступления данного события от его вероятности не выйдут за указуемый вторым положением теоремы Бернулли предел $\pm\gamma\sqrt{\frac{2pq}{s}}$, или, заменяя обычно неизвестную нам априорную вероятность p предполагаемою приблизительно равною ей частотою $\frac{m}{s}$, за предел

$\pm\gamma\sqrt{\frac{2\frac{m}{s}\left(1-\frac{m}{s}\right)}{s}}=\pm\gamma\sqrt{\frac{2mn}{s^3}}$. Второй множитель в том и другом выражении $-\sqrt{\frac{2pq}{s}}$ или $\sqrt{\frac{2mn}{s^3}}$, так называемый модуль, вычисляется из условий опыта или наблюдения; первый, γ, представляет собою произвольный коэффициент, теоретически могущий изменяться от нуля до бесконечности, но в практике научного исследования не выходящий из сравнительно тесных пределов: увеличение этого коэффициента свыше четырех или, самое большое, пяти не имело бы никакого смысла, потому что сопровождалось бы слишком уже неощутимым повышением зависящей от него величины вероятности P; обычно довольствуются $\gamma=3$, иногда даже $\gamma=2$, следовательно вероятностью P, равною в первом случае 0,9999779, во втором—0,995. Не спускаются, обычно, и ниже $\gamma=2$, потому что более малым значениям коэффициента γ соответствуют признаваемые уже недостаточными значения вероятности P. Каждому значению коэффициента γ соответствует определенное, данное в таблицах, значение вероятности P, и практически все применения интеграла вероятностей сводятся, ближайшим образом, к отысканию, по данному коэффициенту γ, соответствующей ему вероятности P, или обратно—отвечающего данной вероятности P коэффициента γ.

Итак, обращаемся к первой из формулированных в предидущем изложении задач: установить, с определенной степенью достоверности, степень точности получаемого из статистического наблюдения результата, или иначе—вероятность того, что полученный результат отклонится от вероятного не дальше известного, наперед заданного предела. Даны, значит, число наблюдений или испытаний s и вероятность p—требуется определить вероятность P или $F(\gamma)$, что действительное число наблюденных событий m не отклонится от вероятного sp дальше пределов $sp\pm l$, а относительная частота $\frac{m}{s}$ не отклонится от вероятности p дальше пределов $p\pm\Delta$ (где $\Delta=\frac{l}{s}$), — и л и обратно—найти те пределы: l для отклонения действительного числа наблюденных событий от вероятного, Δ для отклонения частоты от вероятности, не выходящего из которых результата можно ожидать с данною вероятностью P. Мы имеем, значит, д в а варианта этой задачи. О д и н — найти меру вероятности того, что частота не уклонится от вероятности дальше известного предела: при основной, например, вероятности $^1/_4$, дальше пределов $^1/_4\pm{}^1/_{16}$, $^1/_4\pm{}^1/_{32}$, $^1/_4\pm{}^1/_{128}$, $^1/_4\mp{}^1/_{024}$, и т. д. Д р у г о й—найти те пределы отклонения действительного числа событий от вероятного, или действительной частоты его от веро-

ятности, 1 или Δ, отвечающего которым результата можно ожидать, с вероятностью, положим, 0,8, 0,9, 0,95, 0,99, 0,999, 0,9999 и т. д. Смысл первого варианта—в определении степени достоверности, с какою можно ожидать результата определенной степени точности, смысл второго—в определении степени точности результата, на какую можно рассчитывать с заданною степенью уверенности. То и другое—высокая степень достоверности и высокая степень точности—может совпадать: отличный стрелок более или менее наверняка рассчитывает попасть в центр, или вообще в очень малую цель, требующую чрезвычайной точности попадания. Но эти два момента могут и расходиться: посредственный стрелок с известною уверенностью будет рассчитывать попасть в человеческую фигуру или в двухаршинную мишень—и будет иметь лишь слабую надежду попасть в центр или в ближайший к центру круг мишени. Различно могут ставиться и те практические и научные цели, которыми будет обусловливаться постановка нашей задачи в том или другом ее варианте: в азартной игре, например, величина возможной ставки зависит от того, с какою степенью уверенности игрок рассчитывает на определенной выигрыш—значит, на результат определенной точности—мы имеем следовательно дело с первым вариантом нашей задачи; в страховании нужно с определенною степенью уверенности рассчитывать на то, что действительное число убытков не отклонится от вероятного за те или другие пределы—мы имеем, значит, дело со вторым вариантом задачи.

Таблицы интеграла вероятностей непосредственно не дают нам, однако, связи величин 1 и Δ с интегралом P,— не дают и не могут давать, потому что величины 1 и Δ бесконечно разнообразны, в зависимости от данных в каждом конкретном случае s, p, и q. Они дают лишь возможность по заданному γ (или u, или x) найти отвечающее ему значение P (или $\varphi(\gamma)$, или F (u)), и обратно—по заданному P найти отвечающее ему γ. А в таком виде вопрос непосредственно в практике, в том числе и в практике научного исследования, не ставится. В практике—еще раз—вопрос ставится таким образом: дана та или другая основная вероятность—половина, треть, четверть, две пятых или какая угодно другая, и определенное число наблюдений—1000, 5000, 20000, 300000 или, опять таки, какое угодно другое. Какова вероятность, что частота действительного наступления события не отклонится от вероятности дальше, чем на $\pm$ 0,01, 0,02, 0,05, 0,1,—следовательно, в случае вероятности половина не выйдет из пределов 0,49—0,51, 0,48—0,52, 0,45—0,55, 0,4,—0,6 и т. д.; при вероятности 0,33 — из пределов 0,32—0,34, 0,31—0,35, 0,28—0,38, 0,2—0,4 и т. д.; или—каковы пределы отклонения частоты от вероятности, отвечающего которым результата можно ожидать с вероятностью 0,995, 0,9995, 0,9999779 и т. д. ? Величина γ не входит, значит, в постановку ни того, ни другого варианта задачи.

Но что такое эта величина γ ? Припомним прослеженный нами в предыдущей главе ход вывода второго положения теоремы Бернулли. Мы получили, сначала, выражение отыскивавшейся нами вероятности P в виде интеграла с пределами 0 и l,—и вероятности этой отвечали пределы отклонений: для абсолютного действительного числа повторений события m—пределы $sp \pm l$, для относительной частоты $\frac{m}{s}$ — пределы $p \pm \frac{l}{s} = p \pm \Delta$. А затем уже, при замене, в интеграле, переменной x новою переменною t, получили

$$m = sp \pm \gamma \sqrt{2spq} \quad \text{и} \quad \frac{m}{s} = p \pm \gamma \sqrt{\frac{2pq}{s}}$$

при чем, очевидно,

$$l = \gamma \sqrt{2spq} \quad \text{и} \quad \Delta = \gamma \sqrt{\frac{2pq}{s}}$$

и, значит,

$$\gamma = \frac{l}{\sqrt{2spq}} \quad \text{и} \quad \gamma = \frac{\Delta}{\sqrt{\frac{2pq}{s}}}.$$

Значит, те наперед заданные отклонения частоты от вероятности, 0,01, или 0,02, или 0,05, или 0,1, к которым мы должны подыскать соответствующие P, отвечают выражению

$$\Delta = \gamma \sqrt{\frac{2pq}{s}}.$$

Но p, следовательно и q, а также s, даны условиями наблюдения или опыта. Пусть, например, $p = \frac{1}{2}$, а $s = 20000$; в таком случае второй множитель в только-что приведенном выражении, так называемой модуль

$$\sqrt{\frac{2pq}{s}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{20000}} = \sqrt{\frac{1}{40000}} = \frac{1}{200} = 0{,}005$$

следовательно, те или другие, произвольно заданные нами пределы отклонения частоты от вероятности—0,01 0,02, 0,05, 0,1, будут произведениями только-что полученной величины модуля—0,005, на то или другое γ,—они, значит, будут равны, в каждом случае, $\gamma \times 0{,}005$, а γ, соответственно, будет равна, 0,1, 0,05 и т. д., деленному на 0,005. Отсюда значение γ получается для разных заданий:

$$\gamma = \frac{0{,}01}{0{,}005} = 2 \qquad P = 0{,}9953$$

$$\gamma = \frac{0{,}02}{0{,}005} = 4 \qquad P = 0{,}99999998$$

$$\left.\begin{aligned}\gamma &= \frac{0{,}05}{0{,}005} = 10\\ \gamma &= \frac{0{,}1}{0{,}005} = 20\end{aligned}\right\}$$ P далеко выходит за пределы вероятностей, даваемых таблицами.

Или, обобщая сказанное: γ (u, x и пр.) есть изменяющийся, соответственно данным в каждом конкретном случае величинам p, q и s и искомым степеням точности и достоверности результата, коэффициент, получаемый из равенства

$$\Delta = \gamma \sqrt{\frac{2pq}{s}} \text{ или } l = \gamma \sqrt{2spq}$$

откуда

$$\gamma = \frac{\Delta}{\sqrt{\frac{2pq}{s}}} \text{ или } \gamma = \frac{l}{\sqrt{2spq}}.$$

Значит, ход решения занимающей нас задачи сводится в первом варианте, когда отыскивается мера вероятности того, что частота не отклонится от вероятности, или абсолютное число наблюденных случаев не уклонится от наиболее вероятного, дальше заданных пределов—к вычислению, по заданному l или заданному Δ, соответственного γ, и к отысканию в таблицах отвечающей ему вероятности P; во втором варианте, когда требуется определить те пределы отклонений действительного числа событий m от вероятного sp, или частоты m/s от вероятности p, отвечающего которым результата можно ожидать с определенною степенью вероятности P,—к отысканию в таблицах отвечающего этому P коэффициента γ и затем к вычислению, смотря по поставленному вопросу,

$$\Delta = \gamma \sqrt{\frac{2pq}{s}} \text{ или } l = \gamma \sqrt{2spq},$$

где, значит, $\sqrt{\frac{2pq}{s}}$ или $\sqrt{2spq}$ вычисляются по имеющимся данным, а γ—коэффициент, отвечающий заданной вероятности P. Пусть, например, при p (и q) равным половине, и $s = 20000$, мы желаем знать, на какую степень точности результата мы можем рассчитывать с вероятностью 0,9953. Находим по таблице, что такой вероятности P отвечает коэффициент $\gamma = 2$, и получаем

$$\Delta = 2\sqrt{\frac{2pq}{s}} = 2\sqrt{\frac{1}{40000}} = 2.0{,}005 = 0{,}01$$

$$l = 2\sqrt{2spq} = 2\sqrt{10000} = 2.100 = 200.$$

Еще раз: в обоих вариантах рассматриваемой первой задачи—ищем ли мы степень вероятности наперед заданных Δ или l, или же ищем величину тех отклонений Δ или l, отвечающего которым результата можно ожидать с заданной вероятностью P,—во всяком случае мы исходим из равенств:

для первого варианта $\gamma = \frac{\Delta}{\sqrt{\frac{2pq}{s}}}$ или $\gamma = \frac{l}{\sqrt{2pqs}}$

для второго варианта $l = \gamma\sqrt{2pqs}$ или $\Delta = \gamma\sqrt{\frac{2pqs}{s}}$

при чем—еще раз: вероятности p и q и число наблюдений s даны в условиях задачи, и, значит, $\sqrt{\frac{2pq}{s}}$ и $\sqrt{2spq}$ представляют собою, для данного конкретного случая, данные, постоянные величины, не зависящие от нашего произвола; иначе сказать, теоретическую меру отклонений (модуль!), зависящую от данных p, q и s; а γ—произвольный множитель, отвечающий искомым, в каждом данном случае, степеням точности и достоверности результата. Если этот множитель мал—если, например, взять γ = половине или четверти,—это будет отвечать очень высокой степени точности: частота не отклонится от вероятности дальше половины или четверти теоретической меры отклонения $\sqrt{\frac{2pq}{s}}$; но такого результата можно будет ожидать лишь с очень слабою степенью уверенности, именно с вероятностями, соответственно, 0,520 или 0,276 Если этот множитель велик, например, $\gamma = 3$ или 4—значит, мы довольствуемся гораздо меньшею степенью точности результата, миримся с тем, что отклонение частоты от вероятности втрое или вчетверо превысит теоретическую меру,—но за то на такой, не слишком точный, результат мы можем рассчитывать уже с почти полною уверенностью, или практическою достоверностью—с вероятностями, соответственно, 0,9999779 или даже 0,99999998.

Как растет степень точности, с более или менее полною уверенностью достижимая с увеличением числа наблюдений, и как она убывает при малых числах—это легко показать на нескольких численных примерах. Берем, сначала, ряд заданий с основными вероятностями p и $q = \frac{1}{2}$, напоминая попутно, что, как было показано на стр. 268, величина модуля, а следовательно значение данном Δ и обратно, зависят также и от значений p и q: произведение pq, а следовательно и величина модуля, достигает максимума при $p = q = 1/2$, и становится тем меньше, чем больше разница между вероятностями p и q. Итак, берем вероятности $p = q = \frac{1}{2}$. Теоретическая мера отклонений частоты от вероятности вычислится для разных, более или менее крупных чисел наблюдений s, следующим образом:

	модуль	пределы отклонени
$s = 20000$	$\sqrt{\frac{2.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}}{20000}} = \sqrt{\frac{1}{40\text{ т.}}} = \frac{1}{200} = 0{,}005$	0,495 — 0,505
80000	$\sqrt{\frac{2.{}^1/_2.{}^1/_2}{80\text{ т.}}} = \sqrt{\frac{1}{160\text{ т.}}} = \frac{1}{400} = 0{,}0025$	0,4975 — 0,5025
320000	$\sqrt{\frac{2.{}^1/_2.{}^1/_2}{320\text{ т.}}} = \sqrt{\frac{1}{640\text{ т.}}} = \frac{1}{800} = 0{,}00125$	0,49875 — 0,50125
2 миллиона	$\sqrt{\frac{2.{}^1/_2.{}^1/_2}{2\text{ милл.}}} = \sqrt{\frac{1}{4\text{ милл.}}} = \frac{1}{2{,}000} = 0{,}0005$	0,4995 — 0,5005

а для малых чисел наблюдений:

$s = 800$	$\sqrt{\frac{2.{}^1/_2.{}^1/_2}{800}} = \sqrt{\frac{1}{1600}} = \frac{1}{40} = 0{,}025$	0,475 — 0,525
200	$\sqrt{\frac{2.{}^1/_2.{}^1/_2}{200}} = \sqrt{\frac{1}{400}} = \frac{1}{20} = 0{,}05$	0,45 — 0,55
100	$\sqrt{\frac{2.{}^1/_2.{}^1/_2}{100}} = \sqrt{\frac{1}{200}} = \frac{1}{14} = 0{,}071$	0,43 — 0,57
50	$\sqrt{\frac{2.{}^1/_2.{}^1/_2}{50}} = \sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{1}{10} = 0{,}1$	0,4 — 0,6

Значит, с высокою (0,9953, $\gamma = 2$) и с весьма высокою (0,9999779, $\gamma = 3$) степенью вероятности можно рассчитывать вот на какие степени точности результатов:

	$P = 0{,}9953,\ \gamma = 2.$		$P = 0{,}9999779,\ \gamma = 3.$	
	Δ	$p \pm \Delta$	Δ	$p \pm \Delta$
2 милл.	$\pm$ 0,001	0,499 — 0,501	$\pm$ 0,0015	0,4985 — 0,5015
80 т.	$\pm$ 0,005	0,495 — 0,505	$\pm$ 0,0075	0,4925 — 0,5075
20 т.	$\pm$ 0,01	0,49 — 0,51	$\mp$ 0,015	0,485 — 0,515
800	$\pm$ 0,05	0,45 — 0,55	$\pm$ 0,075	0,425 — 0,575
100	$\pm$ 0,14	,36 — 0,64	$\pm$ 0,21	0,29 — 0,71
50	$\pm$ 0,2	0,3 — 0,7	$\pm$ 0,3	0,2 — 0,8

Мы видим, значит: при двух миллионах наблюдений с высокою и весьма высокою степенью уверенности можно рассчитывать на чрезвычайно,—в реальных условиях статистического наблюдения чрезмерно и ненужно-высокую степень точности результата. На очень высокую степень точности результата, с достаточною уверенностью, можно рассчитывать, однако, и при таких, уже умеренно больших числах, как 80000 и даже 20000 наблюдений: могущая быть ожидаемою неточность не превышает в первом случае 0,0025, во втором 0,005, — и это при основной вероятности $^1/_2$, при меньших же или больших основных вероятностях возможные, при таких числах наблюдений, отклонения будут еще меньше. Каков закон изменения точности результата, и какой смысл этого закона для практики статистического анализа,—на этом вопросе нам придется остано-

виться в дальнейшей части этой главы. Теперь же я отмечу еще только, что уже при таких совсем небольших числах наблюдений, как 800, оказывается возможным с вероятностью 0,9953 рассчитывать на довольно «приличные», в смысле точности, результаты: такие отклонения частоты от вороятности, как 0,45 в одну сторону и 0,55 в другую, равносильны возможности рассчитывать, даже и при таких числах наблюдений, на приблизительно верные результаты,— на такие результаты, которые дадут приблизительно-правильное представление о лежащих в основе данного явления постоянных причинах. Кое-что дают даже такие числа наблюдений, как 100 и даже 50,—как эти числа ни малы и как, в соответствии с этим, ни широки теоретически допустимые пределы случайных отклонений,—все-таки выходящие за известные пределы отклонения остаются к р а й н е неправдоподобными, и следовательно известные, грубо приблизительные представления о лежащих в основе явлений постоянных причинах и постоянных отношениях можно получить и при таких, совсем уже малых, числах наблюдений. Небезынтересно отметить те пределы случайных отклонений, какие получились для числа наблюдений 100, при $P = 0{,}9953$ и $\gamma = 2$: эти пределы— именно 0,36 и 0,64, почти совершенно совпадают с крайними пределами отклонений (0,34 и 0,66), какие получились в известных опытах Вестергорда при подсчетах сериями по сто бросаний, что является, очевидно, одним из самых блестящих подтверждений применимости основанных на теории вероятностей рассчетов в условиях, подобных тем, какие имеют место при опытах с брасаниями монеты и т. п.

Весьма существенный, конечно, вопрос: какою степенью точности и какою степенью достоверности следует задаваться при подобного рода рассчетах? Поскольку речь идет о степени т о ч н о с т и, ответ на этот вопрос будет зависеть и от степени надежности имеющихся в нашем распоряжении данных наблюдения, и от преследуемых нами целей. В статистике смертности, в особенности поскольку данные ее используются для целей страхования жизни, можно и следует стремиться к весьма высокой степени точности, потому что эта отрасль статистики располагает отличным, в смысле точности и вообще надежности, материалом, и потому что деловые цели страхования, в самом деле, требуют точных данных, на которых могли бы обосновываться страховые расчеты. Напротив, в статистике, положим, крестьянского хозяйства приходится, да и возможно довольствоваться весьма малою степенью точности: приходится потому, что материал в этой области статистики всегда более или менее дефектный, страдающий и от разнообразнейших случайных погрешностей, и от сознательного, нередко грубого, искажения истины; возможно потому, что здесь идет речь, по большей части, лишь об установлении тех или других общих тенденций и соотношений, или об определении таких более или менее грубых норм, как продовольственные, земельные и т. п.; и в том, и в другом случае получающиеся выводы не могут существенно пострадать даже от сравнительно больших случайных отклонений получаемых из наблюдения цифр от тех, которые отвечали бы лежащим в основе соответственных явлений, остающимся нам неизвестными, вероятностям, а следовательно—находящим себе выражение в этих вероятностях постоянным причинам и отношениям.

Какой требовать степени достоверности результата; —или конкретно: при данных p и s и допустимом, по условиям данного научного исследования или данной практической задачи, отклонении Δ,—брать ли $\gamma = 2$, 3 или 4-м,—это зависит, в значительной мере, от личных свойств, от темперамента исследователя или практического деятеля: „кто очень осторожен—говорит А. А. Чупров,—найдет возможным пренебречь опасностью натолкнуться лишь на отклонения, превосходящие модуль в три, в четыре раза. Кто посмелее, будет довольствоваться и не столь редко встречающимися отклонениями за пределы двойного модуля. Бюффон считал, что можно пренебрегать событиями, вероятность которых ниже 0,0001; он мотивировал это тем, что такою величиною измеряется риск для здорового взрослого человека умереть в течение ближайших суток—опасность, о которой никто не думает". Или говоря проще: очень осторожный исследователь или практик не пойдет на риск ошибки даже в пяти случаях из тысячи, тогда как человек сангвинического темперамента не остановится перед риском ошибки в пяти случаях из ста. Но наряду с этим субъективным моментом требуемая степень достоверности результата в значительной степени зависит опять-таки, и от данной научной или практической цели: для целей, положим, страхования жизни нужно опираться не только на достаточно точные, но и на достаточно достоверные результаты статистического наблюдения, потому что ошибка здесь грозила бы серьезным материальным ущербом. В исследовании, относящемся, положим, к тенденциям экономического развития страны, нет надобности ограничивать себя статистическими результатами высокой достоверности, потому что всякое решение относящихся сюда вопросов неизбежно будет носить более или менее гадательный характер, и о достоверных выводах здесь, пока, не приходится мечтать.

Пойдем, однако, дальше. Теоремы Бернулли и Пуассона дают нам право по данной априорной вероятности p заключать о частоте действительного наступления события, т. е. о вероятных, с не выходящими из известных границ случайными отклонениями, действительных результатах наблюдений или испытаний. Но практически априорная вероятность p известна нам лишь в таком тесном круге явлений, как опыты с шарами, азартные игры, лотереи и т. п. В статистике мы априорной вероятности p не знаем, а заменяем ее частотою $\frac{m}{s}$, в которой мы усматриваем эмпирическое отражение неизвестной нам вероятности, или эмпирическую вероятность,—и тогда теоретическая мера отклонений, модуль, принимает вид

$$\sqrt{\frac{2\frac{m}{s}\left(1-\frac{m}{s}\right)}{s}} = \sqrt{\frac{2m(s-m)}{s^3}} = \sqrt{\frac{2mn}{s^3}}$$

иначе сказать, мы принимаем, что неизвестная нам вероятность

$$p = \frac{m}{s} \pm \gamma \sqrt{\frac{2mn}{s^3}}$$

Но откуда, спрашивается, знаем мы, что полученная из наблюдения и, в частности, из статистического наблюдения частота $\frac{m}{s}$ есть, в самом деле, эмпирическая вероятность, и что она определенным образом, не выходя из известных пределов, приближается к неизвестной нам априорной вероятности p? Некоторые авторы говорят об этом как о чем-то само собою разумеющемся, не пытаясь даже аргументировать своего права подставить, вместо остающейся неизвестною априорной вероятности, полученную из наблюдения частоту. „Для того случая— говорит, например, А. А. Чупров,—когда даны не вероятности, а частости, величина $\sqrt{\frac{2p(1-p)}{s}}$ [1]) не может служить удобною мерою степени соответствия между частостью и вероятностью, так как в нее входит неизвестная величина p. Математический анализ показывает, продолжает Чупров, что при таких условиях вероятность p, являющаяся в задаче искомою, может быть в выражении для модуля $\left[\sqrt{\frac{2p(1-p)}{s}}\right]$ заменена через частость $\frac{m}{s}$, величина которой устанавливается эмпирически, путем статистического подсчета. Выполняя преобразование, мы получаем для модуля выражение $\sqrt{\frac{2\frac{m}{s}(1-\frac{m}{s})}{s}} = \sqrt{\frac{2m(s-m)}{s^3}}$. Пусть, например, из урны, содержащей в неизвестном отношении шары белые и не-белые, производится s извлечений, при которых белый шар появляется m раз. Будь s бесконечно велико, мы могли бы уверенно утверждать, что доля белых шаров в урне с точностью равна $\frac{m}{s}$. Но если s не бесконечно велико, то наблюденный нами факт свидетельствует лишь о том, что доля белых шаров в урне не слишком далека от $\frac{m}{s}$“ ,—что она, более или менее, наверно отличается от этой последней величины, значит от полученной из наблюдения частоты, не более как на утроенный модуль, вычисленный по формуле $\sqrt{\frac{2m(s-m)}{s^3}}$ [2]). Так же просто, или даже еще проще, подходит к

[1]) У Чупрова несколько иные буквенные обозначения.

[2]) Чупров, Очерки, 2 изд., стр. 250—251.

вопросу Р. М. Орженцкий в своем „Учебнике математической статистики“: „отсюда—говорит он, имея в виду только-что пред тем приведенные им формулы действительного числа случаев наступления события $m = sp \pm \alpha$ и частоты $\frac{m}{s} = p \pm \frac{\alpha}{s}$, можно сделать и обратный вывод: по данному исходу мыслимого опыта, давшего m раз событие A на s испытаний, при достаточно большом s, с большою вероятностью можно утверждать, что результат $\frac{m}{s}$ либо равен вероятности события A, либо весьма мало от него отличается (к этому же результату—поясняет проф. Орженцкий в скобках—можно прийти и на основании теоремы Байеса)“. Этот именно способ „апостериорного определения вероятности на основании результата наблюдений дает возможность применять построения теории вероятностей к случаям действительных явлений“ [1]). И как Чупров, так и Орженцкий, в данном случае, непосредственно следуют за Пуассоном, у которого приближенное равенство неизвестной вероятности p полученной из наблюдения частоте $\frac{m}{s}$ формулируется как непосредственное применение теоремы Бернулли: в силу доказанной теоремою Бернулли близости частот данного и противуположного ему событий E и E_1, $\frac{m}{s}$ и $\frac{n}{s}$, к их априорным вероятностям p и q, первые просто подставляются вместо вторых, и получается выражаемая тем же интегралом P вероятность приближенного равенства

$$p = \frac{m}{s} \pm \frac{\gamma}{s}\sqrt{\frac{2mn}{s}} = \frac{m}{s} \pm \gamma\sqrt{\frac{2mn}{s^3}}$$

В современной теории вероятностей это обращение доказанного в теореме Бернулли приближенного равенства

$$\frac{m}{s} = p \pm \gamma\sqrt{\frac{2pq}{s}}$$

в приближенное же равенство

$$p = \frac{m}{s} \pm \gamma\sqrt{\frac{2mn}{s^3}}$$

рассматривается как особая, требующая отдельного доказательства, обращенная теорема Бернулли. По Czuber'у эта обращенная теорема формулируется так:

„С вероятностью

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\gamma} e^{-t^2}\,dt$$

следует ожидать, что неизвестная вероятность события лежит в границах: $\frac{m}{s} - \gamma\sqrt{\frac{2mn}{s^3}}$ и $\frac{m}{s} + \gamma\sqrt{\frac{2mn}{s^3}}$

[1]) Орженцкий. Учебник математической статистики, стр. 33.

Так как с увеличением числа наблюдений или испытаний расстояние между указанными только-что низшим и высшим пределами, $2\gamma\sqrt{\frac{2mn}{s^3}}$, неопределенно приближается к нулю, то, значит, можно взять такое большое число наблюдений, при котором со сколь угодно близкою к единице вероятностью можно будет ожидать, что неизвестная нам вероятность p лежит между сколь угодно тесных, наперед заданных границ".

Мне лично эта обращенная теорема представляется если не непосредственным применением основной теоремы Бернулли—каким она является у Пуассона, то, во всяком случае—прямым выводом из тех же предпосылок, что и прямая или основная теорема Бернулли. Припомним, в самом деле, то двойное неравенство, которое получается как результат сопоставления принимаемого за наибольший член разложения $(p+q)^s$ с непосредственно прилегающими к нему, с той и с другой стороны, членами, и из которого, в конце концов, выводится первое положение теоремы Бернулли:

$$\frac{s!}{(m+1)!(n-1)!}p^{m+1}q^{n-1} < \underset{n+1}{\frac{s!}{m!n!}p^mq^n} > \frac{s!}{(m-1)!(n+1)!}p^{m-1}q^{n+1}$$

Из этого двойного неравенства получились два неравенства

$$\frac{m+1}{n}\cdot\frac{q}{p}>1; \quad \frac{n+1}{m}\cdot\frac{p}{q}>1 \ldots\ldots\ldots\ldots (A),$$

а из них двойное неравенство

$$sp-q<m<sp+p,$$

смысл которого состоит в том, что наиболее вероятное значение m, т. е. наиболее вероятное число повторений события, бесконечно приближается к sp, а относительная частота наступления события E, m/s—к его априорной вероятности p; получалось, словом, первое положение прямой теоремы Бернулли. Парные неравенства (A) можно, однако, преобразовать и в другом направлении:

$$(m+1)q>np; \qquad (n+1)p>mq$$

Но $q=1-p$, а $n=s-m$. Следовательно

$$(m+1)\ (1-p)>p(s-m); \qquad (s-m+1)p>m(1-p)$$

Раскрывая скобки, получаем

$$m+1-mp-p>sp-mp$$
$$sp-mp+p>m-mp$$

Сокращая mp и перенося в первом неравенстве p во вторую часть имеем

$$m+1>sp+p \qquad sp+p>m,$$

а следовательно

$$m+1>p(s+1)>m$$

Делим все три части двойного неравенства на $s+1$ и получаем

$$\frac{m+1}{s+1}>p>\frac{m}{s+1}$$

При сколько-нибудь большом s оба дробных выражения чрезвычайно мало отличаются от $\frac{m+1}{s}$ и $\frac{m}{s}$ $\left(\frac{10000}{20001}\text{ и }\frac{10000}{20000}!\text{ тем более }\frac{100000}{200001}\text{ и }\frac{100000}{200000}!\right)$, — и следовательно, от только-что полученного двойного неравенства мы можем прямо перейти к двойному неравенству

$$\frac{m+1}{s}>p>\frac{m}{s},$$

которое есть не что иное, как первое положение обращенной теоремы Бернулли.

Сходное по основной идее, тоже весьма упрощенное доказательство обращенной теоремы Бернулли мы находим и в неоднократно цитированных в предыдущих главах лекциях по теории вероятностей проф. А. В. Васильева. Для большей части явлений—говорит проф. Васильев—априорной вероятности определить нельзя,—„но правильность, на которую указывает теорема Бернулли и закон больших чисел, вполне подтверждается“. Статистические числа обнаруживают постоянство,—„мало того, на основании теоремы Якова Бернулли можно утверждать с большою вероятностью, что отношение числа повторений к числу испытаний отличается только на весьма малую величину от вероятности p. В самом деле, если существует вероятность

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}\,dt$$

то $\frac{m}{n}\Big|_{p-\sqrt{\frac{2p(1-p)}{n}}t}^{p+\sqrt{\frac{2p(1-p)}{n}}t}$, т. е. $\frac{m}{n}$ отличается от p не более как на $\theta\sqrt{\frac{2p(1-p)}{n}}\,t$, величину весьма малую, где буквою θ обозначается дробь, заключающаяся между пределами -1 и $+1$; поэтому в выражении разности $\theta\sqrt{\frac{2p(1-p)}{n}}\,t$ можно считать приблизительно $p=\frac{m}{n}$ и следовательно $1-p=\frac{n-m}{n}$. Тогда окажется, что p отличается

от $\frac{m}{n}$ не более как на $\theta\sqrt{\frac{2m(n-m)}{n^3}}$, и можно утверждать с вероятностью $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}\,dt$, что

$$p\left|\begin{matrix}\frac{m}{n}+\theta\sqrt{\frac{2m(n-m)}{n^3}}\,t\\ \frac{m}{n}-\theta'\sqrt{\frac{2m(n-m)}{n^3}}\,t\end{matrix}\right.$$

где θ', подобно θ в предыдущем выражении, обозначает дробь, заключающуюся между пределами -1 и $+1$.

Однако, с строго математической точки зрения подобного рода упрощенные способы доказательства обращенной теоремы Бернулли не выдерживают, повидимому, критики. Дело в том, что исходною точкою прямой теоремы Бернулли является существование данной априорной вероятности p. В случае простого обращения теоремы остается открытым вопрос, существует ли вообще данная априорная вероятность p (А. А. Марков)? И независимо от этого, предлагаемый мною выше простой вывод, если бы он и мог быть признан достаточным для обоснования положения, аналогичного первому положению прямой теоремы Бернулли, т. е. для обоснования того, что наивероятнейшею величиною неизвестного p является известное из наблюдения $\frac{m}{s}$, не дает совершенно ничего аналогичного второму положению прямой теоремы,—ничего не говорит о степени близости вероятного значения неизвестной вероятности p к действительной частоте наступления события $\frac{m}{s}$. В виду этого, в современной теории вероятностей признают необходимым давать особое доказательство обоих положений обращенной теоремы Бернулли, исходною точкою которого является так называемая теорема Байеса, окончательно формулированная тем же Лапласом, относительно вероятности причин; вопроса, который, как его характеризует Poincaré, представляет собою основную проблему, вообще, экспериментального метода и сущность которого сводится к тому, чтобы на основании данных наблюдением или опытом известных отношений определить вероятность лежащего в основе их общего закона.

Подлежащий разрешению основной вопрос, естественно, связывающийся с всегда чрезвычайно занимавшим теорию вероятностей вопросом о вероятности будущих событий, аналогичных имеющим место, может быть формулирован так: можно ли принимать наблюденную частоту $\frac{m}{s}$ за вероятность p, и от нее заключать, что и в будущем будет

наблюдаться та же частота $\frac{m}{s}$? Связь между этими двумя вопросами понятна: „прежде, нежели строить какие-либо предположения относительно возможностей будущих событий—так формулирует ее Czuber, нужно от наблюдавшегося результата сделать заключение к обусловившим его обстоятельствам, а такое заключение, в свою очередь, покоится на суждении, носящем характер вероятности". Принимают, именно, что „наличное недостаточное знание, в связи с наблюденным событием, дозволяет сделать ограниченное или даже неограниченное число допущений относительно лежащих в основе наблюденного события обстоятельств или условий; так как различные совокупности условий позволяют ожидать данного определенного результата с различною степенью вероятности, то, в свою очередь, и различным совокупностям условий, из которой мог проистечь действительно наблюдавшийся результат, отвечают различные вероятности". И вот, задача в том, чтобы найти способ измерить вероятность различных возможных комплексов причин, и лишь после этого может быть приступлено к вычислению вероятностей будущих событий. Возможность такого измерения вероятностей причин и открывается теоремою Байеса, окончательно развитой и разработанной, как я уже сказал, Лапласом.

Подход к теореме Байеса довольно прост. Возьмем, сначала, две урны—в одной из них десять белых, в другой десять черных шаров; вынут, не глядя, белый шар, — ясно, что он не мог быть вынут из второй урны, где белых шаров не было; вероятность того, что он был вынут из этой урны, равна нулю. Но пусть в первой урне было 999 белых и один черный, во второй наоборот; если, опять-таки, не глядя (эта оговорка будет относиться и ко всем последующим случаям), вынут белый шар, то ясно, что за вынутие его из второй урны говорит очень незначительная вероятность, из первой—очень большая. Уже не столь ничтожная, но тоже еще очень небольшая вероятность вынутия белого шара из второй урны будет и в том случае, если в ней 99 черных и один белый, в первой урне 99 белых и один черный. Если мы будем и дальше изменять отношение цветов, так что в первой урне будет 9 белых и один черный, 4 и 1, 2 и 1, а во-второй обратная комбинация, вероятности вынутия белого шара из той и другой урны, оставаясь различными, будут, однако, все более и более сближаться друг с другом. Когда дело дойдет до того, что в обеих урнах будет по равному числу — скажем по два или по четыре шара того и другого цвета, мы, очевидно, не будем иметь основания приписать большую вероятность вынутию белого из той или другой урны — обе будут равновероятны. Продолжая варьировать опыт так, что в первой урне будет 1 белый и 2 черных, 1 и 10, 1 и 50, 1 и 100 и т. д., а во-второй обратные комбинации, мы, очевидно, будем получать все меньшие и меньшие вероятности того, что белый шар вынут из первой и все

большие—что он вынут из второй урны. Совершенно так же будут складываться вероятности, если у нас будут взяты для опыта не две урны, а две серии урн, скажем, по пяти, или по десяти, или по двадцати в каждой, при чем все урны одной серии будут иметь одну, все урны второй серии—противуположную комбинацию шаров: вероятность вынутия белого шара из какой-либо урны, скажем, первой серии будет тем сильнее, чем больше в этой серии пропорция белых шаров и чем она меньше в урнах второй серии.

Представим себе теперь, что наши опыты поставлены иначе: взято десять урн, и во всех имеется по равному числу белых и черных шаров. Но сами урны, положим, красные и желтые. Если первых девять, а вторых одна, и если вынут, безразлично, белый или черный шар, мы, конечно, припишем большую вероятность вынутию его из красной и меньшую—из желтой урны; меняя постепенно постановку опыта и переходя к комбинации 8 красных и 2 желтых, 6 и 4, 5 и 5, 3 и 7, 1 и 9, наконец 10 желтых и ни одной красной, мы тем самым будем постепенно уменьшать вероятность того, что белый (или черный) шар вынулся из красной и увеличивать вероятность вынутия его из желтой урны и, в конце концов, дойдем до такого положения вещей, при котором вероятность выхода его из красной урны упадет до нуля, а вероятность выхода из желтой станет единицей.

Поставленные таким образом две серии испытаний характеризуют, очевидно, два различных типа случаев. Один — равные вероятности причин (одинаковое число урн с одинаковым составом шаров) и разные вероятности следствий, наступающих, если имеет место та или другая причина (разное число шаров в урнах первой и в урнах второй серии!) Другой — одинаковые вероятности действий или следствий, наступающих при наличности любой причины (одинаковое число шаров того и другого цвета!), — и разные вероятности самих причин (различное число урн того или другого цвета!). Мы можем, однако, поставить наши испытания так, что они представят собой комбинацию того и другого типа: предположим, сначала, комбинацию, положим, двух белых с одним черным, и обратную комбинацию— один белый и два черных, и возьмем для первого испытания 10 урн первого состава и одну второго, для второго испытания 5 и одну, для третьего по одной урне того и другого состава, для четвертого одну урну с двумя белыми и три урны с двумя черными, для пятого одну и 6, для шестого одну и 10 и т. д. Для другой серии испытаний будем брать, все время, по 10 белых с одним черным и по десять черных с одним белым, но урны разного состава возьмем, последовательно, в таких комбинациях: 100 и 1, 10 и 1, 3 и 1, по одной, 1 и 5, 1 и 12 1 и 30 и т. д. Возьмем теперь первое испытание первой серии: вынут (как и во всех последующих испытаниях) белый шар; если бы урн того и другого наполнения было по одной, то, очевидно, большая

вероятность была бы в пользу урны с перевесом белых и меньшая— в пользу урны с перевесом черных; но урн с перевесом белых, кроме того, и в десять раз больше, — это, очевидно, в значительной мере усиливает вероятность вынутия шара из урны первого типа наполнения. Остановимся на четвертом испытании (1 и 3),— если бы была всего одна пара урн с разным наполнением, то более вероятным был бы выход белого шара из урны с некоторым перевесом белых; но таких урн для данного испытания взято несколько меньше, чем урн противуположного состава, и это придает, напротив, большую вероятность тому, что шар был вынут из урны второго типа — с перевесом черных; которая из этих двух, ведущих к разным предположениям, вероятностей перевесит, — это сразу не видно. Но если остановиться на шестом испытании (1 и 10), то станет уже совершенно ясно, что обусловливаемая большим числом урн второго типа наполнения большая вероятность вынутия белого шара из урны этого типа, — большая, несмотря на некоторое преобладание в каждой из них не белых, а черных шаров, значительно перевесит обусловливаемую перевесом белых шаров вероятность вынутия его из единственной урны первого типа наполнения. Сходным образом мы будем рассуждать по поводу каждого из испытаний второй серии. При первом испытании значительно большая вероятность выхода белого из урны с перевесом белых еще значительно усиливается значительным перевесом числа урн этого типа наполнения; при шестом (1 и 12) большая вероятность вынутия белого из урны первого типа, обусловливаемая перевесом числа белых в урнах этого типа, уравновешивается или несколько перевешивается, при последнем она уже решительно перевешивается значительно большею вероятностью урны второго типа наполнения, обусловливаемою значительным перевесом числа самих урн этого типа.

Значит, на фактические результаты испытаний влияет и то и другое обстоятельство: и вероятность каждой из возможных причин—или конкретно, число урн каждого из типов наполнения, и вероятное действие этой причины, если бы она имелась налицо—конкретно, состав шаров в серии урн каждого типа; эти двоякого рода влияния могут действовать и в одном и том же, и в противуположных направлениях,—могут и усиливать, и парализовать, и перевешивать одно другое.

Но аналогичные рассуждения применимы и к явлениям жизненной действительности. Некто, положим, умер от тифа—мы задумываемся над вопросом, от какого: сыпного или брюшного. Сыпной тиф дает, положим, четыре пятых смертных случаев, брюшной всего одну десятую. Если бы заболеваемость тем и другим видом тифа была одинаково сильна, мы, конечно, сочли бы смерть от сыпного тифа значительно более вероятною, нежели от брюшного. Но мы знаем, что она не одинакова: что в городе было всего 20 случаев сыпного и

2000 случаев брюшного тифа, что дает заболеваемость или вероятность заболевания первым, положим, 0,00001, а вторым 0,001. Как ни велика смертность от сыпного тифа по сравнению с брюшным, мы едва ли остановимся на предположении, что интересующее нас лицо было, как раз, одним из 20 заболевших сыпным тифом и одним из 16 умерших—гораздо правдоподобнее, что он был одним из 2000 заболевших и одним из 200 умерших от брюшного тифа. Или другой пример: интересующий нас ребенок умер в заразном отделении детской больницы, куда принимают больных только корью и скарлатиной. Смертность больных корью (фактически по отчетам одной из петербургских детских больниц за май 1913 г.) была приблизительно 0,25, смертность больных скарлатиной 0,1; но больных корью было всего 140, скарлатиной 480. Опять-таки, и в данном случае—если бы число больных тою и другою болезнью в данной больнице было одинаково, наши предположения склонились бы в сторону кори, как болезни, дающей значительно большую смертность; но число больных скарлатиной значительно больше, и несмотря на более слабую смертность, она дала, поэтому, большее число смертных случаев: от скарлатины умерло, как легко вычислить, 48, от кори 35 больных. Если мы располагаем всеми этими сведениями, наши предположения, очевидно, склонятся в сторону смерти интересующего нас ребенка от скарлатины—от той болезни, которая, при значительно меньшей вероятности следствия—смерти, дает, однако, гораздо большую вероятность причины—заболевания.

Итак, еще раз: на фактический ход событий и на наши предположения, относящиеся к этим событиям, влияют обстоятельства и того, и другого рода—и вероятность каждой из возможных причин наступившего события, и вероятность данного действия в случае наличности той или иной из возможных причин. „Наиболее вероятно то предположение, при котором наличный результат наступает с наибольшею вероятностью“; но—мы видели—вероятность наступления интересующего нас результата именно от данной, а не от какой-либо другой из возможных причин, зависит от вероятности самой причины и от вероятности наступления данного следствия при установленной уже наличности самой данной причины, иначе говоря—и от распространенности самой причины, и от силы ее действия в данном направлении. Следовательно, для определения вероятности одной из возможных причин имевшего место события нужна такая формула, которая учитывала бы о б а эти момента. Такую формулу и дает теорема Байеса—теорема, относящаяся к в е р о я т н о с т я м п р и ч и н наблюдаемых событий.

Правильно ли, однако, говорить, в применении ко всем разобранным нами только-что примерам, о вероятности п р и ч и н,—и если правильно, то не следует ли понимать термин „причина“ в каком-то

особенном, несколько отличном от обычного словоупотребления, смысле? В самом деле—тот или другой вид тифа, или та либо другая заразная детская болезнь, без всякого сомнения могут быть рассматриваемы как „причины", если не в глубоком философском, то во всяком случае в обыденном, житейском смысле этого слова. Но окраска урны никоим образом не может быть рассматриваема, в этом, обыденном смысле, как „причина" вынутия белого или черного шара Ясно, что „причину" надо разуметь, в такого рода случаях, в каком-то другом смысле;—ясно, значит, что теория вероятностей нуждается в каком-то особенном понятии или определении „причины", которое обнимало бы как причины в обыденном смысле, так и подобные только-что приведенному случаи, не подходящие под это обыденное понимание. И вот, по определению Пуассона, „причину С, относящуюся к событию Е, рассматривают как вещь, дающую событию Е определенную, свойственную ей, chance (объективную вероятность)". Или, как поясняет Борткевич: причина в смысле теории вероятностей—это, просто, „принадлежность единичного случая к определенной группе с определенною вероятностью данного события",—все равно, значит, характеризуется ли группа какими-либо условиями, действительно носящими по отношению к данному событию характер причины (род болезни!), или же она характеризуется какими-либо, даже чисто внешними, признаками, с которыми, хотя-бы чисто механически, связана определенная вероятность данного события (цвет урны). Или, согласно столь же широкой характеристике Czuber'a, причины в теории вероятностей—это различные Bedingungskomplexe—совокупности условий, при которых может наступить данное событие, или различные гипотезы относительно возможных совокупностей таких условий. В противность обычному словоупотреблению—поясняет Пуассон—„причина С является причиной chance"—причиной вероятности события, „а не самого события": урна с 9 белыми и одним черным,—из которой, при данном испытании, извлекался шар,—это причина, обусловившая вероятность 0,9, что вынется белый шар, а не причина самого появления шара белого цвета.

Итак, теорема Байеса—это теорема относительно вероятностей „причин", в смысле „принадлежности событий к определенной частной группе",—в смысле обстоятельств, каковы бы они ни были, придающих данному событию определенную вероятность. „При данном следствии—так формулирует Бэн сущность этой теоремы,—которое могло быть произведено несколькими причинами, о присутствии которых в данном случае ничего не известно, вероятность, что следствие произведено данною причиною, есть вероятность причины, умноженная на вероятность, с которою эта причина, если бы она существовала, произвела бы данное следствие. Пусть событие—таков, по Бэну, ход логического рассуждения, которое приводит к этой теореме,—есть след-

ствие, а А и В—причины, которые обе могли бы произвести следствие Чтобы определить вероятность, что оно вызвано одною из двух причин, надо сперва выяснить, присутствие которой из них имеет бо́льшую вероятность, а затем—которая из них, предполагая ее присутствие, с большим вероятием должна была бы произвести следствие М; искомая вероятность должна быть равнодействующею этих двух вероятностей".

К математическому обоснованию теоремы Байеса можно итти различными путями. Самый простой из них—это тот, которым следует Крис, исходя из подразумеваемой им аксиомы, которую А. А. Марков формулирует следующим образом: „если при известных данных события а, в, с, ... n делятся по отношению к событию А на благоприятствующие и неблагоприятствующие ему, то, по присоединении к этим данным указания на появление события А, те из событий а, в, с . . . . . n, которые н е благоприятствуют событию А, становятся невозможными, и следовательно отпадают, остальные же из них остаются по прежнему равновозможными". Пусть имеется шесть урн с такими комбинациями шаров: 5 белых и ни одного черного, 4 белых и один черный, 3 и 2, 2 и 3, 1 и 4, пять шаров черных и ни одного белого. Всех урн шесть—значит вероятность каждой „причины", дающей событию, именно извлечению белого шара, ту или другую вероятность, равна $^1/_6$: вероятности самого события, т. е. извлечения белого шара, в случае наличности соответственной причины, т. е. при извлечении шара и з о п р е д е л е н н о й у р н ы, выражаются числами $1—^4/_5—^3/_5—^2/_5—^1/_5—0$. Д о о п ы т а все шесть урн и все тридцать шаров были одинаково равновозможны—при извлечении в слепую не было основания с большею вероятностью ожидать, что под руку попадется первая, а не третья или шестая урна, и в той либо другой урне—первый, а не десятый или тридцатый шар. Но вот тираж произведен, и вынулся белый шар. Спрашивается, из которой урны? По отношению к этому, у ж е н а с т у п и в ш е м у результату, все 15 черных шаров и та из шести урн, где имеются только черные шары, становятся невозможными—белый шар не может быть ни одним из 15 черных, и он не мог быть вынут из урны с одними черными шарами. Равновозможными для вопроса, как он ставится п о с л е испытания, остаются уже только 15 шансов—15 шаров, размещенных по отдельным урнам таким образом: 5—4—3—2—1—0. Эти числа шаров представляют собою статочности или шансы, говорящие в пользу каждой из шести урн. А так как всех шансов в пользу белого шара осталось 15, то, значит, вероятности извлечения белого из первой, из второй, из третьей и т. д. урны будут следующие:

$$^5/_{15},\ ^4/_{15},\ ^3/_{15},\ ^2/_{15},\ ^1/_{15},\ 0.$$

—значит, вероятность извлечения уже вышедшего белого шара из

той и другой урны есть дробь, где числитель — число характеризующих эту урну благоприятных шансов, знаменатель — общее число всех благоприятствующих данному событию шансов во всех шести урнах, взятых вместе. Чтобы перейти к общей формулировке теоремы, делим, в любой из этих частных вероятностей, числителя и знаменателя на общее число благоприятных и неблагоприятных для наступившего события статочностей—на 30. Получаем, например,

$$\frac{5/30}{15/30} = \frac{5/30}{5/30 + 4/30 + 3/30 + 2/30 + 1/30 + 0} =$$

$$= \frac{1/6 \cdot 5/5}{1/6 \cdot 5/5 + 1/6 \cdot 4/5 + 1/6 \cdot 3/5 + 1/6 \cdot 2/5 + 1/6 \cdot 1/5 + 1/6 \cdot 0}$$

—т. е. вероятность наступления случившегося события от определенной, одной из многих, бывших возможными, причин равна произведению вероятности данной причины на вероятность наступления события при действии именно этой причины, деленной на сумму произведений, подобным же образом составленных для всех бывших возможными причин.

Более общий вывод, как его дает, например, А. А. Чупров, представляется в таком виде:

Известно, прежде всего, общее число всех статочностей C; известно и число статочностей, благоприятствующих каждой из возможных причин—извлечению шара из каждой урны—$C_1 - C_2 - C_3 - \ldots$. Известно, затем, число статочностей в каждой урне, благоприятствующих каждому из возможных последствий в случае извлечения шара именно из этой урны—другими словами, число шаров каждого, положим, из четырех цветов, именно (значки снизу соответствуют, по прежнему, нумерам урн; значки сверху: 1—черному, 2—белому, 3—красному, 4—зеленому цвету):

в первой урне: $C_1^1 - C_1^2 - C_1^3 - C_1^4 \ldots\ldots$ — всего C_1

во второй » C_2^1 C_2^2 C_2^3 $C_2^4 \ldots\ldots$ — » C_2

. . . . . .

в n-той урне: C_n^1 C_n^2 C_n^3 $C_n^4 \ldots\ldots$ — » C_n

Следовательно, числа статочностей, благоприятствующих каждому из возможных следствий, т. е. каждому из четырех цветов, во всех урнах вместе, будут:

Черных (значки 1): $C_1^1 + C_2^1 + C_3^1 \ldots\ldots$

Белых (значки 2): $C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 \ldots\ldots$

и т. д.

Предположим, что вышел черный шар.

Вероятность выхода его именно будет:

$$\text{из первой урны} \ldots\ldots \frac{C_1^1}{C_1^1+C_2^1+C_3^1+\ldots} \ldots\ldots (A)$$

$$\text{из второй} \quad \ldots\ldots \frac{C_2^1}{C_1^1+C_2^1+C_3^1+\ldots}$$

Вероятность выхода белого шара, например, из третьей урны будет:

$$\frac{C_3^2}{C_1^2+C_2^2+C_3^2+\ldots}$$

и т. д.

Делим числителя и все по отдельности слагаемые в знаменателе, например, выражения (А), изображающего вероятность, что черный шар вынулся из первой урны, на общее число всех статочностей, т. е. на общее число всех шаров во всех урнах С:

$$\frac{\frac{C_1^1}{C}}{\frac{C_1^1}{C}+\frac{C_2^1}{C}+\frac{C_3^1}{C}+\ldots}$$

Множим, в каждой дроби, числителя и знаменателя на общее число статочностей, благоприятствующихъ соответственной урне, т. е. на общее число шаров всех цветов в этой урне—в числителе на C_1, в знаменателе, последовательно, на C_1, C_2, C_3, — получается выражение:

$$\frac{\frac{C_1^1}{C_1}\cdot\frac{C_1}{C}}{\frac{C_1^1}{C_1}\cdot\frac{C_1}{C}+\frac{C_2^1}{C_2}\cdot\frac{C_2}{C}+\frac{C_3^1}{C_3}\cdot\frac{C^3}{C}+\ldots} \ldots\ldots (Б)$$

Но $\frac{C_1^1}{C_1} = p_1^1$, т. е. представляет собою вероятность выхода черного шара из данной урны, а $\frac{C_1}{C} = p_1$—т. е. вероятность, что тираж произведен был именно из этой самой урны,—следовательно выражение (Б) равносильно выражению:

$$\frac{p_1 p_1^1}{p_1 p_1^1 + p_2 p_2^1 + p_3 p_3^1 + \ldots} \ldots\ldots (В)$$

Или словами: если наступающее событие могло быть следствием нескольких причин—все в том же, выше разъясненном смысле, каждая из которых обладает своею особою, отличною от других вероятностью, и каждая из которых с различною вероятностью ведет за собою данное следствие, то вероятность наступления данного события именно от данной причины равна произведению вероятности данной причины на вероятность события в предположении, что именно эта причина имела место, деленному на сумму всех произведений, образованных подобным же образом для каждой из возможных причин.

Это—о б щ и й вид теоремы Байеса, соответствующий тому случаю, когда каждая из причин имеет за себя свою особую, отличную от других, вероятность. В упрощенном виде теорема представляется для тех случаев, когда вероятности всех причин одинаковы, или, другими словами, все причины равновероятны. Тогда все вероятности p_1 заменяются одною, равною для всех урн, вероятностью p, и формула (Б) получает такой вид:

$$\frac{p\,p^i}{p\,p^1+p\,p^2+p\,p^3+\ldots.}$$

или, сокращая:

$$\frac{p^i}{p^1+p^2+p^3+\ldots.}$$

—т. е. словами: при равной вероятности всех причин, вероятность наступления события от одной определенной из числа этих причин равна отношению вероятности события в предположении, что эта именно причина имела место, к сумме его вероятностей при наличности каждой из всех бывших возможными причин этого события.

Итак, о б щ а я формула теоремы Байеса имеет такой вид:

$$W_i = \frac{p_i\,p_i^1}{\Sigma\,p_1\,p_i^1}$$

Или, еще раз словами, в несколько видоизмененной формулировке: вероятность причины, раз наступило следствие, равна произведению вероятности причины, безотносительно к наступлению события, на условную вероятность данного события, как следствия данной причины,—деленному на сумму подобным же образом составленных произведений для всех мыслимых или бывших мыслимыми, до наступления события, причин. Или в более упрощенной формулировке, передающей уже не математическую оболочку, а внутренний существенный смысл теоремы Баейса: „наиболее вероятным всегда является то предположение, при котором результат, имеющийся налицо, наступает с наибольшею вероятностью“ (Зигварг). Значит: если п р и ч и н ы р а в н о в е р о я т н ы, то наиболее вероятным является то предположение, при котором наличный резуль-

тат наступает с наибольшею вероятностью. Если причины, если можно так выразиться, равнодейственны, но сами обладают различными вероятностями (разноцветные урны в разном числе, но с одинаковым составом шаров) — наиболее вероятным является предположение, относящееся к наиболее вероятной из причин. Если причины, одновременно, и не равновероятны, и не равнодейственны, то каждая из причин тем более правдоподобна, чем чаще она имеет место и, следовательно, чем она вероятнее сама по себе, и чем вероятнее наступление события при наличности данной причины.

Возьмем конкретный пример: 1. Ребенок умер в детской больнице. В больнице этой на долю каждой из четырех представленных среди больных болезней приходятся такие доли общего числа больных, или, что то же самое, такие вероятности: $^1/_5 — ^1/_{10} — ^3/_{10} — ^2/_5$. Смертность среди больных каждою из этих болезней, или вероятность смерти в предположении данной болезни, $^1/_3 — ^1/_2 — ^1/_4 — ^1/_{10}$. Общий знаменатель дробей, выражающих вероятности смерти от каждой из четырех болезней, будет суммою попарных произведений тех и других вероятностей, т. е.

$$^1/_3 \cdot ^1/_5 + ^1/_2 \cdot ^1/_{10} + ^1/_4 \cdot ^3/_{10} + ^1/_{10} \cdot ^2/_5 = ^1/_{15} + ^1/_{20} + ^3/_{40} + ^2/_{50} = ^{139}/_{600}.$$

Числители каждой из этих дробей будут произведения вероятностей каждой из болезней на вероятности смертельного исхода для тех же болезней, т. е.:

$$^1/_3 \cdot ^1/_5 = ^1/_{15};\ ^1/_2 \cdot ^1/_{10} = ^1/_{20};\ ^1/_4 \cdot ^3/_{10} = ^3/_{40};\ ^1/_{10} \cdot ^2/_5 = ^2/_{50}.$$

Следовательно, вероятности, что смерть наступила от каждой из четырех болезней, будут:

$$\frac{^1/_{15}}{^{139}/_{600}} = ^{40}/_{139};\quad \frac{^1/_{20}}{^{139}/_{600}} = ^{30}/_{139};\quad \frac{^3/_{40}}{^{139}/_{600}} = ^{45}/_{139};\quad \frac{^1/_{25}}{^{139}/_{600}} = ^{24}/_{139}.$$

Другие задачи, которые читатель мог бы решить для лучшего усвоения данной формулы:

2. Тиражи производились из 9 урн с 5 белыми и 8 черными и из 5 урн с 11 белыми и двумя черными; вынут белый шар. Какова вероятность, что он вынут из урны первого типа наполнения.

3. Больной умер от сыпного или от брюшного тифа. Какова вероятность смерти от того или от другого вида тифа, если население города 2 миллиона, случаев сыпного тифа было 30, брюшного 2500, а смертность от первого—0,8, от второго—0,1.

4. Ребенок умер в детской больнице; больных в ней было корью—140, скарлатиной—480, дифтеритом—170, доля смертных исходов от кори—0,25, от скарлатины—0,1, от дифтерита—0,7. Какова вероятность смерти от каждой из этих трех болезней?

Приведу еще одно доказательство теоремы Байеса, принадлежащее академику А. А. Маркову. Исходною точкой является уже известная нам теорема деления вероятностей: вероятность события B, раз известно существование события A, равна вероятности сложного события AB, деленной на вероятность события A.

Мы уже встречались с теоремою умножения вероятностей для случая совместных признаков — частный случай теоремы умножения для зависимых событий:

$$(AB) = (A) \cdot (B,A)^1$$

Отсюда, если A наступило, вероятность события B, по теореме деления вероятностей, будет:

$$(B,A) = \frac{(AB)}{(A)}$$

Мы знаем, например, что вероятность одновременного или последовательного — но без возвращения вынутой карты в урну — извлечения двух тузов равна

$$^4/_{52} \cdot {}^3/_{51} = {}^1/_{13} \cdot {}^1/_{17} = {}^1/_{221}.$$

Если вынулся один туз, то вероятность выхода второго туза будет

$${}^1/_{221} : {}^1/_{13} = {}^{13}/_{221} = {}^1/_{17}.$$

Переходим теперь к выводу теоремы Байеса по А. А. Маркову, приняв следующие обозначения:

P — общая вероятность события A.

$p_1, p_2, \ldots$ — вероятности его видов $A_1, A_2 \ldots$, как следствий причин $B_1, B_2 \ldots$

$p_1, p_2 \ldots$ —условные вероятности события, в предположении действия причин B_1, B_2 и проч., или, иначе говоря, вероятности действия каждой из причин B_1, B_2 и проч.

$w_1, w_2, \ldots$ — абстрактные вероятности причин B_1, B_2 и т. д., независимо от наступления или ненаступления события A.

$w_1, w_2, \ldots$ — вероятности тех же причин, раз наступило событие A, — т. е. искомые вероятности причин.

При этих обозначениях вывод строится таким образом:

По теореме умножения вероятностей для случая совпадающих признаков имеем

$$p_1 = P \cdot w_1.$$

Смысл этого равенства: чтобы имело место событие A, и притом как следствие причины B_1, необходимо, 1, чтобы событие, вообще, наступило, и 2, чтобы оно наступило не от какой-либо иной причины, а именно от причины B_1 — необходимо, значит, совпадение факта наступления события с условием или признаком наступления от данной причины, — а вероятность такого совпадения равна произведению

---

[1]) Символ (B,A) означает вероятность события B, когда установлено уже существование события A.

вероятностей того и другого. Или иначе: вероятность вида данного события A_1 равна произведению общей вероятности наступления события A в каком бы то ни было виде на вероятность причины B_1, при наличности события A, т. е. на искомую вероятность.

Из этого равенства получаем

$$w_1 = \frac{p_1}{P}$$

Или, проще, по теореме деления вероятностей: A — сложное событие, состоящее в совпадении события A с причиною B (при наличности события A). Следовательно, раз известно существование события A, то тем самым

$$w_1 = \frac{p_1}{P} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

С другой стороны, абстрактная вероятность события вида A_1 равна произведению абстрактной же, значит, независимой от наступления или ненаступления события A вероятности причины B_1 на вероятность события A при наличности причины B_1. То же самое имеет место для видов события A_2, A_3 . . . . Отсюда такие равенства:

$$p_1 = w_1\, p_1 \qquad p_2 = w_2\, p_{II} \qquad p_3 = w_3\, p_{III} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (Б)$$

Так как событие A может наступить в видах A_1, A_2 и т. д., то P, вероятность наступления события A в каком бы то ни было виде, есть полная вероятность, и по теореме сложения вероятностей она равна

$$P = p_1 + p_2 + \ldots\ldots = \\ = w_1\, p_1 + w_2\, p_{II} + w_3\, p_{III} + \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (B)$$

Подставляя полученные в равенствах (Б) и (В) выражения для p и для P в равенство (А), получаем

$$w_1 = \frac{w_1\, p_1}{w_1\, p_1 + w\, p_{II} + w_3\, p_{III} \ldots\ldots}$$

— и, значит, теорема доказана.

Выше я упоминал о том, что в связи с теоремою Байеса-Лапласа и, в частности—как непосредственный вывод из нее или как продолжение того хода математического рассуждения, который приводит к формуле вероятности причин, строятся и формулы вероятностей будущих событий при наличности данных наблюдения или опыта о предшествовавших событиях. Вывод этих формул можно найти у Пуассона, или же, в весьма простом и доступном виде, у А. А. Маркова в его «Исчисление вероятностей». Я не буду останавливаться здесь на этом вопросе, как не имеющем отношения к теории статисти-

ческого метода. Кратко лишь отмечу, что современная теория вероятностей знает два приема вычисления вероятностей будущих событий: один, более простой—по наиболее вероятной гипотезе; второй, более точный, но зато и более сложный—по всей совокупности причин, могущих вызвать наступление данного события. Сущность того и другого приема я иллюстрирую только на примере, который я заимствую у Czuber'a.

Производятся извлечения наудачу из трех урн, из которых в одной 3 белых и 1 черный шар, в другой—2 и 2, в третьей один белый и три черных шара. При четырех испытаниях вынуто 3 белых и 1 черный. Вероятность этого сложного события по каждой причине в отдельности или, другими словами, в предположении извлечений из одной определенной урны, определяется, по теореме умножения вероятностей независимых событий, следующим образом:

по первой урне $\left(\text{в-сть белого } \frac{3}{4}, \text{ в-сть черного } \frac{1}{4}\right)$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{27}{256}$$

по второй урне $\left(\text{в-сть белого } \frac{1}{2}, \text{ черного } \frac{1}{2}\right)$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} = \frac{16}{256}$$

по третьей урне $\left(\text{в-сти } \frac{1}{4} \text{ и } \frac{3}{4}\right)$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{256}.$$

Вероятности причин, иначе говоря, вероятности извлечения данной комбинации шаров из каждой из трех урн, равны, по теореме Байеса, отношениям произведений полученных только-что трех вероятностей на вероятность каждой урны, т. е.
на $\frac{1}{3}$, — именно $\frac{27}{256} \times \frac{1}{3}$, $\frac{16}{256} \times \frac{1}{3}$, $\frac{3}{256} \times \frac{1}{3}$, к сумме этих трех произведений, или за сокращениями:

для первой урны $^{27}/_{46}$
» второй » $^{16}/_{46}$
» третьей » $^{3}/_{46}$

При вычислении вероятности будущих событий по первому приему—наивероятнейшей гипотезы, берется, просто, первая гипотеза—извлечение шара из первой урны, которой отвечает вероятность выхода белого при ближайшем испытании

$$^3/_4 = 0{,}750\,.$$

По второму—вычисления по всей совокупности причин, вероятность появления белого шара при следующем испытании определится таким образом: вероятность первой причины—выхода данной комбинации из первой урны—$^{27}/_{46}$, вероятность выхода белого шара из первой урны, при одном испытании — $^3/_4$,

следовательно, вероятность выхода белого шара в предположении, что он вынется из первой урны — $\frac{27}{46} \cdot \frac{3}{4}$; подобным же образом, вероятности выхода белого, в предположении вынутия из второй и из третьей урн, будут для второй урны — $\frac{16}{46} \cdot \frac{1}{2}$, для третьей — $\frac{3}{46} \cdot \frac{1}{4}$. Белый шар может быть извлечен из одной из трех урн—либо из первой, либо из второй, либо из третьей. Следовательно, общая вероятность выхода белого шара при ближайшем испытании есть полная вероятность, и определится по теореме суммы вероятностей:

$$\frac{27}{46} \cdot \frac{3}{4} + \frac{16}{46} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{46} \cdot \frac{1}{4} = \frac{29}{46} = 0{,}630.$$

В данном случае разница между результатами, полученными тем и другим приёмом, довольно ощутительная, но при больших числах она становится ничтожной, и потому применение приема вероятнейшей гипотезы становится более уместным.

Самостоятельное значение теоремы Байеса, как для определения вероятностей причин, так и для определения вероятностей будущих событий, невелико. По мнению некоторых представителей науки исчисления вероятностей, оно даже ничтожно, потому что применения ее «предполагают априорное знание всех причин, которые могли породить наблюденные события, и априорных вероятностей наступления этих событий в предположении действия каждой из этих причин». В действительности едва ли это где-либо имеет место, а потому—говорит, например, Mansion—все применения теоремы Байеса имеют чисто субъективное значение[1]). Большинство теоретиков оценивает, однако, самостоятельное значение теоремы Байеса и выводов из нее, хотя и аналогично по существу, но не столь резко. Теорема Байеса—говорит, например, Курно,—«не дает повода для двусмысленностей, и ее верность не может быть оспариваема», если известны априорные вероятности события в каждом из предположений. Если они неизвестны, то вероятности каждой гипотезы, при данном результате, получаются путем исключения противоречащих ему предположений,—и в таком случае они будут иметь чисто субъективный характер; они не гарантируют, в большом числе, верного результата, а только дают основание, например, для справедливого пари в условиях одинакового незнания[2]). Такой же, приблизительно, оттенок носит оценка Czuber'a. Он тоже подчеркивает, что при доказательствах данной теоремы оперируют с конкретными причинами (урны и т. п.), тогда как при применениях, как правило, имеют дело с причинами идеальными, существующими только в нашем представлении. Если, по незнанию, решаются считать причины равновозможными, то надо иметь в виду, что результат выражает лишь то, was sich aus dem Ereignis allein erschliessen lässt,—то, что можно вывести из наступившего события, рассматриваемого само по себе. В другом месте Czuber также подчеркивает и подробнее развивает положение, что заключение по теореме Байеса вполне убедительно, если известен априорный закон вероятности причин (как это имеет место, например, при тиражах из урны, наполнявшейся шарами на основании предварительной жеребьевки цветов). В противном случае получаются сомнительные и даже нелепые результаты вроде, например, заключения о «благоприятствовании» условий опыта для падения монеты орлом, которое получается после одного бросания монеты, при полном незнании каких-либо других обстоятельств, в предположении равновозмож-

---

[1]) Mansion. Sur la portèe objective du calcul des probabilités (Bull. de l'Acad. Royale du royaum de Belgique, cl. des sciences, 1903, № 12), стр. 27.

[2]) Cournot. W.-R., стр. 129—130.

ности всех вероятностей выхода орла, от нуля до единицы. Допустимым признается применение теоремы Байеса при значительном числе наблюдений и при возможности указать неширокие жизненные, реальные границы, внутри которых дальнейшая градация возможностей была бы неосуществима; возможно, например, вычисление вероятности падения монеты орлом при значительном числе испытаний и в предположении неправильности не более, например, одной шестнадцатой и т. п. [1]).

Что касается до вероятностей будущих событий, то вычисление их по данным наблюдения признается вполне законным,—но только в случае, если есть достаточное основание предполагать независимость и равновозможность событий Незаконными являются поэтому известные вычисления Джевонса относительно вероятности повторения восхода солнца через год, через 100, через миллион лет и т. п., основанные на факте неизменного повторения этого явления в течение чрезвычайно продолжительного времени: восход и невосход солнца не могут быть рассматриваемы, как равновозможные события, потому что восход предопределяется определенною совокупностью постоянно действующих причин, тогда как невосход предполагает какую-то мировую катаклизму, не поддающуюся никакому предвидению и расчету вероятностей.

Для нас, однако, вопрос о самостоятельном значении теоремы Байеса не имеет существенного значения: теорема Байеса важна для нас не сама по себе, а как подход к окончательному доказательству обращенной теоремы Бернулли. Ход этого доказательства такой:

Искомая вероятность принимается за причину наблюденного события или соотношения событий: данная частота $\frac{m}{s}$ получилась именно потому, что существует некоторая вероятность p. Но спрашивается, какова эта причина? Если частота $\frac{m}{s}$ получилась равною, допустим, $^{500}/_{1000}$, то вероятность p могла быть и $^{50}/_{100}$, и $^{49}/_{100}$, и т. д.— потому что, ведь, в силу прямой теоремы Бернулли, частота не совпадает с вероятностью, а только приближается к ней, не выходя из некоторых пределов. О вероятностях каждой из этих мыслимых причин, т. е. различных априорных вероятностей данного события, мы ничего не знаем; в частности, не имеем оснований для предположения, чтобы какая-либо одна из них была более вероятна, нежели другая,—следовательно, мы в праве применить упрощенную формулу теоремы Байеса, отвечающую случаю равновозможных причин. По этой формуле вероятность любой одной из возможных причин будет

$$\frac{p_i}{\Sigma p_i}$$

Между тем, по заданию, искомая причина полученной из наблюдения частоты $\frac{m}{s}$, т. е. искомая вероятность p, лежит в пределах $\frac{m}{s} \pm \Delta$,

[1]) Czuber, W.-R. 3 Aufl, Bd. I., стр., 207—209.

где $\triangle$ представляет собою правильную дробь, меньшую $\frac{m}{s}$. Это одна из нескольких или многих вероятностей, лежащих в пределах от $\frac{m}{s} - \triangle$ до $\frac{m}{s} + \triangle$. Вероятность того, что „причиною" данной частоты является одна из этих вероятностей—или та, или другая, или третья и т. д.—есть полная вероятность и, в силу теоремы сложения вероятностей, определится по формуле

$$\frac{p_I + p_{II} + p_{III} + \cdots}{\Sigma p_i} \quad \ldots\ldots\ldots (N)$$

Это—рассуждение общего характера. Конкретно же в данном вопросе: наступившее событие—частота $\frac{m}{s}$; ищется вероятность причины p, лежащей в заданных пределах $\frac{m}{s} \pm \triangle$. С другой стороны, всемыслимые причины, т. е. все возможные комбинации данного события E и противуположного ему события, выраженные в частотах, лежат в пределах между $1 = \frac{s}{s}$ и $0 = \frac{0}{s}$, т. е. между наступлением события E во всех испытаниях и ненаступлением его ни в одном испытании. Следовательно, вероятность того, что искомая „причина", т. е. вероятность p, лежит в пределах $\frac{m}{s} \pm \triangle$, выразится, согласно только-что полученной общей формуле (N), таким образом

$$\frac{\left(\frac{m}{s} - \triangle\right) + \left(\frac{m}{s} - \triangle + \frac{1}{s}\right) + \ldots + \left(\frac{m}{s} - \frac{1}{s}\right) + \left(\frac{m}{s}\right) + \left(\frac{m}{s} + \frac{1}{s}\right) + \ldots + \left(\frac{m}{s} + \triangle\right)}{\sum_{i=0}^{i=1} \frac{i}{s}}$$

где скобки означают вероятности помещенных в скобках величин. Затем, как и в прямой теореме Бернулли, от стоящих в числителе и в знаменателе этого выражения сумм конечных величин переходят к интегралам—т. е. к суммам всех мыслимых, непрерывно изменяющихся и бесконечно мало отличающихся, каждая, от смежных с нею величин—

$$P = \frac{\int_{\frac{m}{s} - \triangle}^{\frac{m}{s} + \triangle} y dx}{\int_0^1 y dx}$$

и, после известных вычислений, за которыми мы и в данном случае не имеем ни возможности, ни надобности следовать, приходят к уже нам

известной формуле—тому же Лапласовскому интегралу,—из которой ясно главное практическое значение данного вывода — при достаточно больших числах наблюдений s и числах событий m, данная частота $\frac{m}{s}$ приблизительно равна вероятности p: при таких условиях пределы, в которых неизвестная нам априорная вероятность может отклониться от данной наблюдением или опытом частоты, настолько съуживаются (а при бесконечно большом числе наблюдений, с вероятностью сколько угодно близкою к единице, т. е. к достоверности, сливаются друг с другом и с наблюденною частотою), что получается полная возможность принимать эмпирическую частоту равною объективной вероятности и подставлять первую величину вместо второй. При этом условии, значит, обращенная теорема Бернулли есть, в самом деле, принцип, позволяющий принимать полученную из опыта частоту за истинную вероятность данного явления. Именно принцип: фактически обращенною теоремою Бернулли ни в практике статистической работы, ни даже при разрешении каких-либо вопросов статистической теории не пользуются. Тем не менее, принципиальное ее значение очень велико, потому что только она окончательно санкционирует наше право, при достаточно большом числе наблюдений, видеть в частоте обладающее сколь угодно высокою степенью точности отражение лежащей в основе данного явления объективной вероятности, а следовательно—и выражение управляющих явлением общих или постоянных причин.

Как я уже упоминал, входить в рассмотрение вывода более широкой математической формулировки закона большого числа, т. е. теоремы Пуассона, я не могу,—да и не имею надобности, потому что теорема Пуассона имеет главным образом принципиальное значение, обосновывая наше право распространять положения теоремы Бернулли на явления с изменяющимися вероятностями, а все применения математически формулированного закона большого числа, о которых частью уже говорилось в начале этой главы, частью будет итти речь в дальнейшем, выводятся не из обобщенных формул Пуассона, а из имеющих в виду первоначально один лишь случай постоянной вероятности формул теоремы Бернулли, которые оказались в полной мере применимыми и к случаям средних вероятностей в собственном смысле (см. выше, стр. 247 и сл.). Лишь в самых кратких словах я остановлюсь и на еще более обобщенном выражении закона большого числа, которое обнимает не только, и даже не столько, частоты или относительные величины, с какими имеют дело теоремы Бернулли и Пуассона, сколько средние величины, и по отношению к которому и теорема Бернулли и теорема Пуассона представляют собою тоже только некоторый частный случай,—на так на-

зываемой теореме Чебышева[1]). Такое ограничение является, с одной стороны, вынужденным, потому что полный вывод теоремы Чебышева слишком труден для предполагаемого мною, в главной массе, читателя, а с другой стороны, оно и вполне допустимо, потому что теорема Чебышева также имеет, более или менее исключительно, принципиальное значение, в научной же практике, и, в частности, в области не только конкретного статистического анализа, но и статистической теории, она—до сих пор, по крайней мере, не получила никакого применения.

Сущность дела—повторяю – здесь в том, что как теорема Бернулли, так и более общее выражение закона больших чисел в теореме Пуассона, имеют в виду лишь те эмпирические вероятности, которые находят себе выражение в статистических частотах, иначе говоря—в относительных числах, и не могут быть распространяемы на другой основной вид статистических коэффициентов—на средние величины. Возможность такой наиболее обобщенной формулировки закона большого числа, под которую подошли бы и средние величины, получается на почве уже известного нам понятия математического ожидания. Всякая эмпирически данная величина—рост или возраст человека, посевная площадь крестьянского двора, число несчастных случаев, число рабочих на фабрике и т. п.,—может быть рассматриваема как воплощение некоторого математического ожидания. Равным образом, и средней арифметической из любых эмпирически-данных величин соответствует свое математическое ожидание, которое представляет собою арифметическую же среднюю из математических ожиданий отдельных величин. Вот, эта-то средняя из математических ожиданий и играет в рассматриваемом обобщенном выражении закона большого числа ту самую роль, которая принадлежит вероятности p в теоремах Бернулли и Пуассона. Из так называемых неравенств Чебышева выводится именно следующее положение: с вероятностью, большею чем $1-\frac{1}{t^2}$ и, при большом числе наблюдений, сколь угодно близкою к единице, можно утверждать, что сумма ряда независимых величин x, y, z....

$$x+y+z.....$$

отличается от суммы их математических ожиданий a, b, c.... не более как на

$$\pm t\sqrt{a_1+b_1+c_1+...-a^2-b^2-c^2....},$$

[1]) Упрощенной формулировкой этого обобщения я обязан проф. А. В. Васильеву. Вывод и точное определение условий приложимости формулы см. в „Исчислении вероятностей" А. А. Маркова или в «Записках по исчислению вероятностей А. Ѳ. Гатлиха.

где знаками a_1 b_1 c_1 .... обозначены математические ожидания квадратов тех же величин x, y, z . . . . . , а следовательно, средняя арифметическая из того же ряда величин

$$\frac{x+y+z+\ldots}{s}$$

отличается от средней из их математических ожиданий не более как на

$$\pm t\sqrt{\frac{a_1+b_1+c_1+\ldots-a^2-b^2-c^2\ldots}{s^2}}.$$

Для частного случая—повторения случайных событий, с которым имеют дело теоремы Бернулли и Пуассона, когда речь идет уже не о срёдних, а о частотах или относительных величинах, средняя из данных величин переходит в частоту $\frac{m}{s}$, а средняя из математических ожиданий—в вероятность p.

Этот переход происходит таким образом: все слагаемые, из которых, в общем случае, получается средняя, заменяются единицею для m случаев наступления и нулем для s—m случаев ненаступления события, следовательно, вместо средней получается дробь:

$$\frac{m.\ 1+(s-m).\ 0}{s}=\frac{m}{s}.$$

С другой стороны, раз каждая из величин может иметь лишь значения: 0 (событие не наступило) и 1 (оно наступило), то математические ожидания как каждой величины, так и ее квадрата ($0^2=0$, $1^2=1$), принимают вид

$$p.\ 1+(1-p).\ 0=p.$$

Следовательно, и средняя из математических ожиданий становится равною p, а каждая пара членов под знаком корня (a_1-a^2 и т. д.) принимает вид

$$p-p^2=p(1-p);$$

сумма s пар будет

$$sp(1-p),$$

а после деления этого выражения на знаменатель основной формулы s^2, выражение под корнем получит вид

$$\frac{p(1-p)}{s}$$

и, следовательно, теорема для этого частного случая получает такую формулировку:

С вероятностью большею чем $1-\frac{1}{t^2}$ можно утверждать, что частота случайного события $\frac{m}{s}$ отличается от его вероятности не более как на

$$\pm t\sqrt{\frac{p(1-p)}{s}}.$$

Пользоваться этою формулой в научной практике—как я уже сказал, в действительности не приходится, потому что формула Бернулли-Лапласа, будучи приложимою лишь к данному частному случаю, для этого частного случая дает во много раз более близкую к единице степень достоверности получаемого при данном числе наблюдений s результата,—следовательно, для данного частного случая обобщенная формула Чебышева представляется практически ненужной.

Она практически не нужна еще и потому, что распространение математически формулированного закона большого числа на случай средних величин возможно и помимо теоремы Чебышова. Уже в данной самим Пуассоном формулировке основных положений «теоремы Пуассона» есть, в дополнение к двум общеизвестным ее положениям, третье положение, существо которого сводится к тому, что если вопрос идет о λ значениях величины A ($a_1 \ldots a_\lambda$), то среднее значение этой величины, при n испытаниях (т. е. сумма значений s, деленная на n), весьма вероятно, будет очень мало отличаться от суммы этих значений, умноженных на их средние вероятности:

$$\frac{s}{n} \sim a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_\lambda\alpha_\lambda,$$

где

$$\alpha_i = \gamma_1 c_{1,i} + \gamma_2 c_{2,i} + \ldots + \gamma_\nu c_{\nu,i}$$

при чем символ γ изображает вероятности каждой отдельной причины, c—вероятности данных значений величины A при наличности соответственных причин. Отношение

$$\frac{s}{n} \sim a_1\alpha_1 + \ldots + a_\lambda\alpha_\lambda$$

не зависит от величины s, а потому, при больших числах в двух сериях наблюдений будет иметь место приблизительное равенство

$$\frac{s}{n} \sim \frac{s^1}{n}.$$

Однако, это положение Пуассона, как и многое другое в его классическом труде, в течение ряда десятилетий не обратило на себя надлежащего внимания, и потому М. В. Птуха имел полное право сказать, что «до появления работы Борткевича «Kritische Betrachtungen zur theoretischen Statistik» (II Art.) учение о применении теории вероятностей к статистике страдало некоторою односторонностью в том

смысле, что главное внимание ученых обращено было на относительные числа»; мало того—«в свое время некоторые ученые», в том числе такие видные, как английский теоретик Edgeworth, «высказали даже мнение о невозможности подобного приложения теории вероятностей к средним»[1]). В то время,—продолжает М. В. Птуха, как „при применении теории вероятностей к относительным числам речь идет о том, может ли разность двух значений относительного числа или их колебания у статистического ряда быть объяснены действием случайных причин или же различием абстрактных вероятностей и, вследствие этого, общих условий, лежащих в их основе" (3-я из намеченных на стр. 288 «задач», разрешаемых при помощи формулы Бернулли-Лапласа)—«приложение теории вероятностей к средним ограничивалось только исследованием аналитического отношения между отдельными числовыми значениями изучаемого явления и соответствующими им частостями нахождения ее у отдельных индивидуумов, входящих в общую совокупность», или, говоря конкретно,—к исследованию степени соответствия распределения отдельных значений, составляющих среднюю величину, закону случайных ошибок Гаусса. И только Борткевич, которому принадлежит заслуга, если можно так выразиться, оживления от летаргического сна многих из забытых положений и аналитических приемов Пуассона, указал на то, что „как раз способ рассмотрения средних при этом приложении к ним теории вероятностей позволяет расширить на них и метод приложения ее к относительным числам». [2])

Сущность соображений Борткевича сводится к тому, что „эмпирически установленные частоты появления различных значений одной величины (из которых выводится средняя) всегда рассматриваются как приближенные выражения вероятностей существующих для данной величины принять соответственные численные значения. Поэтому и само найденное среднее значение, зависящее от полученных частот, представляется приближенным выражением теоретического или абстрактного среднего значения, которое возникает из эмпирического таким образом, что на место эмпирических частот становятся отвечающие им абстрактные вероятности. И совершенно так же, как эмпирическое значение вероятности—ein empirischer Wahrscheinlichkeitswert, под влиянием случайных причин может более или менее существенно отклоняться от лежащего в основе его теоретического значения,—совершенно так, в виде правила, влиянием подобных же причин вызывается определенное отклонение эмпирического среднего значения известной величины от соответствующей ему теоретической средней. Если, например—продолжает Борткевич—для двух, различающихся по положению во времени или по какому-либо иному принципу масс, най-

[1]) Птуха. Очерки по теории статистики населения и моральной (СПБ. 1916, стр. 113).

[2]) Там же, стр. 113—114.

дены эмпирические средние значения X_I и X_{II} какой-либо величины, как, напр., продолжительности жизни, то здесь не меньше, как в том случае, если бы речь шла об относительном числе, был бы уместен вопрос, должна ли разница $X_I - X_{II}$ быть приписана влиянию случайных причин, или же она должна быть отнесена на счет соответственной разницы между существующими для каждой из этих двух масс абстрактными средними значениями той же величины. Равным образом, и в случае ряда из нескольких чисел $X_1, X_2, X_3 \ldots$ было бы тоже уместно поставить себе вопрос, совместимы ли колебания этого ряда с предположением одного лежащего в основе всех членов ряда абстрактного среднего значения, или нет". И затем Борткевич показывает, что распространение приемов исчисления вероятностей на случай „именованных средних чисел" не только логически законно, но и вполне выполнимо с чисто-математической, вычислительной стороны, исходя при этом из того же принципа математического ожидания, который лежит в основе теоремы Чебышева; именно, рассматривая каждую статистическую среднюю, как эмпирическое выражение математического ожидания соответственной величины[1]).

Математическая формулировка закона большого числа, как она дана в теореме Бернулли-Лапласа и как она принципиально распространена общеизвестными положениями теоремы Пуассона на случай средних вероятностей, а третьим положением той же теоремы и исследованиями Борткевича—на случай средних величин, дает возможность разобраться в ряде существенных вопросов, связанных с существом массового наблюдения и закона большого числа, как его принципиальной основы.

Прежде всего, она помогает разобраться в вопросе о том, что такое „масса", „большое число", и какие последствия вытекают для научной практики из существа статистики, как метода, в основе которого лежит массовое наблюдение.

В начальном периоде развития современной статистики, в работах создателя ее—Кетле и его ближайших последователей, из понятия о статистике, как методе массового наблюдения, делались слишком прямолинейные выводы: раз статистика—так представлялось дело тогда—есть метод массового наблюдения, раз принципиальною основой этого метода является закон большого числа, то чем больше число наблюдений, чем шире берется подвергаемая наблюдению и дающая материал для научного обобщения масса, тем лучше,—тем в большей мере наблюдение отвечает понятию массового наблюдения и тем в большей степени проявляет свое действие закон большого числа. В связи с теориею „среднего человека", составлявшею один из основных пунктов теоретических и методологических воззрений Кетле,

[1]) Bortkiewicz, Kritische Betrachtungen etc. (Jahrb. f. N Oek. und Stat, III Folge, B. X. стр. 333; в упрощенном виде см. Птуха, назв. соч. стр. 115.

такого рода понимание смысла „массового“ наблюденія породило то, что Георг Майр удачно называет Massensucht—стремление к накоплению и объединению возможно больших чисел наблюдений и к получению общих выводов из мыслимо крупных цифр. Между тем, делать общие выводы, определять средние величины, установлять типические отношения имеет смысл только для таких совокупностей, которые достаточно однородны,—в которых есть основание предполагать подобного рода типичность или, во всяком случае, нет основания предполагать более или менее резкой пестроты и разнотипности. Если мы, в погоне за большим числом, будем брать огромные массы, не соображаясь с влиянием внешней природы, этнографических различий разнообразия экономической и культурной обстановки, то мы будем получать, может быть, и правильные арифметически, но лишенные внутреннего содержания и смысла выводы,—выводы, не дающие никакой реальной характеристики явлений, как они есть в жизненной действительности; при такой постановке дела статистического наблюдения „большие числа не вскрывают, а стирают социальный тип“ (Liesse); под одно численное выражение подводятся вещи, существенно различные, результатом же является, в самом деле, не выяснение, а затуманение жизненных, реальных соотношений и закономерностей.

И в то же время, исходя из изложенных, главным образом в предшествующей главе, соображений относительно математической сущности закона большого числа, нетрудно убедиться в том, что такое стремление к увеличению, во что бы то ни стало, массы наблюдений, вовсе не вытекает из существенного смысла этого закона. Из математической формулировки закона большого числа, и в частности из изученного нами во всех подробностях строения Лапласовского интеграла, ясно, что достаточная степень точности и достоверности результата достигается уже при сравнительно умеренных числах наблюдений; что дальнейшее, сколь угодно далеко идущее, увеличение числа наблюдений уже не приводит к сколько нибудь ощутительному повышению степени достоверности и точности результата, и что, следовательно, математически формулированный закон большого числа вовсе не требовал-бы—даже если бы это не было связано с подчеркнутыми только-что существенными неудобствами– увеличения числа объединяемых в статистичеекие массы случаев дальше известных, повторяю, сравнительно очень умеренных, пределов.

Это ясно, до некоторой степени, уже из самого вида формулы

$$\frac{m}{s} = p \pm \gamma \sqrt{\frac{2\,p\,q}{s}},$$

выражающей теоретически допустимые, при чисто случайном характере отклонений, пределы уклонения полученной из наблюдений ча-

стоты от абстрактной вероятности. Число наблюдений s стоит здесь, правда, в знаменателе, и, следовательно, мера отклонений, с беспредельным увеличением этого числа s, должна беспредельно убывать, а частота должна беспредельно приближаться к вероятности. Но это число s стоит под знаком корня,—следовательно модуль, теоретическая мера уклонения частоты от вероятности, убывает, а степень точности результата повышается пропорционально не числам наблюдений, а корням квадратным из этих чисел; точность возрастает, следовательно, несравненно медленнее, нежели число наблюдений.

Гораздо более определенные указания дают, однако, в данном направлении, простые вычисления по таблицам значений интеграла вероятностей. Я лишь напомню некоторые из приводившихся на стр. 245 и 294 цифр:

Число наблюдений s	Модуль $\pm\sqrt{\frac{2pq}{s}}$	Пределы отклонений. при $\gamma = 1$ ($P = 0{,}84$)	при $\gamma = 2$ ($P = 0{,}995$)	при $\gamma = 3$ ($P = 0{,}99998$).
20/тыс	0,005	0,495 —0,505	0,490 —0,510	0,485 —0,515
80/тыс.	0,0025	0 4975 —0,5025	0,495 —0,505	0,4925 —0,5075
320/тыс.	0,00125	0,49875—0,50125	0,4975—0,5025	0,49625—0,50375
2 милл.	0,0005	0,4995 —0,5005	0,499 —0,501	0,4985 —0,5015

Точность результата, значит, растет. Но уже при переходе от такого, сравнительно, совсем умеренного числа наблюдений, как 20.000, к учетверенному числу 80.000 она повышается—даже принимая максимальную степень достоверности, отвечающую $\gamma = 3$ и $P = 0{,}99998$, всего на 0,0075 или на $^3/_{400}$; при дальнейшем учетверении числа наблюдений, с 80.000 до 320.000, точность результата повышается уже всего только на 0,00375, или на $^3/_{800}$; при переходе от 320.000 к двум миллионам наблюдений, т. е. при увеличении числа последних, приблизительно, вшестеро, точность результата повышается на 0,0022, т. е. всего на $^1/_{454}$; если даже взять сразу такой резкий переход, как от 80.000 к двум миллионам, значит увеличение числа наблюдений в 25 раз, и то точность результата повышается всего на 0,006 или на $^1/_{167}$. Но какое значение может иметь повышение той абстрактной точности результата, которая зависит, собственно, от числа наблюдений, на 0,0022, на 0,006, на $^3/_{800}$, даже на $^3/_{400}$, при неизбежной грубости и неточности статистических данных, где уже десятые процента представляются такими величинами погрешностей, при которых материал приходится признать превосходным, и где, обычно, приходится считаться с погрешностями, выражающимися в целых, и притом в не малых процентах? Ясно, что никакого,—что уже та степень точности результата, какая—поскольку дело зависит от числа наблюдений—достигается при 20.000 наблюдений, не только вполне соответствует тому масштабу точности, какой, вообще, приложим в статистическом наблюдении, но, как правило, выходит далеко за отвечающие этому масштабу пределы.

Прилагая тот, повторяю, чрезвычайно грубый масштаб точности, с каким приходится мириться в очень многих, я сказал бы—в большей части областей, где применяется статистический метод, можно довольствоваться и далеко меньшими числами наблюдений. В этом отношении, опять-таки, очень показательны цифры, также вычисленные в предшествующей главе, на стр. 294: мы видели там, что уже при 800 наблюдениях, с более чем достаточною, в условиях очень многих, если не большинства, отраслей социальной статистики, с вероятностью 0,995 можно рассчитывать на то, что даже при дающей наибольшие отклонения вероятности $^1/_2$ результат не отклонится от истинного дальше, чем до 0,45 в одну сторону и 0,55 в другую, — степень точности, с какою в очень многих случаях вполне возможно мириться в выводах, в виду весьма низкой степени точности того материала, на котором строятся статистические выводы.

Но, конечно, *такая* уже очень низкая степень точности—это не более как неизбежное зло, с которым приходится мириться, раз малые числа наблюдений не дают возможности рассчитывать на более точный результат, и раз эта степень точности отвечает, с одной стороны, малой точности материала, а с другой — характеру тех задач и вопросов, к разрешению которых, в каждом данном случае, прилагается статистический анализ. Напротив, степени точности, какие достигаются при таких числах наблюдений, как 20.000 и т. п.—это, безусловно, вполне достаточная точность, и раз она достигнута, статистик уже не имеет надобности гоняться за тем ничтожным уточнением, которое, *может быть*, получится при дальнейшем накоплении наблюдений. «Может быть»,—а отнюдь не наверно, потому что при расширении поля наблюдения легко может наступить такой момент, когда *едва заметное увеличение точности*, какое *могло бы* получиться в результате увеличения числа наблюдений, будет далеко перевешено *колебаниями*, имеющими своим источником *неоднородность* подводимой под одно «большое число» массы случаев,—когда, значит, расширение поля наблюдения приведет уже *не к улучшению*, а *к ухудшению* результата.

С этим последним замечанием, затрагивающим вопрос, который будет подробно рассмотрен в двух последующих главах, — вопрос о *действительной* устойчивости статистических чисел и о влиянии на нее числа наблюдений, мы возвращаемся к той *главной опасности*, связанной с излишнею погоней за массами, которая была уже подчеркнута несколькими строками выше. Эта главная опасность в том, что в «слишком больших массах *нередко нивеллируются многочисленные различия*, имеющие существенное значение для действительного познания общественных явлений и состояний.

Если бы, поэтому, и было возможно сосчитать *всех* людей и статистически зарегистрировать *все* деяния живущих на земле,—

все-таки» это была бы лишь абстракция, сглаживающая существеннейшие расовые, национальные, племенные и т. п. различия.

«Не в накоплении огромных масс фактов, а в широкой их дифференциации,—продолжает Майр, задача статистика»; «в виду закона большого числа приходится, при этом, лишь иметь в виду, чтобы те группы социальной массы, которые подвергаются обособленному рассмотрению, в достаточной степени сохраняли характер «массы» (т. е. были достаточно велики), и чтобы, поэтому, можно было предполагать достаточную степень выраженности общих, постоянно-действующих причин». Соответственная дифференциация социальных масс, при условии соблюдения требования закона большого числа, имеет огромное значение и дает крайне важные и ценные результаты в деле познания социальных явлений и их причин,—мало того, может привести к исправлению сомнительных, даже явно неверных выводов, получаемых из недостаточно расчлененного материала.

Приведу, для иллюстрации сказанного, некоторые из тех конкретных примеров, которые я, частью, уже имел случай приводить в другом месте, именно для иллюстрации тех явно неверных выводов, к каким может приводить недостаточно расчлененный материал, и тех поправок, какие могут привноситься к такого рода неверным выводам при соответственном разчленении материала. Вот один пример, относящийся к вопросу о влиянии профессии на смертность. По приводимым Вестергордом английским данным, смертность лиц духовного звания выражается коэффициентом 19, железнодорожных служащих—17 на тысячу. Это, очевидно, противоречит всему, что мы знаем об условиях жизни той и другой профессиональной группы, — не согласуется и с данными о средней продолжительности жизни, которая для духовенства равна 62,6, для железнодорожных служащих всего—43,2 годам. Именно это противоречие, однако, наводит нас на мысль, как устранить это явное «статистическое недоразумение». Группируем наши данные по возрасту и получаем такие цифры:

Возраст	Духовенство	Жел.-дор. служащие.
25—35	5	12
35—45	6	15
45—55	13	22
55—65	23	41
65—75	52	71
старше 75	150	205

Получается, диаметрально противоположный ранее полученному, вполне правдоподобный результат: смертность в равновозрастных группах у железнодорожных служащих не только не ниже, но значительно выше, чем у духовенства.

Другой пример, заимствованный также у Вестергорда: смертность взрослых мужчин по возрастным группам. По шведским данным, смертность в возрастах 22—26, 27—31, 32—36 лет выражается 6,13, 5,89 и 5,88 на тысячу,—выходит, что смертность с возрастом не усиливается, а убывает. Совсем другой результат получается, если комбинировать возрастную группировку с расчленением по семейному состоянию. В таком случае для холостых, в тех же возрастных группах, получаются коэффициенты 6,7—7,8,—8,6, для женатых—3,8—4,2—4,9. Получившийся при рассмотрении материала в нерасчлененном виде парадоксальный вывод был результатом различий в семейном составе возрастных групп: состояние в браке оказывает благоприятное влияние на условия жизни и понижает смертность.—Если же путем расчленения по семейному состоянию устранить влияние этого фактора, получается, опять-таки, то, чего и следовало ожидать: смертность повышается с переходом к старшим возрастным группам.

Или вот еще один пример, более нам близкий. По данным за пятилетие 1907—1911, сведенным С. А. Новосельским, смертность в городах России (27,9 на тысячу) заметно ниже, чем в уездах (31,4 на тысячу). По справедливому замечанию этого автора, эта разница «не может быть поставлена в зависимость от более благоприятных для выживаемости населения условий ... в русских городах, но опять, главным образом, стоит в связи с своеобразным возрастным составом» нашего городского населения. Своеобразие это ясно из следующих цифр (по переписи 1897 г.):

на 1.000 душ

В возрасте	В городах	В сельских местностях.
6— 9 л.	196	284
10—19 „	201	215
20—59 „	537	429
60 и выше	65	71

И, в самом деле, при расчленении по возрастным группам коэффициенты смертности оказываются:

В возрасте	В городах	В сельских местностях
0— 1 г.	265	267
1—19 л.	18	21
20—39 л.	9,4	8,3
40—59 л.	21	17
60 и выше	67	60,

— при надлежащем расчленении ничтожный перевес сельской смертности в детском и юношеском возрасте более чем покрывается перевесом городской в зрелом и старших возрастах.

Из этих примеров достаточно ясно видно — а всякому, работавшему в области статистики и без них достаточно известно, к каким существенно искажающим действительность результатам может привести суммарная разработка нерасчлененного или недостаточно расчлененного материала, в котором слиты частные совокупности, в большей или меньшей мере неоднородные в отношении изучаемого явления или признака. Только при целесообразном расчленении материала, принимая в расчет все существенные для данного явления или для статистически анализируемой зависимости между явлениями признаки и находящие себе выражение в них, нередко взаимно перекрещивающиеся и маскирующие друг друга, условия, можно надеяться прийти к правильным выводам и раскрыть обнаруживающиеся в массах численные соотношения—внешнее выражение проявляющихся в больших числах причинных зависимостей.

В главе 2—ой, посвященной методам статистического умозаключения и, в частности—способам заключения о раскрываемых статистическим путем причинных зависимостях, мы с достаточною степенью подробности показали, что именно такое расчленение, техническим средством которого являются групповые и в особенности комбинационные таблицы, является если не единственным (метод параллельных рядов!), то во всяком случае—наиболее совершенным из доступных для статистики способом раскрытия причинных зависимостей между явлениями и признаками. Целью группового и комбинационного анализа является именно разложение статистического материала на однородные группы. Строгая однородность является тем идеалом, к которому должен стремиться статистик. „Естественно—говорит Борткевич—продолжать“ расчленение до тех пор, пока удастся получить строго однородные группы. При дальнейшем расчленении они „давали бы одинаковые коэффициенты (чем, конечно, не исключаются колебания, обусловливаемые действием „случайных причин“), и установленным для таких однородных групп коэффициентам можно было бы приписать окончательное значение“. Однако, как мы видели в той же главе, тот же Борткевич детально и неопровержимо доказал в своей немецкой работе „Die statistischen Generalisationen“, в значительной мере воспроизведенной им в русской статье „О статистической закономерности“, что „полное тождество всех факторов, за исключением того, влияние которого в данном случае подлежит исследованию, не может быть достигнуто в статистической области никаким расчленением материала“. Я не буду возвращаться здесь к тому детальному анализу, в частности, вопроса о причинах бездетных браков, на котором Борткевич показывает справедливость такого заключения. Но—рискуя некоторым повторением, напомню, что такая невозможность добиться не только строго, но даже хотя приблизительно однородных групп—это факт, с которым приходится считаться всякому, кто работает статистическим методом, и коренная причина той

некоторой шаткости, которою всегда страдает всякое статистическое умозаключение, главный источник тех особенностей, которые отличают статистически-установленную закономерность от полученного индуктивным путем естественного закона. Как бы далеко ни было проведено — в пределах обусловленной характером статистической техники и в частности, невозможностью построения комбинационных таблиц иначе, как по сравнительно небольшой части влияющих на каждое данное явление моментов каузального характера, расчленение материала, оно может привести лишь к некоторой, очень приблизительной однородности групп—однородности лишь по некоторому, небольшому числу так или иначе выделенных основных признаков, при чем, в виде общего правила, и сами эти признаки, либо по самому своему существу, либо по способу их статистического выражения, таковы, что не обеспечивают полной однородности групп даже по отношению к самим этим, принятыми в рассчет при группировках, признакам. Остается затем не поддающееся учету число второстепенных или принимаемых за второстепенные признаков; остается бесчисленное множество разновидностей и оттенков даже тех немногих признаков, которые приняты в расчет при наших группировках,—признаков и оттенков, совокупное влияние которых является источником разнородности отдельных случаев и подгрупп даже и внутри получившихся при расчленении групп, которые, таким образом, лишь условно принимаются нами за однородные.

Статистик, повторяю, не в состоянии достигнуть идеального расчленения. Но он всегда стремится к возможно далеко идущему расчленению. При этом, однако, вопрос о числе наблюдений не только не снимается с очереди—наоборот: если статистик не может поставить своим руководящим принципом, просто, «возможно большее» число наблюдений; если он, напротив, обязуется стремиться к расчленению имеющегося в его распоряжении материала по более мелким группам, то тем большее значение приобретает вопрос: что же такое, собственно, масса, в частности социальная масса? Какая масса, какое количество наблюдений должно иметься в распоряжении исследователя, чтобы дать ему право опираться на закон большого числа? Этот вопрос имеет существенное практическое значение: если не прийти к тому или иному его решению, мы всегда рискуем либо дойти до слишком мелких групп—и тогда мы подвергаемся опасности сделать относящиеся к существу вопроса выводы из случайных, в действительности, колебаний цифр, или, наоборот, из-за случайных колебаний оказаться не в состоянии уловить скрывающиеся за ними существенные различия или изменения статистических коэффициентов; либо, напротив,—остановиться в нашем анализе на слишком больших группах, тогда наши группы будут слишком уже неоднородны, и задача расчленения материала не будет

выполнена в той мере, в какой это было бы не только методологически желательно, но и технически осуществимо. И в конечном результате, „пока вопрос о необходимом числе наблюдений не получил определенного разрешения, до тех пор статистика отдана во власть известному диллетантизму, и только большой навык и осторожность в обращении с цифрами могут предохранить исследователя от ложных заключений" (Вестергорд). И сейчас же скажу: статистика, так-таки, отдана, в данном отношении, во власть известному диллетантизму, и в этом отношении, как и во многих других, последним прибежищем статистика так-таки являются его навык и осторожность в обращении с цифрами.

Это, однако, не значит, чтобы для вопроса о необходимом числе наблюдений не существовало математического решения. Оно, напротив, очень просто, непосредственно вытекает из формулы Бернулли-Лапласа. Смысл ее мы знаем: при достаточно большом числе испытаний или наблюдений мы можем с определенною, весьма высокою, степенью вероятности утверждать, что частота данного события не уклонится от его вероятности дальше известного предела, съуживающегося по мере увеличения числа наблюдений, находящего себе выражение в формуле $\pm\gamma\sqrt{\frac{2pq}{s}}$, или, в обычном в статистике случае, когда мы не знаем априорной вероятности,—в получающейся путем подстановки $\frac{m}{s}$ вместо p формуле $\pm\gamma\sqrt{\frac{2m(s-m)}{s^3}}$; или иначе говоря—можем, с достаточною степенью достоверности, рассчитывать на определенную степень точности результата. Отсюда обратная задача: требуется получить, с известною степенью достоверности, результат определенной степени точности, или, иначе говоря, с заданною наперед вероятностью P получить результат, отклоняющийся от истинного не дальше пределов $\pm\gamma\sqrt{\frac{2pq}{s}}$ или $\pm\gamma\sqrt{\frac{2m(s-m)}{s^3}}$. В таком случае легко вычислить нужное для этого минимальное число наблюдений s. Или иначе говоря: достаточно задать себе определенную численную величину предела отклонения частоты от вероятности, иначе сказать, определенную степень точности ожидаемого результата, и определенную вероятность того, что результат не выйдет из намеченных пределов, чтобы быть в состоянии вычислить минимум числа наблюдений, при котором, с данною степенью уверенности, можно будет рассчитывать на данную степень точности результата; вычислить, сколько нужно наблюдений, чтобы с вероятностью 0,9, или 0,99, или 0,999 рассчитывать на то, что отклонение частоты $\frac{m}{s}$ от вероятности p не превысит, положим, $^1/_{50}$, или $^1/_{200}$, или $^1/_{1000}$.

Способ решения этой задачи [1]) покажем сначала на частном численном примере, с тем, чтобы от него перейти к общей формуле решения вопроса.

Изучаются два противуположных события с вероятностями $^1/_5$ и $^4/_5$. Требуется найти минимальное число наблюдений s, необходимое, чтобы с вероятностью $P = 0{,}99$ рассчитывать на то, что отклонение частоты $\frac{m}{s}$ от вероятности p не превысит, в ту или другую сторону,

$$\pm\frac{1}{200}.$$

Итак, допустимое отклонение $\frac{m}{s}$ от p, которое обозначаем через $l, = \frac{1}{200}$. Но

$$l = \gamma\sqrt{\frac{2pq}{s}} \text{ и след. } \gamma\sqrt{\frac{2pq}{s}} < \frac{1}{200}.$$

По заданному нами себе $P = 0,99$ отыскиваем соответствующую ему $\gamma = 1.822$. Подставляем это значение γ, а также данные значения вероятностей p и q в только-что изображенное неравенство, — получаем

$$1.822\sqrt{\frac{2.\,{}^1/_5.\,{}^4/_5}{s}} < \frac{1}{200}.$$

Возводя обе части неравенства в квадрат, получаем:

$$(1.822)^2\,\frac{2.\,{}^1/_5.\,{}^4/_5}{s} < \left(\frac{1}{200}\right)^2$$

Отсюда, перенося все известные величины в правую часть неравенства, получаем:

$$\frac{1}{s} < \frac{\left(\frac{1}{200}\right)^2}{(1.822)^2\,2.\,{}^1/_5.\,{}^4/_5},$$

откуда прямо вытекает обращенное неравенство

$$s > \frac{2.\,{}^1/_5.\,{}^4/_5\,(1.822)^2}{\left(\frac{1}{200}\right)^2}$$

—обращенное в отношении знака потому, что если дробь $^1/_4$ **меньше** другой дроби $^1/_2$, то знаменатель первой дроби, 4, напротив, **больше** знаменателя второй, 2; так же точно, если дробь $^3/_5$ **меньше** дроби $^2/_3$, то обращенная дробь $^5/_3$ или $1^2/_3$ **больше** обращенной дроби $^3/_2$ или $1^1/_2$.

[1]) См. у А. А. Маркова, Исчисл. вероятн. 3-е изд., стр. 74-75.

Выполняя соответственные действия, получаем:

$$s > \frac{2.4.3{,}32.40000}{25}$$

или

$$s > 42496.$$

Общая формула получается так:

Из задания

$$\gamma\sqrt{\frac{2pq}{s}} < \varepsilon ,$$

получаем

$$\gamma^2 \frac{2pq}{s} < \varepsilon^2$$

откуда, перенося все известные члены в правую часть,

$$\frac{1}{s} < \frac{\varepsilon^2}{\gamma^2 2pq},$$

или, обращая это неравенство:

$$s > \frac{2pq\gamma^2}{\varepsilon^2}$$

Для лучшего усвоения этой формулы полезно решить несколько примеров, вроде следующих:

1. Вероятность данного события $^1/_4$, предел допустимого отклонения частоты от вероятности $\varepsilon = {}^1/_{200}$; найти число наблюдений s, достаточное, чтобы рассчитывать на такую степень точности с вероятностью 0,9 — 0,95 — 0,995 — 0,99998.

2. Вероятность события $^2/_5$. Требуется найти такое число наблюдений s, при котором, с вероятностью 0,95, можно было бы рассчитывать, что отклонение ε не выйдет из пределов $^1/_{20}$, 0,01, 0,001.

Приведу несколько характерных цифр, получающихся, на основании приведенной формулы, для разных степеней точности, выражаемых пределом отклонения ε, и для разных степеней достоверности результата, выражаемых вероятностью P.

При тех же вероятностях $^1/_5$ и $^4/_5$ и при том же $\varepsilon = {}^1/_{200}$, различные степени достоверности результата будут достигнуты при таких числах наблюдений:

при $P = 0{,}9$	$\gamma = 1{,}164$	$s >$	17280
» 0,95	» 1,386	»	24576
» 0,99	» 1,822	»	42496
» 0,995	» 1,985	»	50432
» 0,999	» 2,327	»	69248
» 0,9995	» 2,461	»	77568
» 0,9999	» 2,75	»	96768

Наоборот, при заданной вероятности результата $P = 0{,}999$, и следовательно, при $\gamma = 2{,}327$, различным степеням точности, характеризуемым различными пределами ε, будут соответствовать такие минимальные числа наблюдений:

при $\varepsilon = {}^1/_{10}$ $s = 173$
» $\varepsilon = {}^1/_{20}$ $s = 692$
» $\varepsilon = {}^1/_{50}$ $s = 4325$
» $\varepsilon = {}^1/_{100}$ $s = 17312$
» $\varepsilon = {}^1/_{500}$ $s = 432500$

Из приведенных в виде примера цифр дополнительно уясняется, во 1-х, какое сравнительно небольшое число наблюдений нужно для получения результатов, степень точности которых удовлетворяет самым строгим требованиям, могущим быть предъявленными к статистическому анализу: уже при 40 тысячах наблюдений такая степень точности достигается с вероятностью 0,99, при 65 тысячах—с вероятностью 0,999, т. е. почти с практическою достоверностью; и во-2-х, каких совсем ничтожных чисел наблюдений достаточно для получения таких приближенных результатов, какие характеризуются теоретически возможными пределами отклонений ${}^1/_{10}$ или ${}^1/_{20}$, — и даже еще более тесными пределами, если удовольствоваться меньшею степенью достоверности результата, т. е. меньшим P. Между тем, в статистике, в виду плохого качества материала, а нередко и по характеру подлежащих разрешению вопросов (установление тех или других общих тенденций по отношению к явлениям, самое существо которых исключает возможность установления более точных закономерностей!), сплошь и рядом нет ни возможности, ни надобности идти дальше такой, в самом деле, слабой степени точности, — представляется вполне возможным и даже неизбежным довольствоваться выводами, носящими характер более или менее грубого приближения. Но это второе положение имеет и свою обратную сторону: оно лишний раз свидетельствует о необходимости большой осторожности в выводах, получаемых из таких небольших чисел, как сотни или немногие тысячи наблюдений; пределы случайных отклонений измеряются здесь целыми процентами, а потому выводы, какие вытекали бы из небольших различий в статистических коэффициентах, — из различий, например, в 1—2%, а тем более в долях процентов, должны быть принимаемы с большою осторожностью. Известное доверие к ним можно питать только в том случае, когда аналогичные, хотя и слабые, различия подтверждаются многократными, проверяющими друг друга наблюдениями.

Принципиальное значение получающихся из решений этой „задачи“ результатов, таким образом, очень существенно. Иное следует сказать относительно значения такого рода вычислений для научной практики. Действительность показывает нам, что к такого рода вычислениям прибегают, главным образом, в таких отраслях прикладной

статистики, как страховое дело и т. п., где, с одной стороны, недостаточно надежные заключения из статистических цифр могут повести за собой материальный существенный ущерб, и где, с другой стороны, есть основание предполагать чисто-случайный или близкий к случайному характер отклонений, где, притом (как в страховании жизни) оперируют над материалом весьма высокой степени точности. В обычной, в частности, в научной статистической практике к такого рода вычислениям прибегают—сколько мне известно—весьма редко. И это—как мне приходилось указывать в другом месте—не только в виду некоторой обременительности вычислений или по малой вообще распространенности приемов математической статистики, но и в силу соображений более принципиального характера. Дело в том, что, ведь, все формулы и приемы, вытекающие из теоремы Бернулли-Лапласа, сохраняют силу лишь при наличности тех предпосылок, из которых исходит эта теорема,—из которых исходит, вообще, исчисление вероятностей. В сфере статистической действительности, и в особенности в сфере социальной статистики, этих предпосылок, в виде правила, налицо не оказывается, а потому и вычисления рассматриваемого характера, сохраняя все свое принципиальное значение, утрачивают если не всю, то значительную долю своего значения, как количественной меры достаточности или недостаточности числа наблюдений для получения, с определенною достоверностью, результатов определенной степени точности. И это, в особенности, потому, что точность результатов в гораздо большей мере может страдать от недостаточной полноты и точности материала, нежели от тех случайных отклонений, которые только и имеются в виду при данного рода вычислениях[1]).

[1]) Для иллюстрации приведу интересные соображения по данному вопросу, приводимые в общем очень содержательной статье С. Широкогорова—«Задачи антропологии в Сибири», помещенной в сборнике Музея антропологии и этнографии при Имп. Академии Наук, т. III, 1915: «Приближения эмпирической кривой к теоретической,—говорит г. Широкогоров—для антропологии, как не изучающей характер математического выражения кривой, конечно, не нужны; для антрополога важно только установить приблизительную характеристику данной группы, выраженную величинами «M и σ» (арифметическая средняя и среднее квадр. отклонение) и наиболее резкими колебаниями кривой». С другой стороны, хотя теория вероятностей и дает возможность вычислить пределы, в которых могут колебаться частоты наблюдений по рядам, но пределы эти настолько велики, что мы безусловно не можем воспользоваться результатом вычисления, а при небольшом числе N — дать ответ, случайна-ли кривая, или она воспроизводит действительный характер отношения рядов в данном признаке данного населения». Практический способ решения вопроса — «получить вторую кривую на том-же материале; если вторая кривая мало отличается от первой, то количество наблюдений можно признать достаточным; если же различия существенны, то можно утверждать, что количество наблюдений ... безусловно недостаточно»; вообще, «установить достаточность количества наблюдений для оценки того, случайны или неслучайны колебания рядов и точны ли σ и M, возможно только эмпирическим путем», — приходится «условиться» о некотором допустимом проценте отклонения» (Широкогоров, l. c., стр. 19-21).

Поэтому, в обычной практике научного статистического анализа, исследователь, при оценке степени твердости и достоверности своих выводов, поскольку таковая зависит от достаточности или недостаточности числа наблюдений, опирается главным образом—как выше было уж подчеркнуто со ссылкою на Вестергорда—на навык и осторожность; он исходит из известного «статистического такта», из некоторого «чувства цифры», не прибегая к более точным, на вид, способам определения степени достаточности числа наблюдений, — способам, которых точность, при отсутствии соответственных предпосылок, была бы мнимою или фиктивною. Он судит, прежде всего, по характеру полученных результатов, — по проявляющейся в получившихся рядах чисел правильности, по их внутреннему смыслу. Если ему удается обнаружить определенную и притом разумную правильность, — разумную в смысле соответствия реальному характеру изучаемого явления,—тем самым в положительном смысле разрешается и вопрос о достаточности числа наблюдений. Если правильности не обнаруживаются, или результат получается несообразный — пред исследователем стоит альтернатива: либо, так-таки, отсутствия правильности или несоответствия его предположений представлениям о действительном характере явления — либо недостаточности числа наблюдений. Из этой альтернативы исследователь, иногда, и не находит выхода, — сплошь и рядом он находит его при помощи тех или других проверочных приемов. Если ему удается собрать больший по объему материал, он проверяет свои выводы (или свое отсутствие выводов) на нем. Если, при этом, из большего материала получаются выводы иного характера—более отчетливо выраженные правильности, притом более рациональные по своему смыслу, — это значит, что он раньше располагал недостаточным материалом; если больший материал приводит его к тем-же, противоречащим его представлениям о действительных соотношениях явлений, выводам, — это значит, что число наблюдений раньше было достаточно, но что представления исследователя о действительном характере явлений не выдерживают критики статистических фактов; если и из большего как и из меньшего по объему материала не получается определенных выводов, — значит, дело тут, опять, не в недостаточности числа наблюдений, а в отсутствии искомой правильности или зависимости[1]). С этим

---

[1]) Примеры применения такого способа критики выводов с точки зрения «достаточно» или «недостаточно» больших чисел мы находим и у математиков. Так напр. Пуассон устанавливает факт устойчивости цифр уголовной статистики для всей Франции при неустойчивости их для отдельных департаментов. «Это показывает— говорит он, что в районе одного суда годичное число уголовных процессов не достаточно для того, чтобы неправильности вердиктов присяжных могли балансироваться и чтобы отношение числа оправданий к числу осужденных достигало устойчивости» (Recherches, стр. 16-17).

приемом сплетается и другой, гораздо более употребительный прием, выработавшийся чисто-практическим путем, но равным образом находящий себе принципиальное обоснование в началах теории вероятностей. Из этих последних, и, в частности, из формул теоремы Бернулли-Лапласа, вытекает, как мы знаем, то следствие, что результат, полученный из характеризующих известную массу, достаточно больших чисел, не может сколько-нибудь существенно отличаться от тех результатов, которые получатся для достаточно больших частей этой массы. В самом деле: ведь выражаемая вероятностью P и разницею ε достоверность и точность результата почти те же, а практически могут быть рассматриваемы как тождественные, при 300 и 100 тыс., при 100 и 50 тыс., — если довольствоваться обычным более грубым масштабом, то даже при 20 и при пяти тысячах наблюдений или испытаний. При этом дело совершенно не меняется от того, имеем ли мы дело с однородными *отдельными* друг от друга массами разной величины, или с *целою* массой и ее достаточно большой *частью*. Следовательно, если и *целое*, и *части* достаточно велики, то полученные статистические коэффициенты должны быть приблизительно одинаковы и выражающиеся в характеризующих целое цифрах правильности должны более или менее точно воспроизводиться в цифрах, характеризующих части этого целого. Равным образом, и полученная для достаточно большой части правильность должна, конечно, воспроизводиться в целом. «*Правило* — говорит Зигварт — можно, вообще, принять там, где средняя большого целого повторяется в том же виде или лишь с незначительными отклонениями в меньших областях, которые суть его части»,—и, конечно, не только средняя, но и колебания цифр данного статистического ряда. И, таким образом, указания теории вероятностей и в данном частном случае, как и везде, всецело совпадают с указаниями логики и здравого смысла, которые «чувство цифры» подсказывает всякому опытному и осторожному статистику.

Для практики—абстрактно рассуждая—из сказанного вытекает два одинаково законных пути: один—присоединение к ранее имевшимся в виду новых групп наблюденных фактов,—иначе говоря, проверка получившегося вывода на целой массе бо́льшего состава, в которую ранее имевшаяся в виду масса входила бы как часть; другой—проверка вывода, получившегося для целой массы, на коэффициентах, получающихся при разбивке ее на достаточно большие части. *Первый* из этих приемов, понятно, далеко не всегда может найти себе применение, потому что далеко не всегда есть возможность соответственно расширить поле наблюдения при соблюдении необходимого условия—*однородности* частей получающейся при расширении рамок наблюдения большей массы. *Второй*, напротив, технически осуществим всегда, потому что всякую массу можно так или иначе разбить на части: по существу его границей применимости является тот случай, когда вся

масса в целом достаточно велика для получения характерных цифр, отражающих общие причины, но не достаточно велика для того, чтобы ее можно было разбить на достаточно большие части. И вот, если при проведенной тем или другим, обычно, значит, вторым путем, проверке получаются тождественные или близкие коэффициенты, тождественные или близкие по своему характеру правильности колебаний цифр,—это значит, что характеризуемая данными статистическими коэффициентами масса достаточно велика, и что в этой массе достигнуто уравновешение случайных причин; с другой стороны, такого рода совпадение выводов, полученных для целого и для частей, свидетельствует и о том, что данный статистический коэффициент или данная правильность в колебаниях статистического ряда, в самом деле, характерны для данного явления. Иначе сказать, рассматриваемым проверочным приемом достигаются сразу две цели: с одной стороны разрешается вопрос о достаточности или недостаточности числа наблюдений, и с другой выясняется, выражают ли полученные для более или менее значительной массы коэффициенты или правильности действительно характерное свойство данного явления, действительно характерную для него зависимость между различными признаками, или же являются чисто арифметическим выводом из разнохарактерных чисел,—выводом, не могущим претендовать на самостоятельное значение. Или, говоря еще иначе—проверка в отношении достаточности числа наблюдений сплетается с проверкой в отношении однородности изучаемой массы по отношению к данному признаку или к данной зависимости между признаками. Если из целого и из частей получаются тождественные или близкие коэффициенты, тождественные или близкие правильности,—значит, во-1-х, подвергнутая изучению масса достаточно велика, и во-2-х, эта масса в отношении данного признака или данной зависимости между признаками достаточно однородна. Если выводы, полученные для целого, существенно расходятся с выводами, полученными для частей,—исследователь, опять-таки, стоит перед альтернативой: или число наблюдений недостаточно для получения твердых результатов,—или масса слагается из неоднородных в данном отношении частей, а следовательно полученный для целого вывод, во всяком случае, не отражает собою действительно характерного для данного явления соотношения между вещами. Иногда исследователь так и остается стоять перед этою альтернативою,—иногда он находит из нее тот или другой выход. Последнее имеет место, в особенности, в том случае, если рассматриваемого рода проверка производится в отношении не одного, а нескольких признаков или зависимостей: если расхождение в выводах для целого и для частей получается для всех подвергнутых анализу признаков или зависимостей между признаками,—альтернатива либо остается открытою, либо разрешается, скорее, в смысле недостаточности числа наблюдений; если расхождение обнаруживается лишь по некото-

рым признакам или в отношении лишь некоторых зависимостей, а для других получается совпадение,—это доказывает, что масса достаточно велика для твердо-обоснованных выводов, и что она в то же время однородна в отношении одних, но не однородна в отношении других признаков или зависимостей между признаками. Возьмем только один из приведенных мною в другом месте [1]) примеров: цифры, характеризующие зависимость между составом семьи и посевною площадью в Уфимской губернии. В возрастающих посевных группах средний состав семьи выразился такими цифрами: для всей губернии—4,3—4,7—5,5—6,5—7,9; для отдельных уездов: Белебеевского 3,9—4,6—5,3—6,2—7,5, Уфимского 4,8,—5,1—5,7—6,8—8,2, Стерлитамакского—4,2—4,9—5,8—6,7—8,3 и т. д. Зависимость между посевною площадью и размером семьи обнаруживается, значит, в тождественном направлении и, приблизительно, с одинаковою силой, и по целой губернии, и по отдельным уездам; значит, эта зависимость представляет собой явление в самом деле характерное для крестьянской семьи в Уфимской губернии, и значит, в то же время, и губерния, и уезды представляют собой достаточно большие массы. Но различия в среднем размере семьи, обнаруживающиеся при сравнении цифр, занимающих одинаковые места в поуездных рядах, т. е. относящихся к одним и тем же посевным группам, не могут быть отнесены на счет недостаточности числа наблюдений,—эти различия свидетельствуют о существовании каких-то реальных различий в условиях, определяющих состав семьи в разных уездах Уфимской губернии.

Обычно такого рода проверочная разбивка изучаемых масс на части производится по признакам времени и пространства: выводы, относящиеся к стране, проверяются на порайонных или погубернских, выводы, относящиеся к губернии—на поуездных цифрах; для проверки выводов, полученных для целого периода, служат рассматриваемые отдельно погодные цифры и т. п. Но так как целью такой разбивки целого на части, попутно с разрешением вопроса о достаточности числа наблюдений, оказывается, как мы только-что выяснили, и уловление степени однобразия данной массы в отношении данного признака или данного соотношения между признаками, или напротив—обнаруживающихся внутри ее различий, то разбивка целого на части очень часто производится и по всякого рода иным признакам, могущим обнаружить то или другое влияние на данный признак или на данное соотношение признаков.

Так или иначе—будем ли мы разбивать изучаемую массу на части по признакам времени либо пространства, или по какому-либо факториальному признаку — проверка в отношении достаточности числа наблюдений всегда сплетается, и нередко неразрешимо сплe-

[1]) Теория и методы статистики, 3-е изд. стр. 93.

тается, с проверкой в отношении однородности изучаемой массы, или, что то же — с расчленением массы в целях каузального анализа. В чистом виде проверка в первом из указанных направлений получается только при чисто механическом отборе известной части случаев, составляющих изучаемую массу. При таком отборе достаточно большое число наблюдений гарантирует чисто случайный характер проявляющихся в отдельных случаях или единицах различий, а следовательно и уравновешение их в большом числе. Если, поэтому, механически-отобранная часть случаев, составляющих данную массу, дает иные коэффициенты, или иные соотношения, нежели какие получились для целой массы — этого различия уже нельзя отнести на счет какой-либо разницы в постоянных причинах, иначе говоря — на счет неоднородности изучаемой массы, а приходится отнести на счет недостаточности числа наблюдений: недостаточности, во всяком случае, в отобранной части — очень вероятной и во всей изучаемой массе, взятой в целом. И в этом случае, значит, ответ на вопрос получается не вполне определенный, и опять приходится сослаться на чутье, на «чувство цифры», которое подскажет статистику, должен ли он совершенно отвергнуть получившийся для целой массы вывод, или только считать его не вполне прочно обоснованным.

Дальнейший, до некоторой степени соприкасающийся с последними из только-что изложенных соображений, весьма важный для статистической методики вывод, сам собою вытекающий из того принципа, что статистические результаты, получаемые из большой массы наблюдений, не могут существенно отличаться от результатов, какие могут быть получены для достаточно больших частей этой массы, — это принцип выборочного исследования. Я не имею в виду подвергнуть здесь вопрос о выборочном исследовании всестороннему рассмотрению,—в частности совершенно не буду касаться его техники, а рассмотрю этот вопрос только с чисто принципиальной стороны, и, главным образом, постольку, поскольку принцип выборочного исследования опирается на существо и на математическую формулировку закона большого числа[1]).

Существенный смысл выборочного метода—напоминаю читателю—состоит в том, что это — не сплошное, но, все-таки, массовое исследование, результаты которого признаются «репрезентативными»—способными «репрезентировать»—представлять собою, характеризовать не только непосредственно подвергнутые наблюдению случаи, но и всю ту массу в целом, из которой эти случаи отобраны; и эта репрезентативность достигается не проводимым соответственно какому-либо

[1]) См. А. А. Чупров, Выборочное исследование (Труды подсекции статистики XII съезда естествоиспыт. и врач.) Моя книга «Теория и методы статистики», 3-е изд. стр. 94—98 и 420—427. Моя статья «К вопр. о выборочн. исследовании» в Известиях Имп. Русск. Географ. Общества за 1911 год.

вытекающему из существа дела принципу отбором «типичных» случаев или групп (как это имеет место при монографическом исследовании), а достаточно большим числом взятых в выборку и подвергнутых наблюдению единиц или случаев, гарантирующих полученный из совокупности этих случаев результат против случайных отклонений от характерного для массы в целом общего вида или типа. И именно это последнее обстоятельство — роль большого числа, как гарантии репрезентативности, дает нам право признавать выборочное исследование за прием истинно-статистического исследования, в противуположность методу монографическому, который не опирается или лишь косвенным образом (поскольку результаты монографического исследования проверяются путем сопоставления с результатами сплошного или выборочного учета) опирается на закон большого числа и который, поэтому, является, принципиально, чем-то отличным от подлинного статистического наблюдения.

Принципиальное оправдание выборочного метода, как приема исследования, опирающегося на закон большого числа и вместе с ним — на принципы теории вероятностей, после всего изложенного в настоящей главе и в особенности на последних нескольких страницах, совершенно ясно и не требует каких-либо пространных соображений; если коэффициенты и соотношения, получаемые для достаточно больших частей достаточно большой массы, в том числе,—добавлю я сейчас же, забегая этим несколько вперед—и для больших частей случаев или единиц, подвергнутых механическому отбору, должны быть близки к коэффициентам или соотношениям, полученным или могущим быть полученными для целой массы, то из этого непосредственно вытекает, что для получения характеризующих массу в целом коэффициентов или соотношений можно ограничиться достаточно большой частью случаев или единиц и полученные из наблюдения такой части перенести на массу в целом. Я не имею надобности приводить здесь и каких-либо конкретных данных в подтверждение того, также могущего предполагаться известным читателю факта, что применимость выборочного метода и, в частности — фактическая близость получаемых выборочным путем коэффициентов к получаемым для всей массы в целом, их «репрезентативность», в достаточной мере проверена эмпирически,— сошлюсь, в этом отношении, только на примеры, приведенные А. А. Чупровым в его речи о «Выборочном исследовании» и в моих: книге «Теория и методы статистики» и статье «К вопросу, о выборочном исследовании».

Но, конечно, выборочный метод, опирающийся на закон большого числа, применим именно только в достаточно большом числе: большом числе как в смысле общего объема изучаемой массы, так и в смысле объема той части, которая непосредственно подвергнута статистическому учету и которая должна «репрезентировать» всю

массу. А отсюда, неизбежно возникает вопрос о числе или доле случаев или единиц в отобранной для непосредственного наблюдения или учета части случаев; вопрос, что такое достаточно большая часть случаев, — при каком числе или какой доле случаев, поступивших в подвергнутую учету выборку, полученные для этой части случаев коэффициенты будут, в самом деле, «репрезентативными», — будут, в самом деле, «весьма мало» или, во всяком случае, достаточно мало отличаться от чисел, полученных или могущих быть полученными для всей массы в целом.

Вопрос этот имеет за собою некоторую литературную историю, главнейшими этапами которой в русской статистической литературе являются уже названные выше: речь А. А. Чупрова «Выборочное исследование» и мой доклад «К вопросу о выборочном исследовании». Сущность возникшей по данному вопросу контроверзы сводится к следующему: вопрос о числе выборочно учтенных случаев, достаточном для того, чтобы дать нам право признать результаты выборочного исследования «репрезентативными», сам собою напрашивается на математическое решение. Статистики-математики, в том числе, главным образом, Bowley, разрешают его именно таким математическим путем, исходя из Гауссова закона случайных ошибок или, что в данном вопросе то-же самое—из формулированного в теореме Бернулли-Лапласа закона случайных отклонений, в силу которого «вероятная ошибка средней будет убывать» и, значит, точность результата возрастает, «с ростом числа взятых экземпляров в отношении обратной пропорциональности корню квадратному из него» (А. А. Чупров); разрешают его, значит, как частный случай той второй «задачи», которую мы рассматривали в непосредственно предшествующей части этой главы: найти число наблюдений или испытаний, достаточное для получения, с достаточною степенью достоверности, результата определенной, достаточной степени точности. При этом—как подчеркивает А. А. Чупров—и как, на первый взгляд, естественно следует из изложенного выше способа решения общей задачи, важно именно абсолютное число взятых на выбор случаев, — «а какую долю взятые экземпляры составляют по отношению ко всей массе, $^1/_{10}$ или $^1/_{100}$, или $^1/_3$,—безразлично»; точность результата при отборе 500 случаев будет одинакова, будут ли эти 500 отобраны из 5200 или из 5201 случаев. Как, с другой стороны, подчеркивает А. А. Чупров, разработка метода Bowley[1])—как он

[1]) Е. Е. Слуцкий, в весьма содержательной рецензии на мою книгу «Теория и методы статистики», высказывает сомнение в правильности термина «метод Bowley». „Пользование принципом составления выборки из чисто случайных, выхваченных индивидов — говорит он — мне кажется неправильным называть «методом Bowley», что пошло у нас в ход, повидимому, с легкой руки А. А. Чупрова. . . Это — единственный способ выборочного исследования, подсказываемый исчислением вероятностей, и известен он давно, во всяком случае, мы находим его уже у Лапласа («Статистика и математика», Стат. Вестн. 1915-16 кн. 3-4, стр. 116-117 примеч.). Я тоже сомне-

называет математический прием решения вопроса о числе поступающих в выборку случаев — еще далеко не закончена; в частности, она не закончена в одном, для статистической практики первостепенно-важном отношении: статистические массы нередко, а социальные массы более или менее всегда, разнородны и пестры, — отсюда необходимость «таких способов работы, которые стремятся предварительно разбить изучаемую массу на более однородные части, и лишь в пределах таких частей ставят исследование на почву выборочного метода». Этот — как его называет А. А. Чупров — «вариант» выборочного метода «недостаточно разработан теоретически, и условия, при которых он представляется целесообразным, не вполне выяснены».

Формулированные мною сомнения относительно значения „метода Bowley“ и вообще — математических приемов определения достаточного для выборки числа наблюдений, вытекают, прежде всего, из тех общих соображений относительно применимости формул и методов исчисления вероятностей, которые будут подробно изложены в одной из следующих глав: они сводятся к тому, что в сфере практического применения выборочного метода, в частности в области явлений социальной жизни, не имеется налицо обязательных предпосылок применения исчисления вероятностей: равновозможности, постоянства и независимости; напротив, общим правилом представляется чрезвычайное разнообразие действующих как в отдельных случаях, так и в частных совокупностях, комплексов причин, проявляющаяся в самых разнообразных формах и сплетениях взаимная зависимость между отдельными случаями и группами случаев. В применении собственно к выборочному методу к этим общим соображениям присоединяются, однако, еще и некоторые специфические сомнения. Прежде всего, метод Bowley, по признанию самого А. А. Чупрова, еще далеко не вполне разработан,—это скорее идея метода, нежели готовый метод, как совокупность готовых приемов научной работы. Сам Чупров еще ожидает от него „рецептов, которым могли бы довериться лица, не владеющие математическими основами теории“, в современном его виде этот метод не пригоден для лиц без специальной математической подготовки, которых и сам Bowley определенно предостерегает против его применения. Гораздо важнее, однако, другое: именно то, что в настоящем виде метод Bowley возбуждает и серьезные принципиальные сомнения, не зависимые от индивидуальной

ваюсь в том, чтобы термин «метод Bowley» был исторически правилен, и удерживаю его только в виду совершенной неважности такого рода чисто терминологических разногласий. Но в замечании Е. Е. Слуцкого, мне кажется, есть недоразумение; сколько я понимаю, А. А. Чупров обозначает этим термином вовсе не принцип составления выборки из случайно-выхваченных индивидов, а основанный на определении средней или вероятной ошибки способ определения числа наблюдений, определяющего репрезентативность результата выборочного исследования. Как мы увидим ниже, Е. Е. Слуцкий и сам говорит о «методе Bowley» или о том, что А. А. Чупров, а за ним и я, обозначаем этим термином, именно в этом, только-что поясненном, смысле.

подготовленности или неподготовленности применяющих его лиц. В основе его лежит, как я отметил, абсолютное число случаев,—и мы, в самом деле, видели выше, что решение той „второй задачи", по отношению к которой метод Bowley представляет собой один из частных случаев, приводит к тем или другим абсолютным числам. Но—как определенно подчеркивает, например. А. А. Марков в своем „Исчислении вероятностей" [1]), получающееся абсолютное число есть лишь некоторый минимум, ниже которого нельзя спуститься, если желают получить результат определенной степени точности и достоверности: полученное число n—подчеркивает А. А. Марков—не является само достаточным,—искомая вероятность P будет иметь место „при величинах n, незначительно превосходящих" полученные по приведенной на стр. 333 формуле. Как минимум, полученное методом Bowley абсолютное число, может быть, имеет известное значение,—как минимум, при отсутствии которого выборочное исследование, вообще, становится недопустимым, в виду слишком большой широты могущих последовать от случайных причин отклонений: изучаем ли мы массу из 500 тыс., 5.000 или 500 случаев — меньше вычисленного по формуле числа, положим 400, случаев для выборочного исследования взять нельзя, если желать иметь результат с гарантией репрезентативности. Но всегда ли можно удовольствоваться этими 400-500, вообще тем абсолютным числом случаев, какое указуется теорией погрешностей или вообще — теорией вероятностей? На этот вопрос всякий практический статистик ответит отрицательно: по 500 отобранным случаям можно делать заключения о 4.000 или 5.000 случаев — по 500 селениям о 5.000 селениях или по 500 крестьянским дворам о 5.000 крестьянских дворов. Но по 500 отобранным случаям-дворам ни один практический статистик не решится делать заключений о 50.000 дворах уезда, а тем более—о 500.000 крестьянских дворах губернии. И практический статистик будет совершенно прав. В опытах с шарами или в играх, основанных на случае, — значит в тех областях искусственно-налаженного эксперимента, в применении к которым собственно и строились формулы и приемы исчисления вероятностей, а также, может быть, и в применениях статистики к такого рода, например, биологическим явлениям, где — как мы увидим ниже — с некоторым основанием можно предполагать условия равновозможности и т. д., вычисленного по формуле числа 400-500 случаев, может быть, и в самом деле достаточно для заключений, могущих быть распространенными и на 4.000, и на 40.000, и на 400.000 дальнейших тиражей или иных испытаний, потому что условия 40.000-ного испытания или 400.000-ного тиража определенным образом налаженного опыта или лотереи будут совершенно тождественны с условиями первых 400 или 4.000 тиражей или

[1]) Стр. 74-75.

испытаний. В этих областях, значит, в самом деле: если 500 испытаний дают ошибку, скажем, в 5%, а 300 испытаний или наблюдений — в 2%, то этот вывод будет верен и для массы в 5.000, и для 20.000, и для 600.000 испытаний; это потому, что в взятых на выбор или вообще каким бы то ни было образом выделенных из общей массы 300 и 5000 испытаниях или тиражах уже в соответственной мере устранено влияние всех возможных в массе данного состава случайностей: будет ли эта масса состоять из 5000 или 500.000 испытаний или наблюдений, — все равно, амплитуда случайных колебаний и самый их характер от этого не изменятся, и вытекающая отсюда возможность случайных отклонений частичного коэффициента от общей цифры, характеризующей всю массу, полностью учтена формулой, рассчитанною на 300 или на 5.000 случаев. В большинстве областей статистической действительности, и в частности в сфере социальной жизни, дело обстоит совершенно иначе: с возрастанием массы возрастает и ее качественное разнообразие, и те десятки, может быть сотни разновидностей и оттенков явления либо признака, которые дает, в большой массе, действительная жизнь, либо вовсе не найдут себе отражения в математически достаточных, как минимум, 300 или 500 случаях, либо выразятся, каждая разновидность и каждый оттенок в отдельности, столь ничтожным, случайно попавшим в выборку числом, может быть немногими единицами, которое никоим образом нельзя будет считать „репрезентирующим", данную разновидность или данный оттенок. Говоря конкретно: 400 — положим — крестьянских дворов из 2.000 — это будет выборка, произведенная, примерно, на территории волости, во всех отношениях более или менее однообразной, или, во всяком случае — с сравнительно небольшим числом почвенных, агрикультурных, промысловых и т. п. типов, которые все, в более или менее достаточном числе, и попадут в нашу выборку. 40.000 тыс. дворов — это уже уезд, 400.000 — уже целая губерния. Уже в пределах уезда, а тем более в пределах губернии, разнообразие характерных для крестьянского хозяйства естественно-исторических, экономических, культурных, даже исторических моментов, приуроченных к тем или другим, болеее или менее мелким частям тирритории губернии или уезда, к тем или другим не-территориальным группам населения, будет, конечно, в несколько, может быть во много раз больше. Представители каждого из этих моментов в отдельности, может быть, и вовсе не попадут в число отобранных 400 дворов, — в лучшем случае попадет немного единиц; следовательно — не будет больших чисел, и, значит, попавшие на выборку представители разных моментов весьма легко могут оказаться для них совершенно не типичными. Если бы в губернии, или в уезде, можно было провести точное разграничение всех типичных по всей совокупности признаков частных групп, и если бы в каждой такой группе могло быть взято на выборку вы-

численное по формуле абсолютное число, — абсолютное число было бы, может быть, достаточным критерием. Но это неосуществимо, потому что типичные группы, во-1-х, нередко и вообще не приурочены к каким-либо территориальным или вообще — внешне-уловимым делениям губернии или уезда, во-2-х, они могли бы быть разграничены не до, а только после проведения как самого исследования, так и разработки его результатов, и в-3-х, еще и потому, что представленные в губернии или уезде разнообразные хозяйственные типы, сплетаясь из разнообразнейших комбинаций более или менее значительного числа признаков, и вообще не представляют собою определенным образом отграниченных частных совокупностей. Поэтому, ничего не остается, как взять достаточно большую долю большой и пестрой по своему составу массы, в рассчете на „уравновешение случая", который, при составляющем эту долю достаточно большом числе единиц, позаботится о том, чтобы в этом числе были более или менее равномерно представлены все представленные в общей массе или совокупности разновидности и оттенки изучаемого явления. Математический принцип достаточно большого абсолютного числа взятых на выборку случаев, таким образом не колеблется; он, гипотетически, принимается остающимся в силе по отношению к каждой из невыделимых, но фактически имеющихся налицо, внутри общей массы, частных групп или совокупностей. Но практически его осуществить, вычислить для каждой частной группы соответственных абсолютных чисел нельзя, потому что — повторяю — мы не имеем способа выделить те однообразные совокупности, для каждой из которых нужно было бы взять в выборку определенное абсолютное число наблюдений, а тем более — установить те данные, из которых, для каждой частной группы, могло бы быть выведено это абсолютное число [1]).

---

[1]) Высказанные с несколько меньшею степенью подробности в 3-ем издании моей книги «Теория и методы» статистики (стр. 96—98), соображения эти вызвали очень резкое возражение со стороны Е. Е. Слуцкого в цитированной на стр. 342 весьма ценной и содержательной рецензии на эту книгу. «Всякий оттенок», полагает он — для «того, чтобы быть уловленным, будет требовать и соответственного объема выборки и именно абсолютного объема, так что, задавшись наперед определенными познавательными, теоретическими или практическими целями, мы в соответствии с ними, в состоянии будем определить и размер выборки. Никакое чутье — полагает Слуцкий — здесь помочь не может, если столь опытного исследователя, как А. А. Кауфман, оно не гарантирует от абсолютно ложного признания решающего значения за относительными размерами выборки. Только систематическое применение критериев, даваемых исчислением вероятностей, конечно, при наличности всех прочих качеств, присущих хорошему исследователю, может обеспечить успех применения выборочного метода. Разбор и критика имеющихся уже опытов могли бы показать это с непререкаемою очевидностью» (L. c., стр. 117). Думаю, что вопрос совсем не разрешается приведенными in extenso краткими соображениями. Я даже оставляю в стороне те гораздо более принципиальные соображения, которые будут изложены в 10-ой главе. Но даже и оставаясь в рамках специального вопроса о применении критериев исчисления

Сказанное, в сущности, не более как развитие брошенного мимоходом А. А. Чупровым замечания относительно недостаточно разработанного „варианта“ метода Bowley, который считался-бы с разнородностью выборочно изучаемых совокупностей. Но дело в том, что массы такого разнородного состава — не исключение, а — по крайней мере в сфере социальной статистики — общее правило, и, следовательно, такое видоизменение метода Bowley, которое считалось бы с такою разнородностью — не какой либо „вариант“, с отсутствием или неразработанностью которого можно было бы более или менее спокойно мириться, а такая, необходимая форма или такое необходимое свойство данного метода, при отсутствии которого этот метод — по крайней мере в известных областях, утрачивает всякое практическое значение.

Таким образом, статистической практике не остается другого выхода, как отчислять для выборочного учета достаточно большую долю случаев, составляющих изучаемую массу; достаточно большую чтобы в ней можно было предполагать достаточно представленными все существующие в данной массе разновидности и оттенки изучаемого явления, а следовательно и для того, чтобы всю выборку можно было предполагать «репрезентирующею» всю изучаемую массу. Какая должна быть эта доля? Отвечающих на такой вопрос математических формул, сколько мне известно, не существует, и сколько я могу себе представить, и не может быть: при определении надлежащей доли приходится считаться и с слишком разнообразными условиями в отношении степени пестроты общих условий—одна

вероятностей, я должен заметить, что Е. Е. Слуцкий чрезмерно упрощает вопрос, настаивая на необходимости определения, в соответствии с этими критериями, необходимых чисел для выделенных, в соответствии с определенными познавательными ролями, «оттенков». Главная суть моих соображений — именно в тех бесчисленных не выделенных и технически не выделимых оттенках, которые все участвуют в появлении определенных массовых коэффициентов — «тех самых обобщающих коэффициентов», которые должны быть «репрезентированы» выборочными данными. Эти неуловленные и неуловимые оттенки не могут быть представлены никакими определенными числами — ни абсолютными, ни относительными; но при известном, достаточно большом проценте выборки, принцип уравновешения случая, или, проще—закон большого числа, дает некоторую гарантию того, что они будут репрезентированы достаточно равномерно, а следовательно и полученные коэффициенты будут достаточно репрезентативны. Не убеждает меня и ссылка Е. Е. Слуцкого на те ошибки и неправильные выводы, которые он, очевидно, имеет в виду, когда говорит о «разборе и критике имеющихся уже опытов». Во-1-х, мы пока еще только ждем этого разбора и критики, и не знаем, что они дадут; во-2-х, Е. Е. Слуцкий не хуже меня знает, что обходившаяся без «метода Bowley» практика выборочного исследования дала не одни только ошибки, а дала весьма много ценного и положительного; и, в-3-х, даже и доказанная наличность ошибок так же мало решает вопрос о негодности «глазомерного» приема определенных процентов, как ошибки, надо думать, делавшиеся и теми статистиками, которые пользуются критериями исчисления вероятностей, сами по себе не решают ни в какую сторону вопроса о применимости и значении этого рода критериев.

масса может быть очень пестра, другая, наоборот, сравнительно однообразна; весьма существенные различия в степени однообразия или пестроты, и притом различия неуловимые в сколько-нибудь определенных границах, могут существовать и внутри данной массы—одни ее части могут быть значительно пестрее и разнообразнее, нежели другие. Приходится считаться и с чрезвычайно различною степенью индивидуальности отдельных признаков,—обстоятельства того или другого порядка, очевидно, отражаются на той доле общего числа случаев, которая должна поступить в выборку: эта доля должна быть больше при большей пестроте и индивидуальности, и она может быть меньше при большем однообразии и большей типичности признаков. Очень важную роль при решении вопроса о подлежащей выборке доле случаев играет и значение признака, как более самостоятельного, определяющего, или, напротив, производного, зависимого. Сейчас же дальше я должен буду остановиться на подразделении признаков на „признаки-причины" и „признаки-следствия", а этих последних, в свою очередь, на признаки-следствия разных порядков: для признаков-причин нужна, как мы увидим дальше, большая доля выборки, для признаков-следствий можно довольствоваться меньшею, достаточною, чтобы уяснить характер связи их с соответственными признаками-причинами.

В конечном результате получается, что математические критерии в данном случае—в вопросе о том „достаточно большом числе", которое—при наличности других необходимых условий—гарантировало бы „репрезентативность" выборочного исследования, решительно отказываются служить. Вопрос о числе или, конкретнее, о доле подлежащих выборочному учету случаев, разрешается в статистической практике чисто эмпирически, при чем практика с полным единодушием интересуется не абсолютным числом, а именно долею подлежащих выборочному перечету случаев. Установление той или иной доли, большей или меньшей, в зависимости от характера подлежащих изучению явлений или признаков явлений—от степени однородности или пестроты изучаемой массы, от большей или меньшей индивидуальности интересующих исследователя признаков, от значения их, как признаков-причин или следствий, более чем что либо другое остается делом того статистического чутья, того чувства цифры, которым должен обладать организатор всякого, а в особенности—выборочного исследования.

Другой существенный вопрос, относящийся к принципиальной характеристике выборочного исследования—это вопрос о том, когда, в каких случаях уместно выборочное исследование, и в каких, напротив, обязательно исследование сплошное. Первое, грубое решение этого вопроса непосредственно вытекает из известной аналогии выборочного метода с всякого рода испытаниями и пробами наудачу,—ана-

логии, которой выборочный метод обязан одним из других своих названий—„метода проб“ (Stichprobenmethode). Что в самом деле, определяется путем проб—действительных проб или пробных испытаний? Очевидно, не число, положим, рельсов, не число пар сапог, не число пудов зерна или муки в той или другой партии,—для всего этого необходим сплошной перечет рельсов, сапог, мешков с мукой или зерном и т. п. Путем проб определяются те или другие свойства, признаки, характеризующие целую партию продукта или товара. Эти признаки могут быть качественные, и в таком случае полученная из проб качественная характеристика, путем простой аналогии, исходящей все из той же основной идеи невероятности случайного подбора, распространяется на всю характеризуемую данными пробами партию рельсов, на целый мешок зерна или муки и т. п. Но они могут быть и количественные, и в таком случае они могут быть путем такой же аналогии распространяемы на всю массу и полагаемы в основу вычислений, дающих и ее количественную характеристику: определив, путем проб, средний вес, положим, рельса определенной длины, сажени дров, мешка муки и т. п. и сосчитав число рельсов, саженей дров или мешков муки, мы затем по этим данным можем вычислить, хотя и не вполне точно, но с достаточным для известных практических целей приближением, общий вес дров в данной кладке, общий вес муки в партии из стольких-то мешков и т. п. То же самое мы видим и в статистике. Выборочное исследование не способно давать точных абсолютных чисел,—оно не может дать, например, точного числа населения в стране или городе, числа крестьянских дворов в губернии или волости, числа рабочих на фабрике или в известной отрасли промышленности,—все такого рода абсолютные числа могут быть получены не иначе, как путем сплошного учета. Но выборочное исследование—при достаточном числе взятых в выборку случаев или единиц, вполне способно давать достаточно характерные для целой массы, „репрезентативные“ коэффициенты—средние и относительные величины. Выборочное исследование вполне способно дать представление, например, о повозрастном распределении населения и о среднем возрасте той или другой значительной массы; о средней лошадности, средней посевной площади, о распределении крестьянских дворов по тому и другому признаку, о среднем размере заработной платы и о распределении рабочих по размерам оплаты их труда и т. п. А затем, на основании этих коэффициентов, представляется возможным вычислить, с известным приближением, и те абсолютные числа, в которых выражается явление, представляющее собою признак или спутник другого, сплошь учтенного явления: зная на основании данных сплошной переписи число крестьянских дворов, и определив выборочным способом среднее число лошадей, рогатого скота, десятин под посевом,—определив по данным выборочного же исследования, положим, среднее го-

довое потребление хлеба, средний заработок от промыслов и т. п., мы можем затем, путем простого вычисления по тройному правилу, получить приближенные абсолютные числа лошадей, рогатого скота и десятин под посевом, приближенные абсолютные количества потребляемого хлеба, приближенные абсолютные цифры промысловых заработков и т. п. Зная абсолютное число рабочих разных категорий и получив выборочным путем средние размеры их заработка и группировку по высоте заработной платы, мы можем вычислить приближенные общие суммы заработка и приближенные абсолютные числа рабочих, принадлежащих к тем или другим группам по высоте заработной платы, и т. д.

Из сказанного вытекает то заключение, что выборочное исследование уместно в трех категориях случаев: во-1-х, когда абсолютные числа вовсе не представляют никакого интереса,—например, для вычисления среднего возраста или среднего роста известной группы населения, где ни сумма возрастов, ни сумма измерений роста сами по себе ни под каким углом зрения и ни для кого не интересны; во-2-х, когда данное явление, по самому существу применимых к нему методов учета, не допускает сколько-нибудь точного установления абсолютных чисел, и когда, поэтому, и при сплошном учете приходилось бы заведомо довольствоваться приближенными цифрами,—таковы, например, такие явления, как массовое потребление хлеба или иных продуктов, суммы заработка, доставляемого населению промыслами, общий сбор хлеба в той или другой местности; и в-3-х, когда известное явление по своему существу и по методологическим условиям учета хотя и допускало бы установление достаточно точных абсолютных чисел, но эти последние, в виду особых задач данного исчисления, не представляют достаточно существенного интереса, или когда представляется возможным пожертвовать точностью абсолютных чисел в интересах ускорения или удешевления работы: это относится—если взять примеры тоже из области статистики крестьянского хозяйства,—к количеству скота, величине посевов, размерам аренд и т. п.: в зависимости от обстоятельств, о которых мне придется говорить сейчас же дальше, мы можем желать получить для каждого из этих признаков мыслимо точные абсолютные числа, и тогда мы включим учет их в сферу сплошного исследования,—можем довольствоваться приближенными величинами, и тогда ограничимся их выборочным учетом.

Весьма удачная попытка пойти дальше в установлении тех критериев, которые могли бы быть положены в основу разграничения сфер сплошного, выборочного, а также и монографического приема исследования, была сделана одним из видных русских земских статистиков В. Г. Громаном, которому, вообще, принадлежат очень крупные заслуги в деле и разработки, и пропаганды выборочного метода.

Исходный пункт соображений В. Г. Громана, прежде всего, в том общеизвестном положении, что общественные явления „закономерны т. е. находятся в тесной и постоянной связи, — связи настолько прочной, что мы наблюдаем неизменную тенденцию сопутствования одних явлений другим"; а затем в том дальнейшем положении, что „среди бесконечного числа явлений, влияющих, с тою или иною силой и в том или ином направлении, на каждый данный объект исследования, мы всегда можем выделить определенные явления, которые мы можем назвать главными причинами, важнейшими факторами, и которые и определяют основные свойства изучаемого объекта. Это строение общественной жизни выражается в типичности общественных явлений, состоящей в том, что они могут быть разделены на однородные группы, внутри которых" между отдельными случаями, „с определенной точки зрения, больше сходств, чем различий, или, во всяком случае, различия между явлениями, — включенными в одну группу, меньше, чем между явлениями данной группы и всякой другой" — положение, замечу мимоходом, совершенно аналогичное с принципом, лежащим в основе одного из интереснейших приложений статистического метода, уже в области биологических явлений—именно вариационной статистики (см. ниже, гл. 10-ая). Вот, по таким приблизительно однородным группам статистики устанавливают взаимное соотношение признаков, а „отсюда и вытекает возможность комбинирования сплошных сведений относительно немногих признаков с подробным описанием всех признаков лишь немногих явлений. Для этого необходимо лишь знать, какие признаки могут быть отнесены к главнейшим факторам, т. е. должны быть квалифицированы как причины, и какие могут быть рассматриваемы как следствия". По этому основному принципу проводится граница между сплошным учетом, с одной стороны которому должны подвергаться признаки-причины и между не-сплошным, с другой, в область которого входят признаки-следствия. Но несплошной учет может быть не только выборочный, но и принципиально отличный от всякого массового наблюдения, монографический. Разграничение между сферами выборочного и монографического исследования г. Громан выводит из того соображения, что „и внутри группы признаков-причин можно провести деление, аналогичное тому, которое проведено между явлениями-причинами и явлениями-следствиями. Поскольку одни факторы порождаются другими или находятся с ними в такой неразрывной связи, что по наличности и величине одного можно судить о наличности и величине другого, постольку и для изучения явлений-факторов можно также прибегнуть к типическому (в данном случае, у Громана, синоним выборочного) методу: факторы, обладающие наибольшею силой, т. е. факторы первого порядка,—изучить сплошным образом, а факторы...второго порядка,—изучить лишь у части явлений" — и отсюда уже вытекает трехчленная или трехстепенная

схема: „первая степень — сплошное исследование факторов первого порядка. Вторая степень — выборочное изучение факторов второго порядка по значительной части случаев. Третья степень — монографическое изучение явлений - следствий по небольшой части случаев. Сопоставление первой и второй степеней дает возможность установить взаимную зависимость факторов первого и второго порядка. Сопоставление первой и второй степеней, с одной стороны, и третьей степени, с другой, дает возможность установить взаимозависимость явлений факторов и явлений следствий“[1]).

За некоторыми оговорками, на которых здесь было бы излишне останавливается,[2]) предложенная В. Г. Громаном схема кажется мне вполне правильно схватывающею суть вопроса. В применении к статистической практике она требует, однако, ограничения в двух направлениях, впрочем стоящих между собою в некоторой внутренней связи. Выборочный, а не сплошной метод допустим, именно, только тогда, во-1-х, когда обнаруживающаяся в данном факторе второго порядка причинная зависимость от фактора первого порядка не нарушается теми или другими идиографическими влияниями, приуроченными к определенным единицам пространства или моментам времени, или если по характеру и задачам данного исследования эти привходящие влияния можно игнорировать; только тогда, во-2-х, когда практические цели данного исследования не требуют выяснения конкретной картины территориального и т. п. распределения данного признака — все равно, будет ли это причина второго порядка или, просто, признак-следствие. Это вторая оговорка стоит — как я уже сказал — в некоторой внутренней связи с первою—но она далеко не тождественна (как могло бы показаться на первый взгляд) с тем выше формулированным основным принципом, в силу которого выборочное исследование не должно иметь места там, где требуются точные абсолютные числа, — оно идет дальше него: в точных абсолютных цифрах, может быть, и нет необходимости, — достаточно того, чтобы данные, относящиеся к известному признаку, имелось в виду использовать для соображений или мероприятий, приуроченных к определенным, более или менее мелким, территориальным и т. п. делениям; недопустим, например, выборочный учет посевных площадей и распределения по хлебам, если предвидится собранные данные положить в основу, например, снабжения продовольствием населения отдельных селений: средние и процентные цифры по отдельным селениям пришлось бы вычислять из слишком небольших чисел выборочно-учтенных случаев, и потому поселенные коэффициенты не имели бы репрезентативного значения.

---

[1]) См. доклад В. Г. Громана в Трудах подсекции статистики XII съезда естествоиспытателей и врачей, стр. 209-211.

[2]) См. мою статью «Несколько замечаний к вопросу о пределах выборочного исследования». Стат. Вестн. 1915-1916 г., № 3—4.

Иллюстрирую сказанное только на одном примере, отсылая за другими примерами и более подробно развитыми соображениями к названной в подстрочном примечании моей статье. Беру именно вопрос о крестьянской аренде. Это, несомненно, не фактор первого порядка, а фактор второго порядка или «признак-следствие», зависящий, с одной стороны, от определяемой размерами своего землевладения степени нужды в земле, а с другой — от возможности арендования, определяемой рабочим составом и количеством скота. Если бы размеры и условия аренды, в частности арендные цены, зависели только от этих факторов, выборочный учет этих явлений был бы вполне уместен. В действительности, однако, к этим более или менее номографическим элементам привходит еще фактор чисто-идиографического характера: размеры арендного фонда и вся вообще совокупность условий, так или иначе влияющих на характер предложения земли в аренду — обстоятельства, совершенно индивидуально складывающиеся для каждого селения или каждой небольшой группы селений. Таким образом, первое из формулированных выше ограничительных условий, несомненно, налицо имеется. Имеется налицо и второе. Поскольку исследование преследует оценочные цели, собственно размеры аренд по каждому отдельному селению не представляют особого интереса, — но тем больший интерес представляют существующие для каждого отдельного селения арендные цены; поскольку исследование имеет в виду более широкие экономические, а тем более — землеустроительные цели, первостепенно важный интерес представляют приуроченные к отдельным селениям данные и о размерах аренд, и об арендных ценах. Следовательно, с точки зрения формулированных мною ограничений, то и другое должно подлежать не выборочному, а сплошному учету. Выборочно могла бы учитываться, с формулированной выше точки зрения, только одна группа признаков, относящихся к аренде, — формы аренд (денежная, испольная и пр.): идиографические моменты, поскольку они влияют на выбор денежной, либо той или другой из натуральных форм, могут рассматриваться как случайные обстоятельства и потому игнорироваться, а с другой стороны, преобладание в определенных селениях определенных форм аренды едва ли может иметь и сколько нибудь существенное практическое значение.

В рамки этой работы не входит, конечно, всестороннее рассмотрение вопроса о выборочном исследовании, и в частности — технической стороны этого вопроса. Но, и оставаясь на чисто принципиальной точке зрения, нельзя не остановиться, хотя бы в самом общем виде, на одном моменте, стоящем посредине между теорией и техникой выборочного метода, именно на приемах отбора поступающей в выборку части единиц или случаев.

Строго говоря, изложенные выше соображения, в силу которых принцип выборочного исследования является непосредственным выводом из математической формулировки закона большого числа, имеют сами по себе, гораздо более широкое значение: они оправдывают, — повторяю—взятые сами по себе, наше право обобщать результаты всякого не-исчерпывающего, частичного или не-сплошного исследования, раз только подвергнутое учету число единиц достаточно велико для того, чтобы закон большого числа мог вступить в свои права. Но понятие не-исчерпывающего или частичного исследования несравненно шире, нежели понятие выборочного исследования. Под первое из этих понятий подойдут чрезвычайно разнообраз-

ные типы несплошных исследований: и собирание данных об урожаях, о заработной плате и вообще об условиях труда в промышленности, о положении самой промышленности и т. п. путем раздачи или рассылки опросных бланков, которые и рассылаются-то или раздаются далеко не сплошь, не всем возможным «объектам наблюдения», и возвращаются уже во всяком случае не от всех. И историческая статистика, которой, поневоле, приходится делать обобщения на основании сохранившейся части имевшегося когда-то материала, или материал для которой и имелся лишь для некоторых местностей (статистическая обработка писцовых книг и д. п. документов!). И статистико-педагогические исследования, основанные на наблюдениях над учениками в немногих школах. И медицинско-статистические исследования, поскольку степень смертоносности тех или других болезней, или результат определенных методов лечения, изучаются по данным одной или нескольких больниц, или частной практики одного или группы врачей. И такие предприятия из области хозяйственной статистики, как повторное исследование Воронежской губернии, ограничившееся сплошною полосою из нескольких уездов, проходящею с севера к югу губернии, или произведенная в начале XX века перепись сибирских переселенческих поселков, охватившая в каждом из колонизационных районов по одному или по два уезда и совершенно обошедшая остальные уезды, и т. д. Принципиальная возможность обобщения данных частичного статического наблюдения во всех этих и в каких угодно других подобных случаях вытекает все из того же, нами формулированного общего принципа—тождества или близости статистических коэффициентов для целого и для больших частей, в свою очередь представляющего собою прямой вывод из математической формулировки закона большого числа. Но в каждом из приведенных только-что, в виде примера, случаев есть те или другие моменты, в той или другой мере умаляющие репрезентативность полученных из частичного исследования выводов. В моей книге „Теория и методы статистики“ [1]) я довольно подробно рассмотрел некоторые из этих моментов,—здесь я могу ограничиться простою ссылкой не развитые там соображения и только, вдобавок к ним, отметить, что опасность малой репрезентативности возникает, между прочим, всегда, когда частичному учету подвергаются целиком те или другие частные массы или частные совокупности, входящие в состав данной,—общей совокупности: мы будем иметь очень мало гарантий репрезентативности, если будем распространять на всю губернию или область выводы, полученные из данных, собранных по нескольким уездам, распространять на всю совокупность учащихся выводы из наблюдений в нескольких школах, на всю совокупность больных—выводы из наблюдений в одной или не многих лечебницах или клиниках, если будем обобщать выводы, полученные из сохра-

[1]) См. стр. 321—323.

нившейся части исторических материалов. Все это потому, что целые уезды, как совокупности крестьянских хозяйств, школы, как совокупности учащихся, клиники, как совокупности больных, всегда могут отличаться от других аналогичных частных совокупностей таким комплексом специфических условий, при наличности которого не может быть и речи о том предположении «прочих равных условий», которое является предпосылкою всякого статистического обобщения и в особенности—обобщения от учтенной части случаев к другой, неучтенной: условия крестьянского хозяйства в данной группе уездов, подбор и условия лечения больных в данных больницах, подбор и постановка преподавания в данных школах могут настолько сильно отличаться от соответственных условий в других частных совокупностях, что вывод, сделанный на основании статистического изучения взятых на выбор частных совокупностей, может оказаться совершенно неверным для всех или для некоторой части остальных [1]).

Для того, чтобы можно было рассчитывать на то „уравновешение случая", которое является предпосылкою закона большого числа, а вместе с ним и выборочного исследования, необходимо, чтобы взятый на выборку материал был мыслимо равномерно, так сказать, рассеян среди всей той совокупности случаев, которая должна быть характеризована выборочным исследованием. А это, очевидно, будет достигнуто в тем более полной мере, чем мельче те элементы, которые мы будем подвергать выборочному учету. Репрезентативность будет достижима в наиболее полной мере, если мы будем брать на выборку отдельные единицы, в несколько меньшей—если мы будем брать мелкие группы, и она будет тем меньшею, чем крупнее будут подвергаемые частичному учету группы. В условиях статистики крестьянского хозяйства максимум репрезентативности будет достигнут если на выборку будут браться отдельные дворы-хозяйства; репрезентативность будет уже несколько меньшею, если мы для выборочного учета возьмем не определенную долю дворов, а определенную долю селений; в этом последнем случае степень репрезентативности будет выше, если в данной губернии или уезде мелкие селения, и она будет значительно ниже в случае преобладания крупных селений и т. д.

А затем, уже само собою разумеется, что репрезентативность будет достигнута в тем большей степени и, следовательно, частичное исследование тем в большей мере подойдет под понятие действительного выборочного или «репрезентативного» исследования, чем полнее будут устранены всякого рода субъективные моменты, могущие обусловить односторонний подбор выборочно-учитываемых элементов,—все равно, будут ли это отдельные единицы или частные группы. Мне и в данном случае нет надобности повторять тех указаний и сообра-

[1]) См. м о й «Отзыв о сочинении Н. Н. Нордмана «Статистика в русской истории и т. д.». См. отчет о 53 присуждении премии графа А. С. Уварова, СПБ. 1912, стр. 79—86.

жений, которые приведены в моей книге „Теория и методы статистики". Достаточно напомнить вкратце, что эти субъективные мотивы могут итти и со стороны объекта, и со стороны субъекта статистического наблюдения. Первое имеет место, в особенности, при такого рода частичных исследованиях, где дача или недача показаний зависит от доброй воли отвечающих (в урожайной статистике отвечают лучшие хозяева, в статистике промышленного труда—лучшие предприниматели, в студенческой „анкете"—наиболее занимающиеся и живущие жизнью школы студенты, в анкете о душевном настроении молодежи—субъекты, слишком поглощенные своими настроениями и т. д.); хотя и в меньшей степени, и тогда, когда единицы для выборочного опроса отбираются в порядке их выхода к опросу—потому что самый выход или невыход к опросу может обусловливаться известными, характерными для выходящих или невыходящих к опросу объектов, условиями или обстоятельствами. Второе может быть и сознательным, и несознательным. Наблюдатель может односторонне подбирать подвергаемые частичному учету элементы ради каких-либо практических выгод (перепись колонистов агентами заинтересованного в колонизации известной территории предприятия или учреждения) или просто ради оправдания тех или других предвзятых взглядов. Еще чаще это последнее обстоятельство может повести к неосознанной односторонности подбора—наблюдатель впадает в этот грех не потому, чтобы он сознательно стремился исказить истину в соответствии со своими предвзятыми взглядами, а потому, что отвечающее этим взглядам, может быть вполне добросовестно, считает характерным и типичным, а потому включает, несоответствующее принимает за ненормальное и нетипичное, а потому не включает в выборочный учет. Так или иначе,—обеспечить строгую репрезентативность, совершенное отсутствие какого бы то ни было одностороннего подбора, раз отбор входящих в выборку единиц в какой-либо мере зависит от усмотрения наблюдателей или наблюдаемых, чрезвычайно трудно или даже невозможно. И статистическая практика уже давно сделала отсюда надлежащий вывод: именно, что для обеспечения полной репрезентативности отбор должен производиться по тому или другому, чисто-механическому принципу, проводимому, притом, в такой форме, которая в возможно большей мере обеспечивала бы равномерное распределение попадающих в выборку единиц среди всей той массы, которая должна быть „репрезентируема" данными выборочного исследования; и этот принцип должен проводиться с безусловною последовательностью, которая устраняла бы всякое влияние усмотрения как объектов наблюдения, так и самих наблюдателей. При таком механическом, или, что то же самое, случайном отборе „случай" позаботится о том, чтобы в выборку попали, в самом деле, представители всех тех типов данного явления, какие представлены в изучаемой массе, и чтобы притом каждый из этих

типов был представлен в выборке приблизительно в такой же пропорции, в какой он представлен в целой массе: будет, словом, иметь место „уравновешение случая“. Но идя этим путем, статистическая практика в то же время действует в полном соответствии с указаниями теории вероятностей: безусловное устранение элемента личного усмотрения, достигаемое, при выборочном исследовании, механическим отбором, с необходимостью вытекает из принципа „равновозможности“— одной из основных предпосылок теории вероятностей, которая, как мы знаем, дает принципиальное обоснование выборочному исследованию. Мы знаем из главы 4-ой, что, поскольку речь идет о самих явлениях или событиях, равновозможность должна быть понимаема в некотором условном смысле. Но тем более она должна быть безусловною, поскольку речь идет о постановке и выполнении наблюдений. „Процесс осуществления общих условий“, или, выражаясь проще— организация наблюдений либо опытов, „должен быть таков, чтобы им исключалась всякая возможность осуществления какого-либо намерения со стороны наблюдателя или экспериментатора, благоприятствующего наступлению той или иной определенной группы случаев“ (Czuber). Нечего уже говорить о том, что всякое наблюдение и всякий опыт должны осуществляться без предвзятого намерения способствовать получению того или другого результата. Но этого еще не достаточно: пока усмотрению наблюдателя либо экспериментатора предоставлен какой-либо простор в выборе подвергаемых учету случаев, односторонность может получиться даже совершенно независимо от какого-либо его осознанного намерения: предвзятая идея, укоренившееся представление о нормальном или должном, привычка могут повлиять на результат отбора даже и при лучших намерениях и абсолютной его добросовестности. Наблюдение или опыт должны быть поэтому организованы так, чтобы для усмотрения исследователя не оставалось н и к а к о г о простора. Поскольку речь идет об играх или опытах с шарами, это достигается помощью таких приемов, как тщательная тасовка карт, перетряхивание мешка или урны с шарами или костями и т. п. В сфере статистического наблюдения возможность произвола устраняется либо исчерпывающим перечетом в с е х с л у ч а е в данного массового явления, либо—если речь идет о выборочном исследовании, т. е. о таком, которое планомерно ограничивается о п р е д е л е н н о ю ч а с т ь ю случаев,—отбором по жребию, по алфавитному порядку и т. п. Если отбор в какой бы то ни было мере зависит от усмотрения или от соображений наблюдателей, он м о ж е т быть и в самом деле вполне равномерным, соответствующим принципу „равновозможности“,—но нет объективных гарантий последней.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ.

Учение об устойчивости статистических рядов.

Закон большого числа в его математической формулировке—безразлично, взять ли теорему Бернулли-Лапласа, или более общую теорему Пуассона, или еще более обобщенное его выражение в теореме Чебышева, представляет собою, сам по себе, лишь чисто-дедуктивное умозаключение относительно *долженствующего существовать*, при наличности определенных предпосылок, соотношения между частотами явлений и их вероятностями. Не исключена была, однако, возможность, что эти предпосылки существуют исключительно в чистом мышлении—и не существуют в природе. А если бы это оказалось так, то продуктом чистого мышления оказался бы и сам математически-формулированный закон больших чисел, со всеми вытекающими из его математической формулировки последствиями. Что упомянутые предпосылки, если не в безусловно чистом виде, то во всяком случае с достаточною степенью отчетливости *могут существовать*, или точнее, что они *могут быть созданы*, и что, следовательно, математическая формулировка закона большого числа может иметь, что ей может быть придано реальное значение, это,—как мы видели в гл. 6-ой, в достаточной мере доказано на опытах с шарами, играх, основанных на случае и т. п.; доказано, значит, для разных вариантов такой, создаваемой нами, искусственной обстановки, в которой есть, с одной стороны, возможность вычисления априорных вероятностей, а с другой—возможность совершенно точного учета частот; где, притом, характер искусственной обстановки в мыслимой мере гарантирует наличность предпосылок теории вероятностей и прежде всего—равновозможность отдельных случаев. Возникает, однако, дальнейший, гораздо более трудный вопрос: имеется ли что-либо подобное в каких-либо областях *реальной жизни*,—в той, уже не искусственно созданной, а данной, так сказать, в природе действительности, которую изучает статистик? Дают ли статистику—так вопрос формулирован А. А. Чупровым—условия *его* работы право рассматривать

получаемые из массового наблюдения частоты, как «осуществления вероятностей, лишь маскируемых случайностями, в теоретически поддающейся вычислению мере». Здесь априорный ответ на поставленный таким образом вопрос не представляется возможным, потому что «мы не достаточно точно знаем статистически уловимые явления и обусловливающие их причины»,—следовательно, не имеем возможности вычислять те априорные вероятности, с которыми нужно было бы сопоставлять получаемые из статистического наблюдения частоты. Здесь, поэтому, искать ответа на вопрос можно исключительно в самом эмпирическом материале, — подойти к нему можно только путем изучения действительного характера статистических рядов: действительного характера их колебаний и действительной степени их устойчивости. Эту задачу и ставит себе созданное Лексисом и развитое, главным образом, Борткевичем учение о дисперсии, рассеянии, и об устойчивости статистических рядов, рассмотрению которого будут посвящены настоящая и следующая главы.

Собственно говоря, математическая основа этого учения целиком содержится в исследованиях Пуассона. Его «Recherches sur la probabilité des jugements en matière civile et criminelle» дают в более или менее готовом виде весь математический аппарат, которым оперирует современное учение о дисперсии и устойчивости статистических рядов. Сам Лексис, в заключительной части его вышедшей в 1875 году специальной монографии «Einleitung in die Theorie der Bevölkerungsstatistik», целиком „держится общих положений о сложных и средних вероятностях, обстоятельно доказанных Пуассоном“[1]); он не идет здесь дальше простой передачи или изложения содержания ряда формулированных Пуассоном теорем, имеющих отношение к занимающему нас вопросу, иллюстрируя их примерами из интересующей его сферы статистики смертности И уже только в появившемся два года спустя, в 1877 году исследовании „Zur Theorie der Massenerscheinungen in der menschlichen Gesellschaft“ он дает отчетливую формулировку того собственно учения о дисперсии и устойчивости статистических рядов, создание которого—какова бы ни была его дальнейшая судьба и как бы оно ни было расшатано или видоизменено последующею критикой—составляет бессмертную заслугу Лексиса перед статистическою теорией, учения, которое занимает центральное место в современной теоретической статистике.

Интерес к изучению дисперсии и ее значения для характеристики степени устойчивости статистических рядов не требует, в сущности, даже особой мотивировки, в виду огромного как практического, так и научного значения самого факта устойчивости, постоянства статистических чисел, — факта, на котором „покоится представление об обществе как органическом сосуществовании (Zusammengehören) внеш-

[1]) Назв. соч., стр. 96-97.

ним образом не связанных единиц, образующих находящуюся в устойчивом равновесии массу“ [1]). Но конкретно это общее значение учения о дисперсии и устойчивости статистических рядов проявляется в двух главнейших направлениях, или под двумя главнейшими „аспектами». Из них один можно назвать „методологическим“, другой — „морально-философским“. И тот и другой носит, в существе своем, чисто-теоретический характер, не имея прямого приложения в практике научной статистической работы. Но в теснейшей связи с первым, методологическим аспектом стоит ряд применений приспособленных к измерению устойчивости формул и приемов в практике статистического анализа и из них, прежде всего, то, что можно назвать „дифференциальным методом“ уловления и измерения причинных зависимостей между явлениями и признаками явлений.

Методологический аспект или методологическое значение учения о дисперсии заключается в том, что оно изыскивает объективные критерии для разрешения принципиального вопроса о пределах применимости исчисления вероятностей для каждой данной области статистически изучаемых явлений. У основоположника всей вообще современной статистики, как метода научного анализа, Кетле, и его ближайших последователей, этот вопрос ставился чрезвычайно широко, или точнее — вовсе не ставился. Всякий статистический коэффициент, раз он удовлетворял известным формальным условиям, именно: раз его числитель составляла определенным образом отобранная часть известной массы, а знаменатель — вся масса учтенных случаев, принимали за приближенное выражение математической вероятности и, при надобности, подвергали обработке приемами исчисления вероятностей, „ни мало не задаваясь вопросом о допустимости такого понимания“. Главная заслуга Лексиса, как ее формулирует Борткевич, и состоит именно в том, что он „подверг критике“ это „господствовавшее прежде основное представление. Ему принадлежит мысль рассматривать характер статистического коэффициента, как приближенного значения математической вероятности, не как что-то само по себе данное, но как нечто долженствующее быть проверенным на опытных данных“ [2]). Или, как формулирует эту мысль сам Лексис, в своей, выше названной, фундаментальной монографии, вышедшей в свет в 1877 году: „применение исчисления вероятностей к оценке объективной возможности вытекает не из его собственных принципов, а исключительно из опыта“ [3]). До Лексиса считали, что

---

[1]) Tschuprow, Die Aufgaben der Theorie der Statistik. Jahrb. f. gesetzgeb. etz. Bd. XXIX (1905), стр. 452—453.

[2]) Там же. См. Kries, Die Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung, 1886 стр. 264.

[3]) Lexis, Zur Theorie der Massenerscheinungen in der menschlichen Gesellschaft, 1877, стр. 15. См. мою «Теорию и методы статистики». 3-е изд, 1916, стр. 66—67.

массовые явления, раз только они ничем не регулированы извне, „без дальнейших рассуждений (ohne Weiteres) могут быть сведены к той классической системе урн с разноцветными шарами", на которой разрабатывались и разрабатываются схемы теории вероятностей. „Лексис — и в этом отношении существенный смысл его соображений — на место этой, прежде принимавшейся без особого обоснования, предпосылки поставил задачу — setzt an die Stelle dieser Annahme die Aufgabe — в каждом случае исследовать, допустимо ли вообще, и в какой мере, привлечение „схемы урн" к анализу данного явления" [1]). Исследования дисперсии при помощи „критерия Лексиса" и являются, прежде всего, средством разрешения этой основной методологической задачи. Каким образом они разрешают, или долженствуют разрешать, эту важную методологическую функцию — об этом речь будет в дальнейшем.

Морально-философский аспект или морально-философское значение учения о дисперсии заключается в выдвинутой, опять-таки, Лексисом, роли измерений дисперсии и устойчивости статистических рядов в трудной проблеме взаимоотношения между статистическою закономерностью и свободою индивидуального самоопределения, как она была поставлена Кетле и его ближайшими последователями — так называемыми „кетлетистами". История этого вопроса достаточно подробно изложена в моей книге „Теория и методы статистики" и особенно — у А. А. Чупрова, в его „Очерках по теории статистики" [2]). Суть вопроса — в несколько, хотя и далеко не в такой мере, как принято думать, упрощенном и механическом понимании, у Кетле и особенно у некоторых из „кетлетистов", существа статистической закономерности, как чего-то если не тождественного, то очень близкого по своему характеру к „естественным законам", — к законам, управляющим явлениями. Я сказал: „хотя и далеко не в такой мере, как принято думать". В другом месте [3]) я, мне кажется, достаточно убедительно показал, что и „кетлетисты", и тем более сам Кетле, в действительности вовсе не шли, в охарактеризованном только-что понимании статистической закономерности, так далеко, как это им приписывают их критики. Но на дальнейшей эволюции статистической теории отразилось именно то ходячее, преувеличенное понимание ошибок „кетлетизма", из которого исходили его критики. В этом ходячем понимании точки зрения „кетлетистов" статистический закон — полный аналог естественного закона. Он одинаково отражается, в частности, на действиях и состояниях каждого человека, создавая для каждого одинаковую вероятность смерти, вступления в брак,

[1]) Bruns, W.-R. und Koll.-Masslehre, стр. 92.

[2]) Теория и методы статистики, 3-е изд., стр. 221-230. Чупров, Очерки, 2-ое изд., стр. 288-298.

[3]) Теория и методы статистики, стр. 225-226.

преступления, самоубийства и т. п. Статистический закон непосредственно отражается и на состояниях, и на действиях каждого отдельного человека, — следовательно, оказывает давление на индивидуальную волю; человек „исполняет закон“ и, будто бы свободная, его индивидуальная воля на самом деле бессильна. И, значит, статистические правильности — правильности и постоянства цифр, в которых находит себе выражение статистический закон, являются серьезным, даже решающим аргументом против допущения свободы воли — свободы индивидуального самоопределения В действительности — повторяю — Кетле и его последователи далеко не в такой мере повинны в приписываемом им не в меру категорическом решении вопроса. Если вчитаться в соответственные их соображения, то нетрудно убедиться в том, что ни у Кетле, ни у Адольфа Вагнера, ни даже у наиболее прямолинейного из „кетлетистов», Бокля, нигде не отвергается роль индивидуального самоопределения в индивидуальном, единичном случае, а говорится лишь о „массах“, о „большом числе“, о проявляющихся в массах и характеризующих массы больших числах „общих стремлениях“. Вот, например, одно из наиболее характерных мест у самого Кетле: человек — говорит он в этом месте, „как существо общительное, отказывается от доли своей самостоятельности и входит в состав сложного общественного организма, живущего своею жизнью, подчиняющегося своим законам. Свободная воля, в которой выражается самостоятельность личности, стушевывается, как только мы переходим к рассмотрению многочисленных групп: она является случайною причиной и в конечном счете влияние ее сводится к нулю массовые действия обусловливаются не ею, а причинами, не стоящими под контролем отдельного лица“, — причинами не только физического, но и морального и социального порядка. Или вот другие, не менее характерные места: „воля человека — говорит Кетле в одном из них—не может оказать влияния на те явления, которые при первом, поверхностном суждении казались вызванными ее влиянием, а на деле были последствием совокупных причин данного общественного строя“; по данным научного наблюдения, „индивидуальные воли упраздняются среди общих стремлений“. Человек — резко подчеркивает он в другом таком месте—„полагающий, что всем управляет его свободная воля, не ведая того, строже всякого другого создания подчиняется известным законам“. Ни в этих местах, ни — повторяю — где бы то ни было, Кетле не отрицает значения индивидуального самоопределения для индивидуальных же, отдельных случаев. В основном своем существе вопрос сводился у Кетле к тому, в конце концов, бесспорному факту, что свободная воля или человеческие аффекты „оставляют свой след на статистических средних, как force perturbatrice, несколько изменяющая их“; но что „в области моральных фактов, как и физических, всегда

проявляется закон больших чисел, qui les résume approximativement au point de vue quantitatif“ [1]) — который дает им обобщенное количественное выражение. Как при этом согласовать свободу индивидуального самоопределения с проявляющимся на массовых числах законом, — этого вопроса Кетле вовсе не берется разрешать: он останавливается перед ним как бы с некоторым недоумением, — он „не высказывает определенной точки зрения (bleibt unsicher), настаивая лишь на том, что индивид есть составная часть общества, и предоставляя философам использовать эту точку зрения в своих исследованиях“ [2]). Не более повинны в чрезмерной категоричности решения вопроса и более видные из последователей Кетле, не исключая самого крайнего из них — Бокля. Так, Адольф Вагнер хочет и требует только одного: чтобы поборники неограниченной свободы воли „считались (курсив мой А. К.) с выводами статистики“. Но „не считаться“ с выводами статистики в вопросе о свободе индивидуального самоопределения и нельзя — „считаются“ с ними и Лексис, и Чупров, и все те представители философских дисциплин, которые стремятся доказать совместимость статистической закономерности с свободой индивидуальной воли, и „считаться“ с ними — далеко еще не значит толковать их в каком-либо решительно отрицающем свободу индивидуального самоопределения смысле. И Вагнер, в самом деле, бесконечно далек от такого отрицания: он лишь „не мог вполне уяснить себе, каким образом закономерность может быть согласована с учением о свободе воли, но столь же мало мог присоединиться к признанию безусловной необходимости“ (человеческих поступков).

Так или иначе — но вопрос о взаимоотношении между статистической закономерностью и свободой индивидуальной воли был поставлен чрезвычайно резко; понимались взгляды Кетле и его последователей именно как категорическое отрицание свободы индивидуального самоопределения, и в таком понимании они вызывали ужас и негодование, которые нашли себе выражение в целой литературе возражений и опровержений. Мне достаточно напомнить здесь о негодующих возгласах Рюмелина и Шмоллера по поводу свойственной кетлетизму „нивелирующей тенденции“, приписывающей „благороднейшему из сынов народа“ ту же самую 1/49 вероятности преступления, как и „последнему висельнику“; о схоластических рассуждениях Эттингена относительно разницы между „произволом“, который, может быть, и в самом деле не мирился бы со статистическою закономерностью, и „истинною свободою воли“. Достаточно напомнить о том, что горячность выступлений против действительных и мнимых заблуждений кетлетизма вытекала не только и даже не столько из сообра-

[1]) Mansion. Sur la portée objective etc. (Bull. de l'Acad. Royale. de Belg., cl. des sciences, 1903, № 12, стр. 32-33.

[2]) Knapp. Quetelet als Theoretiker. Jahrb. f. N.-Oec. und Stat., Bd. XVIII, стр. 97-98.

жений чисто-научного характера, сколько из тенденций морального свойства. „Моральная статистика — говорит, например, один из характерных представителей этого направления А. Эттинген, дала так называемым социальным физикам“ — другой способ обозначения „кетлетистов“ — „повод для таких неправильных заключений, которые способны уничтожить всякую свободу и всякое чувство ответственности“. И потому Эттинген ставит своею задачею „войти, в интересах нравственности и свободы, в рассмотрение этого огромного вопроса с тем, чтобы побивать противников их собственным оружием“. Или еще яснее у Конрада: „ответственность отдельного человека за свои поступки — говорит он — должна быть безусловно признана хотя бы из педагогических соображений, ибо развитие сознания ответственности имеет огромное, определяющее значение для человеческого поведения“. В подкрепление к аргументам отвлеченно-философского, психологического, морального характера прибегали и к статистической аргументации: разбирали цифры, на которые опирался Кетле, улавливали в них те или другие ошибки или недоразумения, старались доказать, что цифры вовсе не обнаруживают той степени постоянства, которая могла бы оправдать проводимое Кетле или приписывавшееся ему понимание „статистического закона“, и т. д.

Многого ли, однако, можно было достигнуть такого рода статистическою аргументацией? Несомненно нет: отдельные неточности или ошибки, уловление «некоторого гиперболизма» в способе выражений Кетле, поскольку он говорит о «почти тождественных числах»,—все это не могло поколебать факта действительной устойчивости многих статистических чисел. «Для того же,—справедливо замечает А. А. Чупров — чтобы разбить не форму, а содержание мысли Кетле, надо было итти иным путем: необходимо было выяснить, что такое большая и малая устойчивость и, построив приемы точного измерения степени устойчивости, установить при их посредстве фактические размеры устойчивости тех статистических чисел, о которых идет речь. Лишь после этого—подчеркивает Чупров—можно было выступать на борьбу против переоценки устойчивости в системе статистиков-материалистов» [1]). Тем более, конечно, не могли решить вопроса всякие моралистические декламации и ссылки на «опасность» и на «вред» приписывавшихся кетлетизму воззрений, на заставляющие отвергнуть их «педагогические соображения». Истина — всегда истина, хотя бы самое существование истинных фактов, или знание этих фактов, и были в каком-либо отношении вредны,—химическая формула остается истинною, хотя бы ею пользовался преступник для приготовления яда, торговец—для фальсификации продуктов, внешний враг — для приготовления удушливых газов; а ложь всегда остается ложью, хотя бы

[1]) Очерки, стр. 297.

эта ложь открывала самые прекрасные перспективы или оказывала наилучшее „педагогическое“ воздействие,—философский камень не стал более истинным от тех надежд, какие возлагались на его открытие. Если и поскольку во взглядах Кетле и его последователей крылось заблуждение, к разоблачению последнего надо было итти чисто научным и строго научным путем.

И в самом деле: вопрос о взаимоотношении между свободой воли и статистическою закономерностью определенно разрешается именно на почве соображений чисто научного характера. Решение его с очевидностью вытекает из таких, выясненных нами в первых главах, основных понятий статистической теории, как понятия совокупности и статистического закона. Совокупность — это группа индивидуумов или случаев, объединенных лишь одним или немногими общими признаками, в остальном же могущих резко отличаться друг от друга; объединяющие черты совокупности охватываются не родовыми, а собирательными понятиями, схватывающими лишь общие всей данной группе характерные черты; наше знание о совокупности приурочивается именно к ней, не будучи одновременно знанием относительно индивидуумов и единичных случаев Статистический закон — как мы уже видели — имеет мало общего с естественными законами: „относительные числа, в которых выражаются статистические законы, не могут быть понимаемы как управляющие явлениями нормы, наподобие естественных законов; напротив, эти числа являются лишь продуктом движения общественных массовых явлений“ (Лексис).

Наконец, сама теория вероятностей дает определенные указания на характер взаимоотношений между массою и отдельным случаем—между вероятностью и действительностью данного события. Как удачно формулировано у Р. М. Орженцкого, „понятие вероятности заключает идею закономерности случайных событий в их совокупности. Этим определяется логическое значение понятия вероятности. Вероятность события не имеет никакого отношения к одному испытанию, хотя по внешней форме речь идет как будто о возможном исходе именно одного испытания“,—вероятность имеет силу для каждого из испытаний или случаев, взятых в совокупности, и не имеет никакой силы ни для одного испытания или события, взятого в отдельности,—„по логическому содержанию, понятие вероятности относится к известной совокупности испытаний“. И это в особенности когда—как во всех случаях, с которыми имеет дело статистика и к которым только и относится рассматриваемый спорный вопрос,—речь идет не об априорных, а об эмпирических, выводимых из наблюдения вероятностях: если еще возможно несколько иное понимание по отношению к априорной вероятности, то эмпирическая вероятность,

по замечанию Вундта, уж „никогда не может нарушить своего принципа в том смысле, что она в последнем счете всегда допускает только заключение от многих случаев к многим случаям". Уподоблять вероятность для отдельного человека дожить до известного возраста или совершить тот или иной поступок вероятности определенного броска игральной кости—логическая ошибка, ибо средняя продолжительность жизни или любой иной статистический коэффициент „не есть величина, вытекающая из условий, остающихся тождественными в каждом единичном случае, но результат, вытекающий из разнообразнейших влияний, которые все изменчивы от случая к случаю; а для единичного человека определяющею является индивидуальная gestaltung—индивидуальный склад этих влияний, и ни в малейшей мере—не их среднее значение" [1]). Или словами Р. М. Орженцкого: для той или другой совокупности вероятность „выражает знание ч а с т и причин, составляющих каждое данное испытание. Такое частичное знание не дает никакой возможности предсказать исход одного испытания, зависящий от своеобразной для отдельных испытаний комбинации комплементарных, изменчивых причин. Для одного испытания вероятность выражает знание неполное и недостаточное",—следовательно, не может служить основанием для каких либо предсказаний. Поскольку же речь идет о волевых человеческих действиях, она не предрешает никакого индивидуального человеческого поступка, следовательно ни мало не исключает возможности свободного индивидуального самоопределения.

Все эти—казалось бы—чрезвычайно убедительные соображения не мешают тому, что вопрос о взаимоотношении между статистическою закономерностью и свободою индивидуального самоопределения и до сих пор остается не разрешенным окончательно. Важным дальнейшим шагом к его—если не окончательному разрешению, то, во всяком случае—к его правильной, объективно-научной постановке было, поэтому, то уяснение характера и смысла статистической устойчивости, которое достигнуто, благодаря обоснованному на исследованиях Пуассона переходу от лежавшей в основе воззрений Кетле и его последователей концепции п о с т о я н н о й вероятности к пониманию статистических вероятностей к а к с р е д н и х из изменчивых частных вероятностей. Вопрос о «нивеллирующих тенденциях», приписывавшихся статистической закономерности и вызывавших такое резкое негодование, всецело разрешался с а м и м п р и н ц и п о м средней или сложной вероятности. Кетле и его последователи—повторяю—стояли на почве п р о с т о й или п о с т о я н н о й вероятности, какая имеет место, например, в случае извлечения шаров из урны с неменяющимся содержанием: как вероятность $^1/_6$ одинаково относится к каждому из белых шаров в урне с двумя белыми и десятью черными, так и вероятность преступления, вычисленная в такой-то цифре, относится к к а ж д о м у из, положим, 30 мил-

[1]) Wundt, Logik Bd. I стр. 430.

лионов населения страны. Частость выхода белого шара, воспроизводящая вероятность $^1/_2$, или $^1/_5$, или $^1/_{10}$, сохраняет свою силу и при первом, и при сотом, и при n-ном испытании,—значит, и преступность $^1/_x$, выведенная для группы из n лиц, имеет силу и для первого, и для сотого, и для n—ного из этой группы. Совершенно иначе ставится вопрос, раз тот же, «нормальный», уровень устойчивости, как доказано Пуассоном, характерен, одинаково, и для постоянной, и для средней из изменяющихся вероятностей. Нормальная устойчивость средних вероятностей „окончательно устраняет представление, будто масса, для которой мы вычисляем наши частоты, должна быть однородна"; при такой концепции «нормальная дисперсия вовсе не предполагает, будто все единицы, образующие статистическую массу, существенно однородны, как это предполагал кетлетизм; они могут быть различны как небо и земля» [1]). В самом деле. Перед нами несколько урн с вероятностями белого p_1 , p_2 . . . p_n ,—общая вероятность извлечения белого p есть лишь средняя из этих различных вероятностей, относящаяся лишь ко всей совокупности n урн, но не относящаяся ни к первой, ни ко второй, ни к n—ной урне; если общая вероятность $p=^1/_4$, то p_1 может быть 0 , $p_2 — \frac{1}{100}$, $p_3 — \frac{1}{2}$ и т. д. , p_n может быть и единица. В дальнейшем мне придется напомнить читателю о том, что средние вероятности могут быть очень разных видов. Но для интересующего нас сейчас вопроса сказанного достаточно: ясно, что при статистическом изучении массовых явлений мы имеем дело именно с переменною вероятностью: всякая социальная масса не однохарактерна, а слагается из более мелких совокупностей, которые мы лишь в известных ограниченных пределах можем выделить при нашем статистическом анализе, и каждая из которых представляет свою совокупность условий, следовательно, свою степень вероятности интересующего нас события. Во всяком населении, в зависимости хотя бы от местожительства, рода занятий и степени культурности, есть группы с высокою, среднею и низкою смертностью; во всяком населении есть группы, совершенно не представляющие условий, которые благоприятствовали бы совершению преступных деяний,—и есть, напротив, группы, в которых эти условия действуют в концентрированном виде. А раз это так, то смертность или преступность всего населения представляет собою не более как среднюю, выведенную из весьма различных частных вероятностей. Тем самым вынимается всякая почва из-под того нивеллирующего толкования вероятности, которое было ошибкою Кетле и его последователей: А если это так, то из средней смертности $^1/_{40}$ или средней преступности $^1/_{500}$ так же ничего не следует для отдельных групп

[1]) Tschuprow, Aufgaben, стр. 458.

населения—ни для «благороднейших сынов народа», ни для «последнего висельника», ни для массы средних обывателей, как из средней вероятности $^1/_5$, вычисленной для целой совокупности урн с разным содержанием, ничего не следует ни для первой, ни для второй, ни для какой-либо иной отдельной урны: смертность или преступность в отдельных группах может быть и значительно ниже средней, и равна ей, и значительно выше,—вообще, любая данная средняя вероятность любого человеческого состояния или поступка совместима с любыми частными вероятностями в отдельных, может быть больших, может быть сколь угодно малых группах.

Тем более, само собою разумеется, общая вероятность $^1/_{40}$ или $^1/_{500}$, уже по тому одному, что она средняя, ничего не говорит для каждой из отдельных единиц, для каждого из индивидов, входящих в состав данной массы,—следовательно, эти средние массовые вероятности не могут обосновать никакого предсказания для отдельного лица или случая; они ничего не говорят о том, предстоит ли мне сегодня умереть, или упасть и сломать себе ногу, или попасть под вагон трамвая; тем более они решительно ничего не говорят о том, предстоит ли мне в ближайшем году или месяце вступить в брак, покончить с собой, совершить убийство или кражу, выбрать для убийства нож или револьвер. А следовательно, существование массовых вероятностей не стоит и не может стоять ни в каком противоречии с допущением, в отдельных случаях, каких угодно комбинаций причин или мотивов, в том числе и с допущением сколь угодно широко проявляющейся в отдельных волевых поступках свободы индивидуального самоопределения. Это—логический вывод из принципа средних вероятностей, потому что, если при данном p, частные вероятности могут быть различными для сколь угодно мелких групп, то они могут быть сколь угодно различными и для предельно-мелких групп, каковыми являются отдельные единицы. Но в то же время это приводит нас уже к другой стороне вопроса, не имеющей прямого отношения к «нивеллирующей тенденции», и этою другою стороной вопроса мы подходим теперь к учению о дисперсии. Как я уже сказал, и это учение целиком выросло на почве исследований Пуассона. Именно им, на основе средней вероятности, выработаны, а Лексисом приспособлены к специальным запросам статистической теории, „математические приемы исследования, которые не только воочию обнаруживают, что устойчивость массовых явлений может получаться в результате весьма разнообразных сплетений обстоятельств, но и позволяют систематически обозреть разные типы условий, приводящих к более или менее устойчивым массовым итогам, и найти меру степени устойчивости, этим типам отвечающей. Для всей современной теории статической закономерности исследования Пуассона“,—введенные в теорию статистики Лексисом, „служат научным фундаментом“ [1]).

[1]) Чупров, Очерки, стр. 315.

Итак, мы должны теперь познакомиться с учением о дисперсии, и притом сначала—в том его первоначальном виде, как оно было формулировано Лексисом в его первых работах, и в частности в его „Zur Theorie der Massenerscheinungen in der menschlichen Gesellschaft". Мы уже вплотную подходили к данному вопросу в 6-ой главе, когда разбирали теорему Бернулли-Лапласа и вытекающие из ее конечных формул „задачи". Теорема Бернулли (как и теорема Пуассона!) дает, ведь, не только приближенное равенство $\frac{m}{s} \doteqdot p$, а в обращенном своем виде—таковое же равенство $p \doteqdot \frac{m}{s}$, но еще и некоторые теоретические пределы отклонений частоты от вероятности, в предположении чисто случайного характера уклонений единичных случаев от соответствующего общей вероятности данного явления вида: $\pm\gamma\sqrt{\frac{2pq}{s}}$ или — если априорная вероятность неизвестна — $\pm\gamma\sqrt{\frac{2mn}{s^3}}$. Иначе говоря, теорема Бернулли не только дает статистике точную математическую формулировку ее основного принципа—закона большого числа, и строгое его доказательство; она не только учит, что статистические числа действительно способны отражать основные вероятности, а в них и вместе с ними выявлять действие управляющих явлением постоянных причин. Она говорит нам еще, что и сами отклонения отдельных испытаний или наблюдений от выражающих общий закон данного явления средних отношений, так называемая дисперсия каждого данного ряда статистических чисел, также подлежат, при наличности известных предпосылок, действию определенного закона. Как подчеркивал еще в 1864 году виднейший из ближайших последователей Кетле, Адольф Вагнер, впрочем, опиравшийся здесь не на теорию вероятностей, а на выведенное из эмпирически наблюденных фактов обобщение, „своеобразный и гармонический характер" случайных причин выражается именно в том, что „в вызываемых их действием отклонениях от основного закона в свою очередь проявляется правильность, через которую основной закон, в некотором роде, только и получает свое осуществление". А отсюда получается весьма важный, единственный в своем роде, критерий для оценки внутреннего смысла результатов статистического наблюдения—сопоставление действительных отклонений от средних с результатами теоретического вычисления; критерий, позволяющий нам разбить все получаемые из наблюдения числа на две главные категории в зависимости от того, соответствует ли действительная величина и действительное распределение отклонений вычисленному теоретически, в предположении действия одной общей постоянной причины или одного

находящего себе выражение в средней вероятности общего комплекса причин и случайного характера отклонений, или не соответствует. В первом случае мы можем утверждать, что численный результат массового наблюдения, в самом деле, выражает одну общую совокупность причин управляющих данным явлением, отклонения же обусловливаются одними только случайными влияниями. Или—по Лексису: в этого рода случаях мы имеем дело с „типическими" рядами и с „типическими" средними, „особенность которых состоит в том, что отдельные значения представляют собою лишь неточные выражения одной постоянной величины, с случайными лишь уклонениями, получающими осуществление в действительности". Если подобного рода группировки отклонений установить нельзя, то полученная из наблюдения средняя величина не может притязать на такого рода значение, а либо представляет собою лишь арифметический результат подсчета величин, вовсе не связанных никаким общим законом, либо такой закон хотя и существует, но носит какой-либо иной характер и выявляется не в этой средней, а в каких-либо других формах и величинах. Если, например, взять данные о средней выплавке чугуна или средней добыче каменного угля за 25-летний период, отклонения погодных цифр от этой средней обнаружат совершенно другого рода группировку—именно они дадут, для стран с развивающеюся промышленностью, растущий ряд. Это не лишает среднюю известного значения, например, для сравнений с другими странами. Но закона данного явления средняя выражать не будет—она отнюдь не будет выражать той величины, к которой стремится добыча каменного угля и т. п.—закон этот будет выражаться возрастающим характером ряда.

Некоторое представление об устойчивости или колеблемости ряда статистических коэффициентов даст уже простой глазомер. Вот, например, три ряда цифр, изображающие рождаемость, смертность и брачность в России за десятилетие 1891—1900 г.г. (Более поздние цифры дают падающий ряд).

Рождаемость: 48.8 — 47.2 — 47,0 — 48.7 — 49.4 — 49.7 — 49.5 — 48.7 — 49.0 — 49.4.

Смертность: 34.6 — 32.1 — 33.1 — 31.0 — 35.0 — 32.8 — 31.4 — 33.2 — 31.0 — 31.0.

Брачность: 8.3 — 9.2 — 8.6 — 9.4 — 9.2 — 8.7 — 9.1 — 8.7 — 9.2 — 8.8.

Все три ряда представляются, на глаз, очень устойчивыми, но некоторая легко уловимая разница в степени устойчивости все-таки есть: смертность и брачность дают заметно большие колебания (разница между максимумом и минимумом 12.9 и 13.3%); рождаемость заметно меньшие (разница 5,7%). А вот, напротив, цифры хлебного вывоза за 12-летний период 1901—1912 г.г. (миллионы пудов)

430 — 542 — 609 — 607 — 657 — 549 — 433 — 367 — 721 — 809 — 771 — 498, —

не говоря уже о той возрастающей тенденции, какую можно обнаружить при некоторой обработке ряда—самая амплитуда колебаний, очевидно, несравненно больше—разница между максимумом и минимумом достигает 120 процентов.

Но глазомер далеко не всегда дает достаточно отчетливое и объективное представление о степени устойчивости того или другого статистического ряда. Даже в приведенных мною только-что примерах вполне возможно сомнение,—не представляется ли ряд брачности более устойчивым, нежели ряд смертности. Поэтому, для более определенного и не зависящего от субъективных впечатлений решения вопроса о степени устойчивости требуется располагать какими-либо общими приемами ее *измерения*, результаты которого выражались бы в однородных, сравнимых и обязательных для каждого величинах.

Простейший из таких приемов—вычисление *среднего отклонения* (первой степени) от средней. Напомню способ вычисления, хотя, конечно, его можно было бы предполагать и памятным подавляющему большинству тех, кто приступает к чтению этой книги: вычисляют разности между каждым из членов ряда и среднею $a_1 - m$, $a_2 - m$, $a_3 - m$, $a_4 - m$ и т. д.—отклонения отдельных членов ряда (обозначаем их буквами δ_1, δ_2, δ_3 . . . .); сосчитывают их сумму независимо от знака, $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots$ или $\Sigma\delta$, и затем путем деления на число членов ряда получают среднюю из этих величин—среднее отклонение $\frac{\Sigma\delta}{s}$, обычно выражаемое в процентах к средней. Это—одна из мер, дающих общее представление о степени устойчивости или напротив— колеблемости ряда, а следовательно и о значении или смысле самой средней: пусть отдельные члены ряда обнаруживают даже очень сильные отклонения от средней—если среднее отклонение не велико, то наличность отдельных более значительных отклонений от средней не мешает признать данный ряд устойчивым, а среднюю—выражающею некоторый общий закон, который только в некоторых отдельных случаях был резко нарушен вмешательством каких-то случайных причин.

В качестве конкретного примера практического применения этой меры отклонений приведу хотя бы применение ее для выражения степени колеблемости урожаев. Эта последняя выражается для районов черноземной полосы следующими числами средних отклонений, приведенными в процентах к средним величинам урожаев: нижне-волжский район —28%, средне-волжский—24%, новороссийский и центральный—21%, малороссийский и юго-западный 17%; из районов нечерноземной максимальное среднее отклонение дают приуральский и белорусский районы, именно 14%; польский и литовский дают 10%, прибалтийский—9%, северный—8%. Цифры эти дают вполне наглядное и соответствующее реаль-

ному характеру явления представление как об общей разнице в степени колеблемости урожаев в черноземной и в нечерноземной полосе, так и различиях между отдельными районами внутри каждой из полос.

Другая мера, обычно применяемая для определения степени устойчивости статистических рядов,—среднее квадратическое отклонение. Как и в предыдущем случае, определяются отдельные отклонения — разности между каждым из членов ряда и средней, каждая из разностей возводится в квадрат, получившиеся квадраты δ_1^2, δ_2^2, δ_3^2 и т. д. суммируются, путем деления получившейся суммы получается средняя, из которой извлекается квадратный корень, и таким образом получается среднее квадратическое отклонение

$$\sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{s}},$$

обычно тоже выражаемое в процентах к средней.

Вопрос об относительном достоинстве той и другой меры—среднего отклонения (первых степеней) и среднего квадратического отклонения, представляется спорным. Говоря вообще, среднему квадратическому отклонению приписываются известные преимущества перед средним отклонением первых степеней. Но одни из них представляются мне совершенно неубедительными—таково, например, то соображение, что сумма отклонений первой степени, из которых одни ведь положительные, а другие отрицательные, по самому свойству средней величины равняется нулю, а „возведение в квадрат есть простейший способ устранения знаков, дающий математически-пригодные результаты" (Udny Yule),— этот аргумент представляется неубедительным, потому что устранение знаков гораздо проще и с таким же успехом достигается при вычислении среднего отклонения первой степени путем складывания а б с о л ю т н ы х в е л и ч и н отклонений, без внимания к знаку.

Немногим существеннее другое соображение,—именно то положение, что „оценка точности по средней из квадратов ошибок дает наиболее верный результат" (Czuber). Это положение—так называемый „принцип наименьших квадратов", однако, недоказуемо и носит вполне условный характер: будем ли мы исходить при оценке точности из квадратов, или из первых, третьих, четвертых и т. д. степеней,—„каждый из этих способов будет хорош, если даст сравнительно простой результат и если все с о г л а с я т с я применять его" (Слуцкий): в частности, м а т е м а т и ч е с к и й анализ выяснил, что с т е п е н ь д о с т о в е р н о с т и оценки точности, какую дает среднее отклонение п е р в о й степени, в е с ь м а б л и з к а к той, какую обеспечивает квадратическое отклонение (Czuber). Принцип наименьших квадратов имеет, в самом деле, большое значение по своей, как выражается Yule, математической пригодности (algebraical convenience)—, по тем

математическим построениям, какие выводятся из него и какие играют есьма серьезную роль в теории погрешностей, а затем и в математической статистике—но собственно для оценки степени пригодности среднего квадратического отклонения как простой меры устойчивости рядов, а вместе с тем—степени типичности выводимых из них средних, все это не имеет значения.

Не более решающее значение имеет по существу и третий аргумент в пользу среднего квадратического отклонения, но с точки зрения, так сказать, научной практики значение этого аргумента все же представляется наиболее существенным. Этот аргумент—соотношение, существующее, как мы подробнее увидим ниже, между среднею квадратическою ошибкою и теоретическою мерою дисперсии, находящею себе выражение в формулах модуля, „меры точности", „вероятной ошибки" и пр.

$$\sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{s}} = \sqrt{\frac{pq}{s}} = \sqrt{\frac{mn}{s^3}}$$

Строго говоря —как я сказал— и этот аргумент не может претендовать на решающее значение: в определенном соотношении с формулами, могущими служить теоретическою мерою дисперсии, стоит, как это показано еще Пуассоном, и среднее отклонение первой степени. Именно, с такою же степенью приближения и такою же степенью достоверности, как и приведенное только-что соотношение среднего квадратического отклонения, существует равенство

$$\frac{\Sigma\delta}{s} = \sqrt{\frac{2pq}{\pi s}},$$

— и именно это соотношение было использовано французским страховым математиком Dormoy, который пришел к теории дисперсии, вполне аналогичной с излагаемым ниже учением о дисперсии Лексиса, положив в основу ее сопоставление средней ошибки первых степеней с только-что приведенною теоретическою мерой.

Тем не менее, именно этот аргумент имеет п р а к т и ч е с к и наиболее серьезное значение, потому что формула Dormoy забыта, а пользуются формулами Лексиса, основанными на соотношениях среднего квадратического отклонения. Для данной специальной цели, поэтому, без вычисления средних квадратических отклонений обойтись нельзя,—но это обстоятельство не предрешает вопроса о степени пригодности среднего отклонения первой степени и среднего квадратического отклонения для статистической практики — как способа, просто, измерения и сравнения степени колеблемости статистических рядов. В этом собственно смысле ответ на поставленный вопрос будет всецело зависеть от конкретных запросов каждой отрасли знания, в которой находит себе применение статистический метод, и в которой приходится прибегать к измерению отклонений. В частности, в социальной статисти-

ке—кроме, может быть, отдельных случаев, где приходится считаться с соображениями вроде излагаемых непосредственно вслед за сим, вполне возможно довольствоваться вычислением среднего отклонения из первых степеней: представление о степени колеблемости ряда получается достаточно отчетливое, а вычислений требуется, очевидно, несравненно меньше. В биологической и в частности в так называмой вариационной статистике дело, повидимому, обстоит иначе, и решительное преимущество отдается среднему квадратическому отклонению. Решающее значение имеет в этой области то обстоятельство, что среднее квадратическое отклонение лучше отражает более резкие крайние отклонения, а этому обстоятельству вариационная статистика, исходя из теоретического представления и запросов учения об изменчивости, приписывает первостепенно важное значение. „Для суждения об изменчивости расы"—читаем мы в одной специальной монографии из данной области,—„среднее отклонение первых степеней не годится, потому что на величину среднего отклонения имеют одинаковое влияние все варианты ряда. Так как границы изменчивости расы шире, чем границы изменчивости части расы, то чтобы получить более точную меру изменчивости, необходимо усилить влияние на ее величину крайних групп вариационного ряда",—а это, благодаря математическим свойствам возвышения в квадрат (ср. ряд первых степеней 1, 2, 3, 4... и ряд квадратов 1, 4, 9, 16 и т. д.), и достигается переходом к среднему квадратическому отклонению.

Однако, та и другая формулы недостаточны для целей теоретического изучения устойчивости статистических рядов. В несколько схематизированном виде, их недостатки могут быть сведены к следующему. Прежде всего, та и другая меры—и среднее отклонение первых степеней, и среднеквадратическое отклонение—показывают только общий размер отклонений от средней величины, оставляя совершенно открытым вопрос о том, как распределяются отдельные отклонения по своей величине. А затем—что имеет более непосредственное отношение собственно к занимающему нас сейчас вопросу они позволяют, правда, с известною степенью наглядности и отчетливости сравнивать между собою, в отношении их колеблемости, различные ряды,—позволяют сказать, какой из них более, какой менее устойчив. Но они не дают представления, так сказать, об абсолютной мере устойчивости каждого данного ряда,—не отвечают на вопрос постоянен ли данный ряд статистических чисел, или нет. Возьмем в самом деле, два гипотетических ряда—один, выражающий колебания смертности по расчету на тысячу душ населения, другой—общую сумму ценности ввоза и вывоза, в рублях на душу населения; первый пусть будет: 34—35—34,5—32—34—40—34—32—35—33 - 33,5—34, второй—26—32—31—28—26—25—28—31—31—32—34 - 36. Для первого из них среднее отклонение первых степеней будет 3,7, для второго—9,7

первый ряд, значит, приблизительно в $2^1/_2$ раза устойчивее, нежели второй; аналогичный результат получился бы, конечно, и при вычислении среднего квадратического отклонения. Значит, первый ряд значительно устойчивее, а выведенная из него средняя гораздо отчетливее выражает закон данного явления, нежели средняя второго ряда. Но, может быть, даже и этот первый ряд недостаточно устойчив, хотя он и устойчивее второго,—а может быть, напротив, достаточно устойчив и второй ряд. Чтобы дать определенный ответ на вопрос, устойчив ли первый ряд, устойчив ли второй, мы должны иметь возможность сопоставить результат измерения его фактической колеблемости с каким-то представлением о том, что такое устойчивый ряд,—иначе говоря, с каким-то теоретически установленным мерилом той степени колеблемости статистического ряда, при которой можно еще говорить об устойчивости данного ряда и за пределами которой ряд придется признать неустойчивым. Такое теоретическое мерило и дается нам теорией вероятностей, в виде формул модуля и других соотносительных с нею формул — меры точности, вероятного отклонения и т. п.; такое же теоретическое мерило дает—как я говорил — и формула Dormoy, которая, однако, совершенно не получила применения в научной практике. Все эти величины показывают тот нормальный размер дисперсии, который должен был бы иметь место в том предположении, что исследуемый ряд сложился под влиянием одной неизменной совокупности постоянных причин, и что отклонения от средней обусловливаются лишь одними чисто случайными обстоятельствами,—все они, в той или другой форме, выражают так называемый закон нормальных отклонений.

К закону нормальных отклонений, дающему как теоретическую общую их меру, так и теоретическое распределение их, в зависимости от их величины, мы приходим двумя путями. Один из них уже известен нам из предыдущей главы: это—вся та совокупность соображений и построений, в конечном результате которой мы приходим к математической формулировке закона больших чисел, в виде теоремы Бернулли-Лапласа, непосредственно дающей формулу модуля, как теоретической меры отклонения частоты от вероятности, могущих иметь место при данной вероятности явления и данном числе наблюдений или испытаний, в предположении чисто-случайного характера отклонений. Другим исходным пунктом, также приводящим нас к закону нормальных отклонений и к известным теоретическим мерам устойчивости статистических рядов, является теория погрешностей или ошибок наблюдения. Те формулы, к которым она приводит, представляют близкую аналогию с формулами, выводимыми из теоремы Бернулли-Лапласа,—тем не менее, мы должны на

ней остановиться с известною степенью подробности, во-первых, потому, что—как будет выяснено в конце следующей главы — аналогия формул теории погрешностей есть именно только аналогия, а не тождество и, в частности, первые представляются значительно более широкими, нежели вторые; и, во-вторых, потому, что при большом сходстве в математическом способе выражения, те и другие формулы имеют совершенно различный существенный смысл; теорема Бернулли-Лапласа, равно как и теорема Пуассона, а с ними и входящие в них или выводимые из них формулы для измерения устойчивости статистических рядов, имеют в виду распределение тех обособленно-существующих в природе единичных случаев, из которых слагается данное массовое явление. Теория же погрешностей или ошибок наблюдения имеет дело, в самом деле, с погрешностями или ошибками наблюдения или измерения—с погрешностями, получающимися при многократных измерениях одного объекта, благодаря неточности наших орудий и приемов измерения и несовершенству наших органов восприятия: измеряет ли торговец материал на аршины или сахар на фунты, или топограф измеряет, тригонометрическим способом, известную площадь, или химик определяет, при помощи точнейших взвешиваний, количество различных элементов в каком-либо химическом соединении, или астроном определяет и вычисляет элементы движения какого-нибудь светила,—каждой из этих операций присущи свои погрешности,—разница только в их мере: при грубых измерениях имеют место, сравнительно, очень значительные погрешности, при тонких и точных—неуловимо-ничтожные; но известные погрешности неизбежны при всяком, сколь угодно точном наблюдении или измерении. Действительно, неизбежны и неустранимы, так называемые, „неправильные“ или „случайные“ погрешности, вытекающие, как я сказал, из неточности орудий наблюдения и измерения и несовершенства органов человеческого восприятия,—в противуположность, так называемым, „систематическим“ или „правильным“, или, еще лучше, „односторонним“ погрешностям, вытекающим или из каких-либо обстоятельств, относящихся к самому существу данного явления, или, чаще, из каких-либо односторонне-действующих условий наблюдения: неверность весов, в смысле перевешивания одной из чашек над другою, неверность силомера, благодаря слишком гугой или слишком слабой пружине, сжимание объекта при антропометрических или, вообще, биологических измерениях и т. п. В круг ведения теории погрешностей входят только „неправильные“ или „случайные“ погрешности; погрешности постоянные по самому своему свойству не поддаются математическому обобщению,—теория погрешностей только устраняет их при относящихся к случайным погрешностям вычислениях.

Для иллюстрации формулированного только-что положения относительно неизбежности случайных или неправильных погрешностей, как необ-

ходимого следствия несовершенства всякого человеческого восприятия и всех имеющихся в распоряжении человека приемов наблюдения и исследования, приведу конкретные примеры. Максимумом точности наблюдений признается астрономия. А между тем, вот перечень источников погрешностей, с которыми приходится считаться астроному в конкретном случае определения положения неподвижной звезды при помощи меридианного круга, как он дается знаменитым астрономом Бесселем и приводится у Криса: «инструмент должен быть, прежде всего, установлен на звезду, и это наведение может быть неверным от различных причин, а именно: 1) потому что имеется граница силы зрительной трубы, в пределах которой ее направление остается произвольным; 2) потому что точка образа звезды, которую хотят привести в визирную линию, может быть произвольною внутри известных границ, которые для больших и ярких звезд шире, нежели для малых и менее ярких, откуда следует, что, в зависимости от наблюдения днем или ночью, при более или менее ясном небе, могут быть взяты разные точки; 3) потому что звезда редко представляется или даже никогда не представляется наблюдателю спокойною, а всегда дрожащею, благодаря недостаточному равновесию воздуха, а потому приходится выбирать какую-либо точку, лежащую между крайними границами этого движения. К этому присоединяются источники погрешностей, совершенно независимые от установки инструмента, как-то: 4) влияние эластичности его металла, которая может, в зависимости от внешних, случайных обстоятельств, принимать большее или меньшее значение, и благодаря которой направление трубы, в момент отсчета наблюдения, уже не то же самое, что в момент установки инструмента; 5) неточность показаний мерительного круга, которая проистекает из ничтожных неравенств его собственных делений и делений нониусов, и которая проявляется в виде переменной погрешности, так как, обычно, при каждом повторении наблюдения, получается совпадение других делений; 6) неточность, проистекающая из ограниченной точности служащего для отсчитывания оптического приспособления»,—далее следует еще семь пунктов, после которых Бессель замечает: «Весьма вероятно, что в этом перечислении причин, которые участвуют в появлении видимой погрешности наблюдения, мы пропустили многие из них,—например, я не счел нужным упоминать о случайном невнимании при выполнении отдельных моментов наблюдения, о невыгодном или неспокойном освещении нитей и делений, о влиянии холода на инструмент. Во всяком случае—таков заключительный вывод Бесселя,—этим перечислением причин погрешностей я сделал ясным, что даже этот простейший род наблюдений должен обнаружить общую погрешность, происходящую от многочисленных причин, из которых каждая действует независимо от других».

Но астрономия и другие точные науки отдают себе отчет в тех погрешностях, от которых страдают их наблюдения и измерения, и стремятся их измерить. Отсюда—особая теория погрешностей, как ветвь теории вероятностей. Почему же, спрашивается, к погрешностям наблюдения приложима теория вероятностей? Ответ на поставленный таким образом вопрос вытекает, по Вундту, из того обстоятельства, что уравновешение случайных погрешностей, которое есть просто эмпирически данный факт, «необходимо приводит к двум предпосылкам: во-1-х, случайные отклонения тоже должны покоиться на определенных причинах, так как иначе нельзя было бы ожидать никакой правильности в отношении частоты отклонений к их величине, и, во-2-х, причины случайных отклонений должны быть подвержены

постоянным колебаниям, но так, что они, в среднем выводе, действуют в противуположных направлениях с одинаковою силой. Именно это обстоятельство—замечает Вундт—делает случайные отклонения недоступными для каузального исследования: ибо о причинах мы заключаем только по их действиям, а потому причины, которых действия длящимся образом сглаживаются, не поддаются исследованию».

С гораздо большею степенью подробности ответ на поставленный вопрос разработан у Криса [1]). Суть дела сводится к тому, с одной стороны, что для каждой области наблюдения и исследования мы из опыта знаем общие условия точности инструментов, степень восприимчивости наших органов восприятия, степень умелости и внимательности наблюдателей, — все это можно рассматривать как, приблизительно, постоянные условия. С другой стороны, как мы могли убедиться хотя бы на конкретном примере, разобранном Бесселем, общая погрешность всякого наблюдения или измерения происходит „от многочисленных причин, из которых каждая действует независимо от других“; иначе говоря — ошибки всякого наблюдения слагаются из совокупности большого числа независимых друг от друга „элементарных ошибок“. Для каждой из них существует некоторое ограниченное (хотя, конечно, чаще всего неизвестное нам) число возможностей, — совершенно так же, как некоторое ограниченное число возможностей существует для выхода шаров того или другого цвета, при соответственным образом налаженных испытаниях, — и эти имеющиеся в ограниченном числе возможности повторяются в самых разнообразных комбинациях, в полной аналогии с комбинациями „случайных“ причин в опытах с шарами и играх, основанных на случае. „Так, например,—замечает Крис—при отсчетах на какой-либо шкале существует могущий быть определенным образом учтенным ряд возможностей для положения стрелки по отношению к делениям. Каждое положение стрелки обусловливает — предполагая все остальные условия совершенно определенными — вполне определенную ошибку в отсчете, все равно, будем ли мы отсчитывать только целые деления или определять положение индекса между двумя делениями еще и в десятых расстояния между ними“.

Затем, дальнейшая необходимая предпосылка применения теории вероятностей к погрешностям наблюдения — неуловимое разнообразие тех условий, которые могут породить элементарную ошибку данной величины, — то самое условие, которое Вундт имеет в виду, когда говорит о „невозможности каузального объяснения“. Так, могущие отражаться на результатах наблюдения сотрясения почвы обусловливаются тем, что „по улице в течение известного времени проезжает некоторое, приблизительно определенное количество больших и малых экипажей, ... при чем, однако, распределение проезда их во

[1]) Kries, Prinzip. d. W.-R., стр. 217—233.

времени, в известных пределах, зависит от неизвестных нам особых обстоятельств — от случая. Таким образом, наряду с первою предпосылкой, именно, что известные моменты остаются постоянными, а по отношению к другим существует определенный и ограниченный круг возможностей", приложение математических вероятностей к погрешностям сводится к тому представлению, что для известной совокупности возможностей те Gesamtbeträge — те общие количества, в которых они должны необходимо проявиться, должны предполагаться annähernd von vornherein bestimmt—приблизительно предопределенными в определенном размере.

Дальнейшее важное условие применения математической вероятности — независимость отдельных источников элементарных погрешностей· „самая природа большинства источников погрешностей делает непосредственно-ясным, что отдельные наблюдения должны рассматриваться по отношению к ним как ряд независимых друг от друга случаев. В эмпирическом доказательстве этой независимости— полагает Крис—едва ли есть необходимость; да едва ли оно было бы и возможно в виду того огромного числа наблюдений, которое было бы для этого необходимо. Наряду с этим однако могут, само собою разумеется, существовать и такие источники погрешностей, которые равномерно действуют по отношению к целому ряду наблюдений. Теория различает эти, „постоянные" погрешности от тех, другого рода, погрешностей, которые она называет „случайными", и так как постоянные погрешности никоим образом не могут быть предметом исчисления вероятностей, определенным образом ограничивает свои исследования „случайными погрешностями". При этом, однако—замечает Крис—„обычное в теории погрешностей различение постоянного и случайного не носит исчерпывающего характера, потому что могут существовать и такие источники погрешностей, которые, варьируя случайным образом, в то же время могут в одинаковом направлении влиять на ряд последовательных наблюдений, это будут не вполне постоянные, но в то же время и не вполне случайные в имеющемся здесь в виду смысле".

В конечном результате, „количественная вероятность для Fehlerbeträge, — для отдельных величин ошибок—по большей части, может быть определена с большим приближением, если только из достаточно длинного ряда возможно однородных наблюдений определена относительная частота больших и меньших погрешностей. Такое определение чрезвычайно облегчается—более того, самое применение исчисления вероятностей к теории погрешностей только и становится, въ более значительном объеме, возможным благодаря гипотезе, что относительная частота величин погрешностей всегда распределяется совершенно определенным образом, поддающимся математической формулировке;

в соответствии с этим не приходится каждый раз выискивать, какого рода функциональное отношение существует между вероятностью и величиной погрешности, а приходится лишь определить некоторое численное значение, стоящее в этом однажды навсегда определенном функциональном отношении".

Итак, еще раз: первоначально теория погрешностей имела в виду именно только ошибки наблюдения, — и лишь затем, по некоторой аналогии, она получила применение в области статистики. Аналогия эта вытекает из самого существа статистического метода. Его важнейшие методологические особенности, как мы знаем, сводятся к тому, во-1-х, что „производимая на основании индивидуального сравнения группировка фактов должна быть основана на индивидуальных признаках", и, во-2-х, „что выбранные для этого признаки должны давать легко распознаваемые группы, выбор которых должен соответствовать цели исчисления". Из этих-то особенностей—по Вундту—и вытекает применимость к данным статистического наблюдения тех самых принципов теории вероятностей, какие действуют для повторных наблюдений определенных феноменов, при чем только „понятие ошибки наблюдения переходит из субъективного в объективное значение, означая промежуток, в пределах которого может колебаться данное массовое явление". Или, как формулирует Р. М. Орженцкий: средняя, как „нечто, хотя и не конкретное, но реальное", играет — раз теория погрешностей применяется к статистике—роль измеряемой истинной величины; отклонения — „не случайные ошибки, а действительные отступления наблюдаемой величины от некоторого конкретно не существующего, но лежащего в основе ее фактора"; этот фактор— „сила или причина, или совокупность сил или причин, стремящихся в каждом отдельном случае произвести определенный, соответствующий ей результат, но производящий этот результат всегда с случайным отклонением от своего истинного значения".

Инициатива применения теории погрешностей принадлежит Кетле, который был одновременно статистиком, с одной стороны, и математиком и астрономом с другой: Кетле подметил близкое сходство в распределении численных рядов, выражающих группировку статистических данных — в частности данных о человеческом росте, и рядов, изображающих результаты многократных измерений,—и от этого сходства он пришел к заключению о существовании аналогии в самих тех вещах, к которым относятся аналогичные по виду численные ряды: отклонения от средней он рассматривает как отклонения от некоторого типа; эти отклонения уподобляются ошибкам, погрешностям природы, в которые она впадает, создавая единичные экземпляры данного типа Отсюда непосредственно вытекало применение начал и формул теории погрешностей сначала к человеческому росту, а потом и к ряду других явлений антропологического и демографического характера.

„Если—так формулирует Лексис сущность соображений Кетле—какая-либо величина наблюдается в многочисленных единичных случаях со случайными отклонениями от ее типического значения, то можно принять, что эта величина находится под влиянием большого числа источников элементарных ошибок, которые — совершенно так же, как при наблюдениях в астрономии и других точных науках — столь же легко могут влиять в положительном, как и в отрицательном направлении, и притом — такое вводится гипотетическое предположение—с абсолютно равною силой. Если — предполагает Кетле — рост человека слагается под влиянием тысячи источников элементарных погрешностей, то типический рост получится только тогда, когда будет иметь место совпадение 500 положительных и 500 отрицательных элементарных ошибок. Это—случай относительно наиболее вероятный, но абсолютно, в виду огромного числа всех возможных комбинаций элементарных ошибок, его вероятность чрезвычайно мала. Если встречаются 550 положительных и 450 отрицательных источников элементарных ошибок, то в результате рост отклонится от типичной величины на 100 единиц уклонения в положительную сторону, и подобный случай столь же вероятен, как и совпадение 450 положительных и 550 отрицательных источников элементарных ошибок, в каковом случае получится рост, на 100 единиц ошибки уклоняющийся в отрицательную сторону". А если это так, то отсюда уже, естественно, вытекают и определенные заключения относительно характера распределения отдельных случаев по величине их отклонения от средней—от того нормального типа, в котором сглаживается влияние всех элементарных ошибок. Очевидно, наичаще будут встречаться случаи, сравнительно наименее уклоняющиеся от средней (ибо наиболее вероятны комбинации приблизительно равных чисел положительных и отрицательных элементарных ошибок): чем больше уклонение, тем оно будет встречаться реже, и наиболее значительные, крайние отклонения, будут встречаться в исключительно редких случаях.

Нужно ли было — спрашивается — введение в теоретическую статистику этих представлений теории погрешностей? На первый взгляд нет — не нужно, и введение этих представлений в статистику вызывает и принципиальные возражения. В конце концов мы, все-таки имеем в статистике дело не с многократными измерениями или наблюдениями одной величины, а с массами разных, отдельных величин, — а сходство — хотя тоже далеко не тождество — кривых распределения, получающихся в некоторых отраслях статистики, с кривой погрешностей, так же мало доказывает наличность существенной аналогии между погрешностями и явлениями статистической действительности, как появление числа π в формуле Стирлинга, а через нее — в интеграле Бернулли-Лапласа, не обосновывает каких-либо существенных аналогий между явлениями, к изучению которых

применяется исчисление вероятностей, и геометрическими свойствами круга. Не лишены, правда, известного видимого правдоподобия те принципиальные соображения, которыми обосновывается эта аналогия. Даже Кнапп, в общем более чем сдержанно относящийся к применению исчисления вероятностей в статистике, однако, признает применение идеи погрешности в статистике в принципе полезным, потому что „при существовании eines schlecht getroffenen Typus — неудачно осуществляемого типа" кривая должна была бы получить именно такой вид, какой она на самом деле получает для рядов роста и т. п. Однако, эта аналогия приобретает доказательный характер лишь в том случае, если, вместе с Кетле, исходить из представления, что природа, в самом деле, задавалась целью создавать те или другие типы и создавала их с теми или другими случайными погрешностями и отступлениями от неуклонно имевшегося ею в виду типа. Но это представление, сколько мне известно, в настоящее время решительно оставлено; во всяком случае, оставлена та концепция среднего человека, которая только и могла бы подвести прочный фундамент под применения идеи погрешности к массовым явлениям, относящимся к человеку. С другой стороны, распределение данных о росте и т. п. в виде симметричной кривой, аналогичной с кривою погрешностей, может быть объяснено и помимо гипотезы случайных погрешностей,—просто, из предположения случайных отклонений, по отношению к которому сама гипотеза нормального распределения погрешностей представляет собой, как ясно из всего изложенного на предшествующих страницах, не более как частный случай. Кривая погрешностей вполне аналогична кривой распределения отклонений от наивероятнейшей величины по формуле Бернулли-Лапласа. И в соответствии с этим — как подчеркивает Кнапп — совокупность данных, положим, о росте может быть рассматриваема как «unbewusst angestelltes Exempel — как без предвзятого намерения поставленный эксперимент из исчисления вероятностей»: беря группу 20-летних, мы как бы делали «отбор в слепую» по отношению к росту. Между тем, рост зависит от бесконечного множества скрещивающихся условий, благоприятных и неблагоприятных, при чем чаще всего благоприятные и неблагоприятные условия комбинируются так, что получаются не слишком далеко уклоняющиеся друг от друга величины. Если взять не отдельную группу, а всех 20-летних, то каждый индивид как бы представляет собой как «blind gegriffene Anzahl von Ursachen» — как бы выхваченную на удачу совокупность причин из бесконечного их множества, и следовательно, располагая 20-летних по группам, я делаю то же, что я делал бы, если бы группировал свои Griffe — свои тиражи из большого разнообразия причин по пропорции их смешения [1]). Значит, еще раз: —

[1]) Knapp, Quetelet als Theoretiker, Jahrb. f N.-Oek. und Stat, Bd XVIII, стр. 107-108.

группировка статистических данных, отвечающая «кривой погрешностей»—она же кривая Лапласовского интеграла, может быть обоснована и помимо гипотезы погрешностей, просто как один из частных случаев теоремы Бернулли-Лапласа — закона случайных отклонений.

Если стоять на точке зрения общепринятого учения о дисперсии, как оно будет изложено в дальнейшей части этой главы, это в самом деле так—вся схема Лексиса вполне выводится из формулы Бернулли-Лапласа. Но вопрос поставится иначе, если стать на ту точку зрения, которая будет развита мною в следующей, 9-ой главе. Дело в том, что между формулою Бернулли-Лапласа и законом случайных ошибок есть и существенная разница: если в одном смысле—как отмечено—закон случайных погрешностей может быть рассматриваем как частный случай более общего закона случайных отклонений, то в другом смысле, наоборот, закон ошибок шире, нежели формула Бернулли-Лапласа. Эта последняя применима лишь при наличности определенных предпосылок — если, именно, мы имеем дело с случаями наступления и ненаступления некоторого события, которые могут быть символизированы числами 1 или 0. Закон ошибок — повторяю — шире: как отмечает Poincaré, для применимости этого закона требуется лишь, чтобы наблюдаемые погрешности были результатом очень большого числа частичных, независимых погрешностей; эти последние могут следовать любому закону, лишь бы вероятность положительных ошибок была равна вероятности отрицательных ошибок того же значения[1]). Чрезвычайно важное значение этого обстоятельства выяснится для нас в следующей главе, и оно-то, в конце концов оправдывает введение концепции случайных погрешностей, как рабочей гипотезы, в теоретическую статистику.

Вернемся теперь к схеме Кетле, рассматривающей отклонения наблюденных реальных величин от средней, как результаты суммирования элементарных ошибок в разных комбинациях. Как я уже сказал, из этой схемы вытекают определенные заключения относительно характера распределения отдельных случаев по величине их отклонения от средней — от того нормального типа, в котором сглаживаются и взаимно компенсируются влияния всех мыслимых элементарных ошибок. Очевидно, чаще всего должны встречаться наименьшие отклонения от средней, потому что наиболее вероятны комбинации приблизительно равных чисел ошибок in plus и in minus; чем больше отклонения, тем они будут встречаться реже, самые же крайние отклонения будут встречаться в исключительно редких случаях.

Берем, в самом деле, пример у Czuber'a, упрощенный в том смысле, что участвующими в возникновении общей видимой погрешности предполагаются всего лишь три источника случайных оши-

[1]) Poincaré, Reflexions sur la théorie des probabilités. Revue générale des sciences pures et appliquées, 1899, № 7, стр. 269.

бок, могущие дать такие значения положительных и отрицательных погрешностей: первый — 2, — 1, 0; второй — 1, 0, + 1; третий — 1, 0, + 1, + 2, + 3, — но менее упрощенный, нежели схема Кетле в том отношении, что отдельные погрешности не подведены под один общий закон симметрии. Различные комбинации этих элементарных ошибок могут дать в результате такие видимые ошибки наблюдения:

— 4, — 3, — 2, — 1, 0, + 1, + 2, + 3, + 4, —

при чем, например, ошибка — 4 может возникнуть только одним способом — из комбинации элементарных ошибок — 2, — 1, — 1; ошибка + 4 — тоже только одним — из комбинации 0, + 1, + 3. Ошибка + 2 может возникнуть уже шестью способами — из комбинаций 0, 1, 1; 0, 0, 2; 0, — 1, 3; — 1, 0, 3; — 1, 1, 2; — 2, 1, 3. Ошибка 0, т. е., иначе сказать, верный результат может получиться девятью способами — из комбинаций — 2, — 1, 3; — 2, 0, 2; — 2, 1, 1; — 1, — 1 2; — 1, 0, 1; — 1, 1, 0; 0, — 1, 1; 0, 0, 0; 0, 1, — 1. Подобным же образом могут быть получены числа комбинаций и для остальных значений видимой ошибки, и в результате для всех девяти возможных значений видимой ошибки наблюдения получаются такие числа комбинаций элементарных ошибок, значит такие числа благоприятствующих им статочностей:

1 3 6 8 9 8 6 3 1

Сумма всех статочностей, относящихся ко всем возможным комбинациям, т. е. общее число всех мыслимых комбинаций всех значений предполагаемых трех источников элементарных ошибок, будет 45, и, следовательно, вероятности каждого из девяти значений видимой ошибки будут $^1/_{45}$, $^3/_{45}$, $^6/_{45}$ и т. д.

„Уже на этом, сравнительно чрезвычайно простом примере — замечает Czuber—можно подметить быстрое понижение вероятности, а следовательно, и предвидимой частоты ошибок, по мере возрастания их величины». Если взят несколько более сложный пример — предположить наличность восьми причин элементарных ошибок, из которых каждая одинаково легко может вызвать одну из следующих элементарных ошибок:

— 4, — 3, — 2, — 1, 0, 1, 2, 3, 4,

то общее число мыслимых комбинаций этих элементарных ошибок по формуле вариаций из восьми элементов с девятью значениями $U_9^8 = q^8$, достигло бы $9^8 = 43.046.721$, а величина слагающихся из них действительных погрешностей наблюдения колебалась бы между — 32 и + 32. Эти комбинации распределились бы, в круглых числах, следующим образом: 2,3 миллиона комбинаций дали бы ошибку 0; по $1^1/_2$ миллиона комбинаций дали бы ошибку — 5 и симметричную ей ошибку + 5; по 950 тыс. комбинаций пришлось бы на долю ошибок — 10 и + 10; по 300 тыс. комбинаций дали бы ошибки — 15 и + 15; по 50.000 комбинаций привели бы к ошибкам

— 20 и + 20; на долю ошибок — 25 и + 25 осталось бы всего по 3500 комбинаций, и по одной лишь комбинации (элементарные погрешности — 4 или + 4 по всем восьми причинам) дало бы наиболее значительные из мыслимых ошибок наблюдения: — 32 и + 32.

Ясно и то, почему вероятности различных комбинаций так различны, — ясно уже на примере с тремя источниками элементарных ошибок: значения видимых погрешностей наблюдения — 4 и + 4 могли быть получены, каждое, только одним способом — из комбинаций одних только крайних значений всех трех элементарных ошибок; напротив, значение 0 могло быть получено путем весьма разнообразного подбора положительных и отрицательных, а также нулевого значения каждой из элементарных погрешностей. Или в общей форме: неимоверно большое число комбинаций, порождающих малые ошибки наблюдения и ничтожное число комбинаций, дающих большие ошибки, «объясняется тем, что первые могут слагаться не только из малых элементарных погрешностей, но и из более значительных, и даже из самых больших, раз они в большей своей части погашаются в силу различия знаков, тогда как большие ошибки могут получиться исключительно из больших элементарных погрешностей, и притом с решительным преобладанием одинаковых знаков» (Czuber). При том понимании отклонений от средних статистических коэффициентов, которое установлено Кетле и за ним Лексисом,—при понимании их как погрешностей, получающихся при конкретных наблюдениях некоторой, лежащей в основе данного массового явления, истинной величины, этот вывод может быть непосредственно распространен на распределение единичных случаев массового явления по величине их отклонения от средних.

Обобщенная формула для известного под именем «закона Гаусса» закона случайных ошибок, сущность которого выяснена нами в предыдущих строках, выводится аналитическим путем, исходя либо из только что рассмотренной гипотезы элементарных ошибок, либо из гипотезы об арифметической средней из имеющихся результатов наблюдения, как вероятнейшем значении искомой действительной величины. Проследить ход вывода, как это было сделано для теоремы Бернулли-Лапласа, я не имею возможности — интересующиеся читатели могут найти его хотя бы в книге Р. М. Орженцкого «Сводные признаки» [1]). Получающийся в результате «закон случайных погрешностей» или закон Гаусса, совершенно так-же, как и теорема Бернулли Лапласа и теорема Пуассона, слагается из 2-х положений: одного, устанавливающего вероятность ошибки любого данного размера, и дру-

[1]) Стр. 78-82.

гого, выражающего вероятность того, что видимая ошибка наблюдения не выйдет ни в одну, ни в другую сторону, за любой заданный предел. Если обозначить значение ошибки через ε, а могущую ожидаться вероятность появления именно этого значения ошибки через $\varphi(\varepsilon)$, то выражающий частоту появления этого значения ошибки закон изобразится формулой:

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2},$$

которая дает возможность вычислить соответствующее любому заданному значению ошибки вероятное число случаев появления именно этого значения. Вероятность же того, что ошибка не выйдет за некоторый наперед заданный предел δ, выразится формулой

$$\Phi(h\delta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h\delta} e^{-t^2} dt,$$

где величина h, по своему смыслу, вполне соответствует обращенному модулю теоремы Бернулли-Лапласа

$$h = \frac{1}{M} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2pq}{s}}} = \sqrt{\frac{s}{2pq}}$$

— смысл этого взаимоотношения в том, что величина h обратно пропорциональна величине, служащей мерою колеблемости, — а так как малая колеблемость, или, иначе сказать, неширокий размах отклонений равносилен высокой степени точности, и наоборот, то, значит, эта величина прямо пропорциональна степени точности, — откуда и ее характеристика или название «мера точности». Величина же δ — произвольный множитель, по своему смыслу совершенно аналогичный множителю γ в формуле Бернулли-Лапласа—прямо пропорциональный степени достоверности и обратно пропорциональный степени точности результата.

К формулам Гаусса мне—как я сказал—придется возвратиться только в конце следующей главы, когда я должен буду формулировать и мотивировать некоторые принципиальные сомнения по поводу общепринятого учения о дисперссии и устойчивости статистических рядов. Это общепринятое учение можно целиком вывести в его главных основаниях из формулы Бернулли-Лапласа и, в его дальнейшем развитии, из формул Пуассона: сам Пуассон в своих построениях совершенно не обращается к теории погрешностей. Сейчас я только подчеркну еще раз близкую аналогию формулы Бернулли-Лапласа и формулы Гаусса, — в частности тех интегралов, в которых выражаются вторые положения той и другой теоремы: под знаком интеграла и в той и другой стоят совершенно тождественные выражения,—откуда явствует, что общие свойства Гауссовой кривой погрешности должны быть те-же,

что и свойства кривой, изображающей распределение случайных отклонений по формуле Бернулли-Лапласа (см. гл. 6). Разница—в характере верхнего предела $h\delta$: в этот предел, кроме произвольного множителя δ, отвечающего просто нашему субъективному представлению желательной или необходимой для нас степени достоверности и точности результата, входит еще множитель h, отвечающий объективным условиям, именно степени конкретной точности данной серии измерений или наблюдений. В то время, поэтому, как кривая, отвечающая интегралу Бернулли-Лапласа, имеет всегда, для каждого данного γ, тождественный вид, кривая Гаусса, в зависимости от значения этой величины h, иначе сказать, от «меры точности», какую допускают объективные условия данной серии наблюдений или испытаний, может опускаться от средины к краям более или менее отлого: она будет тем круче, чем h больше, и, следовательно, измерения или наблюдения точнее, и напротив—тем отложе, чем h меньше, и значит, наблюдения или измерения менее точны. Именно это обстоятельство, как мы увидим в заключительной части следующей 9-ой главы, имеет для теоретической статистики первостепенно важное значение.

Теперь, еще несколько существенных замечаний относительно степени достоверности оценок, основанных на законе Гаусса, а главное—о предпосылках его применимости.

Первая из этих предпосылок вытекает из того уже известного нам положения, что принятая Гауссом функция $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2}$ лишь в тех случаях выражает вероятности различных значений видимой погрешности наблюдения, «когда последняя происходит от независимого соучастия очень многих элементарных погрешностей, совершенно независимо от того, какие вероятности принимать для больших или меньших значений этих последних. Для этого требуется две лишь предпосылки: во-1-х, чтобы для каждой из элементарных ошибок положительные и отрицательные их значения были равновероятны, и, во-2-х, чтобы средние значения одной или немногих из этих элементарных погрешностей не слишком сильно превышали средние значения всех остальных». В точных науках эти предпосылки очень часто имеются налицо. Независимо от сказанного выше, «сложное наблюдение всегда устраивается, по возможности, так, что отдельные его процессы обладают по отношению к конечному результату приблизительно одинаковою степенью точности, потому что было бы совершенно излишним придавать одной части наблюдения очень высокую точность, если эта последняя, благодаря неточности остальных частей, все равно не улучшила бы результата. А из этого", с присовокуплением всего изложенного выше, „вытекает, наконец, что в области естествознания Гауссов закон ошибок для многих видов наблюдений может быть рассматриваем как при-

близительно верное и притом удобное предположение. И это заключение получает желательное подтверждение в фактических результатах более длинных рядов наблюдений, которые, в самом деле, обнаруживают появление больших и меньших погрешностей, приблизительно, в соответствующей Гауссовой гипотезе частоте“ [1]). Вот, например, приводимое тем же Бесселем действительное распределение серии из 470 наблюдений по величине отклонений от наиболее вероятной величины, начиная от отклонения 0,0 –0,1 и кончая отклонением 1 и более: 20,0—18,7—16,6—12,4—10,8—7,7—5,5—3,0—2,1—1,5—1,7; теоретически вычисленное, по закону Гаусса распределение отклонений для такой серии 19,6—18,4—16,3—13,6—10,6—7,8—5,4—3,6—2,1—1,3—1,3; разница между действительными и теоретически ожидаемыми величинами+0,4,+0,3,+0,3—1,2,+0,2,—0,1,+0,1,—0,6,+0,0,—0,2+0,4—разницы, говоря вообще, совершенно ничтожные и позволяющие говорить о превосходном совпадении действительно получившегося распределения погрешностей с теоретически вычисленным, хотя все же позволяющие заключать о существовании действующего в некоторых определенных пределах источника несколько односторонней погрешности.

Однако, даже и в области точных наук предпосылки применимости Гауссова закона имеют место далеко не везде, и в соответствии с этим распределение погрешностей далеко не везде соответствует этому закону. Как указывает, например, Пуанкарэ, оценки по формулам теории погрешностей уже в теоретической физике менее применимы чем в астрономии, где приходится считаться лишь с такими абсолютно-неустранимыми и абсолютно случайными источниками погрешностей, как колебания воздуха и т. п.. Как подробнее развивает Крис, даже и в точных науках „могут иметься налицо обстоятельства, где определяющими для качества результата наблюдения становятся случайные влияния одного источника погрешностей, а тогда, нередко, получаются совершенно иные отношения вероятностей больших и малых погрешностей, чем отвечало бы формуле Гаусса. В такого рода случаях обычные предположения оказываются не подходящими и применение“ основанного на законе Гаусса метода наименьших квадратов „приводило бы к неверным результатам“ [2]). Не менее существенно другое обстоятельство. Как подчеркивает тот же Крис „слишком легко напрашивающееся и особенно благоприятствуемое распространенным взглядом на значение, вообще, исчисления вероятностей, представление—что, раз какие-либо наблюдения использованы согласно предписаниям теории, известный результат определен как наивероятнейший и вычислена его вероятная ошибка, то этим самым окончательно и без возможности каких-либо возражений установлено, как должен быть оцениваем соответствующий результат, и какая ему может быть приписана степень достоверности. Такому

[1]) Kries, Назв. соч., стр. 227-228.

[2]) Там же, стр. 229.

представлению—настаивает Крис—нельзя с достаточно сильным ударением противупоставить того положения, что этого не может дать никакая теория погрешностей и никакое исчисление вероятностей,—что та и другая исходит из предпосылок, наличность которых должна быть проверена в каждом отдельном случае. Могут ли постоянные погрешности вкрадываться в наблюдение,—оправдывается ли закон Гаусса или, может быт, имеют преобладающее значение отдельные источники погрешностей, следующие другому закону, выполнены ли известные наблюдения при действии еще тех же общих условий, как известные другие,—это все вопросы, которые надо себе поставить, и от ответа на которые существеннейшим образом зависит могущая быть приписанною результатам ценность" [1]). Математики игнорируют это обстоятельство, напротив, Крис не сомневается в том, что „большинство естествоиспытателей, имеющих дело с применениями теории погрешностей, не прецается в этом отношении каким-либо иллюзиям. Если физик, знакомящийся с каким-либо новым наблюдением, имеет какие-либо возражения против примененного при этом метода, то он не припишет особого значения тому обстоятельству—wird sich dadurch sehr wenig imponieren lassen, что для вероятной ошибки дается очень малая величина; он, напротив, ясно будет видеть, что эта последняя имеет решительно сомнительную ценность. И это особенно в том случае, если можно допустить возможность постоянных погрешностей, или когда точность метода определена в ряде предварительных опытов и на этом основании признается присущею и позднее поставленным окончательным опытам" [2]). Еще гораздо решительнее высказывается Пуанкарэ: признавая необходимым и возможным пользоваться, вообще, основанным на гипотезе Гаусса методом наименьшим квадратов, он признает, однако, вычисление вероятной ошибки наблюдения и, следовательно, количественное определение степени его точности на основании формулы Гаусса, «безусловно незаконным», ибо мы абсолютно не можем знать, устранена ли возможность систематических погрешностей, которые могут быть очень значительны при очень малой вероятной ошибке [3]).

Тем более в социальных науках. Как мне придется подробнее говорить в одной из последних глав этой книги, здесь отсутствие предпосылок теории погрешностей является прямо-таки общим правилом,—хотя бы уже потому, что в этой области мы более или менее всегда имеем дело с преобладающим влиянием определенных причин, играющих приблизительно ту же роль по отношению к результатам наблюдений массовых объектов, какую „систематические" ошибки играют по отношению к повторным наблюдениям или измерениям одного объекта. И это—в особенности раз выйти из сравнительно неширокого круга

[1]) Там же, стр. 232-233.

[2]) Там же, стр. 233.

[3]) l. c., стр. 269.

явлений, где социальная статистика соприкасается с антропологией, вообще с явлениями жизни человека, как органического существа, и перейти в область явлений хозяйственной или моральной статистики, где мы всегда имеем дело с действиями, определяемыми тою или другою совокупностью имеющих решающее значение, в каждом данном случае, и притом в определенных категориях случаев односторонне действующими мотивами.

Переходим теперь к формулам, дающим теоретическую меру дисперсии, а вместе с тем, в обращенном виде, и меру устойчивости статистических рядов.

Существо закона большого числа в его математической формулировке заключается в том, что при наличности известных предпосылок и при бесконечном числе испытаний должно наступить полное совпадение теоретической и действительной дисперсии,—а вместе с тем—действительного общего результата наблюдений или испытаний, частоты, с абстрактною или объективною вероятностью; при бесконечном, например, числе бросаний идеально-правильной монеты число случаев падения монеты орлом будет точно равно половине. Но с бесконечными числами испытаний фактически не приходится иметь дела. «Для тех, хотя и длинных, но не бесконечных рядов, для которых мы статистически учитываем частости явлений, мы никогда не имеем права уповать на полное совпадение частости с вероятностью. В частости, мы имеем лишь более или менее расплывчатое выражение вероятности, и чтобы по вероятностям гадать о частостях, или по частостям судить о вероятностях, необходимо располагать мерою этой расплывчатости» (А. А. Чупров). Такою мерою и являются уже известные нам из предыдущего формулы модуля и соотносительные с нею формулы „меры точности“ и „вероятной ошибки“ или „вероятного отклонения“. Выражение модуля,—как мы знаем из главы 6-ой (стр. 278—283) и гл. 7-ой (стр. 288 и сл.), непосредственно дается теоремою Бернулли-Лапласа: второе ее положение дает, в виде интеграла, вероятность того, что отклонение частоты события от его вероятности не выйдет из пределов

$$\pm\gamma\sqrt{\frac{2pq}{s}} \text{ или } \pm\gamma\sqrt{\frac{2mn}{s^3}},$$

т. е. что

$$\frac{m}{s} = p \pm \gamma\sqrt{\frac{2pq}{s}} \text{ или } p \pm \gamma\sqrt{\frac{2mn}{s^3}}.$$

Величина $\sqrt{\frac{2pq}{s}}$ и есть модуль, т. е., как его характеризует Курно, „число, выражающее в каждом особом случае скорость, с

которою полученные из наблюдений или испытаний средние значения стремятся к истинной средней". Множитель γ изменяется в зависимости от изображаемой „интегралом вероятностей" степени достоверности результата, а раз мы исходим из определенной степени достоверности, он является величиною постоянною, степень точности результата зависит уже от одной только величины модуля $\sqrt{\frac{2pq}{s}}$.

Иначе сказать: множитель γ один для всех, какие бы то ни были, статистических рядов, раз мы только задались определенною степенью достоверности результата: 0,9, 0,99, 0,999 и т. д. Величина же $\sqrt{\frac{2pq}{s}}$ или $\sqrt{\frac{2mn}{s^3}}$ зависит от конкретных условий задачи: от данной комбинации числа наблюдений s и вероятностей p и q, а если вероятности не известны, то из числа наблюдений s и чисел наступления данного и противоположного ему события m и n. Но раз взято определенное γ т. е. раз имеется в виду определенная степень достоверности результата, то величина интервала между $p-\gamma\sqrt{\frac{2pq}{s}}$ и $p+\gamma\sqrt{\frac{2pq}{s}}$, т. е. общая мера отклонений частоты к вероятности, могущих ожидаться с заданного степенью достоверности, зависит уже только от значения множителя $\sqrt{\frac{2pq}{s}}$, который — напомню еще раз—даст общую меру тех отклонений, какие должны были бы получаться, если бы каждая—ничтожная, средняя, большая—величина отклонения от средней повторялась ровно столько раз, сколько соответствует ее вероятности, в предложении чисто-случайного характера отклонений. Чем меньше этот множитель—чем, значит, ближе к вероятности p должна лежать частота $\frac{m}{s}$, тем точнее, очевидно, результат отражает действие находящих себе выражение в основной вероятности p и в отражающей ее частоте $\frac{m}{s}$ постоянных причин, причем—опять таки напомню, значение этой величины зависит, с одной стороны, от числа наблюдений s, а с другой—от соотношения вероятностей p и q или чисел наступления событий m и n. Таким образом, рассеяние, дисперсия, отдельных наблюдений убывает, а точность результата растет с уменьшением значения $\sqrt{\frac{2pq}{s}}$, —и. следовательно, ~~худом~~ модуль

$\sqrt{\frac{2pq}{s}}$ является непосредственно вытекающею из математической формулировки закона большого числа прямою мерою теоретической дисперсии, а вместе с тем—и обращенною мерою устойчивости статистических рядов,—обращенною в том смысле, что повышение устойчивости выражается уменьшением модуля. Напротив, прямою мерою устойчивости и обращенною мерою дисперсии является формула „меры точности“ h, выводимая непосредственно из модуля на основании соотношения

$$h = \frac{1}{M.},$$

откуда, очевидно,

$$h = \sqrt{\frac{s}{2pq}}.$$

Собственно значение величины h как „меры точности“, вытекает, как мы видели, из увенчивающего теорию погрешностей Гауссова интеграла. Последний дает вероятность того, что значение погрешности наблюдения лежит между пределами $-\delta$ и $+\delta$: раз значение интеграла p дано, то интервал 2δ суживается с возростанием h; а чем уже интервал, из которого не выходит ошибка наблюдения, тем выше точность наблюдения, — отсюда, мы видели, и самое обозначение величины h как „меры точности“ наблюдений или измерений.

Наконец, как теоретическая мера—прямая для дисперсии и обращенная для устойчивости статистических рядов, применяется еще, так называемая, „вероятная ошибка“ или „вероятное отклонение“. В соответствии с выясненным в гл. 6-ой общим словоупотреблением, „вероятными границами отклонения действительного числа случаев наступления события m от наивернейшего числа sp, а частоты $\frac{m}{s}$ от вероятности p, называют те, которым соответствует вероятность P, равная половине, так что эмпирическое значение частоты с одинаковою вероятностью может как оказаться лежащим внутри этих границ, так переступить за них. Чтобы найти величину вероятного отклонения, достаточно взять величину γ, отвечающую вероятности результата $P = \frac{1}{2}$. Эта величина дается нам непосредственно таблицею значений интеграла вероятностей (см. стр. 282) и равняется 0,4769, откуда значение вероятного отклонения будет.

$$W = 0{,}4769\sqrt{\frac{2pq}{s}}.$$

Таким образом, мы имеем три связанных между собою формулы, одинаково могущих служить мерой дисперсии и устойчивости статистических рядов, а именно:

$$M = \sqrt{\frac{2pq}{s}} \text{ или } \sqrt{\frac{2p(1-p)}{s}}$$

$$h = \frac{1}{M} = \sqrt{\frac{s}{2pq}} \text{ или } \sqrt{\frac{s}{2p(1-p)}}$$

$$W = 0{,}4769\,M = 0{,}4769\sqrt{\frac{2pq}{s}} = 0{,}4769\sqrt{\frac{2p(1-p)}{s}}$$

Для того обычного в статистике случая, когда априорная вероятность p неизвестна, она заменяется частотою $\frac{m}{s}$, получаемою из статистического подсчета и принимаемою, в силу теоремы Бернулли, за эмпирическое выражение вероятности. За подстановкою $\frac{m}{s}$ вместо p формула модуля — напомню — принимает вид

$$M = \sqrt{\frac{2\frac{m}{s}\left(1-\frac{m}{s}\right)}{s}} = \sqrt{\frac{2\left(\frac{m}{s}-\frac{m^2}{s^2}\right)}{s}} = \sqrt{2\left(\frac{ms-m^2}{s^3}\right)} = \sqrt{\frac{2m(s-m)}{s^3}},$$

и, соответственно, для меры точности и вероятного отклонения получаются такие выражения:

$$h = \frac{1}{M}\sqrt{\frac{s^3}{2m(s-m)}}$$

$$W = 0{,}4769\,M = 0{,}4769\sqrt{\frac{2m(s-m)}{s^3}}$$

В литературе теории статистики применяются все три приведенные формулы. Я предпочитаю пользоваться формулою модуля, во-первых, потому, что именно она наиболее непосредственно вытекает из математической формулировки закона большого числа, и, во-вторых, еще и потому, что модуль, как теоретическая мера дисперсии, наиболее непосредственно приравнивается, при достаточно большом числе наблюдений, к эмпирической мере дисперсии — средней квадратической ошибке. Именно, средняя квадратическая ошибка σ, помноженная на $\sqrt{2}$, при большом числе наблюдений равна модулю

$$\sqrt{\frac{2p(1-p)}{s}} \text{ или } \sqrt{\frac{2m(s-m)}{s^3}},$$

конечно только в том случае, если отклонения полученных из наблюдения величин от средней, выражающей действие постоянных причин, обусловливаются действием одних только случайных причин в том смысле, как этот термин разумеется и в статистической теории, и в теории вероятностей, иначе, говоря— если данное явление отвечает предпосылкам, при которых допустимо применение теории вероятностей к обработке соответственных чисел.

Заимствую у Р. М. Орженцкого[1]) весьма простое доказательство того, что среднее квадратическое отклонение, умноженное на $\sqrt{2}$, при большом числе наблюдений, и в предположении случайного характера отклонений, действительно равно модулю Если имеется s испытаний и известная вероятность p, то при достаточно большом числе испытаний наиболее вероятное число случаев появления события будет ps. Поэтому «представим себе, что при достаточно большом числе испытаний событие наступило в m случаях, причем $m = ps$, и не наступило в $n = s - m$ случаях; когда событие наступило, то из вероятного оно для данного случая становится достоверным», т. е. его вероятность делается 1; в противном случае, если событие не наступило, оно как бы становится несуществующим, невозможным для данного отдельного случая, и следовательно его вероятность для данного случая получает значение 0. Получается ряд, состоящий из m единиц и n нулей следующих друг за другом в случайном порядке:

$$1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1 \ldots$$

Средняя арифметическая этого ряда будет

$$\frac{m \times 1 + n \times 0}{s} = \frac{m \times 1}{s} = \frac{m}{s}.$$

Уклонения же каждого члена будут: для m счучаев наступления события $1 - \frac{m}{s} = 1 - p.$, для тех n случаев, когда оно не наступило, $0 - \frac{m}{s} = -p$, „откуда среднеквадратическое отклонение членов ряда составит

$$\delta = \sqrt{\frac{m(1-p)^2 + n(-p)^2}{m+n}} = \sqrt{\frac{mq^2 + np^2}{m+n}} = \sqrt{\frac{mq^2}{m+n} + \frac{np^2}{m+n}}.$$

Так как частота, при достаточно большом числе наблюдений, равна вероятности, то

$$\frac{m}{m+n} = p \quad \frac{n}{m+n} = q$$

откуда

$$\delta = \sqrt{pq^2 + qp^2} = \sqrt{pq(q+p)} = \sqrt{pq \cdot 1} = \sqrt{pq}.^2)$$

Среднее квадратическое уклонение средней, полученной из s наблюдений, будет в $\sqrt{s}$ раз меньше, т. е. будет равно только-что полученному числу, деленному на $\sqrt{s}$,— значит:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma \delta^2}{s}} = \sqrt{\frac{pq}{s}}.$$

но

$$\sigma\sqrt{2} = \sqrt{\frac{2\Sigma\delta^2}{s}} = \sqrt{\frac{2pq}{s}}.$$

---

[1]) Учебник математической статистики, стр 95—96.

[2]) У Р. М. Орженцкого знаком δ, обозначается среднее квадратическое отклонение членов ряда.

т. е. другими словами

$$M = \sigma\sqrt{2}$$

Приведу еще другое доказательство того же равенства—в общих чертах я беру его у Czuber'a, несколько лишь изменяя его.

Берем обычные обозначения: для вероятнейшего числа повторений события sp, для действительного m. В силу теоремы Бернулли-Лапласа, любое действительное число вовторений воспроизводит, с тем или другим отклонением, наивероятнейшее число, т. е,

$$m = p \pm \delta$$

При следующем, $s+1$-м испытании, получится или событие E, или противуположное ему событие E_1, т. е. другими словами не E. Следовательно, число повторений события, после $s+1$-го испытания, будет или $m+1$, или, по прежнему m. Но

$$m+1 = sp \pm \delta + 1,$$

а так как $p+q=1$, то вместо единицы мы можем подставить $p+q$ и получаем

$$\begin{aligned} m+1 &= sp \pm \delta + p + q \\ &= p(s+1) \pm \delta + q. \end{aligned}$$

С другой стороны

$$m = sp \pm \delta + 0.$$

Изображая 0 в виде $p-p$, получаем

$$\begin{aligned} m &= sp \pm \delta + p - p \\ &= p(s+1) \pm \delta - p, \end{aligned}$$

при чем в том и другом равенстве $p(s+1)$ есть, очевидно, наивероятнейшее число повторений события E при $s+1$ испытаниях. Поэтому равенства эти, взятые вместе, показывают нам, что в случае наступления события E отклонение действительного числа повторений от наивероятнейшего увеличивается на q, а сумма квадратов отклонений, очевидно, увеличивается на q^2. В случае не—E, отклонение уменьшается на p, а сумма квадратов увеличивается на p^2.

Но вероятности E и не-E суть p и q. А так как ничего третьего не может быть—наступит непременно или E или не-E, то вероятнейшее значение среднего квадрата отклонений действительного числа повторений от наивероятнейшего, по теоремам произведения и суммы вероятностей, будет:

$$\begin{aligned} pq^2 + q(-p)^2 &= pq^2 + qp^2 = \\ &= pq\,(q+p) = pq \cdot 1 = pq. \end{aligned}$$

Итак, вероятное значение среднего квадрата отклонений действительного числа повторений события от наивероятнейшего увеличивается, при каждом испытании, на pq. Но если итти по порядку от самого начала испытаний, то нарастание среднего квадрата отклонений выразится следующим образом:

при 0 испытаниях он будет равен нулю
„ 1 испытании „ „ „ pq
„ 2 испытаниях „ „ „ $pq + pq = 2pq$
„ 3 „ „ „ „ $2pq + pq = 3pq$
. . . . . .
„ s „ „ „ „ $(s-1)pq + pq = s\,pq,$

а среднее квадратическое отклонение m от sp будет равно $\sqrt{spq}$, откуда, путем деления на s, получаем среднее квадратическое уклонение частоты $\frac{m}{s}$ от вероятности p.

$$\frac{\sqrt{2spq}}{s} = \sqrt{\frac{2pq}{s}}$$

Нельзя не сказать, что оба приведенные элементарные доказательства и, пожалуй, в особенности второе, страдают не малою искусственностью. В частности, во втором доказательстве едва ли можно без натяжки говорить о среднем квадрате отклонений при 0, 1, 2 испытаниях, а тем более приравнивать его наростание к p q,—такое приравнивание законно только при большом числе испытаний, а никак не при одном, двух или трех испытаниях. Настоящее, окончательное доказательство интересующего нас равенства—равенств модуля и среднего квадратического отклонения, возможное лишь при помощи приемов дифференциального исчисления,—мы здесь проследить его уже не можем [1]). Несколько слов, однако, необходимо сказать по вопросу о существенном смысле этого равенства. Оно означает, что «хотя σ имеет внешнее выражение, отличное от δ (среднего квадр. отклонения), тем не менее, подобно последнему, σ тоже представляет сумму квадратов отклонений, лишь известным образом преобразованную. Из хода доказательства—продолжает Р. М. Орженцкий, у которого заимствована эта цйтата,—явствует также условие, необходимое для того, чтобы сумма квадратов уклонений могла получить вид σ. Это возможно тогда, когда берутся уклонения каждого сингулярного, далее неразложимого испытания от общей вероятности p. Пусть в основе N испытаний—продолжает Орженцкий,—лежит некоторая вероятность p; разобьем ряд испытаний на s групп по n испытаний в каждой; пусть в первой группе событие наступило в m_1 испытаниях, во второй—m_2, и т. д. до m_s. Получается ряд частноотносительных.

$$\frac{m_1}{n}, \frac{m_2}{n}, \ldots \frac{m_s}{n}.$$

Мера уклонения этих частноотносительных от истинного значения p может быть выражена, прежде всего, в виде суммы квадратов уклонений каждого частноотносительного от p, или

$$n\delta^2 = \left(\frac{m_1}{n} - p\right)^2 + \left(\frac{m_2}{n} - p\right)^2 + \ldots \left(\frac{m_s}{n} - p\right)^2.$$

---

[1]) См. у Czuber'a, W-R., т. I, 3-е изд.; см. также у Р. М. Орженцкого, Сводн. призн., стр. 103-106.

Но затем каждую группу можно разбить на n отдельных сингулярных, далее неразложимых испытаний, или весь ряд на $n s = N$ сингулярных испытаний; если теперь взять сумму квадратов уклонений каждого сингулярного испытания от истинного значения p, то в результате сумма квадратов уклонений получает выражение σ. Иначе говоря, если в основе ряда испытаний лежит некоторая истинная величина p, если ряд испытаний разбит на известное число групп и каждая группа представляет собою частноотносительное, то средняя арифметическая из суммы квадратов уклонений частноотносительных от истинной величины, или δ, дает ту же величину, как и средняя квадратическая мера уклонения, вычисленная по способу σ. Обратив это положение, мы можем сказать: если некоторое число частноотносительных дает по сравнению с истинною величиною p среднеквадратическую меру уклонения δ, равную σ, то частноотносительные представляют собою случайные отклонения от истинной величины p".

Я не буду приводить здесь примеров того, как близко может быть совпадение действительной дисперсии, полученной путем вычисления среднего квадратического отклонения, с теоретически вычисленною, в предположении чисто-случайного характера отклонений, мерою дисперсии—модулем. Такого рода примеры, в небольшом числе, можно найти в моей книге „Теория и методы статистики" (3-е изд. стр. 109-111) и в особенности в „Очерках по теории статистики" А. А. Чупрова (2-е изд., стр. 258 и сл.), где дается весьма, повидимому, полная сводка имеющегося в литературе материала подобного рода сопоставлений.

Примеры эти наглядно показывают, как близко, в самом деле, может быть действительное распределение отклонений, получаемых из данных наблюдения, к теоретическому, вычисленному в предположении чистого случайного характера отклонений, а вместе с тем—как близко вычисленная из данных наблюдения частота может соответствовать вероятности события. Однако, такое близкое совпадение действительной дисперсии статистических рядов с вычисленною имеет место далеко не всегда. Иногда такого совпадения не обнаруживается вовсе, иногда оно имеет сомнительный и спорный характер—это, как мы видели, особенно ярко обнаружилось в полемике по поводу статистико-философских построений Кетле и его последователей — „кетлетистов", когда одни и те же цифры служили одним как подтверждение существования поразительной устойчивости статистических рядов, а другим давали оружие для возражений против первых. Нужно было, значит, „построить приемы точного измерения степени устойчивости" и при помощи этих приемов установить фактические размеры устойчивости статистических чисел. В основе этих приемов и лежит только-что выясненное нами, обнаруживающееся в большом числе соотношение между средним квадратическим отклонением, как мерою эмпирической, и модулем (и другими связанными с

последним формулами), как мерою теоретической дисперсии: при достаточно большом числе наблюдений эти две величины—раз речь идет о явлениях, отвечающих предпосылкам теории вероятностей—стремятся к более или менее полному совпадению. Между тем численное значение модуля зависит только от числа об'единенных в одну серию наблюдений и от лежащей в основе их общей вероятности и при данных s, p и q или s, m и n представляется неизменным, тогда как напротив, величина среднего квадратического отклонения определяется фактическим распределением эмпирических частот вокруг средней; численное значение этого выражения будет тем больше, чем сильнее рассеяны частоты, и наоборот, тем меньше, чем теснее они скучиваются вокруг средней. На этом именно взаимоотношении модуля и среднего квадратического отклонения покоится введенный Лексисом в научный оборот метод измерения дисперсии, а с нею—и „устойчивости" статистических рядов.

Нельзя, однако, не заметить, что термин „устойчивость" получает, таким образом, совершенно своеобразное, специфическое значение, в виду чего я, в дальнейшем, и буду помещать его в кавычках,—обычное значение слов „устойчивость", „устойчивый" отнюдь не покрывается тем специфическим значением, какое придал этим словам Лексис. Если, в самом деле, взять два ряда чисел, причем колебания одного из них, уловленные, положим, чисто глазомерным способом, или измеренные приемом среднего квадратического отклонения, окажутся сильнее колебаний другого, то с точки зрения обычного словоупотребления не будет сомнения в том, что второй ряд устойчивее первого. С точки зрения Лексисовского понимания термина „устойчивость" дело обстоит не так просто, и обнаруживший более сильную колеблемость первый ряд может оказаться и более, и столь же, и менее „устойчивым". Степень „устойчивости" в этом, специфическом, смысле определяется совсем не абсолютною значительностью или незначительностью колебаний, или, иначе сказать, не степенью колеблемости каждого данного ряда по сравнению с другими рядами, а степенью их соответствия размерам колебаний, вычисленным априорно, в предположении чисто случайного характера отклонений. Для установления степени „устойчивости" в этом специфическом смысле, нам нет надобности сравнивать колебания данного ряда с колебаниями каких бы то ни было других статистических рядов,—нам достаточно, но зато и необходимо, знать для этого ту нормальную степень колеблемости, какую должен был бы обнаружить данный ряд при наличности предпосылок теории вероятностей. В виду такого решительного расхождения значения термина „устойчивость" в Лексисовой схеме с обычным словоупотреблением, было бы, может быть, более целесообразно в применении к этой

схеме совсем отказаться от термина „устойчивость“ и заменить его каким-либо другим,—хотя бы „правильность“, „закономерность“ статистических рядов. Я, однако, удерживаю этот привычный термин и только, как я уже сказал, буду ставить его в кавычки, чтобы напоминать читателю об его условном значении.

Итак, измерение „устойчивости“ по методу Лексиса производится путем сопоставления среднего квадратического отклонения полученного из наблюдения ряда с модулем или — за соответственным его преобразованием (обращением или умножением на коэффициент 0.4769) — с иною, вытекающею из математической формулировки закона большого числа, теоретическою мерою дисперсии. Мы уже знаем, что при наличности соответствующих предпосылок, если, значит, данное явление в полной мере подчиняется законам вероятности, т. е., если оно управляется одною какою-либо постоянною причиною или одним комплексом таких причин, со случайными лишь отклонениями отдельных случаев или групп случаев от отвечающего действию этих причин общего вида, эти две величины при достаточно большом числе наблюдений должны быть, приблизительно, равны, и, следовательно, частное от деления одной из этих величин на другую и, в частности, от деления среднего квадратического отклонения, умноженного на $\sqrt{2}$, на модуль,—так называемый коэффициент расхождения или коэффициент расходимости, обычно обозначаемый символом Q, должно быть, приблизительно, равно единице. При отсутствии этих условий, которые я пока формулирую лишь в самом общем виде с тем, чтобы впоследствии осветить их с самых разнообразных сторон; при отсутствии этих условий—говорю я—модуль и среднее квадратическое отклонение более или менее далеки от такого приблизительного совпадения, и частное от деления второй из названных величин на первую бывает иногда меньше, как правило—больше единицы; иначе говоря, среднее квадратическое отклонение, как правило, бывает больше модуля, действительная колеблемость статистических рядов бывает сильнее той, какая должна была бы иметь место при наличности предпосылок теории вероятностей.

Итак, коэффициент расхождения Q есть частное от деления среднего квадратического отклонения, умноженного на $\sqrt{2}$, на модуль

$$Q = \sigma \sqrt{2} : M$$

Вот, эта то величина Q—коэффициент расхождения, и лежит в основе исследований Лексиса и его школы относительно дисперсии и „устойчивости“ статистических рядов. Напоминаю еще раз: в случае, если массовое явление всецело подчиняется закону случайных отклонений, или, иначе сказать—отвечает предпосылкам теории вероятностей, эмпирическая мера отклонений должна быть, приблизительно, равна теоретической, а коэффициент расхождения должен быть, приблизительно, равен единице. „Отсюда,—говорит Лексис,—мы получаем два

независимых друг от друга способа определения устойчивости. Один, который мы можем назвать „физическим“, — вычисление среднего квадратического отклонения $\sqrt{\frac{2\Sigma\delta^2}{z-1}}$ [1]), пригоден для всех вообще величин, единичные значения которых подвержены случайным колебаниям“. Иными словами—все статистические ряды как нибудь колеблются, смотря по реальному характеру характеризуемых ими явлений, и для всякого статистического ряда можно вычислить общую меру колеблемости в виде среднего квадратического отклонения. „Другой—продолжает Лексис, который мы будем называть „комбинаторным“, пригоден только тогда, когда отдельные наблюдения данного ряда соответствуют данным эмпирического определения постоянной вероятности в условиях игр, основанных на чистом случае“. „Физический“ метод (вычисление средн. квадрат. ошибки)—это такой, при помощи которого измеряются действительные величины, как они найдены, путем статистического учета, в „физическом“ (т. е. в реально существующем) мире. „Комбинаторный“ (термин, который Лексис впоследствии заменил—на мой взгляд довольно неудачно—термином „статистический“) метод (вычисление модуля) это тот, при помощи которого определяются нормальные для данного ряда пределы колебаний, какие должны были бы иметь место при ничем не осложненном действии закона случайных ошибок; „комбинаторный“—потому, что в основе его лежит алгебраическая теория соединений—комбинаций». Если, теперь, физический и комбинаторный, или статистический, методы дают, приблизительно, одинаковый результат, иначе сказать, если среднее квадратическое отклонение, умноженное на $\sqrt{2,}$ приблизительно равно модулю, а следовательно, частное от деления первой величины на вторую—величина Q, приблизительно равно единице, мы, по определению Лексиса, имеем дело с нормальною „устойчивостью“, которой соответствует нормальная дисперсия. Если средняя квадратическая ошибка меньше модуля, и, значит, Q меньше единицы, мы имеем ряд с дисперсиею ниже нормальной (поднормальною) — значит, с „устойчивостью“ выше нормальной (сверхнормальною). Если, напротив, средняя квадратическая ошибка, умноженная на $\sqrt{2,}$ больше модуля, и, значит, Q больше единицы,—мы имеем дело со сверхнормальною дисперсиею, которой соответствует поднормальная устойчивость. Или, как кратко формулирует сущность каждого из этих трех типов проф. А. В. Васильев: ряды с нормальною дисперсиею это—«ряды, в которых отклонения следуют тому же закону, которому они следуют в типических случайных явлениях с постоянною объективною вероятностью»; ряды

[1]) Буквой z здесь и в дальнейшем обозначено число серий.

со сверхнормальною дисперсиею такие, где «отклонения значительно больше, как будто бы в этих явлениях действовала какая-то возмущающая сила, постоянно изменяющая объективную вероятность»—схема урны, в которую время от времени подсыпались бы то белые, то черные шары; дисперсия ниже нормальной имеет место для явлений, где «действует регулирующая сила, направляющая их к большему постоянству, сглаживающая и уменьшающая их отклонения». Примером сверхнормальной дисперсии могут служить данные о доле выздоравливающих от заразных болезней, которая колеблется, «очевидно в связи с большею или меньшею силой эпидемий. Напротив, в случаях тех болезней, где выздоровление зависит преимущественно от ухода, мы должны получить ряды с нормальною дисперсией. Если—продолжает А. В. Васильев—эпидемии, войны, неурожаи играют роль причины, возмущающей правильное действие закона больших чисел как бы подбрасывающей черные шары в урну, то законодательство напротив, должно играть роль причины регулирующей, и потому примеры рядов с ниже-нормальною дисперсией мы встречаем преимущественно в тех статистических рядах, на которые оказывает влияние законодательство»[1])

Теперь, вопрос, не лишенный значения для установления понятий «сверхнормальной» и «поднормальной» дисперсии. Дисперсия менее нормальной, если Q меньше, она сверхнормальна, если Q больше единицы. Но насколько меньше и насколько больше? Если бы было сказано, что при нормальной устойчивости средняя квадратическая ошибка, умноженная на $\sqrt{2}$, должна быть строго равна модулю, дело было бы очень просто — малейшее уклонение Q от единицы означало бы поднормальную или сверхнормальную дисперсию. Но в действительности дело обстоит не так: при всяком не бесконечно большом числе наблюдений—а с таким практически, и приходится иметь дело — совпадение модуля со среднею квадратическою ошибкой, умноженной на $\sqrt{2}$, будет только приблизительным, а следовательно, Q, как правило, должно в ту или другую сторону уклоняться от единицы. Спрашивается теперь: какое уклонение позволяет все таки еще говорить о «приблизительном» соответствии модуля и средней квадратической ошибки, и какое достаточно, чтобы сказать, что квадратическая ошибка «больше» или «меньше» модуля,—значит, что «устойчивость» поднормальна или, напротив, сверхнормальна; простой глазомер в данном случае недостаточен—он решительно откажется служить, если нам встретятся Q равные 1,20, 1,40, 1,60, 2,00 и т. д. И вот, Борткевичем установлено точное мерило допустимых отклонений величины Q от единицы. Мерило это выражается равенством:

[1]) А. Васильев, Законы случайного и математ. статистика, „Вестник Европы" за 1892 г., кн. 10, стр. 645—647.

$$\sqrt{\frac{\Sigma(1-Q_1)^2}{n}}=\frac{1}{\sqrt{2z}}$$

где Q_1—различные, полученные из данного материала, значения Q, и z—число серий или частных групп, по которым подсчитывались данные наблюдения.

Вернемся, однако, к Лексисовой схеме дисперсии и, соответственно, „устойчивости" статистических рядов. Она требует, прежде всего, очень существенной оговорки: создатель ее, Лексис, отнюдь не придавал ей безусловного или универсального значения,—схема эта относится единственно к „типическим" величинам, и при том лишь к тем из них, которые носят характер вероятностей или функций вероятностей, разумея под «типическими» велинами те, отдельные значения которых располагаются вокруг средней в соответствии с Гауссовым, «симметричным», законом случайных ошибок [1]). Вот эта-то «особая категория типических величин» может быть разбита на три класса: а) типические величины с нормальною дисперсиею—„отвечающие условиям eines reinen Glückspiels, игры, основанной на случае, с белыми и черными шарами в постоянном отношении»; б) типические величины со сверхнормальною дисперсиею,—„отвечающие условиям игры, основанной на случае, с белыми и черными шарами в пропорциях, варирующих вокруг некоторой средней reihenweise zufällig", т. е. изменяющихся от серии к серии, но так, что характерные для отдельных серий вероятности носят характер случайных отклонений от некоторой общей вероятности, и в) типические величины с поднормальною дисперсией, аналогичные „неправильной игре, при которой какое-либо преднамеренное воздействие придвигает результаты отдельных серий ближе к средней, чем можно было бы ожидать при основанной на случае игре с постоянными шансами" [2]). Это—существенный смысл установленных Лексисом трех типов дисперсии и соответствующих им трех типов: нормальной, поднормальной и сверхнормальной устойчивости. Или—как еще определеннее подчеркивается Лексисом в другом месте: при установленной типичности статистического ряда в указанном выше смысле, нормальная дисперсия характеризуется тем, что уклонения распределяются применительно к основной схеме теории вероятностей, предполагающей постоянство вероятности в пределах данного ряда частостей и взаимную независимость отдельных испытаний. В этом случае фактическая средняя квадратическая ошибка частости, приближенно равняется средней квадратической

---

[1]) См. Lexis, Abh. z. Theorie d. Bevolk.—und Moralstat, 1903, стр. 174—178.
[2]) Lexis. Theorie d. Massenersch. стр. 34.

ошибке частости, вычисленной теоретически, по формуле, в которую входят лишь численное значение данной вероятности и число производившихся испытаний. Дисперсия называется *поднормальной*, если сравнительно большие уклонения встречаются реже, а сравнительно малые—чаще, чем того требует означенная схема теории вероятностей. Тут фактическая средняя ошибка получается меньше теоретической. Наконец, в случае *сверхнормальной* дисперсии сравнительно большие уклонения встречаются чаще, а сравнительно малые—реже, чем то соответствовало бы предуказаниям теории, и, сообразно с этим, фактическая средняя квадратическая ошибка превосходит теоретическую. И вот, смотря по результату сопоставления действительной и ожидаемой дисперсии, иначе сказать—различным образом вычисленных средних ошибок, надлежит разрешать вопрос, являются ли исследованные статистические коэффициенты приближенными значениями определенной вероятности, или нет.

Таким образом, в освещении Лексиса, измеряемая при помощи сопоставления действительного рассеяния полученных путем статистического учета рядов с теоретически вычисленной дисперсией, „устойчивость“ статистических рядов получает громадное теоретическое значение: та *количественная* характеристика ряда, которая дается нормальною, поднормальною или сверхнормальною „устойчивостью“, является, вместе с тем, и *качественною* характеристикою, — степень „устойчивости“ рядов позволяет судить о *свойстве* соответственных явлений, о *характере* управляющих этими явлениями *причин*. „Статистический“, иначе „комбинаторный“ метод обнаруживает такие колебания, которые вызываются *одними только случайными* причинами и не нарушают закономерности явления, как функции постоянно-действующей причины или системы таких причин. „*Физический*“ метод обнаруживает, напротив, такие колебания, которые соответствуют реальному характеру явления и которые, если они значительны, указывают на наличность каких-либо не *случайных*, а *постоянно-действующих* причин, систематически отклоняющих явление от типа, соответствующего действию проявляющейся в основной вероятности постоянной причины или системы причин. „Колебания (Totalschwankungen) статистических коэффициентов, получаемые из наблюдения, составляются, таким образом, из двух слагаемых: одну можно назвать „несущественной“, потому что она принадлежит к системе колебаний, выступающей при неизменной основной вероятности; другая покоится на физическом, *реальном* изменении этих вероятностей от одной серии наблюдений к другой и может, поэтому, быть, обозначена названием „физической“ слагаемой. И вот — сопоставление результатов и зического и статистического или комбинаторного методов исследова-

ния статистических рядов дает твердое основание для суждения о характере данных явлений“ [1]).

Рассмотрим теперь значение каждого из трех типов дисперсии, как оно представляется в первоначальной схеме самого Лексиса, с тем, чтобы затем перейти к поправкам и дополнениям к этой схеме, внесенным частью самим Лексисом, частью его учениками и продолжателями, и из них на первом месте В. И. Борткевичем, и уже после того, в конце следующей главы я изложу некоторые свои личные соображения относительно значения измерений дисперсии для теоретической статистики, как под „методологическим“, так и под „статистико-философским“ ее аспектом.

Итак, сейчас мы держимся исключительно в рамках первоначальной схемы Лексиса. Сначала—о „сверхнормальной“ устойчивости, символом которой является

$$Q < 1$$

и которая имеет место, когда действительная, вычисленная по „физическому методу“, дисперсия слабее, следовательно устойчивость“ выше, чем этого можно было бы ожидать при свободном действии случая. При действии одних только случайных причин это было бы математическим абсуртом: „если физическая слагаемая p=0—говорит Лексис, т. е., если основная вероятность во всей серии наблюдений остается постоянною, то равенство

$$R = \sqrt{r^2 + p^2}$$

(где R означает фактически полученную из наблюдения дисперсию, Totalschwaukung, p физическую слагаемую, а r—комбинаторную), превращается в R = r“, — потому что величина p^2 под корнем обратилась в нуль. „Если имеется налицо некоторая физическая слагаемая p, то R всегда больше r. Напротив, неравенство R<r, при действии чистого случая, никогда не может иметь места, ибо в этом случае p (стоящее под корнем! А. К.) было бы мнимым, что указывало бы на невозможность“. „Устойчивость“ статистических рядов имеет, таким образом, свой максимум в равенстве p=0,=„этот максимум мог бы быть превзойден лишь в том случае, если бы в данном массовом явлении существовали еще специальные связи и отношения, вроде тех, присутствие которых с уверенностью можно было бы утверждать, если бы в игре с совершенно неправдоподобным, с точки зрения теории вероятностей, постоянством получался определенный результат“ [2]). Свернормальная „устойчивость“ „указывала бы на то, что подвергнутое исследованию массовое явление носит внутренносвязанный характер, или что оно подчиняется действию извне привходящих норм или вмешательств. „Ряды такого рода,—про-

[1]) Lexis. Abh. z. Theorie d. Bevolk.—und Morlastat. стр. 177.

[2]) Там же.

должает Лексис, — которые можно назвать связанными, образуют особый класс, который нельзя подвергать исключительно статистической обработке, так как главная задача здесь в том, чтобы выяснить отношение таких рядов к регулирующей силе или к повелительному закону, в частности, установить, в какой мере выполняется последний. Чем интенсивнее действует закон, тем сильнее может оказаться превзойденною действующая для несвязанных рядов граница устойчивости" [1]). Если мы измерим рост большой массы новобранцев и разгруппируем полученные данные по категориям роста, то мы получим правильно-распределяющийся ряд колебаний, начиная от ненормально низкорослых и кончая исключительно-рослыми. Но если мы измерим солдат шефской роты гвардейского полка, то колебания получатся гораздо меньшие: солдаты окажутся очень близкого друг к другу роста, — и людей малорослых совершенно не окажется. И это понятно, потому что гвардейские полки специально комплектуются из особо рослых людей, и самые рослые люди отбираются в шефскую роту.

Или другой пример, разбираемый Лексисом: пока нет закона об обязательном обучении, или пока закон слабо исполняется погодные колебания процента учащихся, выражающие действие случайных причин, будут происходить в соответствии с формулами теории вероятностей или даже в еще более широких пределах. Но раз строго действует закон об обязательном обучении, „вероятность" будет приближаться к единице, т. е. к такому положению вещей, при котором через школу проходят все дети школьного возраста; это будет связанный ряд, стремящийся к единице под влиянием внешнего понуждения, при чем колебания вниз значительно меньше того, что должно бы быть по теории вероятностей, отклонений же вверх от нормальной величины и вовсе не будет (потому что вероятность не может быть больше единицы—обучение не может распространиться больше, чем на всех детей школьного возраста).

Эти примеры — все случаи, где „связанность" рядов явно предрешается определенными нормативными постановлениями той или иной власти. У Лексиса, однако, вопрос ставится гораздо шире и принципиальнее: он считает, что во всех случаях сверхнормальной устойчивости имеет место регулирующее вмешательство какой либо внешней силы,—и это обстоятельство играет, для него, решающую роль в „морально-философской", стороне вопроса об устойчивости—о взаимоотношении между статистическою закономерностью и свободою индивидуального самоопределения. Лишь сверхнормальная устойчивость, характеризуемая рассеянием ниже нормального, предполагала бы „связанный" характер массового явления,—иначе сказать, наличность внешней регулирующей силы, непосредственно влияющей на единичные случаи, в целях достижения, в массе, определенных численных

[1]) Там же, стр. 179.

соотношений. „Если бы—говорит он—при значительном числе наблюдений обнаружилась решительно и, несомненно (entschieden), меньшая дисперсия, чем следовало бы по схеме чистой азартной игры, то с повышением числа наблюдений становилось бы все более вероятным, что между отдельными случаями существует такое отношение, которое непосредственно ведет к осуществлению определенного массового результата". Если бы такой результат получился при изучении конкретного статистического материала, это значило бы, что мы имеем дело со связанным массовым явлением, „где между отдельными случаями существует таинственная, недоступная нашему познанию, тенденция к уравновешению отклонений", — иначе сказать, где отдельные случаи слагаются под непосредственным воздействием какой-то вне их лежащей силы. И еще яснее в другом месте: в случае сверхнормальной устойчивости—говорит здесь Лексис—„приходилось бы признать, что между отдельными случаями есть таинственная связь, в силу которой", например, „чрезмерный излишек мужских рождений в данное время или в данной местности выступает в роли причины, ведущей за собой понижение числа мужских рождений в другое время и в другом месте. Это можно было бы сравнить лишь с игрой с фальшивыми костями, т. е. с такими, при помощи которых с почти полною достоверностью подготовляется желательный результат. Сверхнормальная устойчивость была бы понятна лишь при таких массовых явлениях, которые регулируются строго проводимыми волевыми законами".

Еще раз: только в этом случае—в случае сверхнормальной устойчивости—статистическая закономерность оказывала бы непосредственное влияние на единичный случай и была бы несовместима с признанием свободы индивидуальной воли. А потому — так ставит Лексис принципиальную задачу своих исследований—„желательно показать, что все до сих пор нам известные правильности конкретных массовых явлений не принадлежат к этой таинственной категории".

Таково огромное принципиальное значение, которое Лексис придавал своим исследованиям над устойчивостью статистических рядов. Результаты этих исследований получились довольно неожиданные: из длинной серии статистических рядов, исследованных Лексисом, ни в одном случае не получилось сверхнормальной устойчивости; нормальную устойчивость удалось установить только для рядов, изображающих распределение рождений по полу, в несколько меньшей мере—для рядов, изображающих распределение по полу смертных случаев. „Во всех остальных исследованных Лексисом случаях оказалась устойчивость поднормальная—действительные уклонения или

колебания, в среднем, превосходили теоретические в 5, 10 и 20 раз" (Борткевич). „По всем сделанным наблюдениям — писал Лексис в 1877 году", в своей „Zur Theorie der Massenerscheinungen", можно смело отрицать возможность (курс. мой, А. К.) с достоверностью обнаружить где-либо поднормальную дисперсию, — самою строгою из формул, в какие укладываются человеческие массовые действия, да и то немногие, является устойчивость нормальная". То-же самое он утверждает в уже цитированной, одной из своих новейших работ: сверхнормальной устойчивости—говорит он—пока нигде не найдено. „Что же касается собственно до морально-статистических отношений, то они, даже при ничтожной на вид изменяемости, почти всегда обнаруживают сверхнормальную дисперсию". Благодаря этому— резюмирует Борткевич—„устойчивость статистических рядов представляется в другом виде, чем какой придавался ей в трудах Кетле, Бокля и др. Нет никакого основания предполагать существование каких то особых сил или влияний, производящих устойчивость статистических чисел.. Напротив того, как показывает эмпирическое изучение движения статистических чисел, каждый отдельный случай, т. е. случай смерти, преступления, самоубийства, обнаруживает по отношению к массовому явлению, взятому в целом, такого-же рода независимость, какая свойственна отдельному случаю бросания игральной кости по отношению к общему результату ста и тысячи бросаний".

Изложенным соображениям Лексиса и лежащим в их основе эмпирическим исследованиям дисперсии приписывалось огромное, решающее значение. Читатель помнит, что в споре о свободе воли и ее отношении к статистической закономерности обе спорящие стороны и—конечно—защитники свободы, в еще гораздо большей мере, чем противники и скептики, забрались в непролазные дебри метафизических рассуждений и богословски или „педагогически" окрашенного морализирования. Последователи Лексиса считали, что Лексис указал новый „путь решения спора об устойчивости статистических чисел" и об отношении ее к свободе индивидуального самоопределения, и что формулированное им учение об устойчивости статистических рядов „извлекло теорию статистики из того болота, в котором увязили ее бесплодные прения морализирующих идеалистов с материалистами" [1]).

В настоящее время положение вопроса уже несколько иное. Через несколько страниц мне придется остановиться на внесенных позднейшими исследованиями поправках к выводам Лексиса, поскольку они касались фактического положения вещей; поскольку именно, Лексис, утверждал, что сверхнормальной устойчивости не

[1]) А. А. Чупров, Очерки, стр. 298, 2-ое изд.

только нет, но что ее и ожидать нельзя когда-либо встретить. В дальнейшем мне придется войти и в подробные теоретические соображения относительно условий, могущих породить сверхнормальную „устойчивость“. Теперь же я отмечу лишь кратко: что и сам принципиальный взгляд Лексиса на условия, порождающие сверхнормальную „устойчивость“, не выдерживает критики. Да, повидимому, несомненно, что сверхнормальная „устойчивость“ есть несомненный показатель „связанности“ ряда, но „связанный“ ряд может быть связан и вовсе не какою-либо привходящею извне, и тем более — не „таинственною“ силой. Связь или источник „связанности“ может заключаться и в самом существе данного массового явления — связь в том смысле, что случай не имеет полного простора для проявления своего отклоняющего действия; что в составе данного явления есть силы, сдерживающие его влияние.

А с такого рода оговоркой формулированное Лексисом положение приходится признать правильным. Сверхнормальная „устойчивость“, действительно, возможна только в связанных рядах; или лучше сказать — существо „связанности“ именно и заключается в сверхнормальной „устойчивости“, — собственно в этом Лексис стоит на вполне твердой почве. Выведенная из эмпирического ряда величина среднего квадратического отклонения — мы видели — состоит из двух слагаемых, из которых одно, отражающее влияние чисто-случайных причин, соответствует модулю, другое, выражающее влияние причин, отклоняющих явление от его нормального вида, может быть более или менее значительною, может упасть до нуля, но не может быть отрицательною величиною. Между тем, лишь в этом последнем случае действительная колеблемость ряда, являющаяся суммой двух этих слагаемых, могла бы быть меньше первой из них — следовательно, лишь в этом, невозможном, случае „устойчивость“ могла бы быть выше нормальной. „Средняя квадратическая ошибка — так формулирует этот вывод Blaschke, в своем руководстве математической статистики, — не может упасть ниже „несущественной слагаемой“, что было бы необходимым предположением существования явлений с поднормальною дисперсиею. Такого рода явления либо не существуют вовсе, либо таковые могут встречаться лишь в таких условиях, с какими теория погрешностей не считается“.

Переходим теперь к другим видам дисперсии и характеризуемой ею „устойчивости“. Все они вместе отвечают „несвязанным“ конкретным массовым явлениям, т. е. таким, где „не господствуют ни нормативные законы, ни какие либо направленные к компенсации колебаний внутренние отношения. Каждый отдельный случай наступает, конечно, лишь как результат действия строгой цепи причин, но совпадение единичных случаев и обусловленные им численные отношения, проявляющиеся в массах, покоятся только на законах

вероятности, которые не имеют принудительного значения, а только отражают те общие условия возможности, при действии которых наступает каждое индивидуальное событие“ [1]). Такие несвязанные или „натуральные“ массовые явления могут, однако, обнаруживать либо „нормальную устойчивость“ с таковою же дисперсией, либо „устойчивость“ „поднормальную“, характеризуемую „сверхнормальною“ дисперсией. Как мы увидим в дальнейшем, правилом в мире реальных вещей является сверхнормальная дисперсия, нормальная появляется лишь в виде более или менее редкого исключения. И это стоит в полном соответствии с теоретическими соображениями теории вероятностей: „Из природы вещей — читаем мы у Czuber'a — вытекает, что случай нормальной дисперсии никогда не даст себя обнаружить в полной строгости“; что касается до массовых явлений жизни человека, то они „никогда не достигают этого предела вполне, а только приближаются к нему, как к идеальному типу; иначе сказать—полное постоянство управляющих таким массовым явлением обстоятельств никогда не может оказаться сколько-нибудь длящимся“. Если мы, в дальнейшем, будем говорить о нормальной дисперсии и отвечающей таковой нормальной „устойчивости“, то мы будем иметь в виду не идеально-нормальное, а только приближающееся к нормальному распределение отклонений. И вот, такая приблизительно-нормальная „устойчивость“ „представляла бы собою тип такого массового явления..., при котором наступление отдельных событий носит характер случайности, и события могут быть рассматриваемы как независимые друг от друга». Относительно такого рода массовых величин „можно считать, что они коренятся в физическом строении наблюдаемой массы; они образуют характеризующие данную массу константы — константы массовой физиологии“ (Czuber). Таковы, например, изученные Кетле данные о росте; таковы цифры, показывающие распределение рождений по полу: относящиеся к этим и к другим подобным явлениям цифры „распределяются приблизительно так же, как распределяются шары, вынимаемые из урны“: колеблемость статистического ряда всецело может быть сведена к закону случайных отклонений. „Выяснение хотя бы только приблизительной закономерности этого рода, — говорит Лексис, — имеет высокий научный интерес. Для нас является положительным увеличением нашего научнаго знания, когда нам становится известно, что ряд несвязанных между собою чисел разной величины подчиняется априорно-выведенному из теории соединений закону вероятности. Далее, из того факта, что в основе эмпирически - установленных единичных отношений лежит хотя бы приблизительно-установленная постоянная веро-

[1]) Lexis. Abhandlungen z. Theorie d. Bevolk. und Moralstat., стр. 182.

ятность, нередко оказываются возможными выводы относительно внутренней сущности явления. Мы узнаем, далее, как велики могут быть отклонения единичных цифр от вероятнейшей величины без того, чтобы приходилось предполагать существенное изменение в условиях общей вероятности явления, а потому, если только нет на лицо бросающейся в глаза внешней пертурбационной причины, мы освобождаемся от необходимости искать об'яснения единичных более значительных отклонений в каких-либо рискованных гипотезах" [1]). Обращу сейчас же внимание читателя на весьма существенное ограничение процитированного только что положения, кроющееся в подчеркнутых курсивом словах — важное значение его выяснится для нас в одной из последующих глав, когда мы будем говорить о роли исчисления вероятностей и основанного на ней „дифференциального метода" в каузальном статистическом анализе.

Что касается поднормальной „устойчивости", то с нею мы имеем дело, когда измеренная по „физикальному" способу дисперсия заметно больше измеренной по „комбинатоному" или „статистическому",—иначе сказать, когда действительное рассеяние статистического ряда заметно сильнее отвечающего ожиданиям теории случайных отклонений, когда, значит, величина Q больше единицы. Если имеет место такое соотношение между действительным рассеянием статистического ряда и тем, какого следовало бы ожидать при наличности одной общей постоянной причины или комплекса причин и при чисто-случайном характере отклонений,—это значит, что рядом с чисто-случайными причинами, отклоняющими отдельные случаи явления от его наивероятнейшего, следовательно, отвечающего действию постоянных причин, вида, действуют еще особые причины, отклоняющие известные группы случаев от типа, соответствующего действию управляющих данным массовым явлением, в его совокупности, постоянных причин; в отклонениях от средней отдельных членов ряда „находят себе выражение не только случайные отклонения, но и существенные изменения, или колебания основной вероятности" (Czuber). Если, значит, нормальная „устойчивость" свидетельствует о том, что „в основе взятых для сравнения статистических масс лежат известные общие причины"; что, в частности, поскольку речь идет о человеческих массах, „и общие условия жизни, и состав населения из частных групп, не однородных по отношению к изучаемому событию, обнаруживает не большие погодные колебаниях, чем какие отвечают схеме unverbundenes Zufallspiel—игры, где действию случая открыта полная свобода проявления своего действия", – то в колебания ряда, характеризуемого сверхнормальною дисперсиею или поднормальною „устойчивостью", входят две слагаемые: одна, обусловливаемая, как и при нормальной дисперсии, не-

[1]) Там же, стр. 186.

точным отражением объективных вероятностей в получаемых из статистического наблюдения частотах, и другая, вытекающая из изменений в самих объективных вероятностях и „характеризующая превышением колебаний эмпирических частот над уровнем нормальной дисперсии". Рассматриваемые теоретически, отдельные члены ряда являются эмперическим выражением различных частных вероятностей, являющихся, в свою очередь, случайными уклонениями от основной для всего данного ряда вероятности, которая находит себе выражение в общем для всего ряда статистическом коэффициенте. В таком случае, отклонение каждого члена ряда от этой основной вероятности $\frac{m}{s} - p$ будет слагаться, во-1-х, из уклонения характеризующей данную группу частной вероятности от общей, и, во-2-х, из отклонения эмпирической частоты от данной частной вероятности. Мы можем принять за математически доказанное то положение, что общий итог отклонений того и другого рода принимает вид

$$\sqrt{\frac{2pq}{s} + \frac{\Sigma(p_i - p)^2}{z}}$$

где p_i — частные вероятности, z — число групп с одинаковыми, внутри каждой частной группы, но отличными друг от друга частными вероятностями. Если, например, мы имеем пять урн с различною пропорциею белых и черных шаров, то первый член выражения под корнем будет выражать собою общую теоретическую меру чисто-случайных отклонений, при выведенном для всех пяти урн среднем соотношении белых к черным, второй — выраженную в форме средней квадратической ошибки общую меру отклонений состава каждой из пяти урн в отдельности от этого среднего соотношения. Так как второй член есть сумма квадратов—следовательно, во всяком случае, число положительное, то ясно, что значение данного выражения, т. е. мера общего рассеяния ряда расматриваемого типа, всегда будет больше выражения $\sqrt{\frac{2pq}{s}}$, характеризующего нормальную дисперсию. Самое большое, что может случиться—это что второй член выражения под корнем обратится в нуль, и тогда все выражение обратится в $\sqrt{\frac{2pq}{s}}$; это будет иметь место тогда, когда в нуль превратится каждая из разностей $p_i - p$, т. е. иначе сказать, когда общая вероятность будет, вместе с тем, и вероятностью каждой из частных групп, на которые распадается общая совокупность.

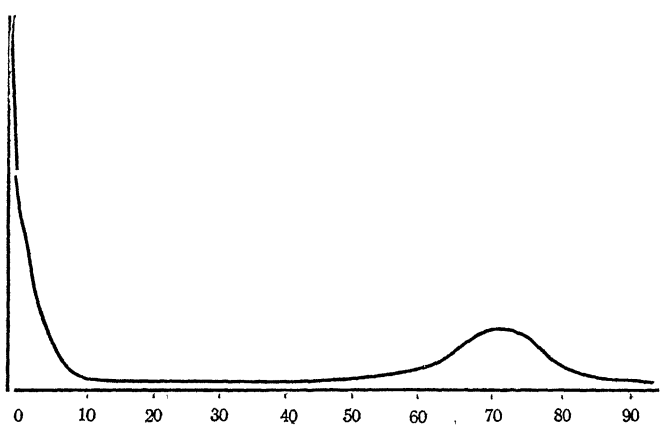
Каков же, спрашивается теперь, смысл различия между нормальною и поднормальною „устойчивостью" и их оборотною стороною – нормальною и сверхнормальною дисперсиею, под каждым из установленных

нами двух „аспектов"—методологическим и морально-философским? По отношению к морально-философской проблеме вопрос не возбуждает сомнений,—при нормальной, и тем более при сверхнормальной дисперсии отдельное событие независимо по отношению к выраженному математическою вероятностью общему закону, и потому статистическая закономерность, при таком характере дисперсии, свободно мирится с допущением свободы индивидуального самоопределения; разницы между тою и другою в данном отношении нет. По отношению к методологическому „аспекту" вопрос о взаимоотношении между нормальною и сверхнормальною дисперсиею представляется, напротив, очень спорным. В следующей главе мне придется подробно остановиться на этом вопросе. Сейчас же достаточно отметить, что по обычному мнению—между прочим и по авторитетному истолкованию Борткевича, вопрос о том, являются ли статистические коэффициенты приближенными выражениями вероятностей, а следовательно - о допустимости обработки их приемами исчисления вероятностей, „разрешается утвердительно лишь в случае нормальной дисперсии, и эмпирическое доказательство приложимости теории вероятностей к статистике может заключаться ни в чем ином, как в констатировании именно нормального характера дисперсии" [1]). Мне лично—как будет подробнее развито в дальнейшем—подобное понимание представляется неправильным,—или во всяком случае не соответствующим схеме самого Лексиса: ведь и сверхнормальная дисперсия „отвечает условиям игры, основанной на случае", правда, не в той схеме, которой соответствует нормальная дисперсия, но во всяком случае—в одной из тех многообразных схем, которые трактуются теорией вероятностей.

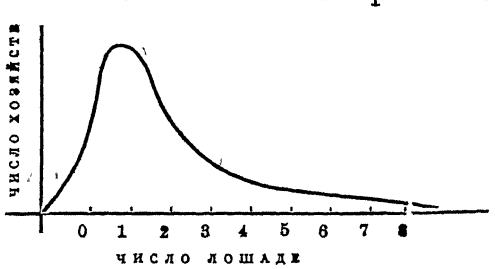
Таковы характернейшие черты и существенный смысл каждого из трех типов дисперсии, а с нею и „устойчивости" статистических рядов, как они рисуются в первоначальной схеме Лексиса. Еще раз: все эти три типа — разновидности типических величин, т. е. таких, распределение которых подчиняется Гауссову закону случайных ошибок или отклонений. Вне этой категории остается обширная категория симптоматических величин, т. е. таких, которые характеризуются уже не сверхнормальною, во введенном Лексисом слово-употреблении, а неправильною дисперсией. Дело в том, что не каждый ряд, дисперсия которого превышает нормальную, есть eo ipso, ряд со сверхнормальною дисперсию в специфическом, смысле Лексисовой схемы: такую сверхнормальную дисперсию надо отличать от ненормальной или неправильной. Ряд со сверхнормальною дисперсией—это такой, который обнаруживает симметричное распределение отклонений, аналогичное даваемому Гауссовым законом случайных ошибок, с тем только отличием, что значения, ближайшие к наивероятнейшему, иначе сказать—к общей для целого ряда частоте,

[1]) См. его рецензию на «Очерки» А. А. Чупрова.

представлены ощутительно слабее, а значения, резче от нее уклоняющиеся—ощутительно сильнее, нежели в случае нормальной дисперсии. Как и нормальная, сверхнормальная дисперсия характеризует такие массовые явления, где отдельные случаи представляют собою как бы приближенные значения определенных основных вероятностей, сверхнормальный же характер легко объяснить себе, если исходить из гипотезы, что „отдельным рядам испытаний", или отдельным частям данной массы, соответствуют различные частные вероятности, которые, однако, стоят друг к другу в таком соотношении, как если бы они представляли собой снабженные случайными ошибками выражения одной общей абстрактной вероятности" (Борткевич); это будет иметь место, например, если общая для целой массы вероятность 0,5 слагается из частных вероятностей 0,4—0,5—06,—0,55—0,45 и т. д. Между тем, бывают случаи—а поскольку речь идет о явлениях социального порядка такие случаи представляют собою даже общее правило,—которые не могут быть подведены под схемы ни нормальной, ни сверхнормальной дисперсии, и которые графически изображаются более или менее неправильными, не симметричными кривыми. Типы этих последних бесконечно разнообразны, в зависимости от конкретного характера каждого данного массового явления; так, изменения смертности в зависимости от возраста изобразятся, по Лексису, приблизительно, следующею кривою:



распределение крестьянских дворов по лошадности в более или менее богатой рабочим скотом местности приблизительно такою:



и т. д. Вот такая неправильная дисперсия характерна для симптоматических рядов. Объяснения такого характера дисперсии, по Борткевичу, надо искать „в той гипотезе, что лежащая в основе данных численных значений основная вероятность меняется от одной серии испытаний“, или, вообще, от одной частной совокупности к другой, „и притом меняется уже не „случайно“, как в случае сверхнормальной дисперсии“, а под влиянием существенно-различных комплексов причин, управляющих данным явлением в отдельных частных массах. Имеется ли на лицо, в конкретном случае, сверхнормальная, или, просто, неправильная дисперсия—этот вопрос уже не может быть разрешен при помощи „критерия Лексиса“, потому что ряд со сверхнормальною и с ненормальною дисперсией может характеризоваться тем-же средним отклонением и тою-же величиною Q—при решении этого вопроса надо исходить из существенно-иного критерия. Ряд со сверхнормальною дисперсией есть, прежде всего, типический ряд, ряд с неправильною дисперсией—не-типический или симптоматический. Логически-правильный путь анализа сводился бы к тому, чтобы сначала установить типический или нетипический характер ряда, и уже потом, когда ряд окажется типическим, приступить к измерению дисперсии, чтобы отнести его к той или другой из известных нам категорий типических рядов. Чаще, повидимому, поступают в обратном порядке: сразу-же приступают к измерению дисперсии—вычисляют величину Q, и только если она оказывается больше единицы, выясняют, является ли ряд типическим и, следовательно, дисперсия—сверхнормальною, или-же это—симптоматический ряд с неправильною дисперсией. Для этого, во всяком случае, нельзя ограничиться суммарным измерением дисперсии по методу Лексиса,—нужно изучить и конкретные вариации в их эмпирической действительности, и, может быть, сопоставить их с вариациями ряда, отвечающего закону случайных погрешностей. Я говорю: „может быть“, а не обязательно, потому что во многих случаях, в частности при более или менее резко-несимметричном распределении цифр в „не-типичности“ ряда можно убедиться путем простого глазомера: для этого бывает достаточно взглянуть или просто на данный численный ряд, или на хотя-бы грубо-вычерченную кривую. Если асимметрия не-резка, а потому не уловляется ни непосредственно из цифр, ни на изображающей эти последние кривой—в таком случае прибегают к тем или другим приемам, сущность которых сводится к сопоставлению эмпирического, полученного из наблюдения, ряда с теоретическим, т. е. вычисленным в соответствии с законом случайных отклонений.

Наиболее простым, но слишком схематическим, является прием, который, по имени его автора, называют «приемом Вестергорда»; слишком схематическим — потому что он имеет в виду лишь случаи, аналогичные простейшей схеме урн или опытов с бросаниями монеты, — значит, случаи с элементарною вероятностью $^1/_2$.

К выяснению сущности этого метода Вестергорд подходит чисто эмпирическим путем. Как мне приходилось уже упоминать, результаты его 10.000 опытов с шарами были подсчитаны сериями по 100 испытаний. Затем было сосчитано число серий, давших ближайшую к вероятности (1/2) частоту—от 49 до 51 белых; подобным же образом были сосчитаны серии с результатами, лежащими, последовательно, в интервалах: 48—52, 47—53, 45—55, 43—57, наконец 40—60 белых. Результаты этих подсчетов сведены в следующий табличке:

В пределах.	Расстояние между пределами.	Число серий (из 100).
49—51	3	25
48—52	5	40
47—53	7	50
45—55	11	70
43—57	15	85
40—60	21	95

Такое полученное из опыта распределение серий по величине предельного уклонения частоты от вероятности было, и вполне законно, принято за нормальное, т. е. за соответствующее ничем не нарушаемому влиянию чистого случая. Затем, подобным же эмпирическим путем была выведена формула средней ошибки $\sqrt{spq}$ (в абсолютных цифрах). Эти цифры Вестергорд и положил в основу вычисления теоретического распределения, сначала при дальнейших вычислениях и экспериментах из области опытов и игр, основанных на случае. Результаты получались вполне удовлетворительные. Вот, например (по приведению к круглому числу), результаты обработки датской классной лотереи и данных одной большой сберегательной кассы, — те и другие сравнительно с результатами опытов с шарами:

Интервалы*).	1) Опыты с шарами.	2) Классная лотерея.	3) Сберегат. касса
0,3	25	24	22
0,5	40	38	39
0,7	50	50	52
1,1	70	70	71
1,5	85	86	84
2,1	95	96	96

Во всех этих, да и в других сериях испытаний, протекавших при действии чистого случая, распределение получилось чрезвычайно схожее. Как применялся тот же прием к анализу рядов из области социальной статистики, можно видеть на следующем примере. Имеются данные (датские) о самоубийствах за 26 лет: всего 12.582 случая, в том числе 9.779 мужских и 2.803 женских самоубийства. Получающийся отсюда общий процент женских самоубийств за весь период, 22%, принимается за «ожидаемый» для каждой из погодных групп, а соответственная дробь 0,22—за вероятность женского самоубийства, по этой вероятности вычисляется для каждого года «ожидаемое» число женских самоубийств. Например, для первых трех лет: $484 \times 0{,}22 = 109$, $462 \times 0{,}22 = 103$, $458 \times 0{,}22 = 102$. Затем для каждого года вычисляется средняя ошибка по формуле $\sqrt{s \times 0{,}22 \times 0{,}78}$; так, для первых трех лет получаются средние ошибки $\sqrt{484 \times 0{,}22 \times 0{,}78} = 9{,}1$, $\sqrt{462 \times 0{,}22 \times 0{,}78} = 8{,}9$, $\sqrt{462 \times 0{,}22 \times 0{,}78} = 8{,}9$. С

*) Для рядов (2) и (3) сокращены умножением на 0,78 и 0,55.

этими средними ошибками сопоставляются отклонения действительного числа женских самоубийств от ожидаемого,—напр, для первых трех лет данной серии: $116-109=7$, $103-93=10$, $111-102=9$ и т. д. Получаются (за округлением) кратные средней ошибки: 0,8, 1,1, 1,0 и т. д. По этим-то числам, выражающим, значит, отношение действительного отклонения каждого члена в ряду женских самоубийств к теоретической средней ошибке «ожидаемого» числа, группируют все года данной серии, и число попавших в каждую группу годов сопоставляют, опять таки, с ожидаемым, вычисленным пропорционально полученным из опытов с шарами числам, 25, 40, 50 и т. д. Получается следующий результат:

Отношение отклонения к средней ошибке:	Число групп п.	
	Действительное.	Ожидаемое.
до 0,3	3	7
» 0,5	6	10
» 0,7	10	13
» 1,1	15	18
» 1,5	21	22
» 2,1	24	25

Рапределение получается хотя и несколько более рассеянное, но все же достаточно близкое к теоретическому.

К аналогичным, по существу, приемам можно прийти и теоретическим путем, исходя либо из биномиальной формулы, либо из окончательной математической формулировки закона случайных уклонений,—причем в первом из этих случаев мы имеем возможность установить не только надичность, или отсутствие симметричности распределения цифр, но, до некоторой степени, и самый характер асимметрии.

Значение биномиальной формулы, конечно, памятно читателю при данных вероятностях p и q, и при данном числе наблюдений или испытаний s, вероятности всех мыслимых комбинаций чисел наступления двух противуположных событий выражаются соответственными членами разложения

$$(p+q)^s = p^s + sp^{s-1}q + \frac{s(s-1)}{1.2}p^{s-2}q^2 + \ldots \frac{s!}{m!n!}p^m q^n \ldots = 1$$

где, в частности, в «общем члене» буквы m и n представляют собою числа наступлений события, а все выражение — вероятность комбинации именно с этими числами наступления. Давая, таким образом, вероятность появления каждой из возможных комбинаций числа случаев наступления и не-наступления данного события, биномиальная формула позволяет вычислить и общую картину распределения частот, какая должна получиться при ничем не нарушаемом действии закона случайных отклонений. Так как притом, вероятности p и q могут принимать любые значения, то биномиальная формула пригодна и для случаев одинаковой, и для случаев сколь угодно разной вероятности данного и противуположного ему событий,—лишь бы только отклонения от выражаемого вероятностью общего закона носили чисто случайный характер. Вот заимствованные у Yule'a [1]) теоретические ряды, вычисленные для 10.000 испытаний, по 20 «событий» в каждом испытании, по формуле $\frac{n!}{m!(n-m)}p^m q^{n-m}$ и при разных вероятностях, входящих в испытания простых «событий»:

[1]) *U. Yule.* An Introduction to the Theorieof Stati stics. 1916, стр. 291.

Число случаев «успеха» в каждом испытании.	При p и q равных.				
	0,1 и 0,9	0,2 и 0,8	0,3 и 0,7	0,4 и 0,6	0,5 и 0.5
0	1216	115	8	—	—
1	2702	576	68	5	—
2	*2852*	1369	278	31	2
3	1901	2054	716	123	11
4	898	*2182*	1304	350	46
5	319	1746	1789	746	148
6	89	1091	*1916*	1244	370
7	20	545	1643	1659	739
8	4	222	1144	*1747*	1201
9	1	74	654	1597	1602
10	—	20	308	1171	*1762*
11	—	5	120	710	1602
12	—	1	39	355	1201
13	—	—	10	146	739
14	—	—	2	49	370
15	—	—	—	13	148
16	—	—	—	3	46
17	—	—	—	—	11
18	—	—	—	—	2
19	—	—	—	—	—
20	—	—	—	—	—

Способ пользования такого рода таблицею, конечно, очень прост: если дан эмпирический ряд — положим, данные о росте какой либо совокупности людей, колеблющиеся между такими пределами, как, 1,40 и 1,90 метр., то цифры располагаются в возрастающем или убывающем порядке и разбиваются на 20 интервалов в данном конкретном примере, положим с отстоящими на $2^1/_2$ сантиметра пределами; затем сосчитывается число случаев в каждом таком интервале, получившиеся цифры приводятся к 1.000 или 10.000, и получившийся ряд относительных величин сличается с теоретическими рядами. Такое сличение, которое можно провести либо прямо на цифрах, либо помощью кривых, непосредственно показывает нам, имеем ли мы дело с явлением, подчиняющимся закону случайных ошибок, и если да, то выясняет нам и степень симметрии или асимметрии ряда, а следовательно—и характер лежащей в основе данного явления общей вероятности.

Я считаю лишним приводить здесь примеры получающегося соответствия—в частности, соответствия эмпирических рядов теоретически вычисленному симметричному распределению, отвечающему Гауссовой кривой—напомню только известные ряды Кетле, изображающие действительное распределение по росту американских рекрут рядом с соответственным теоретическим рядом [1]). Тем интереснее остановиться на том, что говорят цифры этой таблицы о характере «теоретических» рядов при разных вероятностях данного и противуположного ему событий. Само собою ясно, что при $p = 1/2$ получается симметрический ряд; при $p = 0{,}4$, 0,3, 0,2, 0,1 получается, конечно, все более резкая асимметрия. При этом вероятности наиболее вероятного числа повторений события и ближайших к нему чисел резко увеличиваются — вероятность наиболее вероят-

[1]) См. *мою* книгу «Теория и методы статистики», стр. 111.

ного числа с 0,1762 возрастает до 0,2852, вероятность т р е х наиболее вероятных комбинаций, взятых вместе, — с 0,3966 до 0,7455. Вероятности равно отстоящих от наиболее вероятной комбинации становятся все резче различны: еще при $p = 0{,}4$, две ближайшие к самой вероятной комбинации имеют вероятности 0,1659 и 0,1597, — уже при $p = 0{,}2$ соответственные вероятности будут 0,2054 и 0,1746, при $p = 0{,}1$ они будут уже 0,1901 и 0,2702. На конце ряда вероятностей, отвечающем менее вероятным комбинациям, отпадает вся большая часть членов,— в конечном результате ряды вероятностей комбинаций, могущих ожидаться с какою-либо долею правдоподобия, становятся все короче и короче: в то время как ряд, отвечающий $p = 0{,}5$ имеет 17 членов, ряд вероятностей для $p = 0{,}1$ имеет уже только 10 членов. Или обобщая сказанное, длина рядов, иначе сказать рассеяние чисел, уменьшается с увеличением разницы между p и q и оказывается наибольшим при $p = q = 1/2$. Этого, конечно, и следовало ожидать: ведь теоретическая мера дисперсии (в абсолютных числах) дается формулой $\sqrt{2\,npq}$ и другими ей аналогичными. Между тем, значение произведения pq, а значит и всего выражения $\sqrt{2\,npq}$, будет наибольшим при $p = q = 1/2$ и будет уменьшаться по мере увеличения разницы между двумя вероятностями (см. выше, стр. 268). Еще важнее, однако, другое обстоятельство: именно, что по мере увеличения n, т. е. числа испытаний, объединенных в одну серию, ряд, вероятностей возможных комбинаций получается все более и более сжатый, и в то же время а с и м м е т р и я этого теоретического ряда все более и более уменьшается — вид кривой получается все более и более близкий к симметричному. Если взять, например, $n = 100$ и $p = 0{,}1$, то вычисленный по формуле $\frac{n!}{m!\,(n-m)!}\,p^m\,q^{n-m}$ теоретический ряд будет содержать частоты лишь для 1,2... 23 «успехов», а именно:

3—16—59—159—339—596—889—1148—*1304*—*1319*—1199—
—988—743—513—327—193—106—54—26—12—5—2—1—

— все комбинации, начиная от 24, 25 и т. д. «успехов» отпадают, как обладающие неуловимо ничтожными вероятностями, максимум оказывается уже очень близко к середине ряда, и построенная из приведенных цифр кривая обнаружит лишь незначительную асимметрию. Напротив, если уменьшить n до 2-х, то распределение при том же $p = 0{,}1$ получит такой вид:

число повторений	частота
0	8100
1	1800
2	100.

и цифры, таким образом, слагаются в о д н о с т о р о н н е и р е з к о у б ы в а ю щ и й р я д. Вообще, «каковы бы ни были значения p и q,—раз только n в з я т д о с т а т о ч н о б о л ь ш и м, то распределение может быть рассматриваемо как п р и б л и з и т е л ь н о с и м м е т р и ч н о е — впрочем только при условии, что разность $p - q$ меньше квадратического отклонения вида $\sqrt{npq}$» (Yule, стр. 295).

Другой способ, гораздо более простой и удобный, но за то, подобно методу Вестергорда применимый только к уловлению с и м м е т р и и рядов, и притом исключительно при наличности особых предпосылок теоремы Бернулли-Лапласа (значение этой последней оговорки выяснится для читателя в конце следующей, 9-ой главы),—это способ вычисления теоретического распределения при помощи таблицы интеграла вероятностей (P или F (u)). Наиболее удобным этот способ является потому, что может свободно в а р ь и р о в а т ь с я в с о о т в е т с т в и и с д л и н о ю подлежащих исследованию р я д о в и с т р е б у е м о ю с т е п е н ь ю

детальности исследования. Таблицы интеграла вероятностей дают нам вероятность [столбцы P или F (u)] того, что частота события уклонится от его априорной вероятности p не более чем на любое — двойное, тройное и т. д. кратное (столбцы t, u, x, γ) теоретической меры дисперсии (модуля) — $\sqrt{\frac{2pq}{s}}$, находящей себе приближенное выражение в среднем квадратическом отклонении $\sigma \times \sqrt{2}$, следовательно, позволяют нам вычислить ту часть случаев которая, при ничем не нарушаемом влиянии чистого случая, не отклонится от наиболее вероятной величины, в ту и другую сторону, дальше любого наперед заданного предела, выраженного в кратной теоретической меры отклонения. Пользуясь этими таблицами мы, поэтому, можем вычислить теоретическое распределение членов ряда из любого числа членов, можем сделать это, притом, двумя способами: либо вычислить число случаев долженствующих оказаться внутри постепенно расширяющихся пределов отклонения в обе стороны от средней, либо вычислить число случаев особо для каждого интервала, лежащего в ту и в другую сторону, в возрастающих расстояниях от средней; например, при среднем росте 1,65 и интервалах по 0,05 мы может искать в таблице либо а) число случаев в пределах между 1,60 и 1,70, между 1,55 и 1,75, между 1,50 и 1,80 и т. д. либо б) число случаев в каждом из интервалов 1,65-1,70, 1,70-1,75, 1,75-1,80 и т. д., — в интервалах ниже среднего роста симметрично повторятся конечно, те же самые числа. Считаясь — как было упомянуто — с нужною нам степенью дробности разбивки эмпирического ряда на интервалы, мы можем за пределы интервалов взять, например, половинный, однократный, полуторный двойной модуль. В таком случае теоретический ряд построится по первому из указанных только что способов таким образом:

в пределах	вероятность по таблице	или из 1000 случаев
$\pm$ ½ M	0,520	520
$\pm$ 1 M	0,843	843
$\pm$ 1½ M	0,966	966
$\pm$ 2 M	0,995	995
$\pm$ 2½ M	0,9996	1000

а по второму способу так:

в пределах между (— или +)	вероятность по таблице	или из 1000 случаев
0 и ½ M	0, 260	260
½ M » 1 M	0,1615	161,5
1 M » 1½ M	0,0615	61,5
1½ M » 2 M	0,0145	14,5
2 M » 2½ M	0,0023	2,3

Можем — если должны анализировать более длинный ряд — взять интервалы и по четвертям модуля. В таком случае теоретическое строение ряда выразится по первому способу цифрами:

276—520—711—843—923—966—987—995—999—1000,

а по второму цифрами:

138—123—95,5—66—40—21,5—10,5—4—2—05.

За исходную точку построения теоретического ряда можно взять и любые другие интервалы, заимствуя основания для разбивки не от тех или других понятий исчисления вероятностей, а считаясь, просто, с характером данного эмпирического ряда или с какими-либо особыми целями исследования, и затем только подыскать, опять-таки, соответственные вероятности по таблице интеграла P.

Затем, чтобы провести сравнение эмпирического ряда с теоретическим, надо вычислить среднее квадратическое отклонение эмпирического ряда $\sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{s}}$ и умножить его на $\sqrt{2}$, чтобы получить величину, непосредственно-сравнимую с теоретическою мерой отклонений — модулем, после чего остается одно из двух: либо по правилу пропорционального деления вычислить, как распределилась бы сумма членов эмпирического ряда по теоретической формуле, либо привести эмпирически-данный ряд к 100 или к 1000 и разбить его на интервалы пропорциональные таким-же кратным среднего квадратического отклонения умноженого на $\sqrt{2}$, какие взяты были для построения теоретического ряда.

Все сказанное на последних страницах несколько далеко увело нас от непосредственного предмета нашего интереса—Лексисовой схемы. Возвращаясь к этой последней, напомню, что всякий ряд с „неправильною“ дисперсией,—значит, с распределением отклонений, сколько-нибудь далеко отступающим от того, какое отвечало бы нормальной или сверхнормальной дисперсии,—это будет уже не „типический“, а „симптоматический“ ряд—ряд, свидетельствующий о существенных различиях между различными частями или о существенных изменениях данного массового явления. Как подчеркивает Лексис, раз числа изменяются в одном определенном направлении (при чем это направление не должно быть непременно, так сказать, прямолинейным, а может быть и изломанным, и волнообразным),—то эти изменения не будут уже случайными отклонениями, и данные статистические числа уже нельзя рассматривать как приближенные вероятности; следовательно, нельзя применять к ним основанные на предпосылках теории вероятностей приемы вычисления теоретических отклонений,—разве только из длинного ряда можно выделить части с приблизительно-устойчивыми цифрами, распределяющимися достаточно близко к симметричной схеме „типических“ рядов[1]); сам Лексис сделал это, в своей „Theorie der Massenerscheinungen“, по отношению к абсолютно „неправильному“ ряду смертности в различных возрастах, выделив из него „нормальную“ старческую группу и, в самом деле, получив для нее приблизительно-нормальную дисперсию. За исключением этого рода случаев исследование сказывающихся в рядах коэффициентов изменений и различий существенного характера—уже совсем другая задача, совершенно выходящая из круга вопросов, рассматриваемых в настоящей главе. Упомяну лишь о математических приемах, выражающих закон

[1]) Theorie der Massenerschein., стр. 32.

такого рода изменений и различий в виде более или менее сложных кривых,—из них сравнительно наиболее просты вычисляемые по методу наименьших квадратов кривые уравнений первой, второй и высших степеней, гораздо сложнее—известная система Пирсоновских кривых. Сам Лексис признает выраженные въ таких формах „гипотезы относительно характера изменений основной вероятности" „мало полезными": „по методу наименьших квадратов—говорит он—было бы легко определить линию так, чтобы наблюденные числа наименее от нее отклонялись,—но гипотеза такой нормы для изменений объективных вероятностей все же оставалась бы произвольною. Это изменение происходит вообще не по математическо-механическому „закону" (курс. мой А. К.) — оно лишь симптоматично для текучести и изменчивости крайне многочисленных и разнообразных условий, которые мы не можем проследить в деталях, но которых совокупное влияние мы обозреваем, в массовых явлениях, как-бы с высоты птичьего полета". Отсюда—и самое понятие „симптоматических" рядов,—„повидимому наиболее многочисленного класса этих последних"; рядов, „характеризующих более или менее изменчивое человеческо-общественное состояние известными численными симптомами" [1]). тех самых, анализ которых, охарактеризованными в гл. 2-ой приемами, позволяет нам установлять статистические закономерности и — что особенно важно — закономерности каузального характера.

Это—одна сторона вопроса. Другая заключается в том, что типический характер ряда, и в особенности — нормальная дисперсия, свидетельствуя о постоянстве основных вероятностей, тем самым свидетельствуют и о неизменности тех причин, которые управляют данным явлением. Но раз эти причины были неизменными, то является основание ожидать, что они и будут неизменными, а следовательно, что и в будущем можно ожидать появления тех же численных соотношений. Отсюда идущие непосредственно от Пуассона формулы вычисления вероятностей будущих событий, являющиеся непосредственным продолжением формул, позволяющих судить о неизменности или, напротив, об изменениях основных вероятностей. Отсюда — „типический" характер статистического ряда и нормальная дисперсия, как основа для предсказаний и рассчетов о будущем. „Пока отклонение от средней—говорит Вестергорд—меньше, чем вычисленная математически средняя ошибка наблюдения, мы имеем дело с возможностью, что отклонения обусловливаются действием одних только случайных причин". Когда первая величина превышает вторую, „то наличность постоянно-действующих причин отклонений становится более прав-

[1]) Стр. 32—33.

доподобною, и чем больше отклонение, тем больше становится вероятность, что оно обусловливается влиянием специальных причин, требующих особого исследования и выяснения". Если обнаруживается большое отклонение от средней,— „это значит, мы напали на след какой-нибудь посторонней причины, тогда как значительная правильность указывает на наличность однообразно-действующих причин. Если основанное на статистических данных предвидение оказывается ошибочным, отсюда сейчас же можно заключить об изменении действующих причин. Вообще—постоянство статистических явлений стоит в теснейшей связи с их причинностью", а вместе съ тем— и с возможностью научного предвидения; „если числа подвержены слишком большим колебаниям, значит, надо обнаружить те условия, от которых зависят эти колебания; если этого не удается сделать, значит, надо отказаться от предвидения даже для самого ближайшего будущего, ибо в таком случае правильность, находящая себе выражение в средних, не может быть сведена къ постоянно-действующим причинам, а остается вполне случайным явлением". Тем более, конечно, при „неправильной" дисперсии — в этом случае основанные на теории вероятностей предсказания и расчеты теряют под собою почву, потому что изменяющаяся вероятность, свидетельствующая об отсутствии неизменности управляющих явлением причин, тем самым устраняет возможность в предвидениях о будущем опираться на наблюденные в прошлом и в настоящем соотношения. Поскольку возможны такие предсказания, — они могут опираться не на измерения дисперсии при помощи Лексисова критерия, а на те общие эволюционные тенденции, которые обнаруживают данный конкретный ряд статистических чисел.

Это, однако, никоим образом не значит, чтобы симптоматические ряды играли в статистике меньшую роль, нежели типические. Напротив—статистике, в виде правила, а каузальному анализу всегда, приходится иметь дело именно с симптоматическими рядами, обладающими неправильною, с точки зрения теории вероятностей, дисперсиею, но с точки зрения статистики, дающими, без сравнения, больше для познания правильностей, закономерностей в массовых явлениях. Констатирование ненормальной дисперсии—как подчеркивает и Лексис—имеет отнюдь не одно только отрицательное значение; значение это отнюдь не сводится к констатированию малой надежности тех расчетов о будущем, какие могли бы быть основаны на постоянстве статистических цифр. „Неправильная", с точки зрения теории вероятностей, дисперсия играет, напротив, и гораздо более важную, положительную роль: она заставляет исследователя доискиваться причин неправильных колебаний цифр,—ее характер дает руководящую нить, указы-

вающую направление, где следует их искать. Существенные, не укладывающиеся в рамки закона случайных отклонений, а тем более— в одну из трех Лексисовых схем, изменения статистических отношений „непосредственно симптоматичны“ для изменений, имевших место в системах причинностей соответственных явлений. Знание подобного рода причинных отношений — замечает Лексис — имеет для общественной и, конечно, для всякой другой науки „гораздо большее значение, чем простое констатирование того, что колебания известных статистических отношений отвечают закону чисто случайных отклонений от среднего значения“. Scire est per causas scire; а между тем именно неправильные с точки зрения теории вероятностей колебания цифр являются основою всякого направленного на раскрытие причинных связей статистического анализа, тогда как сколь угодно высокая степень устойчивости, характеризуемая нормальной дисперсией, представляет собой лишь любопытный и важный для известных практических целей факт, и сама по себе, почти ничего не дает для достижения важнейшей цели научного исследования — для выяснения причинных зависимостей.

На этом я заканчиваю изложение учения о дисперсии и „устойчивости“ статистических рядов в том его виде, как оно было первоначально формулировано Лексисом, главным образом в его „Zur Theorie der Massenerscheinungen in der menschlichen Gesellschaft“. О тесно примыкающем к этому учению, хотя и ведущем свое начало непосредственно от Пуассона, „дифференциальном“ методе каузальнаго анализа я буду говорить въ 10-й главе, когда будет итти речь, вообще, о применениях теории вероятностей к статистической научной практике. В следующей, 9-й главе, я должен буду свести то, что дала дальнейшая работа самого Лексиса, а также его учеников и продолжателей частью для развития, частью—для критики этого учения.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ.

Учение об устойчивости статистических рядов. Дальнейшая разработка и критика.

Как читатель помнит, целью исследований Лексиса и его последователей и продолжателей было «установить степень фактической устойчивости статистических рядов», чтобы отсюда, во-1-х, найти пути к решению вопроса об отношении статистической закономерности к единичному случаю, в частности—к единичному человеческому поступку, а следовательно—и к лежащим в основе этого поступка волевым мотивам, к свободе индивидуального самоопределения; и, во-2-х—подойти к решению вопроса о тех областях статистической действительности, где статистические коэффициенты представляют собою приближенные значения вероятностей, и где, поэтому, принципиально допустимо и уместно применение методов исчисления вероятностей.

Очевидно, для того, чтобы путем измерений фактической степени «устойчивости» статистических рядов в указанном Лексисом направлении подойти к разрешению того и другого из намеченных вопросов, относящихся уже не к чистой теории, а к жизненной действительности, нужно было испробовать «критерий Лексиса» не на одних только, более того—даже не столько на искусственным образом налаженных экспериментах, на играх, основанных на случае и т. п., но и на явлениях статистической действительности—на реальных статистических рядах. Это и начато было самим Лексисом уже в его «Massenerscheinungen», и работа в этом направлении была продолжаема и продолжается и посейчас учениками, последователями, а затем и критиками Лексиса. Сначала получались почти сплошь отрицательные результаты. Нормальная дисперсия получалась, весьма обычно, в области опытов с шарами, игр, основанных на случае и т. п.—но не в реальных статистических рядах—не в цифрах, относящихся к сложным явлениям статистической действительности. «Истинно-типические ряды—писал Лаксис в 1877 году, на заключительных страницах „Massenerscheinungen», в сфере массовых явлений человеческого общежития встречаются очень редко»: продолжительность жизни той старческой группы населения, которую Лексис называет «нормальной группой», и распределение рождений по полу—вот единственные, в то время извест-

ные, примеры характера такого рода рядов. «Во всех остальных исследованных Лексисом случаях оказалась устойчивость поднормальная— действительные уклонения или колебания, в среднем, превосходили теоретические колебания в 5, 10 и 20 раз» (Борткевич). Что касается до поднормальной дисперсии, то Лексис «по всем сделанным наблюдениям» считал себя в праве «смело отрицать возможность (курс. мой. А. К.) где-либо обнаружить» такову ю, — «самою строгою из формул, писал он, в какие укладываются массовые человеческие действия, да и то немногие, является устойчивость нормальная». И то же самое он продолжает утверждать в уже цитированной одной из своих новейших работ. Сверхнормальной устойчивости — подтверждает он и здесь — пока нигде не найдено. «Что же касается собственно до морально-статистических отношений», т. е. тех, какие касаются волевых человеческих действий, «то они, даже при ничтожной на вид изменяемости, почти всегда обнаруживают сверхнормальную дисперсию». Благодаря этому—резюмирует Борткевич - «устойчивость статистических рядов представляется в другом виде, чем какой придавался ей в трудах Кетле, Бокля и др. Нет никакого основания предполагать существование каких-то особых сил или влияний, производящих устойчивость чисел... Напротив того, как показывает эмпирическое изучение движения статистических чисел, каждый отдельный случай, т. е. случай смерти, самоубийства, преступления, обнаруживает по отношению к массовому явлению, взятому в целом, такого же рода независимость, какая присуща отдельному случаю бросания игральной кости по отношению к общему результату ста и тысячи бросаний»,—а отсюда, в свою очередь, делались уже известные нам выводы относительно полной возможности совместить статистическую закономерность с независимостью единичного случая, следовательно и с свободой индивидуального самоопределения.

Между тем, в настоящее время, как выяснено отчасти самим Лексисом, отчасти учеными, продолжавшими начатые им исследования фактической дисперсии, такого рода заключения приходится признать уже не вполне соответствующими действительному положению наших сведений по вопросу об «устойчивости» статистических чисел. «Когда Лексис—говорит тот же Борткевич—обратился к изучению статистических рядов с умеренными числами наблюдений, он констатировал, вообще говоря, гораздо большую степень приближения к нормальной дисперсии»—для коэффициента расхождения Q «стали получаться значения, которые, как правило, не уклонялись сколько нибудь заметно от единицы». Или в несколько более общей формулировке А. А. Чупрова: «исследователи постепенно разыскали нормально-устойчивые массовые явления в таких областях статистической работы, где первоначально казалось, что действительные колебания чисел совершенно не стоят в соответствии с принятою нормою». И теперь А. А. Чупров с уверен-

ностью ожидает, «что дальнейшие измерения присоединят к ныне известным новые примеры нормальной устойчивости»; такая «устойчивость», и сейчас оставаясь—как мы увидим из дальнейшего—редкою, однако, «уже не может почитаться почти не встречающимся исключением в области массовых явлений общественной жизни». Успех этих новейших исследований — поясняет Чупров — «покоился, отчасти, на планомерном отборе... такого рода цифровых данных, которые наилучше отвечают в методологическом отношении задачам исследования, главнейше же на систематическом использовании той связи уровня устойчивости статистических рядов с некоторыми их свойствами, которая была раскрыта исследователями» [1]).

Прежде всего, исследования Лексиса и его учеников и продолжателей установили зависимость уровня дисперсии от числа наблюдений—от размера групп или объема совокупностей, к которым относятся статистические числа.

Мы знаем, что частота ряда чисел, полученных в условиях, отвечающих идеальным требованиям теории вероятностей, тем ближе соответствует объективной вероятности события, чем больше число наших наблюдений. В этом, ведь, и состоит математическая сущность того, что мы называем законом большого числа. Совершенно иначе обстоит дело с «устойчивостью» в специфическом, Лексисовском смысле: в смысле отношения действительной степени колеблемости реальных статистических рядов к теоретической мере этих колебаний, вычисленной в предположении действия одного определенного комплекса постоянных причин и чисто случайного характера отклонений. Степень «устойчивости» в этом смысле, измеряемая величиною коэффициента расхождения Q, «оказывается, в большинстве случаев, тем меньшею, чем больше число наблюдений. Во всех случаях—говорит А. А. Чупров, когда мы сопоставляем среднее значение Q для ряда мелких подгрупп с тем значением Q, которое получается для всей массы, мы неизменно находим первое более близким к единице, нежели второе». В «Очерках» А. А. Чупрова сделана, повидимому, исчерпывающая сводка результатов тех исследований дисперсии, которые привели к такого рода обобщению. Отсылая к ней интересующегося читателя, беру из нее, более или менее наудачу, лишь несколько примеров.

Для «устойчивости» распределения рождений по полу в целой Англии Q получается 1,62,—«устойчивость» поднормальная; средняя же арифметическая из отдельных величин Q, выведенных для каждого из 45 графств,—0,99, что соответствует нормальному уровню «устойчивости».

По французским данным «устойчивость» доли незаконнорожденных среди рождающихся характеризуется для всей страны величиною Q, равною 3,47, в среднем же из величин, вычисленных для 87 департаментов, Q опускается до

[1]) Чупров, «Очерки», 2-ое изд. стр. 371, 372, 366.

довольно близкого к нормальной «устойчивости» уровня 1,31. Распределение по полу умерших, в течение первых двух лет жизни, в целом Прусском королевстве дает Q, равное 2,08, средняя же арифметическая из Q, выведенных для каждой провинции, равна 1,24. «Для крупных государств значение Q, как правило, сильнее превышает единицу, нежели для мелких; сужая территориальные границы и уменьшая через то число наблюдений, мы заметно приближаем устойчивость явления к нормальному уровню. Частость самоубийств оказывается, например, для всей Германии весьма далекою от нормы (Q=5); между тем для восьми малых немецких государств ее уровень близок к норме... Брачность дает для Франции Q=25, а для небольших английских графств Q оказывается менее 2. Рождаемость дает для Дании Q=6,8, тогда как, для английских графств Q получается меньше 1,5». Располагая девять прусских провинций в убывающем порядке общего числа смертных случаев за год, мы получаем для них убывающие почти в том же порядке величины Q, т. е. растущую устойчивость распределения умирающих по полу. Совершенно такой же, почти полный параллелизм между числами смертных случаев и величиною Q для распределения их по полу получается при сопоставлении погодных, двухлетних и трехлетних возрастных групп умерших в возрастах от 4 до 10 лет. и т. п.

Другое не менее существенное обстоятельство, обнаруженное позднейшими исследованиями, заключается в повышенной «устойчивости» или иначе—в пониженной дисперсии чисел, выражающих *не общий размер* или объем, а *внутреннее строение, состав* статистически изучаемой массы. Говоря иначе, для чисел, изображающих *соотношения между частостями* сопряженных друг с другом явлений, *колебания ближе к нормальному уровню*, нежели для *самих частостей*. Так, *распределение* преступников или самоубийц по *полу* или по *возрасту* несравненно более устойчиво, чем общая частота самоубийц и общая преступность; распределение *рождений по полу* несравненно более постоянно, нежели *общая рождаемость* в стране или местности; более постоянно и *относительное число мертворождений* в общей массе ежегодно рождающихся; *распределение браков* по предшествующему *семейному состоянию* брачущихся (холостые с девушками, холостые с вдовами и пр.) несравненно постояннее, нежели общая брачность; распределение умирающих по полу дает далеко меньшие колебания, чем общая смертность в стране или местности, и т. д.

Количество браков в Пруссии, за время с 1878 по 1883 гг., колебалось между 71 и 81 случаем на 10.000 населения,—но на каждую сотню браков в каждом из названных годов приходилось браков между холостыми молодыми людьми и девушками 84—84—84—84—84—85; амплитуда колебаний общего числа браков достигла 14,1% а распределение их по семейному состоянию брачущихся оставалось почти постоянным. Смертность за тот же период колебалась в Италии между 27 и 30,5, в Ирландии—между 17 и 20, в Саксонии—между 28 и 29,5 на тысячу—мы видим, значит, резкие различия между странами, а амплитуда колебаний погодных достигает в Италии 13., в Ирландии—18., даже в Саксонии, где она сравнительно не велика,—5, 4%. Но колебания

промилле умирающих мужчин не выходят для Италии из пределов 507 и 515, для Ирландии—493 и 503., для Саксонии—522 и 527; цифры, получающиеся для отдельных стран, очень близки друг к другу, а амплитуда колебаний не превосходит 1,6, 2,0 и 1,0%; еще большая близость коэффициентов получается, если пойти в изучении внутреннего строения массы еще дальше и расчленить ее не только по полу, но и по возрасту умирающих и т. п...

На частном примере детской смертности Лексис об'ясняет это явление следующим образом: «Мы можем — говорит он — указать ряд конкретных внешних причин, вызывающих отклонение от нормальной общей смертности (эпидемии, экономическое расстройство и пр.), но мы не видим, почему бы эти внешние условия оказывали специфически-различное влияние на смертность лиц разного пола в раннем детском возрасте, где оба пола нисколько не отличаются по образу и условиям жизни»; умирает больше мальчиков,—в силу тех же, одинаковым образом на оба пола действующих причин умирает и больше девочек, и, следовательно, пропорция умирающих того и другого пола не претерпит изменений; отсюда—полная вероятность ожидать весьма постоянного отношения мужской и женской смертности в раннем детском возрасте,—и это ожидание подтверждается действительностью. Общая преступность колеблется очень сильно под влиянием таких обстоятельств, как урожаи, хлебные цены, эпохи промышленного под'ема и депрессии, политические пертурбации,—но все эти обстоятельства весьма мало влияют на ту совокупность условий, которая определяет степень участия того и другого пола и разных возрастов в совершении преступлений: мы не можем уловить причины, почему неурожай или кризис сильнее повысил бы преступность возрастной группы 29—30 лет, нежели 40—50-летних, или наоборот; побуждения к совершению, в частности, имущественных преступлений усиливаются и у 20—30-летних—но они приблизительно в той же мере усиливаются и у 40, и у 50-летних. Или обобщая эти рассуждения: есть очень много случаев, где масса, и в частности социальная масса, рассматриваемая в целом, подвержена действию изменяющихся во времени или в пространстве условий, вызывающих более или менее резкие колебания цифр, — но эти условия в одинаковой мере влияют на все составные части данной массы и потому остаются без влияния на внутреннее расчленение ее по изучаемому признаку—на участие в массовом явлении тех отдельных групп, на которые оно распадается по тем или другим, хотя бы весьма существенным в других отношениях, признакам.

Наконец, третье обстоятельство, привнесенное позднейшими исследованиями к первоначальной схеме Лексиса,—это так называемый „закон малых чисел" Борткевича: очень редкие явления обнаруживают весьма высокую степень „устойчивости",—несравненно большую, чем те-же явления в больших массах. На первый взгляд это—не более, нежели частный случай того первого, более общего положения, которое гласило, что, по данным новейших исследований, степень „устойчивости" „оказывается в большинстве случаев тем меньше, чем больше число наблюдений", и наоборот—тем выше, чем это число меньше [1]). Но между

[1]) С таким пониманием мы встречаемся, напр., у проф. Р. М. Орженцкого, как в «Сводных Признаках», так, отчасти, и в более новом «Учебнике математической статистики». «Чем меньшие группы мы берем—так резюмирует он в первом из названных сочинений закон повышения «устойчивости» по мере уменьшения массы наблюдений,—тем более приближается коэффициент расхождения к величине, характе-

тем и другим есть существенная разница: в первом положении речь шла о сокращении числа наблюдений,—„закон малых чисел“ Борткевича относится, не просто к уменьшающемуся числу, а именно к малым числам, и притом не к числам наблюдений, а к числам событий; относится, другими словами, к редким событиям. Масса, среда, в которой происходит изучаемое событие, может быть вовсе не мала,—может быть даже очень велика; для приложимости „закона малых чисел“ требуется лишь, чтобы само событие было редким событием.

Итак, еще раз: „закон малых чисел“ Борткевича состоит в том, что очень редкие явления обнаруживают большую степень „устойчивости“, чем те же явления в больших массах.

Некоторое неясное предвкушение этого—прежде всего — факта мы находим еще у Адольфа Вагнера, в его вышедшей в 1864 году монографии «Die Gesetzmässigkeit in Gesellschaftsleben». «Очень часто—говорит он здесь—можно видеть, что неправильности в малых числах слишком преувеличиваются и что, напротив, в них отражается влияние постоянной причины, хотя, может быть, и не так резко определенное, как в больших числах». С гораздо большею ясностью и определенностью тот же факт был констатирован, уже в недавнее время, англичанином Bowley (позже Борткевича, но повидимому независимо от него). «Замечательное освещение—говорит он—наши общие соображения получают благодаря наблюдаемому в действительности постоянству малых чисел. Факт, и факт весьма замечательный, если среди большого числа явлений встречается небольшое число таких, которые отличаются какими-либо особыми характерными чертами, это малое число лишь очень редко испытывает значительное

ризующей нормальное рассеяние, иначе говоря, малые абсолютные числа явлений какого-либо рода более приближаются к условиям нормальной дисперсии, чем те же явления при исследовании их в больших группах. Указанное свойство малых сравнительно чисел проф. Борткевич называет законом малых чисел» (Сводн. призн., стр 167). Равным образом и в «Учебнике математической статистики» под заголовком «Закон малых чисел» формулируется и затем обосновывает положение, «что при сверхнормальном рассеянии величина коэффициента расхождения зависит, при прочих неизменных условиях, от числа случаев S, из которых состоит каждая частная совокупность; а именно: при большом числе случаев S коэффициент Q отличается от единицы больше, чем при малом», более того—это положение непосредственно приписывается Борткевичу, который «обратил внимание» на формулированное в этом положении обстоятельство («Уч. мат. стат.», стр. 105). От этого случая проф. Орженцкий считает нужным (конечно совершенно правильно) «отличать другой случай устойчивости рядов, близкой к нормальному рассеянию, который проф. Борткевич также (Курсив мой. А. К.) называет «законом малых чисел»,—случай, где «устойчивость обусловливается не малым числом случаев наблюдения, а малым числом случаев появления события, его редкостью, или, иначе говоря, малой величиной вероятности появления события» (стр. 108), что, в самом деле, принадлежит Борткевичу и что Борткевич, в самом деле называет «законом малых чисел».

повышение и лишь очень редко совершенно исчезает». Положению этому Bowley дает некоторую математическую мотивировку и иллюстрирует его анализом данных о смертности от одного редкого вида лихорадки, при чем получается, действительно, очень близкое соответствие между теоретически предвидимою и действительною повторяемостью смертных случаев. На этой повторяемости малых чисел, замечает в заключение Bowley, основывается существование разнообразнейших специалистов, начиная от врача, который лечит только одну малоизвестную ушную болезнь, и кончая торговцем редкостными предметами; другими примерами того же рода является регулярное повторение всякого рода несчастных случаев и вообще всяких необычайных событий—она же, добавлю от себя, проявляется в «малых числах» гениальных писателей, вроде Гете или Толстого, артистов, как Патти или Шаляпин и т. п.

Однако, лишь так называемый «закон малых чисел», формулированный В. И. Борткевичем, представляет собой точную формулировку указанного факта; Борткевичу первому удалось дать этому факту твердое обоснование, указать его место в общей системе наших представлений об «устойчивости» статистических чисел и этим путем дать полное завершение этой системы. Борткевич, именно, подверг специальному рассмотрению случай весьма малых чисел, при чем, в отличие от общих формул, оказалось возможным игнорировать и размер вероятности, и колебание числа наблюдений, и считаться только с абсолютными числами событий; с другой стороны, ему удалось выяснить теоретическое распределение самих колебаний этих чисел, которые, в этого рода случаях, не укладывались в общие формулы «теории погрешностей».

Мы не имеем возможности проследить здесь, хотя бы в самых общих чертах, того математического построения, на которое опирается «закон малых чисел» Борткевича. Мы можем, однако, отметить некоторые существенные моменты, отличающие прием Борткевича от обычного Лексисовского приема. Дело вот в чем: в числителе обычной формулы модуля находятся величины вероятностей данного события и события ему противоположного, p и 1—p; в знаменателе—число наблюдений n; значит, модуль, мера дисперсии, тем меньше, чем больше число наблюдений n и тем больше, чем меньше разница между p и 1—p.

Однако, формула эта (как и вся интегральная формула Бернулли-Лапласа, в которую формула модуля входит как составная часть), действительна только для не слишком ничтожных и не слишком подавляющих значений p и 1—p; следовательно, она не действительна для очень редких событий, обладающих, значит, ничтожными вероятностями. И вот, чтобы найти меру отклонений, пригодную именно для этого случая—редких событий с чрезвычайно малыми вероятностями, Борткевич модифицирует обычный прием:

Исходя из предположения бесконечного уменьшения вероятности p, он выводит особые формулы «прямого» и «непрямого» вычисления общей меры колебаний,—формулы, по своему смыслу, вполне аналогичные «физикальному» и «комбинаторному» методу Лексиса—иначе сказать—средней квадратической ошибке, как мере действительной колеблемости ряда и теоретической мере чисто случайных колебаний—модулю и соотносительным с ним другим величинам, но облеченные в совершенно иные математические выражения. Отсылая интересующегося этими формулами читателя к работе самого Борткевича „Das Gesetz der kleinen Zahlen", отмечу лишь наиболее существенное: именно, что в обоих формулах не участвуют ни вероятности p и q, ни число наблюдений n, а участвуют, взамен того, фактическое число случаев изучаемого редкого явления и математическое ожидание наивероятнейшего числа случаев. Значит, мера «устойчивости» ряда малых чисел становится вне зависимости от числа наблюдений и от априорной вероятности события, а определяется главным образом абсолютными числами событий. Как я уже сказал, теоретическая мера устойчивости выводится в предположении бесконечно убывающего p и бесконечно возрастающего числа наблюдений n; но затем на числовых примерах доказывается, что соответственные формулы пригодны и для всех вообще случаев, где n «достаточно большое число», а p — «достаточно малая дробь»— только бы произведение p на n, т. е. математическое ожидание наивероятнейшего числа случаев, было малым числом. Дело именно в этом абсолютно малом числе событий, а не в ничтожной вероятности,—если даже вероятность события чрезвычайно мала, но общее число наблюдений весьма велико, и, следовательно, произведение этих двух величин и отвечающее ему абсолютное число случаев не очень малые числа; если, например, вероятность события 0,0001, но общее число наблюдений 100 миллионов, и, следовательно, математическое ожидание событий 10000,—то остаются применимыми формулы Бернулли-Лапласа, формулы же Борткевича получают применение именно только при „малом числе" событий и соответственно малой величине математического ожидания,—при чем Борткевич оговаривает, что для понятия „малой величины" он не может указать определенных численных рамок.

Выработав, таким образом, специальную меру „устойчивости" редких событий, Борткевич применяет ее затем к ряду примеров. Результаты, в самом деле, поразительны. Аналогичное коэффициенту расхождения Q, отношение „прямо" и „непрямо" вычисленной меры отклонений получается: для детских самоубийств Пруссии (особо мальчиков, девочек и тех и других вместе) 1,12, 0,88 и 0,99; для женских самоубийств в мельчайших германских государствах—1,15; для несчастных случаев у застрахованных рабочих—1,13; для случаев

смерти от удара копытом в германской армии даже 1,01 и 1.00. „Устойчивость“ ряда крайне редких событий оказывается, таким образом, нормальною или весьма близкою к нормальной. А между тем при исследовании больших масс аналогичных событий „устойчивость“, находящая себе обращенное выражение в значениях величины Q, значительно ниже; например, женские самоубийства для всей Германии дают Q равное приблизительно 5—«устойчивость» впятеро ниже, чем для соответственных «малых чисел». Отсюда естественно напрашивающийся вывод, что «как раз большие числа событий являются причиной несоответствия действительной и теоретической дисперсии,— тогда как, напротив, в малых числах событий надо искать причины того, что в приведенных примерах выводы статистики почти совершенно совпадают с ожиданиями теории».

Объяснение этому парадоксальному выводу Борткевич выводит из анализа состава «погрешностей» или отклонений от нормальной или наивероятнейшей величины. Как мы знаем, получаемая из наблюдения, видимая или общая погрешность—Totalfehler, слагается из двух элементов; Normalfehler и absoluter Fehlerexzedent—нормальной и избыточной погрешности,—термины, которые у Борткевича соответствуют употребляемым Лексисом терминам: «комбинаторная» и «физическая» слагаемая. В нормальной погрешности находят себе выражение одни только чисто случайные колебания; избыточная погрешность — результат изменяющейся вероятности, являющейся выражением уже не случайных, а существенных причин, влияющих на отдельные части данной массы. При постоянной для всей массы вероятности, равно как и при «средней вероятности в собственном смысле», избыточная ошибка низводится до нуля, и действительная погрешность уменьшается до уровня нормальной; при изменяющейся основной вероятности избыточная ошибка представляет величину большую нуля. Сила влияния изменяющейся вероятности находит себе численное выражение в отношении избыточной ошибки к нормальной, которое Борткевич обозначает через λ и которое, очевидно, является аналогичным Q—отношению общей погрешности к нормальной. И вот, математический анализ показал, что при прочих равных условиях λ, а значит вместе с нею и Q, возрастает, и значит устойчивость ряда убывает, с ростом числа наблюдений; если для 100.000 наблюдений величина Q определилась равною 2, то при 10.000 наблюдений Q получает значение 1,14, при 1.000 наблюдений — 1,015, при 100 наблюдениях — 1,0015. «При условии ограниченного поля наблюдений,— резюмирует Борткевич результат своих исследований, — получается приблизительно нормальная дисперсия; чем меньше поле наблюдения, чем реже встречается в данном обществе исследуемое явление, тем лучше статистические результаты согласуются с руководящею фор-

мулой. Гипотеза переменной вероятности (мерилом которой является—мы видели—„избыточная» погрешность! А. К.) дает нам способ постигнуть закономерность этого явления, и в этом смысле факт, что малые числа событий при очень больших числах наблюдений подчиняются определенной норме колебаний или тяготеют к ней, имеет право на название закона малых чисел". Этот закон, говорит дальше Борткевич, является результатом последовательного проведения исследований Лексиса и, с теоретической точки зрения, представляет собою, быть может, их завершение: „путем исследования малых и весьма малых чисел событий сделалось возможным свести к минимуму избыточную ошибку и выражающееся в ней влияние изменений вероятности и таким образом получить приблизительно нормальную дисперсию".

Однако дело не только в этом: факту, что „уровень устойчивости, по общему правилу, приближается к нормальному с уменьшением числа наблюдений", в особенности же факту исключительно высокой „устойчивости редких событий" Борткевич приписывает чрезвычайно важное принципиальное значение. Это значение в том, что данный факт, в связи с гипотезой изменяющейся вероятности, по словам Борткевича, „как бы санкционирует общим образом приложение теории вероятностей к статистическим данным". По мнению Борткевича первоначальными исследованиями Лексиса „границы этого способа обработки" статистических данных—обработки приемами исчисления вероятностей, „были намечены, в некоторых направлениях, слишком тесно". Этими исследованиями „окончательно опровергнуты прежние ошибочные представления о существе статистической закономерности". Но „дают ли они,—спрашивает Борткевич,—право отрицать за большинством статистических коэффициентов всякое отношение к исчислению вероятностей"? Несомненно, числа статистических рядов уже нельзя рассматривать как приближенные значения общих, т. е. постоянных, „неизменных во времени вероятностей. Но такая схема исчисления вероятностей, оказавшаяся непригодною, не была единственною возможною,—можно было попытаться свести закономерность статистических рядов к схеме переменной вероятности Это и сделано Лексисом в его исследовании о „Теории устойчивости статистических рядов". Результаты не были, однако, в такой мере доказательны, чтобы дать право на заключение о всеобщности значения (Allgemeingültigkeit) схемы переменной вероятности для статистики". Вот, в этом-то смысле формулированный Борткевичем „закон малых чисел" и представляется ему „завершением" исследований Лексиса: „выяснившееся при этом почти полное согласие теории с опытом едва ли допускает сомнение относительно объективного значения понятия вероятности для исследованных областей статистической действительности". Правда, сфера выполненных самим Борткевичем, в

целях проверки данного закона, исследований очень ограничена, но „упомянутое заключение относительно объективного характера вероятности не привязано к столь тесным рамкам: то, что в этом отношении действительно для самоубийств или несчастных случаев в отдельных районах и т. п. должно, очевидно, иметь и общее значение. Где бы и когда бы ни совершились самоубийства или не происходили несчастные случаи, Art des Zustandekommens — пути осуществления таких событий, надо думать, таковы, что допускают применение понятия вероятности". Борткевич убежден, „что то же имеет место и по отношению к другим явлениям, принадлежащим к области статистики населения и моральной", и думает, что „закон малых чисел оправдается везде", что „каждый новый пример, раз он, как следует ожидать, приведет к благоприятным результатам, поможет укрепить научное убеждение, что в основе всех чисел статистики населения и моральной лежат математические вероятности или функции таковых" [1]).

Можно ли, однако, присоединиться к этим, принципиально столь важным заключениям из математически объясненного факта „устойчивости" малых чисел?, Отмечу прежде всего, что в процитированных in extenso соображениях Борткевич недостаточно строго различает две, по существу различных, вещи, из которых одна едва ли требует еще доказательств, а другая и после всего того, что достигнуто современною, базирующеюся на началах теории вероятностей статистическою теорией, по моему убеждению, остается недоказанною. Первое—это „объективное значение понятия вероятности для статистически-изучаемой действительности". Второе—„убеждение, что в основе всех чисел статистики населения и моральной лежат математические вероятности или функции таковых" (курс. мой. А К.).

Я частью говорил уже о роли понятия вероятности в одной из предшествовавших глав (стр. 158—159), частью буду говорить о ней в следующей, 10-ой главе. Сейчас я скажу только в двух словах: и я тоже совершенно убежден в том, что это понятие лежит в основе всякого статистического умозаключения и всех приемов статистического анализа, в какие бы внешние формы они ни были облечены. Совсем иначе дело обстоит с предпосылками математической вероятности, а, следовательно, и с законностью применений исчисления вероятностей к обработке статистических данных. Забегая и в данном случае несколько вперед, выскажу свое убеждение, что этот вопрос и после всех дополнений и поправок, привнесенных к первоначальной схеме Лексиса,—дополнений и поправок, частью уже изложенных, частью излагаемых в дальнейшем, остается проблемою, требующею разрешения в каждом отдельном случае или, точнее, в каждой отдельной категории случаев; возможность прменения к данным статистики „класси-

[1]) Bortkiewicz, Das Gesetz der kleinen Zahlen, 1899, стр. 36-39.

ческой схемы урн с шарами разных цветов" по прежнему остается „задачею", требующею разрешения применительно к конкретным условиям, не становится такой предпосылкой, которая могла бы притязать на сколько нибудь общее значение. Можно сказать, пожалуй, и больше: что внесенные к первоначальной схеме Лексиса дополнения и поправки, лишив ее первоначальной простоты, скорее отдалили, нежели приблизили окончательное разрешение вопроса о случаях применимости исчисления вероятностей к статистике.

Остановимся сначала на вопросе о значении повышения уровня „устойчивости" по мере сокращения „поля наблюдения".

Мы видели, что „устойчивость" статистических чисел повышается по мере перехода от целых больших масс к частям их и от более крупных подразделений к более мелким, видели, что цифры, изображающие внутреннее расчленение масс или наступление известных событий внутри отдельных частей так или иначе расчлененной массы, всегда значительно „устойчивее", нежели те, которые выражают их общие размеры. Если сюда-же присоединить „закон малых чисел" Борткевича, то получается общая формула, которую А. А. Чупров выражает такими словами: „уровень устойчивости массовых явлений с сверхнормальною дисперсиею тем ближе к норме, чем уже поле наблюдения и чем в силу этого, меньше числа повторений явления".

Заключение, на первый взгляд совершенно парадоксальное, опрокидывающее все, что мы себе представляли под названием закона большого числа. Закон этот гласит, что постоянство, устойчивость статистических чисел, соответствие их объективным вероятностям, обнаруживается тем яснее, чем больше поле наблюдения. Теперь мы пришли к заключению, что устойчивость тем больше, чем меньше поле наблюдения.

Еще в 3-м издании моей книги «Теория и методы статистики», я старался доказать, что в действительности здесь нет такого противоречия—что ни «закон малых чисел», ни более общее положение, что «устойчивость» повышается по мере сокращения поля наблюдения, не подрывают «закона большого числа». Сущность моих соображений сводилась к тому, что и более общая и частная формулировка положений, касающихся зависимости устойчивости статистических чисел от широты поля наблюдения, имеют в виду не просто ту устойчивость, которая была бы синонимом постоянства, малой изменяемости, близости к априорным вероятностям, а «устойчивость» в специфическом смысле, приданном этому термину Лексисом, в смысле степени соответствия между действительною колеблемостью статистических чисел и теоретически вычисленною в предположении чисто-случайного характера отклонений Абсолютная или сравнительная с другими статистическими рядами колеблемость может быть очень невелика и тем не менее «устойчивость» будет поднормальной, если теория предсказывает для ряда с данными вероятностями и данным числом наблюдений еще меньшие колебания. Последние могут быть очень резки—и тем не менее „устойчивость" будет нормальною, если теория предсказывает именно такие резкие колебания. Отсюда вытекал прямой вывод касательно взаимоотношения между законом большого числа и тем, что можно назвать

«законом уменьшающихся чисел»: ведь теоретически вычисляемая мера дисперсии зависит прежде всего от числа наблюдений—при очень большом числе последних она будет очень мала, и по сравнению с нею даже умеренные колебания статистических чисел будут слишком велики и дадут коэффициент расхождения больше единицы. При малых числах наблюдений теоретические пределы случайных колебаний будут очень велики, в случае «редких событий» они будут громадны, теоретически допустимый максимум будет превышать таковой же минимум во много раз (а если минимум падает до нуля, то в бесконечное множество раз), и потому даже и очень резкие колебания эмпирического ряда не будут выходить из допускаемых теориею широких пределов Делимое—средняя квадратическая ошибка эмпирического ряда—может быть очень велико, но столь же велик будет и делитель,—теоретическая мера случайных колебаний, а следовательно частное, величина Q получится небольшое, и „устойчивость“ в нашем условном смысле будет очень велика[1]) Или говоря короче: в большой массе чисто-случайные колебания не могут выходить из известных узких пределов, а потому даже не слишком сильно действующие посторонние причины, находящие себе выражение в сравнительно небольших изменениях основной вероятности, вызывают выходящие из нормы колебания чисел и, следовательно, обусловливают сверхнормальную дисперсию. В малых числах случайные колебания, допустимые с точки зрения нормальных ошибок, огромны, а потому «физические» колебания, вызываемые даже резким изменением основной вероятности, не выходят из допустимых для колебаний первого рода пределов. При большом числе наблюдений цифры будут, с житейской точки зрения, более постоянными, их видимая колеблемость, измеренная по «физическому» методу, будет невелика, и тем не менее „устойчивость“ их в известном нам условном смысле будет весьма невысока. По мере сокращения поля наблюдения взаимоотношения между постоянством в житейском смысле, между видимою колеблемостью, с одной стороны, и «устойчивостью» в Лексисовском смысле постепенно меняется. Наконец, при «малом числе» наблюдений в смысле закона Борткевича видимая колеблемость чисел будет очень велика, но она не выйдет из пределов, допускаемых для таких чисел теориею, и потому будет сопровождаться весьма высокою степенью «устойчивости» в специфическом смысле этого слова. И эта «устойчивость» малых чисел будет означать только одно: что даже совершенно случайные, самые редкие явления,—и те наступают в соответствии с предсказаниями теории вероятностей, в этом случае оставляющей чрезвычайно широкий простор для случайных колебаний.

---

[1]) «Разница между вычисленными по обоим методам средними ошибками зависит от взаимоотношения двух слагаемых—нормальной и физической. Между тем нормально-случайная слагаемая, согласно закону большого числа, тем больше, чем меньше число наблюдений, и она понижается с увеличением этого числа, тогда как физическая слагаемая, говоря вообще, независима от числа наблюдений. Благодаря этому при относительно больших числах наблюдений преобладает физическая, при относительно малых нормально-случайная слагаемая. Если, поэтому, колебания, испытываемые лежащею в основе данного ряда объективною вероятностью, не велики, то при умеренно больших числах наблюдений физическая слагаемая останется почти совершенно заслоненною, и дисперсия действительного ряда представится почти нормальною, тогда как то же самое статистическое явление, изученное на больших числах, даст заметно сверхнормальную дисперсию» (Zizek).

Это—повторяю—соображения, которые я развивал в 3-ем издании „Теории и методов статистики". Это третье издание еще не успело выйти из печати,—и мне уже стала ясна необходимость резче подчеркнуть то, что скорее подразумевалось, нежели было прямо высказано в изложенных только-что соображениях, именно, чрезвычайную условность всего данного построения—всего „закона уменьшающихся чисел"; фиктивный, в значительной мере характер „повышения устойчивости" по мере сокращения поля наблюдения.

В самом деле: если теория вероятностей, в случае „редких событий", оставляет „чрезвычайно широкий простор для случайных колебаний", то не будет ли этот „чрезвычайно широкий" простор—беспредельно-широким? И не сведутся ли, в таком случае, „предсказания" теории вероятностей к полному отсутствию предсказаний? Такой вопрос напрашивался сам собою,—и вполне определенный ответ на него дан академиком А. А. Марковым в недавно напечатанной им небольшой работе: „О коэффициенте дисперсии для малых чисел" [1]). „Коэффициент дисперсии для малых чисел—так начинается эта заметка,—не может быть большим (курс. мой. А. К.). В виду того, что некоторые статистики склонны, повидимому преувеличивать значение этого факта, усматривая в нем особый закон малых чисел, и доказательство специальной устойчивости таких чисел, мне кажется полезным доказать его независимость от теории вероятностей". Как удачно резюмирует сущность соображений А. А. Маркова М. В. Птуха, в названной выше своей книге, сущность этих соображений сводится к двум пунктам: к „общему доказательству, что коэффициент дисперсии не может быть больше корня квадратного из наибольшого числа выходов изучаемого события, и к ряду частных примеров, показывающих, что коэффициент Q остается близким к единице при разнообразнейших (или всех возможных) комбинациях" [2]). Тем и другим путем—таково заключение А. А. Маркова—„подтверждается, что коэффициент дисперсии может быть близким к единице для весьма разнообразныхъ комбинаций, никакого отношения к теории вероятностей не имеющих, и что малость его для малых чисел ничего особенного не представляет". Еще резче и определеннее,—если только это возможно,—А. А. Марков формулирует ту же мысль в письме ко мне, которое я, с его любезного разрешения, процитирую: он предлагает здесь статистикам „попробовать составить искусственно из малых чисел большой коэффициент дисперсии. Это—предвосхищает он решение задачи—невозможно, хотя бы распределение малых чисел не соответствовало никаким формулам теории вероятностей".

Перейду теперь к общему случаю—к общей формуле пони-

---

[1]) Страховое Обозрение за 1916 г.

[2]) Стр. 111.

жения коэффициента дисперсии и, следовательно, повышения „устойчивости", по мере сокращения поля наблюдения. Здесь мне не остается почти ничего прибавить к тем выводам, к каким пришел А. А. Чупров еще в 1-ом издании своих „Очерков по теории статистики" и даже ранее того—в статье „Die Aufgaben der Theorie der Statistik", где он определенно говорит о повышении „устойчивости" по мере сокращения поля наблюдения как об „eine Art optische Täuschung"—о некоторого рода оптическом обмане, обусловливаемом тем, что при меньшем числе наблюдений знаменатель больше, а следовательно, частное—коэффициент расхождения при данной мере колебаний основной вероятности должен получиться меньше [1]). Эти выводы, по существу, очень близки к пониманию, которое я формулировал на цитированных страницах „Теории и методов статистики". Но Чупров уже в то время, в 1909 и даже в 1905 гг., додумал до конца то, что у меня осталось до конца недодуманным, или, во всяком случае, формулированным с гораздо меньшею степенью отчетливости и определенности: „Приближение устойчивости—говорит А. А. Чупров в 1-м издании „Очерков" [2])—к нормальному уровню с сокращением числа наблюдений объясняется, таким образом... выбором меры устойчивости: оно сводится к своего рода иллюзии (курс. мой. А. К.); связь между уровнем устойчивости и широтою поля наблюдения как бы не существует в действительности, она появляется лишь в силу своеобразного характера построенных нами приемов исследования". Борткевич, в своей статье, посвященной „Очеркам" А. А. Чупрова, решительно отвергает это заключение; по его мнению, здесь нет „никакой иллюзии.. для того, кто отдает себе ясный отчет в том, что величина Q,..., выражая степень приближения констатированного уровня устойчивости к тому уровню, который в данном случае соответствовал бы основной схеме теории вероятностей, измеряет устойчивость при помощи, так сказать меняющегося масштаба" [3]). Соображения эти не убедили, однако А. А. Чупрова. Напротив, во втором издании „Очерков" он пользуется именно метафорой „меняющегося масштаба" для того, чтобы еще более подчеркнуть и заострить произносимый им над теорией связи уровня устойчивости с широтою поля наблюдения решительный приговор: „теория эта,—говорит он,—сводится к своего рода ариѳметической тавтологии: мы измеряем устойчивость при помощи „меняющегося масштаба". При таком освещении экспериментальное констатирование факта связи между уровнем устойчивости и широтою поля наблюдения оказывается лишенным научного интереса: связь непосредственно обусловлена характером применяемых нами приемов измерения и нуждается в опытной проверке не более, чем, например,

[1]) Jarhb. f. Gesetzgeb., Verwalt. etc, Bd XXIX, стр. 466.
[2]) Стр. 353—354.
[3]) „Задачи и концепции" стр. 370.

утверждение, что температура тела, измеренная термометром Реомюра, покажет меньше градусов, нежели при измерении Цельсием. О реальных явлениях констатированная нами связь Q с n не говорит в таких условиях ничего“ [1]). И Чупров, конечно, прав. Ведь, что значит, в самом деле, „меняющийся масштаб“? Это значит, что по мере сокращения числа наблюдений „основная схема теории вероятностей“ все более утрачивает свое реальное значение; что коэффициент расхождения, при сужении поля наблюдения, все более перестает быть мерою действительной реальной устойчивости и все более санкционирует обусловливаемую переходом к малым совокупностям, все более и более резкую, колеблемость чисел.

Из всей системы „свойств“ статистических рядов, связь с которыми позволила обнаружить нормальную устойчивость в целом ряде массовых явлений, реальное значение сохраняет только одно: повышенная устойчивость чисел, носящих характер „относительных вероятностей“, т.-е. характеризующих не общий объем той или иной массы и не общую частоту данного явления, а внутреннее расчленение массы по тем или иным признакам. Но нетрудно видеть, что это свойство статистических чисел не имеет никакой внутренней связи с общею схемой повышения уровня устойчивости по мере сокращения числа наблюдений: достаточно приведенных выше соображений самого Лексиса или приводимых, в числе прочих, у А. А. Чупрова [2]) примеров соотношения между числами рождений мальчиков и девочек, или между числами мальчиков и девочек среди умирающих, чтобы убедиться в том, что этот момент обнаруживает свое полное действие и при весьма больших числах. Главное же—это то, что для объяснения обнаруживающейся здесь повышенной устойчивости нет никакой надобности привлекать и, повидимому, никто не привлекает каких-либо схем исчисления вероятностей: повышенная устойчивость такого рода чисел находит себе полное и самоочевидное объяснение в соображениях чисто „житейского“ характера в роде тех, изложенных мною несколько выше, соображений, какие приводит Лексис для объяснения повышенной устойчивости распределения детской смертности по полу или преступности по возрастным группам.

---

[1]) „Очерки“. 2-е изд., стр. 389. В более осторожной форме, но по существу тот же взгляд высказывает стоящий, в остальном, всецело на почве исследований Борткевича М. В. Птуха: „Вопрос о нормальном уровне устойчивости или же о приближении к нему,—говорит он, есть чисто формальный; это просто констатирование поскольку (насколько?) колебания статистического ряда соответствуют тем, которые предуказаны масштабом, выбранным как норма. Всякое сравнение, поэтому, является несколько затруднительным, так как при этом нельзя не считаться с возможностью наличности разных масштабов“ (назв. соч., стр. 111).

[2]) „Очерки“, 2-ое изд., стр. 371.

Пойдем теперь дальше. Данные и соображения относительно повышения степени „устойчивости“ по мере сокращения поля наблюдения связываются, у Лексиса и его школы, с развитием и углублением учения как о нормальной, так и о сверхнормальной и поднормальной дисперсии. Остановимся, сначала, на условиях, порождающих нормальную дисперсию. Критерий, на основании которого каждый данный „типический“ ряд должен быть отнесен к той, другой или третьей категории, — так называемый критерий Лексиса,—сводится в существе к вычислению общей меры отклонений данного ряда статистических чисел, которые „отвечают условиям игры, основанной на случае, с черными и белыми шарами в постоянном отношении“; другими словами, нормальная дисперсия свидетельствует о лежащей в основе данного численного ряда постоянной вероятности, а, следовательно, о лежащем в основе данного явления неизменном комплексе постоянных причин. При изменяющейся от серии к серии (reihenweise) — с иного рода возможностями первоначальная схема Лексиса не считается—вероятности, должна, по Лексису, наблюдаться сверхнормальная дисперсия; в частности, она должна получиться в том наиболее близком к чистым схемам теории вероятностей случае, когда частные вероятности отдельных серий носят характер случайных отклонений от некоторой общей вероятности[1]). Между тем, постоянные вероятности мыслимы, строго говоря, лишь в обстановке искусственного эксперимента, но не в области явлений, изучаемых помощью статистического метода: „масса, в применении к которой идет речь о частостях и вероятностях“, не может быть абсолютно однородною,— приложение статистического метода „предполагает известную об'ективную пестроту единичных случаев, об'единенных в массу. При полной однородности массы, при полном тождестве всех единичных случаев, мы из области приложения метода статистического уходим в сферу иных приемов исследования, вовсе не нуждающихся в образовании совокупностей. Всякая (курс. мой. А. К.) масса, которую имеет смысл подвергнуть статистическому изучению, может быть разбита на более мелкие совокупности, выделяющие, при своем образовании, в категорию общих причин иные элементы, нежели те, что

[1]) Если вероятности изменяются, — поясняет Лексис в Abhandlungen, — но изменения носят случайный характер, „группируясь вокруг нормального значения W как случайные ошибки, то эмпирические отношения уподобляются результатам тиражей из урн, которые содержали бы белые и черные шары не в совершенно равном отношении, а при наполнении которых имелось бы в виду установить определенное отношение W, но операция эта была бы выполнена не с полною точностью, так что получились случайные ошибки». Вероятное отклонение частоты «v от частной вероятности данного ряда W остается тем же; но вероятное ее отклонение от W будет, очевидно, больше, ибо оно является результатом совокупного действия двух причин погрешности, из которых одну можно назвать статистическою, другую — физиологическою» (Abhandl., стр. 135—136).

отходят в нее при об'единении всех этих мелких совокупностей в одно целое, и дающие для вероятности изучаемого явления различные друг от друга значения“ [1]). В основе всякого массового явления, изучаемого статистикой, должны, значит, лежать изменяющиеся вероятности, и, следовательно, все получаемые из статистического наблюдения ряды, даже в том наиболее благоприятном для приложимости исчисления вероятностей случае, когда частные вероятности носят характер случайных отклонений от некоторой общей вероятности, — иначе сказать, когда частные совокупности могут быть рассматриваемы как разновидности выраженного в общей массе единого типа, должны, по схеме Лексиса, обнаруживать сверхнормальную дисперсию,— нормальная может встречаться разве только как редчайшее исключение; с точки зрения первоначальной схемы Лексиса, и она, скорее всего, вовсе невозможна. И такой вывод из самоочевидных теоретических соображений вполне согласовался с теми результатами, к каким привели Лексиса выполненные им первые измерения устойчивости статистических рядов: приблизительно-нормальная устойчивость получилась лишь для весьма немногих явлений, и притом для таких, которые стоят, так сказать, на границе между социальною статистикой и чистою биологией. Новейшие исследования, как упоминалось, значительно расширили круг явлений, для которых констатирована нормальная устойчивость. И параллельно с этим Борткевичу удалось доказать, что нормальная устойчивость вовсе не имеет своею необходимою предпосылкой постоянную вероятность. Опираясь, опять-таки, на Пуассона, Борткевич провел резкую грань между двумя видами „средних вероятностей“, т. е. таких, где общая для целой совокупности вероятность есть равнодействующая, средняя из различных вероятностей, присущих частным массам или совокупностям, — „среднею вероятностью постоянного состава“, и „среднею вероятностью в собственном смысле“. Средние вероятности первого типа относятся к таким массовым явлениям, которые слагаются из резко разграниченных частей с различными частными вероятностями; средние вероятности второго типа—к таким, где между частями данной массы не существует постоянного взаимоотношения, иначе сказать, где частные вероятности не могут быть приурочены к резко разграниченным „частным массам“. Схематическим примером средних вероятностей первого типа могут служить опыты с шарами, поставленные таким образом, что из каждой урны делается кряду определенное число тиражей, или тиражи делаются каждый раз из другой урны, но обязательно в определенном чередовании; примером средних вероятностей второго типа—такая постановка опытов, когда урна, из которой делается извлечение, каждый раз намечается особою же-

[1]) Чупров. «Очерки», 2-ое изд., стр 375.

ребьевкой. В первом случае — как подробнее придется об этом говорить в дальнейшем, получается поднормальная дисперсия и сверхнормальная устойчивость, во втором получающаяся схема «средней вероятности в собственном смысле», как показал Борткевич в своих «Kritische Betrachtungen»», лишь внешним образом, но не по существу, отличается от схемы одной урны, с постоянным составом шаров, и, следовательно, «характер вероятности, как средней (в указанном смысле. А К.), и притом как средней любого порядка, не обосновывает какого-либо различия в вычислении меры точности или средней ошибки апостериорно полученного значения этой вероятности[1]); иначе сказать, «средним вероятностям, или их эмпирическим значениям, присущи точь в точь такие же пределы отклонений (lassen sich dieselben Spi·lräume zuweisen), как в случае элементарных вероятностей той же величины»; следовательно, при исследованиях дисперсии мы «имеем полное право игнорировать характер соответственных вероятностей. как средних вероятностей» (опять-таки в собственном смысле слова), и обратно — «из факта констатированной нормальной дисперсии нельзя сделать заключения, что данному статистическому коэффициенту соответствует элементарная вероятность»[2]),—при данном числе урн и общей вероятности, положим, половина, дисперсия будет та же, как в том случае, если в каждой урне имеется ровно половина белых, так и в том, когда пропорция белых в отдельных урнах будет сколь угодно различна, лишь бы только извлечения из урн производились не в определенной очереди, как в случае „средней вероятности постоянного состава», а по жребию или вообще в каком-либо абсолютно случайном порядке. А отсюда вытекает необходимость существенных поправок к сказанному выше относительно смысла нормальной и поднормальной устойчивости. Правда, поднормальная «устойчивость» остается симптомом существенных изменений основной вероятности, а следовательно—и лежащих в основе данного массового явления общих условий, — но обратное утверждение утрачивает под собою почву: «из того обстоятельства, что ряд обнаруживает нормальную дисперсию, нельзя уже сделать вывода, что данному статистическому отношению отвечает элементарная вероятность»; та же самая нормальная «устойчивость» может получиться для взятой в совокупности массы и в случае «средней вероятности в собственном смысле», т. е. вероятности, получившейся как средняя из весьма различных частных вероятностей, лишь бы они не были (как имеет место в случае сверхнормальной дисперсии) приурочены к отдельным, существенно различным частям изучаемой массы. А раз это так, то нам приходится отвергнуть формулированное Вестергордом

[1]) Jahrb. f. N.—Oek. u. Stat., dritte Folge, Bd. VIII, стр. 651, 665.
[2]) Там же, стр. 667—668.

и лежащее в основе «дифференциального метода» исследования причинных зависимостей положение, что расчленение статистического материала доведено до конца и достигло цели, раз установлена нормальная дисперсия: общая вероятность и при нормальной устойчивости может быть среднею из разнообразных слагаемых, в основе которых лежат различные причинные комплексы, и направленное к раскрытию управляемых особыми причинными комплексами частных масс расчленение общей массы на части «не утрачивает своего интереса от того, что данная средняя вероятность высшего порядка обнаруживает в своих эмпирических значениях нормальную дисперсию».

Повторяю: установленное Борткевичем тождество уровня устойчивости для случаев постоянной вероятности и средней вероятности в собственном смысле важно, главным образом, для критики „дифференциального метода"—т. е. для одного из приложений исчисления вероятностей к практике научного статистического анализа. С точки зрения теоретической статистики важнее те дополнения и поправки, которые внесены—главным образом Борткевичем же и Чупровым—в теорию сверхнормальной и поднормальной „устойчивости". В общей формуле они могут быть сведены к тому, что «содержание (или характер) тех общих условий, которые в качестве постоянных причин управляют тем или другим явлением, существенно различно, и что поэтому совершенно неодинакова и роль, которую, по отношению к событиям, играет случай; неодинаковы и те особые конфигурации Gestaltungen), которые возможны в рамках этих общих условий. В тех рядах, которые позволяют ожидать сверхнормальной дисперсии, случай, как позволительно сказать, имеет бóльшее (курсивы мои. А К.) влияние, чем в тех, где единичные случаи совершенно независимы друг от друга, при наличности таких условий, которые порождают поднормальную дисперсию, его значение может быть охарактеризовано, как еще меньшее», чем в случае нормальной дисперсии. Суть дела, в том и другом случае, сводится к отсутствию независимости между отдельными случаями: «повышенная устойчивость ряда частостей обусловливается отсутствием «независимости» между объединяемыми в одну серию случаями, точнее—действием таких условий, в которых уклонение одного или нескольких случаев от средней благоприятствует отклонению других в противоположную сторону. Напротив, если между единичными случаями, об'единяемыми в одну серию, существует зависимость такого рода, что отклонение одного от средней благоприятствует отклонению прочих в ту же сторону, то устойчивость ряда частостей окажется пониженною» (курсивы мои. А. К.), а дисперсия—сверхнормальною [1]).

---

[1]) Чупров, Очерки, 2 изд. стр. 321.

Остановимся, сначала, на случае поднормальной дисперсии, которой отвечает сверхнормальная „устойчивость". Современная статистическая теория, в лице Борткевича и Чупрова, считается главным образом с двумя порождающими такую «устойчивость» случаями или схемами: во-1-х, с конструированною—как мы частью видели выше—еще Пуассоном и Курно схемою извлечения шаров из одной урны, но без возвращения вынутых шаров обратно, благодаря чему вероятность изменяется от каждого предшествующего к каждому последующему испытанию: в урне с 50 белыми и 50 черными после первого тиража останется либо 49 белых и 50 черных, либо 50 белых и 49 черных,после второго, смотря по результатам первых двух, может получиться одна из следующих комбинаций: 48—50, 49—49, 50—48 и т. д. Математический анализ дает для этого случая модуль

$$M = \sqrt{\frac{2p(1-p)}{s\,\frac{\sigma}{\sigma-s}}} = \sqrt{\frac{2p(1-p)}{s} : \frac{\sigma}{\sigma-s}},$$

где σ число всех шаров в урне, s число вынутых шаров. Так как во втором из этих выражений делитель $\frac{\sigma}{\sigma-s}$, очевидно, больше единицы, то частное, т. е. выражение в целом, в $\frac{\sigma}{\sigma-s}$ меньше делимого $\sqrt{\frac{2p(1-p)}{s}}$, т. е. модуля при условии постоянной или «средней вероятности в собственном смысле». Иначе сказать, «устойчивость» получающегося из такой серии испытаний ряда должна быть выше, чем при постоянной и т. п. вероятности—должна быть, значит, сверхнормальною. Ожидать повышенной устойчивости заставляют и простые соображения здравого смысла: раз вынутый шар не возвращается в урну, то «вступают в действие силы, направленные к тому, чтобы компенсировать уклонения от нормы: как-только в ряду извлечений частость какого-нибудь цвета превысит нормальную, сейчас же для дальнейших извлечений повышается вероятность шаров иного цвета»—если вынуто из урны, кряду, несколько белых, то этим самым повышается доля черных среди оставшихся в урне шаров, и, следовательно, повышается вероятность извлечения черного шара, и „это и поднимает устойчивость массового результата по сравнению с тем случаем, когда вынутый шар возвращается назад в урну" [1]). Другой случай—это тот, о котором Лексис говорит как о случае соединения «нескольких различных вероятностей, действующих для различных групп лиц, в одну среднюю вероятность по определенному неизменному соотношению», и который он иллюстрирует примером частоты

[1]) Там же, стр. 315—317.

несчастных случаев в войсках разных родов оружия, состав которых, для каждого данного времени, постоянен, тогда как вероятность несчастного случая в пехоте не та, что в кавалерии и т. п.[1]),—иначе сказать, случай «средней вероятности постоянного состава, подробно разобранный Боткевичем в его Kritische Betrachtungen Теоретическая мера отклонений вычисляется для этого случая по формуле $\sqrt{\frac{\Sigma g_1 p_1 q_i}{n}}$ [2]), и вычисление показывает, что $\Sigma g_1 p_1 q_1 = pq - \Sigma g_1 (p - p_1)^2$; так как вычитаемое — квадрат, а следовательно всегда положительное число, то ясно, что полученная для «средней вероятности постоянного состава» теоретическая мера отклонений $\sqrt{\frac{\Sigma g_1 p_1 q_i}{n}}$ тоже меньше аналогичной меры $\sqrt{\frac{pq}{n}}$, характеризующей случай нормальной дисперсии, а следовательно, и «средняя вероятность постоянного состава» характеризуется поднормальною дисперсией [3]). И в данном случае математический результат вполне согласуется с доводами простого здравого смысла. «Благодаря тому, что в неизменной пропорции смешиваются такие случаи, где обстоятельства складываются сравнительно благоприятно для белого шара, и такие, где обстоятельства благоприятствуют шару черному, противоположные тенденции в значительной мере компенсируются и массовый результат оказывается чрезвычайно устойчивым. Уклонения в одну сторону от средней, связанные с извлечением шара из первой урны, покрываются уклонениями в другую сторону, связанными с извлечением из второй урны а так как относительное число случаев того и другого рода фиксировано, то в итоге колебания частостей и ослабляются» [4]). Возьмем самый резкий случай всего двух урн с 100 белыми в одной и 100 черными в другой: если из каждой делать кряду по 50 извлечений, то частота, положим, белого будет при одной полусерии из 50 испытаний 1, при другой 0, для целой серии из 100 испытаний частота получится, неизменно, $\frac{1}{2}$; — то же получится и для каждой другой серии по 100 испытаний, и для совокупного результата какого угодно числа серий; следовательно, частоты в сериях по 100 не дадут никаких отклонений от общей частоты, т. е. достигнут будет максиминально мыслимый уровень «устойчивости». Приблизительно то же будет иметь место, если взять урны с 99 белыми и одним черным, и наоборот, одним

---

[1]) Abhandl., стр. 228—229.

[2]) Где g_i—постоянные коэффициенты, отвечающие частным вероятностям p_i и q_i.

[3]) Jahrb f. N.—Oek. und Stat, III F., Bd VIII, стр. 652—653.

[4]) Чупров. Очерки. 2-ое изд, стр. 320.

белым и 99 черными, затем с 95—5 и 5—95, с 90—10 и 10—90, с 80—20 и 20—80 шарами и т. д. Тут, конечно, в отдельных полусериях по 50 извлечений уже не получится обязательно частота, точно равная вероятности; каждая полусерия по 50 даст то или другое отклонение от соответственных вероятностей и для этих отклонеиий будет тем больший простор, чем менее резко выражено преобладание шаров одного цвета: они будут резче при пропорции 90—10, чем при пропорции 95—5, еще резче при пропорции 80—20 и т. д.,—но все-таки они не выйдут из тем более тесных границ, чем резче в урнах перевес числа шаров того или другого цвета: следовательно, частоты в каждой полусерии будут, говоря вообще, близки к соответственным вероятностям и, следовательно, частоты в каждой полной серии будут более или менее близки к половине [1]).

Повторяю: статистическая теория, обычно, считается только с этими двумя типами или схемами, порождающими сверхнормальную «устойчивость». Возможно, что таких схем можно конструировать и очень много. Упомяну из них об очень резкой схеме Криса [2])— и он берет две урны с 100 белыми в одной и 100 черными в другой (или вообще с любым числом одних белых и одних черных): если при первом сделанном наудачу извлечении вышел белый шар, следующее извлечение делается из урны с черными шарами, и наоборот: значит попеременно будут выходить белые и черные шары, в каждой паре серий частота будет ровно половина, а дисперсии не будет вовсе. Если подобным же образом чередовать испытания из двух урн с составом 75 — 25 и 25 — 75, и если первое извлечение будет случайно сделано из первой урны, то с вероятностью $^3/_4$ можно ожидать, что второе извлечение будет из второй урны; если соответственное наше ожидание оправдается, мы с тою же вероятностью $^3/_4$ будем ожидать, что третье извлечение будет опять из первой урны и т. п.,—в результате и в этом случае можно ожидать, в каждой паре извлечений, более или менее близкого к правильному чередования извлечений из первой и из второй урны, а следовательно более или менее близкого к правильному чередования белых и черных шаров.

Затем, очень интересен разработанный академиком А. А. Марковым случай «связи испытаний в простую цепь», когда вероятность любого, положим k+1-го, случая зависит от наступления или ненаступления события при непосредственно предшествовавшем k-м испытании, и совершенно не зависит от результатов всех предшествующих испытаний. Для этого случая теоретическая мера отклонений определяется выражением $\sqrt{2npq\frac{1+\delta}{1-\delta}}$, где δ есть разность

[1]) Там же, стр 319—320.

[2]) Kries, Princ. d. W.—R.

между вероятностями события при k+1-ом испытании в случае наступления и в случае ненаступления его при k-м испытании; дисперсия, значит, если только δ не равно нулю, не может быть нормальной. В частности, в случае отрицательного значения этой разницы, числитель дроби под корнем будет меньше знаменателя, дробь будет меньше единицы, следовательно, полученная мера дисперсии будет меньше той, которая соответствовала бы случаю нормальной дисперсии—$\sqrt{npq}$, и дисперсия будет поднормальною. Этот вывод проверен А. А. Марковым на подсчете числа повторений гласных букв в взятом им из одного поэтического произведения тексте. Коэффициент дисперсии получился всего 0,208 [1]), свидетельствующий о резко повышенной «устойчивости». И здесь математический вывод согласуется с указаниями здравого смысла: парные соединения гласных сравнительно редки, следовательно, вероятность гласной после гласной значительно меньше, чем после согласной; отсюда—довольно значительное отрицательное значение разности δ, резко понижающее значение коэффициента дисперсии,—отсюда, с другой стороны, ясно выраженная устойчивость в чередовании гласных букв с согласными, которая и находит себе выражение в пониженном коэффициенте дисперсии. И этот вывод, относящийся, значит исключительно к связи испытаний в простую цепь, тем любопытнее, что, напротив, «для сложной цепи испытаний дисперсия может (курс. мой. А. К.), быть нормальною», и «предельное выражение вероятности для испытаний, связанных в однородную сложную цепь, может вполне совпадать с соответствующим выражением вероятности для простого случая Бернулли», т.-е. для случая нормальной дисперсии [2]).

Переходим теперь к сверхнормальной дисперсии—когда отклонения распределяются соответственно Гауссову закону случайных ошибок, но коэффициент расхождения больше единицы. Первоначальная схема Лексиса предусматривала только один тип случаев, порождающих подобного рода дисперсию,—именно случай «солидарно-действующих причин», характеризуемый вероятностями, изменяющимися не от случая к случаю,—как при средней вероятности в собственном смысле, а от серии к серии, но—в отличие от „средней вероятности постоянного состава“ — сохраняющими характер случайных отклонений от некоторой общей вероятности, и символизируется извлечениями шаров из нескольких урн, одна из которых назначается по жребию на целый ряд или серию испытаний, или еще лучше—такою конструкцией эксперимента, при которой часть шаров из одной урны отсыпается в другую урну, из этой урны производится некоторая серия

---

[1]) Марков, Исчисление вероятн., 3-е изд., 1913, стр. 349, 359, 366.

[2]) Он же, Об одном случае испытаний, связ. в сложн. цепь. Изв. Имп. Акад. Наук 1911 г., стр. 171—172.

извлечений, затем шары пересыпаются обратно в первую урну, из нее отсыпается во вторую урну новая порция шаров и производится новая серия извлечений и т. д. Математический анализ дает для этого случая теоретическую меру отклонений $\sqrt{2\frac{pq}{n}+2\frac{n-1}{n}\frac{\Sigma(p_i-p)^2}{\mu}}$, где второе слагаемое, как квадрат, непременно положительное, а, следовательно, мера дисперсии непременно б о л ь ш е соответствующей нормальной дисперсии меры $\sqrt{\frac{2pq}{n}}$. И здесь математический вывод вполне совпадает с указаниями здравого смысла: как легко убедиться в случае двух урн—одной с одним белым и 99 черными, другой, с обратною пропорцией цветов, «все дело, очевидно, в том, что отдельные случаи, входящие в каждую серию, не представляются друг от друга независимыми: если в данной серии первое извлечение производится из такой урны, где перевешивают белые шары, то и все остальные 99 извлечений будут произведены из той же урны в условиях, благоприятствующих появлению белого шара; наоборот, если при первом извлечении условия складываются благоприятно для черного цвета, то благоприятная для черного цвета конъюнктура и продержится на протяжении всей сотни»[1]), —следовательно, в результате повторных серий получатся более или менее исключительно частоты, значительно уклоняющиеся от средней для обеих урн вероятности, и вовсе или почти вовсе не получится частот, приближающихся к этой вероятности. Или иначе говоря: раз из указанной жребием урны производится кряду целая серия испытаний, — значит, частота для каждой такой серии будет тяготеть к вероятности, существующей и м е н н о д л я д а н н о й у р н ы, и, следовательно, будет резко отличаться от частоты, получающейся для каждой другой серии, которая будет тяготеть к частной вероятности для каждой данной другой урны. В этом—один источник отклонений отдельных частот как друг от друга, так и от общей частоты, какая получится для всей совокупности испытаний. Другой источник – отклонения ч и с т о с л у ч а й н о г о характера, которые присоединятся к отклонениям первого рода и еще усилят дисперсию. И этот тип случаев легко иллюстрировать на конкретных примерах с урнами. Если взять две урны—с одними белыми и с одними черными, и если намечать урну для каждой серии тиражей путем жеребьевки, то общая для всей совокупности тиражей частота получится, при большом числе испытаний, близкая к половине, но частоты по отдельным сериям будут т о л ь к о 0 и 1,—следовательно размах колебаний будет чрезвычайно широкий. То же самое в случае двух урн с пропорцией шаров 99—1 и 1—99: и в этом случае, при большом числе серий,

[1]) Ч у п р о в, Очерки, 2 изд. стр. 324—325.

общая частота будет близка к половине, частоты же при отдельных намечаемых по жребию сериях извлечений будут получаться близкие для одной урны к 0,99, для другой—к 0,01. В случае двух же урн, но с пропорциями шаров 25—75 и 50—50, общая для большой совокупности испытаний частота будет близка к 75 : 200 или $^3/_8$,—отдельные серии будут давать частоты близкие к $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{2}$ и т. д. Еще раз: все дело—в характере зависимости: раз за одним извлечением из намеченной жребием урны с пропорцией шаров, положим, 99—1 следует n извлечений из той же урны, значит, при той же вероятности, а за одним извлечением из урны с пропорцией 1—99 еще n извлечений, опять-таки, из той же урны, то значит, внутри отдельной серии не может быть никакой компенсации отклонений, и каждая серия даст частоту, резко отклоняющуюся как от частот остальных серий, так и от общей частоты для целой совокупности испытаний.

Конечно, и эта схема, предполагающая изменение вероятностей только при переходе от одной серии испытаний к другой, представляет собой почти столь же искусственное построение, как схема «средней вероятности постоянного состава". В действительной жизни чрезвычайно трудно если не невозможно, ожидать встретить что-либо подобное. Некоторое, но именно только некоторое приближение к конкретной действительности представляет собой предложенная Борткевичем схема «солидарно-действующих факторов», изменяющихся внутри каждой серии испытаний.

Особенность этой схемы состоит в том, что каждая „главная серия" из n испытаний слагается из η малых серий или просто „серий" по k испытаний, производимых из одной, каждый раз намечаемой по жребию, урны. В результате довольно сложных выкладок, в основе которых лежит принцип математического ожидания, теоретическая мера дисперсии получается равной $\sqrt{\frac{c_0(1-c_0)}{n}+\frac{k-1}{n}\alpha^2}$, где c_0 — общая вероятность для всей системы испытаний, а $d^2 = \Sigma g_i (c_i - c_0)^2$, т.е. теоретическая мера отклонения вероятностей отдельных „главных серий" от общей вероятности. Так как α входит во второе слагаемое в квадрате, то это слагаемое будет во всяком случае (кроме случая $k=1$, приводящего к средней вероятности в собственном смысле) положительным и, следовательно, дисперсия будет сверхнормальною, и мера сверхнормальности будет зависеть, главным образом, от множителя $k-1$, т. е. от числа случаев, связанных одною солидарно-действующею причиной; чем больше будет каждая „малая" серия с общею для всех случаев вероятностью, тем больше это слагаемое и тем, значит, резче сверхнормальность дисперсии. Различные для каждой „малой" серии вероятности—выражение различных причин или причинных комплексов.

Подставляя вместо урн какие угодно причины, а вместо шаров—события с теми же вероятностями, приходим к случаю солидарности единичных испытаний—„случайная причина является общею для нескольких испытаний, так что по отношению к этой причине отдельные испытания не являются независимыми; участие одной или нескольких солидарно-действующих причин и обусловливает повышение квадрата средней квадратической ошибки на величину $\frac{k-1}{n}\alpha^2$". А отсюда—объяснение сверхнормальной дисперсии: „известные, представляющиеся еще „случайными", причины изменяют свой способ действия (Verhalten) не от случая к случаю, а от (частной. А К.) серии к (другой такой же А К.) серии". Конечно—замечает Борткевич,—и лежащее в основе такого рода схемы представление о равновеликих частных сериях с одновременным изменением солидарно-действующих причин далеко от условий конкретной действительности. „Но вовсе и нет вопроса о нахождении вполне адэкватной схемы для статистических процессов,—достаточно знать, что кажущееся противоречие между ожиданиями теории и результатами опыта может быть постигнуто, исходя из представления о солидарности единичных случаев" [1]).

Как было уже отмечено, изложенные теоретические соображения, поскольку, в особенности, они касаются сверхнормальной дисперсии, стоят в теснейшей связи с фактом повышения (в значительной мере, как мы видели, мнимого) уровня „устойчивости" по мере сокращения поля наблюдения. Это можно отчетливо показать на общей формуле сверхнормальной дисперсии. Эта формула имеет вид:

$$M = \sqrt{\frac{2pq}{n} + \frac{2(n-1)\,\Sigma(p_1-p)^2}{n\qquad\mu}},$$

где p_1—частные вероятности в отдельных сериях испытаний, n — число наблюдений в каждой серии, μ — число серий. Обозначим $\sqrt{\frac{2pq}{n}}$ через M_1, а $\sqrt{\frac{2\,\Sigma(p_1-p)^2}{\mu}}$ — через M_2, тогда

$$M = \sqrt{M_1^2 + \frac{n-1}{n} M_2^2},$$

где, значит, M_1 есть модуль для колебаний, обязанных своим происхождением действию чистого случая („комбинаторная" слагаемая Лексиса), M_2 — среднее квадратическое отклонение, умноженное на $\sqrt{2}$ частных вероятностей от общей вероятности p. Очевидно, коэффициент расхождения будет

[1]) Gesetz d. klein. Zahl., стр. 45—46.

$$Q = M : M_1 = \frac{\sqrt{M_1^2 + \frac{n-1}{n} M_2^2}}{M_1} = \sqrt{1 + \frac{n-1}{n} \frac{M_2^2}{M_1^2}}$$

Но $M_1 = \sqrt{\frac{2pq}{n}}$ — оно, значит, тем больше, чем меньше число испытаний в каждой серии n; иначе говоря, при данных вероятностях p и q случайные колебания могут быть тем больше, чем меньше число наблюдений в каждой данной серии. Но M_1 стоит в знаменателе, является делителем—значит, при данном делимом M_2, частное, т. е. второе слагаемое выражения под корнем, будет тем меньше, чем меньше n, и тем больше, чем n больше. Следовательно, чем меньше n, тем ближе коэффициент расхождения будет к единице, и тем ближе „устойчивость“ будет к нормальной. „Пусть, например, колебания общих условий от года к году для рассматриваемого явления таковы, что Q для ряда частостей, вычисленных на основания 100000 наблюдений, равняется 2; тогда для ряда частостей, вычисленных на основании всего лишь 10.000 наблюдений, Q окажется равным 1,140; при числе наблюдений, равном 1.0 0, Q будет равняться 1,015; а при 100 наблюдениях Q сведется к 1,0015. Наш критерий даст, таким образом, картину дисперсии почти нормальной, если мы ограничим число наблюдений одною сотней, хотя обстоятельства, обусловливающие собою сверхнормальность дисперсии, остаются все те же, как при 100.000 наблюдений. Если, следовательно, перемены в климатических, экономических и т. п. общих условиях жизни от года к году на всем протяжении большой страны одни и те же, то Q для ряда частостей, выводимых для всей страны, и должно в большей мере превысить единицу, нежели для ряда частостей, выведенных сравнительно для небольшой территории“ [1]).

Однако, такое повышение уровня „устойчивости“ по мере сокращения поля наблюдения имеет место не всегда и не при всех условиях. Сверхнормальная дисперсия—результат влияния „солидарности“, зависимости объединенных в серии групп случаев. Но характер этой солидарности может быть принципиально различным. Особенно важно здесь проведенное, опять-таки, Борткевичем различие между „острою“ и „хроническою“ солидарностью — akute и chronische Solidarität [2]). Первая имеет место, когда массовое явление, совершенно

---

[1]) Чупров. Очерки, 2 изд. стр. 387—388.

[2]) Предшественником Борткевича в установлении понятия и даже термина «солидарность», а также в формулировании существа того, что Борткевич называет «хроническою солидарностью», был Курно. Он мотивирует, именно, необходимость больших чисел наблюдений, очевидно вытекающую из пониженной устойчивости статистических коэффициентов, в значительной мере, наличностью таких влияний или при-

независимо от широты поля наблюдения, характеризуется определенным числом случаев, объединенных в серию, на которой отражается влияние „солидарно-действующей" причины [1],—массовые несчастные случаи в промышленности, кораблекрушения и т. п. В таких случаях величина „избыточной ошибки" не зависит от поля наблюдения, а определяется конкретными особенностями явления и той обстановки, в которой события протекают: число жертв, приходящихся на один взрыв парового котла, зависит от технической и экономической структуры предприятия в данной отрасли производства": „число лиц, одновременно погибающих при кораблекрушении, стоит в связи с размерами кораблей—на линиях каботажного плавания оно будет меньше, чем на океанских линиях с их пароходами гигантами" — то и другое одинаково „не находится в связи с тем, рассматриваем ли мы громадную область с многомиллионным населением или останавливаемся на небольшом районе. Поскольку, следовательно, сверхнормальный характер дисперсии определяется наличностью т а к о г о рода связи между единичными случаями, широта поля наблюдения не влияет на степень устойчивости, и, уменьшая число испытаний, мы не приблизим амплитуды колебаний к нормальному уровню" [2]. Второй случай—„хронической солидарности" имеет место, по Борткевичу, „если солидарно-действующие факторы сохраняют то же Verhalten—тот же способ действия не при сериях из одинакового числа испытаний, а для промежутков времени определенной степени продолжительности" [3]. В этого рода случаях—поясняет А. А. Чупров „все явления стоят под действием общей жизненной обстановки: климатические условия данного дня, данной недели, месяца и т. д. сходным образом отражаются на жизни населения всего большого города или даже страны, несмотря на то, что нет непосредственной связи между смертью от солнечного удара одного лица в Москве, а другого, в Туле; требование независимости отдельных случаев нарушается здесь общностью для всех них жизненной конъюнктуры данного момента времени". Здесь „абсолютное число сплетающихся между собой единиц тесным образом зависит от широты поля наблюдения. Предположим,- поясняет А. А. Чупров—что при изучении смертности мы должны считаться с недельными колебаниями климата; в таких условиях число случаев, объединяемых общностью климатической конъюнктуры, для каждой из 52 недель года будет бли-

---

чин, «которые действуют солидарно на все или на часть наблюдений того же ряда и тем не менее случайны, поскольку они неправильно меняются от одного ряда к другому, но эффекты их изменений компенсируются, если рассматривать большое число рядов, и следовательно большое число единичных «случаев»; в числе причин такой солидарности «первое место занимают близость во времени и пространстве» (Cournot, Grundl. der W.-R., стр. 163—164).

[1]) Ges. d. klein. Zahl., стр. 47.

[2]) Чупров. Очерки, 2-ое изд. стр. 395- 396.

[3]) Там же.

жайшим образом определяться тем, возьмем ли мы для изучения бо́льшую или меньшую группу лиц. Если мы, вместо всей России, возьмем губернию или уезд, если вместо всего населения остановим внимание на некоторой его доле, например, на мужчинах 30-летнего возраста, то число единиц, стоящих под действием климатических условий каждой недели, упадет. А вместе с тем" — как показывает формула „солидарности" — „приблизятся к тому уровню, который мы называем нормальным, и фактические колебания смертности от года к году, измеряемые величиною коэффициента Q".

Таким образом, теория „солидарно действующих причин" заставляет внести существенную поправку к выше формулированному положению относительно ф и к т и в н о г о х а р а к т е р а зависимости уровня дисперсии от широты поля наблюдения. „Пользование коэффициентом Q, как мерилом устойчивости, не ведет, следовательно, автоматически к понижению видимого уровня устойчивости с расширением поля наблюдения. Условия, порождающие в статистических числах сверхнормальные колебания, могут носить и такой характер, что Q не будет расти с ростом n. Но если, таким образом, выбор „масштаба" еще не предопределяет результата измерения, обрекая на то, чтобы неизменно натальиваться на рост Q с ростом n, то вопрос о том, как складывается фактически соотношение между Q и n, приобретает самостоятельный интерес, и то констатированное выше свойство массовых явлений со сверхнормальною дисперсией, что с уменьшением числа наблюдений уровень их устойчивости обычно заметно приближается к норме, получает значение нового штриха в начертываемой нашими исследованиями картине статистической действительности. Оно свидетельствует,—заключает А. А. Чупров—что сверхнормальная дисперсия в большинстве случаев обязана возникновением не „конкретной", а „хронической" связанности отдельных явлений, объединяемых нами в статистические массы" [1]).

Что же—спрашивается - вытекает из всех изложенных дополнений и поправок к первоначальной схеме Лексиса?

Остановимся сначала на „м о р а л ь н о - ф и л о с о ф с к о м" значении учения о дисперсии,—на вопросе об отношении статистической закономерности к свободе индивидуального самоопределения. В первоначальной схеме Лексиса главным аргументом против „кетлетизма", поскольку последний ставил статистическую закономерность на одну доску с естественным законом, следовательно видел в ней некоторую норму, непосредственно влияющую на единичный случай и, значит, трудно совместимую с свободой индивидуального самоопределения,—

---

[1]) Чупров. Очерки, 2-ое изд. стр. 397—398.

главным, говорю я, аргументом против кетлетизма был тот факт, что статистика не обнаружила явлений со сверхнормальною „устойчивостью", что „все имеющиеся данные позволяют уверенно отвергнуть мысль о возможности где-либо наткнуться на таковые". Между тем, исследования новейшего времени в значительной мере поколебали эту уверенность. Хотя и в виде очень редкого исключения, но сверхнормальная „устойчивость", все-таки, встречается, — и при том не только при опытах с шарами и т. п., но и в статистической действительности. Так, Q = 0,88, 0,71, даже 0 64, получилось при подсчете повторяемости букв в случайно взятых отрывках из разных авторов, в том числе из самого Лексиса. Сверхнормальная устойчивость получилась в нескольких случаях и в области статистики населения,—все для того же распределения рождений по полу: для Германии за 1872—1886 гг. Q получилось равным 0,95, для Пруссии за 1865—1872 гг.—0,89, для Австрии за 1862—1874 гг.—0,87, для Франции за 1868 г.—0,90, для города Москвы за 1893—1901 гг.—0,95. И, значит, если бы остаться на точке зрения Лексиса, то пришлось бы признать, что „связанные" явления, „стоящие под действием строгих волевых законов", существуют, и притом как раз в таких областях, где о действии „строгих волевых законов" не может быть и речи: какой, в самом деле, „волевой закон" мог регулировать повторяемость буквы е в произвольно выхваченных страницах немецкого текста?..

Значит, „уверенно отвергнуть мысль" о возможности существования сверхнормальной „устойчивости" уже нельзя. Еще в большей мере точка зрения Лексиса колеблется изложенными выше теоретическими соображениями. Сущность их сводится к тому, что источником сверхнормальной „устойчивости" может быть всякого рода зависимость, ведущая к усиленной компенсации отклонений. Статистическая теория до сих пор выдвигала главным образом два типа случаев: во-1-х, случаи непосредственной зависимости каждого последующего случая от предыдущего, вроде извлечения шаров или карт без возвращения вынутого шара или карты обратно в урну или в колоду; во-2-х, случаи „средних вероятностей постоянного состава"— когда общая масса слагается из резко разграниченных групп с различными вероятностями; обобщением первого из этих типов можно считать „простую цепь" А. А. Маркова. Спрашивается, однако, встречаются ли эти виды зависимости в действительности? Подробно мне придется остановиться на этом вопросе в заключительной части этой главы. Сейчас отмечу только формулируемое Чупровым положение, что с такою естественною тенденциею к уравновешению отклонений мы встречаемся в тех демографических явлениях, в которых новейшими исследованиями обнаружена сверхнормальная устойчивость. Следовательно — полагает А. А. Чупров—„непостижимого в сверхнормальной устойчивости не больше, чем в устойчивости, не дости-

гающей нормального уровня Как в том, так и в другом случае теория вероятностей дает вполне достаточную опору для объяснения устойчивости стечениями обстоятельств, ничего загадочного в себе не таящими и допускающими одинаково точное описание и учет". Поэтому, та „уступка кетлетизму", которую делал Лексис, утверждая, что сверхнормальная „устойчивость" была бы мыслима лишь при том или другом планомерном вмешательстве регулирующей силы или власти, не вызывалась обстоятельствами: сверхнормальная „устойчивость" (как бы широко она ни оказалась распространенною) отнюдь еще не свидетельствовала бы о наличности „строгих волевых или иных законов", воздействующих на отдельный случай; никакая степень „устойчивости" не обращала бы статистической закономерности в нормативный закон и не уничтожала бы независимости отдельного случая по отношению к массовому явлению [1]). Сам Лексис, в рецензии на немецкое издание моей книги „Теория и методы статистики", в значительной мере отказывается от своего убеждения в решающем значении факта наличности или отсутствия сверхнормальной „устойчивости". Он „вовсе не утверждает, чтобы сверхнормальная устойчивость свидетельствовала о господстве строгих, воздействующих на единичный случай, волевых законов". Он „хочет только сказать, что в тех случаях, когда человеческая масса стоит под воздействием определенного волевого закона... соответственные однообразные действия будут обнаруживать сверхнормальную устойчивость". Поскольку же речь идет, в самом деле, о несвязанных массовых явлениях, то „коэффициент дисперсии очень редко будет точно равен 1: можно определить его вероятное отклонение от единицы и, при наличности отклонения, не выходящего за вычисленные границы, без дальнейших оговорок принимать дисперсию за нормальную"; можно даже натолкнуться на столь незначительные коэффициенты дисперсии как 0,7 или 0,6, „без того, чтобы собственно из за этого приходилось предполагать влияние волевого закона"—такие случайности возможны и при играх, основанных на случае, вроде игры в кости. „Если, однако, по отношению к выведенному из какого-либо массового явления коэффициенту критерий сверхнормальной устойчивости повторился в значительно большем числе раз, чем это имеет место в правильной игре, основанной на случае, то приходится просто констатировать факт: устойчивость данного коэффициента больше, чем можно ожидать при действительно несвязанном массовом явлении... Постичь причину таких фактов—полагает теперь Лексис—уже вовсе не задача статистики".

Итак, еще раз: сверхнормальная устойчивость, пока она встречается как редкое исключение, может быть рассматриваема как простая случайность; даже при очень широком распространении она еще

---

[1]) Чупров. Очерки, 2-ое изд. стр. 402 406, 411, 412.

не свидетельствовала бы о наличности „строгих волевых или иных законов", воздействующих на отдельный случай; никакая степень „устойчивости" не обращала бы статистической закономерности в нормативный закон и не уничтожала бы независимости отдельного случая по отношению к массовому явлению. И отсюда—точка зрения, формулируемая Вестергордом в следующих словах: „вопрос о свободе воли не поддается разрешению собственно в пределах статистической науки. Пока покров неизвестности окутывает пеструю массу случайных причин, нет основания отвергать, среди них, и свободу воли. Правда, на основании данных статистического опыта можно принять, что население, как целое, в виде правила определяется, в своем состоянии и поведении, наличными в данный момент условиями; но не представляют ли отдельные индивидуумы, хотя бы в отдельные моменты, исключения из этого правила, не появляется ли абсолютная свобода воли, хотя бы иногда, в числе случайных причин, — этот вопрос должен быть оставлен открытым, пока характер статистических рядов оставляет простор для действия случайных причин". Или в другой формулировке, принадлежащей А. А. Чупрову:

Если допустить, что „свободная воля останавливается на тех или иных решениях с тою же непринужденностью, с тою же независимостью от внешних влияний, под действием ей самой свойственных, ей имманентных моментов, как шарик рулетки останавливается на том или ином поле, не взирая на цвет его и номер, то в массовом итоге обнаружится та же правильность, к какой приводит и допущение, что волевые решения определяются „мотивами" или „причинами". О механизме воли статистическая правильность не говорит ничего»[1]). Но, конечно, независимость отдельного случая от целого, не исключая наличности свободной воли, не предрешает ее и в положительном смысле. Если наличность свободной воли доказана или, по крайней мере, не исключается по соображениям, непосредственно относящимся к существу данного вопроса, то закономерность больших чисел не препятствует ее признанию или допущению; если нет—из изучения статистических рядов нельзя извлечь аргументов в пользу ее допущения.

Посмотрим теперь, в какой мере можно присоединиться к такому категорическому заключению А. А. Чупрова. Конечно, последний совершенно прав, когда видит в точке зрения Лексиса на сверхнормальную устойчивость нечто в роде „компромисса с кетлетизмом"[2]). Но удалось ли ему, в самом деле, доказать, что эта точка зрения «в настоящее время должна быть оставлена»? Что, в конце концов, может считаться вполне доказанным, — это то, что в искусственных

[1]) Там же, стр. 305.
[2]) Там же, стр. 402.

условиях опытов с шарами могут быть созданы такие комбинации, которые породят сверхнормальную устойчивость. Но именно могут быть созданы, как следствие «строгого волевого закона". Вне такой искусственной обстановки констатирована сверхнормальная устойчивость лишь при подсчетах букв, стоп в стихосложении и т. п., где, правда, не имело места ничье воздействие, направленное к достижению именно такой повышенной устойчивости, но где, с другой стороны, нет всей той жизненной сложности параллельных и взаимно перекрещивающихся факторов, с которою обычно приходится считаться в мире явлений, изучаемых статистикой. Но встречаются ли случаи сверхнормальной „устойчивости" в жизненной действительности? А. А. Чупров приводит, как мы видели, несколько случаев, где Q получилось 0,9 или около того. Но таких случаев так мало, что Лексис совершенно прав, рассматривая их как случайные отклонения от истинного, нормального (а может быть даже и от несколько сверхнормального) характера дисперсии. И сам А. А. Чупров, с некоторым видимым, но без действительного противоречия с самим собой, мог и должен был признать, что „в действительности мы не встречаем явлений сверхнормально-устойчивых". Почему не встречаем? Не потому, „чтобы не было в действии факторов, повышающих устойчивость против нормы", а потому, что „действие таких моментов перекрывается действием... иных, имеющих тенденцию понижать устойчивость" [1]). Сверхнормальная устойчивость и посейчас остается, значит, чем-то не существующим в статистической действительности. Теоретически А. А. Чупров, конечно, прав, когда говорит, что „сверхнормальная устойчивость свидетельствует лишь о том, что единичные явления не представляются „независимыми" друг от друга", но „что зависимость их может и не носить того характера, который ей приписывается философскими построениями кетлетистов", когда настаивает на отсутствии вытекающего из существа вещей различия между сверхнормальною и полнормальною устойчивостью: „Как в случае устойчивости ниже нормы связь между отдельными явлениями, обусловливаясь колебаниями общих жизненных условий, может и не покоиться на волевом вмешательстве в ход событий (точнее—не дает никакого повода предполагать такое вмешательство. А К.), так и устойчивость выше нормы может вызываться действием факторов, ничего общего не имеющих с сознательною регулировкой течения дел в целях достижения арифметическаго равновесия между числами повторения разных событий"; что и в случае сверхнормальной устойчивости „конечный результат может достигаться сплетением обстоятельств, столь же далеких от планомерного вмешательства задающейся такою целью воли, как в случае коле-

[1]) Там же, стр. 409.

баний, превышающих норму“ [1]). Но его правота бесспорна лишь по отношению к тем простейшим схемам, для которых доказана неизбежность сверхнормальной устойчивости, и к тем сравнительно простым примерам, для которых такая сверхнормальная устойчивость установлена как факт. Можно ли себе представить не вызванную регулирующими воздействиями сверхнормальную устойчивость в бесконечно сложной обстановке статистической действительности,—этот вопрос останется открытым, пока остается открытым вопрос о самом существовании не регулированных извне явлений со сверхнормальною „устойчивостью“. Но раз сверхнормальная устойчивость в условиях статистической действительности представляет собой нечто не реальное, а лишь абстрактно-мыслимое, то невыясненностью возможного ее смысла, конечно, не приходится особенно смущаться. Что обозначала бы сверхнормальная „устойчивость“, если бы она существовала в статистической действительности? Этот вопрос, в конце концов, утрачивает всякий интерес, раз она в действительности не существует. В статистической действительности мы имеем дело, в виде исключения, с явлениями нормально-устойчивыми, как правило—с поднормальною устойчивостью, или просто с „симптоматическими рядами“, остающимися совершенно вне рассматриваемой трехчленной схемы типов устойчивости. При наличности любого из этих типов дисперсии, в частности при нормальной, а тем более при сверхнормальной дисперсии, „независимость единичного события по отношению к выраженным математическою вероятностью общим условиям еще так же велика, как независимость единичного броска игральной кости в длинном ряде испытаний, в котором каждый из шести нумеров выходит, приблизительно, одинаково часто“,— и, следовательно, статистический закон, по Лексису, к взглядам которого здесь всецело примыкает Чупров, вполне совместим с допущением свободы индивидуального самоопределения.

Сейчас мы увидим, что эта точка зрения не вполне бесспорна. Но поскольку она была бы бесспорна, для обоснования ее едва ли предстояла необходимость в исследованиях дисперсии: ведь она—при наличности определенных предпосылок—с совершенною очевидностью вытекала из самых основных начал—из основного смысла теории вероятностей. Само введение в статистику понятия случая, случайных причин и т. п.,— вообще взгляда на статистические коэффициенты, как на приближенные значения вероятностей, «дает—как верно замечает Борткевич—правильное понимание существа статистических правильностей и заставляет отвергнуть воззрения тех, кто считает необходимым искать объяснения устойчивости статистических чисел в естественно-исторической, направленной на установление постоянства,

[1]) Там же, стр. 403—404.

связи между единичными явлениями». И ошибочно было бы думать, что такое понимание смысла статистических чисел и лежащих в их основе вероятностей выработалось именно на почве исследований дисперсии. Мы находим его отчетливо выраженным у Пуассона, даже у Кетле. При виде устойчивости отношений,—говорит, например, Пуассон в вводной главе своих «Recherches», испытываешь соблазн (on est tenté) приписывать эту столь замечательную правильность действию некоторой скрытой причины, действующей непрерывно. Но теория вероятностей показывает, что это постоянство отношений есть естественный порядок вещей в мире как физических, так и волевых человеческих явлений; что он поддерживается сам собою, без помощи какой-либо посторонней причины, и, напротив, мог бы быть лишь нарушен или искажен вмешательством какой-либо подобной причины» [1]). Могут, конечно, сказать, что такое понимание существа вопроса не помешало статистической теории забраться в «стоячее болото» контроверз кетлетистов и антикетлетистов. Но окончательной ясности в вопрос о взаимоотношении статистической закономерности и свободы индивидуального самоопределения не внесло и учение о дисперсии. Я не буду, конечно, обращаться здесь к философской литературе—это завело бы нас слишком далеко. Оставаясь в пределах статистической литературы, приведу сначала соображения Р. М. Орженцкого, развиваемые им в «Сводных признаках», в противовес только-что цитированному решительному заключению А. А. Чупрова, что «свободная воля останавливается на таких или иных решениях с тою же независимостью от внешних влияний... как шарик рулетки останавливается на том или ином поле»; что при таком допущении «в массовом итоге обнаружится та же правильность, к какой приводит и допущение, что волевые решения определяются мотивами или причинами», и что, в конце концов, «о механизме воли статистическая правильность не говорит ничего». Со своей стороны, Р. М. Орженцкий признает невозможным принимать волю за одну из множества случайных причин,—за такой момент, который можно было бы приравнивать к влиянию тех поистине случайных обстоятельств, которыми определяется вращение и место остановки шарика рулетки. Деления рулетки абсолютно безразличны для шарика. «Для воли... небезразличны те решения, на которых она может остановиться... для воли небезразлична и вся та обстановка, среди которой ей приходится принять решение; она сообразуется с условиями испытания, принимает их во внимание Одним словом, воля действует по мотивам. Действуя таким образом, она не сохраняет независимости по отношению ко всем остальным моментам испытания, вмешательство же ее в ход испытаний нарушает отчасти взаимную независимость и прочих моментов... нарушает ту случай-

[1]) Recherches, стр. 13.

ность исхода», которая является основною предпосылкой всех рассуждений Лексиса. Воля—не сила, независимая от других моментов. Но тем более она не является «одним из моментов, определяющих исход испытания, наряду с другими моментами; она является единственной силой, производящей то или другое событие. Все остальные моменты испытания действуют не рядом с волею и помимо нее, а только через нее... Все условия испытания создают только внешнюю обстановку, которая отражается на сознании и только через волю переходит в то или другое событие». Отсюда необходимость выяснить вопрос „действует ли воля по законам причин, как всякая физическая сила, или же производит свое действие из себя». Только путем такого анализа—думает проф. Орженцкий можно выяснить, «каким образом подходят свободные человеческие действия под закономерность теории вероятности». Детальный анализ явлений человеческой воли и лежащих в основе ее психических процессов приводит Орженцкого к заключению, что воля действует по законам причин, кроющихся как в естественных свойствах организма, так и в чувственно-волевых реакциях. Причины эти подвержены бесконечно разнообразным вариациям. «Поскольку» эти „вариации подчинены закону случайных уклонений, и количественные значения действий или их результатов точно выражают величину вариаций, измерение действий или их результатов должно дать ряд чисел, также подчиненных закону случайных уклонений. Средняя такого ряда будет обладать постоянством, явится вероятным выражением некоторой типичной величины, и уклонения отдельных чисел ряда будут обнаруживать определенную закономерность. Подобные ряды мы и получаем в действительности, в результате статистического наблюдения человеческих действий» [1]).

Я ограничиваюсь здесь лишь самым сжатым изложением существа подробно развиваемых Р. М. Орженцким соображений, потому что в положительной своей части они имеют лишь отдаленное отношение к занимающим нас вопросам. Что касается до критической части их, то я не думаю, чтобы они, сами по себе, способны были разрушить аргументацию Лексиса и его школы, —я привожу их главным образом, чтобы показать, что и после измерений дисперсии вопрос далеко не сделался бесспорным. Конечно, воля не может быть признана безусловно независимою от внешней обстановки. Но, ведь, безусловной независимости не существует вообще, и даже в случае опытов с шарами мы лишь потому говорим о «независимости» отдельных испытаний, что не можем уловить влияния предыдущих испытаний на последующие. Человеческая воля, конечно, подчиняется влиянию данной обстановки,—она и в свою очередь влияет на нее, но мы совершенно не в состоянии уловить характера этой взаимной зависимости,—не

[1]) Орженцкий, Сводные признаки, стр. 343, 344, 388.

знаем, почему, например, высокая хлебная цена толкает одну индивидуальную волю на преступление, а другую нет, — не знаем, какая из индивидуальных воль даст себя толкнуть, и какая не даст. А поэтому мы и имеем полное право рассматривать индивидуальную волю как фактор, случайный в смысле теории вероятностей, как момент «независимый» от внешней обстановки и вступающий с нею то в одну, то в другую комбинацию—по существу дела, может быть, необходимую, но случайную с точки зрения теории вероятностей и воплощающегося в ней нашего неполного знания.

Но даже и оставаясь всецело на принципиальной почве Лексиса и его последователей, - все-таки нельзя не поставить себе вопроса: так ли просто стоит дело с взаимоотношением между статистическою закономерностью и свободой воли, как это выражено, в особенности, в формулировке А. А. Чупрова?

Ниже мне придется подробно говорить о соображениях, развиваемых В. И. Борткевичем в рецензии на «Очерки» А. А. Чупрова. Здесь я отмечу только одно замечание Борткевича: «Настаивая, говорит он, на мысли о неприменимости статистических частостей к единичным случаям, автор (Чупров), повидимому, не обратил достаточного внимания на то обстоятельство, что главный защитник этой мысли, Кнапп, является убежденнейшим противником приложения теории вероятностей к статистике. Это,—подчеркивает Борткевич,—не случайное совпадение. Внесение понятия математической вероятности в статистическую область неминуемо приводит к тому заключению, что каждый статистический коэффициент, поскольку он может быть рассматриваем как приближенное значение определенной вероятности, относится именно к единичному случаю, взятому, конечно, не во всей его конкретной обстановке, а более или менее абстрактно, в обобщенном виде» [1]).

Это замечание Борткевича стоит в прямой связи с некоторыми моими соображениями по данному вопросу [2]). Мне кажется именно, что и с той самой точки зрения чистой теории вероятностей, на которой стоит Лексис со своею школой, вопрос об отношении статистической закономерности к свободе индивидуального самоопределения не разрешается так просто, как это представляется, в особенности, Чупрову. Конечно, в настоящее время не приходится уже говорить о каком-то статистическом законе, требующем совершения положенного заранее числа преступлений и делающем из индивидуума лишь исполнителя откуда-то идущего предначертания. Но можно ли сказать, что статистическая закономерность тактаки ничего не говорит о механизме воли? Мне думается, что

---

[1]) Задачи и концепции, стр. 358—359.

[2]) См. Теория и методы статистики, 3-е изд., стр. 238—240.

нет, — и в этом нетрудно убедиться, если стать на ту самую точку зрения сложной вероятности, которая лежит в основе построений Лексиса и его школы.

Начнем с простого жизненного примера. Пусть имеется класс из 40 учеников, и пусть, на основании продолжительного опыта, дневная вероятность дисциплинарного проступка выражается дробью 0,1,—в среднем на день приходится по 4 случая проступков. Вытекает ли отсюда что-нибудь по отношению к ученикам Иванову, Шмиту и другим? Пока мы стоим на точке зрения «постоянной» вероятности, иначе сказать, ничего не знаем о составе класса, — ничего: мы абсолютно не знаем, кто может провиниться сегодня, завтра и т. д. Предположим затем, что дисциплина класса резко падает, а число проступков возрастает так, что дневная вероятность проступка увеличивается до одной четверти. Следует ли отсюда что-нибудь по отношению к отдельным ученикам? Тоже ничего: может-быть провинится Иванов, может-быть Шмит, а может-быть какой-нибудь Сергеев. Но воспитатель, знающий свой класс, знает, что Иванов «воды не замутит», а Шмит принадлежит к группе шаловливых или непокорных учеников, от которых каждую минуту можно ждать шалости или ослушания. В Иванове он вполне уверен и при пошатнувшейся дисциплине; Сергеев заразился господствующим настроением и тоже пошаливает; а вот Шмит и его группа, при наступлении такого настроения, наверно нагрешат,—разве только счастливая случайность. Или переводя все это на язык сложной вероятности: обычная вероятность 0,1 слагается из нескольких простейших элементов: для группы Иванова с Сергеевым вероятность весьма близка к нулю, для группы Шмита она достигает положим, четверти. Дисциплина пошатнулась: вероятность проступка для Иванова остается 0; Сергеев с несколькими другими обнаруживают уже вероятность, положим, 0,1; для группы Шмита вероятность приближается к нравственной достоверности, — учитель уверен, что у них день не сойдет благополучно. Конечно, здесь не может быть речи о «давлении цифры» на Шмита и на его группу. Но приближающаяся к единице вероятность проступка является показателем таких обстоятельств, которые давят на волю с почти непреодолимою силой и почти с полною субъективною необходимостью заставляют ожидать от них проступка.

То же самое мы можем проследить и на любом явлении из числа, в самом деле, подвергающихся статистическому изучению. Возьмем банкротства. Пусть, при обычном положении дел, эмпирическая вероятность несостоятельности—0,01. Отсюда, несомненно, не вытекает никакого непосредственного предсказания ни для одной единичной фирмы: несостоятельность одних фирм—нечто выходящее из пределов правдоподобия, другие не перестают висеть на волоске. Мало изменяется дело—пока стоять на почве простой вероятности—и при наступлении кризиса. Общая вероятность кризиса возрастает, допустим, до 0,1 на гибель обречено около одной десятой части всех предприятий; но мы, опять-таки, из этого не можем сделать никакого вывода по отношению к отдельным предприятиям: одни из них—в самом деле, обанкротятся, другим кризис, может быть, принесет невиданные барыши. Совсем иначе с точки зрения сложной вероятности. В группе

солиднейших предприятий вероятность несостоятельности—нуль; для нескольких групп тоже очень солидных предприятий—вероятность несостоятельности далеко ниже средней; напротив, в группах несолидных предприятий вероятность несостоятельности будет значительно выше средней. Наступает кризис. Резко повысившаяся средняя вероятность несостоятельности остается чрезвычайно различною в разных группах. Для группы солиднейших предприятий она все же остается весьма близкою к нулю—их свалит разве только какое-нибудь исключительное стечение обстоятельств; для обширных групп предприятий вероятность несостоятельности хотя и повысилась, но все же остается ничтожною; для группы слабых предприятий, с недостаточным капиталом, слабым кредитом, с неумелыми и незадачливыми руководителями, вероятность банкротства очень близка к единице—относительно них можно с известною уверенностью сказать, что они не перенесут кризиса. И в данном случае—предполагая даже, что эта весьма высокая вероятность могла бы быть вычислена, никоим образом нельзя будет сказать, что эти фирмы пали во исполнение статистического закона. Но специфически высокая цифра вероятности банкротства для предприятий данной группы - показатель такой исключительно неблагоприятной совокупности обстоятельств, которая почти с полною достоверностью предрешает гибельные именно для них последствия кризиса, которая непосредственно давит на их волю и на их поступки.

То же самое и в случае Рюмелина и „последнего висельника“: общая преступность—иначе сказать, вероятность совершения преступного деяния, не имеет никакого значения для „благороднейшаго из сынов народа“. Если вероятность, положим, имущественного преступления, равна 0,001,—из этого ничего не следует для определенных А и Б, для целых групп населения. Есть лица и группы, для которых вероятность преступления равна нулю. Есть лица, которые могут впасть в преступление при исключительных стечениях обстоятельств, и группы, где преступления чрезвычайно редки,—вероятность преступления чрезвычайно ничтожна. Идя в том же порядке дальше, доходим до „преступного класса“—совокупности индивидуумов, в силу наследственности, воспитания, жизненной обстановки как бы обреченных на преступление; преступления здесь—заурядная вещь; частота, а с нею и не поддающаяся вычислению объективная вероятность преступления, огромны. Они являются показателем такой совокупности субъективных и объективных условий, которая несомненно давит на индивидуальную волю и почти с необходимостью побуждает поставленных в известную обстановку лиц к совершению преступлений.

Или обобщая приведенные примеры: волевые мотивы и проистекающие из них индивидуальные действия, конечно, ни в ма-

лейшей мере не зависят от той цифры, в которой находит себе выражение статистическая закономерность. Но расчленяя массовое явление на однородные по всей совокупности признаков группы и применяя прием сложных вероятностей, мы убеждаемся в том, что сами эти цифры представляют собою выражение сложной совокупности обстоятельств, оказывающей в некоторых группах такое сильное давление на индивидуальную волю, при наличности которого совершение известного поступка может быть предсказано для входящих в данную группу индивидов почти с совершенною достоверностью.

Намеки на те же мысли мы находим и в литературе теории вероятностей, и в философской литературе. „Когда индивиды действуют разумно,—говорит, напр., Mansion—они действуют приблизительно одинаково в одинаковых обстоятельствах,—вот почему закон должен быть применим к массе социальных явлений, где человеческая свобода привходит как основной фактор". В области преступлений, например, „в таких-то обстоятельствах такой-то преступник, как показывает наблюдение, убивает или ворует фатально; в известных случаях тем, кто привычен в краже и убийству, почти невозможно сопротивляться искушению". А между тем этот контингент правильно пополняется. Вот почему, в самом деле, можно предсказывать „бюджет преступлений", и в результате „человек, следующий своим дурным инстинктам, agit comme d'après une loi" [1])—действует как во исполнение закона. Нечто похожее находим и у Зигварта: „распределение общего отношения,—говорит он,—по отдельным индивидуумам в форме их индивидуальных шансов было бы тем более правомерным, чем меньше те круги, в которых подтверждаются отдельные средние. Ибо тогда можно принять, что результаты зависят от условий, которые или повсюду одинаковы и на всех воздействуют равномерно; или, по меньшей мере, что различные условия, которым подчинены отдельные лица, эквивалентны друг другу". Конечно, такое детальное расчленение практически едва ли где-либо осуществимо. Но такая несуществимость, вытекающая из технического несовершенства приемов анализа, не устраняет факта существования такого рода приблизительно однородных групп; не мешает тому, что концентрирующаяся в некоторых из них значительная вероятность свидетельствует о наличности условий, давящих на волю отдельных лиц и в значительной степени предрешающих их поступки.

Я, конечно, далек от мысли видеть в только-что изложенных соображениях решение вопроса об отношении статистической за-

[1]) Mansion, l. c., стр. 62—63.

кономерности к свободе индивидуального самоопределения. Но достаточно признать хоть некоторую долю значения за этими ли, или в вкратце резюмированными выше соображениями Р. М. Орженцкого, чтобы сказать себе, что и после исследований дисперсии вопрос об отношении статистических закономерностей и выражающих их эмпирических вероятностей к свободе индивидуального самоопределения еще далек от окончательного разрешения.

Переходим теперь к методологическому аспекту—к значению измерений дисперсии для вопроса о сфере применения исчисления вероятностей в статистической действительности, а затем и вообще к вопросу о роли их в статистической теории.

Как мы видели, нормальная „устойчивость" оказалась хотя и не широко распространенным в мире статистической действительности явлением, но и отнюдь не таким редким исключением, как это выходило по первым исследованиям Лексиса. И если придавать исследованиям дисперсии решающее значение, то надо признать, что выяснение благоприятствующих нормальной дисперсии условий, и, в частности,—соотношения между уровнем устойчивости и широтою поля наблюдения, очень на-руку для научного, главным образом для каузального статистического анализа. Ведь дисперсия понижается, а „устойчивость" повышается,—следовательно, статистические числа и выводы из них становятся более надежными: а) при изучении меньших по объему масс и б) при изучении их внутреннего строения. А мы видели во 2-ой главе, что научный статистический анализ требует именно дробления материала на однородные группы, и что расчленение статистических совокупностей по „факториальным" признакам, — наиболее могущественное орудие статистического анализа.

Но все это—именно поскольку придавать исследованиям дисперсии решающее значение. Между тем, большой вопрос, можно ли придавать им такое значение,—какова, вообще, их роль в статистической теории,—этот вопрос, именно благодаря внесенным к первоначальной схеме Лексиса дополнениям и поправкам, возбуждает серьезные сомнения.

Дело вот в чем: основной методологический вопрос был ясно и отчетливо поставлен в первоначальной схеме Лексиса,—но, по мере накоплявшихся дополнений и поправок, он совершенно потерял свою первоначальную ясность. Потеряло ясность не только решение вопроса,—в самой постановке его между двумя виднейшими из учеников и продолжателей Лексиса, А. А. Чупровым и В. И. Борткевичем, обнаружилось коренное разногласие. Для Борткевича существенный смысл того, что было достигнуто предпринятыми по почину Лексиса исследованиями,—завершение которых он видит в формулированном им „законе малых чисел", сводится к обнаружению, при не-

реходе от больших к меньшим числам и в конце концов—к „редким явлениям", нормальной дисперсии. Именно этот результат исследований дисперсии приводит Борткевича к „научному убеждению, что в основе всех чисел статистики населения и моральной лежат математические вероятности или функции таковых". Для Чупрова собственно этот результат, как мы видели, не более, как „иллюзия", как „арифметическая тавтология". Но, конечно, в таком случае А. А. Чупров никоим образом не может признать за ним решающего значения в вопросе о „праве нашем на приложение теории вероятностей к статистическим данным". Он, вообще, „не видит надобности в эмпирическом доказательстве подобного права" [1]). „Оправдание" (курс. А. А. Чупрова) приложения концепций теории вероятностей к проблеме устойчивости он видит „в том, что на их почве нам удается слить в одно связное, ясное и свободное от противоречий построение богатый и вне них необъяснимый материал статистически констатированных фактов с почерпнутыми из непосредственного наблюдения над жизнью представлениями о действительном ходе изучаемых статистикою явлений" [2]). Иначе сказать, Чупров в корне отрицает тот „аспект" учения о дисперсии, который я назвал „методологическим". А если бы и требовалось какое-либо доказательство права применять теорию вероятностей в статистике, то и в этом случае—полагает он—„голый факт приблизительно нормальной дисперсии полового состава рождающихся в загадочных для нас условиях зачатия явился бы менее веским эмпирическим доказательством" этого права, „нежели факт широкой распространенности сверхнормальной (курс. мой. А. К.) дисперсии в тех условиях действительной жизни, которые должны вызвать в статистических числах колебания, выходящие за пределы нормальных" (Там же). Борткевич решительно восстает против такой точки зрения. В противоположность Чупрову, не видящему „надобности в эмпирическом доказательстве" нашего права применения исчисления вероятностей в эмпирической действительности — другими словами, отрицающему необходимость проверки применимости исчисления вероятностей, Борткевич, напротив, считает „непоследовательным придавать значение опытной проверке теории вероятностей посредством разных экспериментов игральными костями, шарами, картами и т. п. и считать аналогичную проверку излишней в статистической области" [3]). И в этом он, конечно, прав. По правильному замечанию Вундта, эмпирическая проверка теории вероятностей необходима, „когда существует законное сомнение в предпосылке взаимного уравновешения побочных обстоя-

[1]) А. А. Чупров. Очерки, 2-ое изд., стр. 391, примечание.

[2]) Там же.

[3]) В. И. Борткевич. Задачи и концепции, стр. 368.

тельств"; при наличности такого сомнения „отклонение эмпирического среднего значения от априорной вероятности может быть использовано, чтобы определить силу тех влияний, которые приводят за собой отклонение от ожидаемого результата в данном направлении"; они представляют интерес даже и в области эксперимента, где она может, например, обнаружить неправильность кости или недостаточно точное устройство рулетки. Но если даже в этой области, где предпосылки теории вероятностей в максимально-мыслимой степени имеются налицо, „теоремы комбинаторики"—каковыми по способу своего вывода являются положения теории вероятностей, требуют проверки, и если даже здесь лишь в результате такого рода проверки они приобретают реальное значение, то тем более такая проверка необходима при бесконечно-большей сложности явлений статистической действительности, и при существовании серьезных сомнений в наличности, во многих из областей этой действительности, предпосылок математической вероятности. Здесь—по Борткевичу—„принципиальное значение" факта повышения уровня устойчивости с уменьшением числа наблюдений „заключается именно в том, что он как бы санкционирует общим образом приложение концепции теории вероятностей к статистическим данным"; и „поскольку вообще может быть речь об эмпирическом доказательстве приложимости теории вероятностей к статистике, это доказательство не может (курс. мой. А. К.) заключаться ни в чем ином, как в доказательстве нормального характера дисперсии" [1]). Напротив, Чупров настаивает на правильности высказанного им взгляда. Для него факт повышения уровня устойчивости с сокращением поля наблюдения „ничего не доказывает, кроме неудачного выбора, для измерения устойчивости, „меняющегося" масштаба. „Что касается констатирования нормального уровня дисперсии, то печально было бы,—говорит Чупров,—положение защитников теории вероятностей, если бы право на приложение ее к статистике покоилось, действительно, на этом основании; ибо нормально-устойчивых массовых явлений статистикам доселе почти не удалось подметить. Да притом представляется вообще непонятным, как нормальность дисперсии *одного* числа может служить доводом в пользу приложимости исчисления вероятностей к изучению *иных* (курсив мой. *А. К.*) статистических чисел, нормальною устойчивостью заведомо не обладающих"? [2]).

Кто же—спрашивается—прав в основном спорном вопросе о значении нормальной дисперсии, как критерия применимости исчисления вероятностей к изучению явлений статистической действительности—Борткевич или Чупров? Во всяком случае не Борткевич. Не

---

[1]) Там же.

[2]) А. А. Чупров. Очерки, 2-ое изд., стр. 413, примечание.

прав он, прежде всего, уже в том, что подчеркнуто А. А. Чупровым в заключительных словах процитированного только-что отрывка. Ведь заслуга Лексиса именно в том и заключалась, что он на место прежде принимавшегося без особого обоснования постулата о применимости в статистике классической схемы урн „поставил задачу в каждом данном случае (курс. мой. А. К.) исследовать, допустимо ли вообще, и в какой мере, привлечение этой схемы“ (Брунс), и с нею вообще, приемов исчисления вероятностей, к анализу именного данного явления или данной категории явлений. Неправ он и когда думает, что эмпирическое доказательство приложимости теории вероятностей к статистике „не может заключаться ни в чем ином, как в констатировании именно нормального характера дисперсии“. Это ни мало не вытекает из Лексисовой схемы,—более того, прямо ей противоречит. Из всех трех видов „типических величин“ одни только сверхнормально-устойчивые по Лексису, „не принадлежат более к категории Wahrscheinlichkeitsgrössen, а имеют лишь свойственную последним форму“. Величины со сверхнормальною дисперсией он характеризует „как соответствующие игре, основанной на случае, с черными и белыми шарами в пропорциях, варьирующих случайным образом от серии к серии, вокруг некоторого среднего значения“ [1]); следовательно, как все же отвечающие одной из многообразных схем, которые трактуются теорией вероятностей. Уже отсюда ясно, что для эмпирического доказательства применимости исчисления вероятностей, по Лексису, вовсе не требуется установить, непременно, наличность нормальной дисперсии. Но у Лексиса есть на это и более прямое указание. На стр. 64 „Massenerscheinungen“ он подчеркивает чисто-„эмпирический“ характер обосновываемых на статистических коэффициентах обобщений. Чтобы иметь право принимать статистические коэффициенты за приближенные значения постоянных или хотя бы только случайно изменяющихся вероятностей, нужно показать, что в данном случае вычисленная по „физикальному“ способу мера точности равна или меньше вычисленной по „комбинаторному“, и „что, кроме того, в этом последнем случае отдельные значения, рассматриваемые абсолютно, могут быть признаны за типические величины. В первом случае,—продолжает Лексис,—мы имеем дело с типическою величиною с нормальною, во втором—со сверхнормальною дисперсией“, и затем он констатирует, что „оба эти вида вероятностей (курсивы мои. А. К.) лишь в редких случаях могут быть обнаружены в человеческих массовых явлениях, несмотря на, часто, высокую кажущуюся их устойчивость“.

Таким образом, по Лексису, и нормальная, и сверхнормальная дисперсия, при установленной типичности

[1]) Lexis, Z. Theorie d. Massenersch., стр. 34.

ряда, одинаково позволяет рассматривать статистический коэффициент, как приближенное значение вероятности, в противоположность, с одной стороны, типическим же величинам с поднормальною дисперсией, а с другой—чрезвычайно обширному в статистике классу не-типических или „симптоматических“ рядов, дающих не-нормальную или неправильную дисперсию. Чтобы эмпирически доказать наше право применять к известной категории статистических коэффициентов приемы теории вероятностей нам нужно, значит, прежде всего, показать, что данная величина является типическою,—иначе сказать, что распределение отдельных значений ее вокруг средней отвечает Гауссову закону нормальных погрешностей, а затем—что она не обладает под нормальною дисперсией. Будет ли, затем, дисперсия нормальною или сверхнормальною,—это собственно для решения вопроса о характере статистического коэффициента, как приближенного значения вероятности, совершенно безразлично. А так как с поднормальною дисперсией в сфере статистической действительности, как мы видели, можно совершенно не считаться, то, значит, для решения этого вопроса нужны, вообще, не измерения дисперсии, а исследования, направленные к уловлению соответствия распределения статистических чисел Гауссову закону нормальных погрешностей. Смысл исследований дисперсии—не в этом, а в чем-то ином, и, конечно, смысла этого надо искать, главным образом, в том направлении, какое намечено в процитированных выше словах А. А. Чупрова.

В этом — повторяю — прав Чупров, а не Борткевич. Если нужно доказательство нашего права применять исчисление вероятностей к обработке статистических чисел, то искать такого доказательства нужно не в нормальном характере измерений дисперсии и вообще не в измерениях дисперсии. Прав ли, спрашивается теперь, Чупров и в положительной части своей оценки роли иследований дисперсии для теоретической статистики? Можно ли, в самом деле, думать, что „факт распространенности сверхнормальной дисперсии в тех условиях действительной жизни, которые должны вызывать в статистических числах колебания, выходящие за пределы нормальных“, является „веским доказательством права на приложение теории вероятностей к статистическим данным“; удается ли в самом деле на почве концепций теории вероятностей „слить в одно связное, ясное и свободное от противоречий построение богатый и вне их необъяснимый материал статистически констатированных фактов с почерпнутыми из непосредственного наблюдения над жизнью представлениями о действительном ходе изучаемых статистически явлений“?

Прежде всего,—нельзя не обратить внимание на то, что все те типы „сплетений обстоятельств“, из которых выводится объяснение

поднормальной или, напротив, сверхнормальной дисперсии, установлены не на конкретной действительности, а на схемах, облеченных, по большей части, в форму опытов с урнами и шарами. Схемы эти чрезвычайно чувствительны—достаточно, иногда, ничтожного видоизменения схемы, или даже только видоизменения способа подсчета результатов испытаний, чтобы получился совершенно иной, а иногда—и диаметрально-противоположный результат. Выше я упоминал об исследованных А. А. Марковым случаях связи испытаний в цепь: раз принята схема простой цепи, при которой вероятность данного испытания зависит от исхода только одного непосредственно-предшествовавшего испытания, дисперсия „не может быть нормальною": она может быть нормальной, если перейти к несколько отличной схеме—сложной однородной цепи. На вполне определенных, опять-таки, схемах основываются формулы Лексиса-Борткевича, объясняющие поднормальную (равно как и сверхнормальную) дисперсию. Но, в частности, формула поднормальной дисперсии, по замечанию того же А. А. Маркова, „частная формула, которая не дает права делать общих заключений. Она относится только к тем случаям, когда вероятность не меняется внутри серий; если же вероятность меняется не только от серии к серии, но и внутри серий, то формула Лексиса—Борткевича падает, а вместе с нею падает и заключение на ней основанное" [1]). То же, конечно, верно и для формулы сверхнормальной дисперсии. Схема „солидарности единичных случаев", предложенная Борткевичем, имеет в виду именно вероятности, изменяющиеся внутри серий; но кто может сказать, какой вид приняла бы выведенная из нее формула, если бы ввести в нее такие поправки, которые хотя до известной степени устраняли бы подчеркиваемые самим Борткевичем совершенно нереальные ее предпосылки: расчленение „главных серий" на равновеликие частные серии и одновременное изменение способа действия всех солидарно-действующих причин? Самые понятия „серий" совершенно искусственны и не имеют аналога в реальной действительности: ведь месяцы, года, провинции, уезды – это не какие-то, в самом деле, обособленные по отношению к „испытаниям" на убийство, на смертный случай и т. п. „серии", а простые счетные единицы, полагаемые в основание подсчета, обычно, в силу чисто внешних технических или административных соображений, не имеющих никакого отношения к существу и к действительным видоизменениям обстановки и общих условий данного явления. А между тем—как я упоминал—способ группировки „испытаний" для подсчета может иметь решающее влияние на результат: опять-таки, у А. А. Маркова мы находим схематический пример такого случая, где ряд испытаний может дать

[1]) Марков. Об основн. положениях исч. вероятн и т. д., Ж. М. Нар. Просв. 1911, № 2, стр. 373.

и сверхнормальную, и поднормальную дисперсию: „указанное соединение двух противоположных случаев достигается, например, в ряду, который характеризуется такими вероятностями: 100 раз 0,6, 100 раз 0,4, 100 раз 0,6, 100 раз 0,4... Если соединить в серии по сто испытаний, то будем иметь случай Лексиса сверхнормальной дисперсии, а если соединить в серии по двести испытаний, то дисперсия будет суб-нормальною“ [1]). Между тем цифры, относящиеся к варьирующему в пределах года явлению, можно подсчитать и погодно, и помесячно, и по временам года или по иным образом скомбинированным сезонам цифры, относящиеся к явлению с многолетним циклом, можно подсчитать и за соответствующие подобному циклу периоды, и погодно,— ясно, что при каждом из таких различных способов подсчета может получиться совершенно различное представление о характере дисперсии. А между тем, ни один из таких способов подсчета не в состоянии будет уловить действительные „серии“,—моменты времени, когда, или границы пространства, где на самом деле начинаются „серии испытаний“ с иными вероятностями,—когда или где изменяется причинная обусловленность изучаемого явления.

Итак, еще раз: малейший вариант в конструкции схем, малейшее изменение в группировке для подсчета,—и измерения дисперсии могут дать совершенно иные результаты. Ясно, что в применении к явлениям статистической действительности эти схемы лишь тогда могли бы приводить к определенным, а не двусмысленным результатам, если бы явления реальной жизни, в самом деле, строго укладывались в эти схемы. И не менее ясно, что в жизни, в статистической действительности нельзя искать не строго замкнутых и чередующихся серий с резко различными вероятностями, ни равновеликих серий с одновременным, внутри серии, изменением частных вероятностей, ни жеребьевок, определяющих очередь ряда испытаний. Это ясно сознавал еще Курно, когда указывал на неприменимость использованных им схем к статистике: схемы эти—подчеркивал Курно — предполагают изменения вероятностей от серии к серии, скачками, тогда как в действительности вероятности „должны претерпевать прогрессивные изменения и, как все величины в природе, даже в своих неправильных изменениях, подчиняться закону непрерывности“; с другой стороны и между смежными случаями, которые теория вероятности рассматривает как тождественные, всегда есть небольшие различия, которые не поддаются учету, но влияние которых, постепенно складываясь, может стать очень большим. Максимум того, чего можно искать в статистической действительности—это приблизительное ее соответствие тем или другим из схем теории вероятностей, лежащих в основе

[1]) Там же стр. 373-374.

приведенных к первоначальной схеме Лексиса дополнений и поправок. Можно ли, спрашивается, на самом деле, подметить в мире статистической действительности такое приблизительное соответствие.

Рассмотрим по порядку каждую из схем, начиная с порождающих поднормальную дисперсию и ее коррелят — сверхнормальную устойчивость. Наиболее простая из них—это, конечно, схема вынимания шаров из урны без возвращения вынутых шаров обратно в урну. Наблюдается ли что-либо подобное в реальной действительности? Борткевич отвечает на этот вопрос категорическим отрицанием: „едва ли,—говорит он—в массовых явлениях статистики есть аналогия такому непосредственному воздействию течения единичных случаев на общие условия [1]),—zu solcher direkten Beeinflussung der in Betracht kommenden Allgemeinbedingungen durch den Verlauf der Einzelfälle.“ Чупров думает обратное; „Не трудно—говорит он,—убедиться, что в обстановке изучаемых статистиками явлений неизменно имеются налицо условия, которые напоминают... об эксперименте вынимания шаров из урны без возвращения вынутого шара в урну. Когда, например, смерть выхватывает из населения лицо того или иного пола, его место никем, ведь, не заступается с такою правильностью, как отвечало бы схеме возвращения вынутого шара назад в урну, и случайный перевес одного пола среди умерших за некоторое время неминуемо ведет к тому, что среди живущих равновесие перемещается в пользу другого пола, а вместе с тем повышаются шансы встретить представителей этого именно пола среди покойников в дальнейшем“ [2]). — Если умрет несколько женщин, в населении останется больше мужчин, — следовательно вероятность смерти переместится в сторону мужчин, и, наоборот, смерть нескольких мужчин ведет за собой перемещение вероятности в сторону женщин.

Мне думается, что проводимая Чупровым аналогия не выдерживает критики. Ведь в населении происходят не только смертные случаи, но и рождения, и даже, при нормальных условиях, в большем числе, и, значит, места умерших с избытком заполняются рождающимися в столь же пестрых, но в большом числе тяготеющих к определенной норме, комбинациях того и другого пола. В силу все того же принципа уравновешения случая, есть полное основание предполагать, что в массе места умирающих заменяются новорожденными лицами того же пола. А если даже и не того же, — все-таки, такая убыль умирающих с замещением их рождающимися—совсем не то, что извлечение шаров без возвращения в урну, т. е. без всякого замещения. Приблизительно тоже останется в силе, если считаться и с различиями в распределении смертности по полу в отдельных группах: в таком

---

[1]) Jahrb f. N Oek und Stat, III F, Bd. 10, стр. 322.

[2]) Очерки, 2 изд., стр. 410—411,

случае вполне законно будет принять, что места девочек, умерших на первом году, замещаются новорожденными девочками, места мужчин, умерших на 58-м,—мужчинами, перешедшими из 57-ой в 58-ую возрастную группу и т. д. Уж если угодно искать для этого процесса аналогии в схемах с урнами, то пришлось бы сконструировать приблизительно такую схему, при которой вынутые шары, правда, не возвращаются в урну, но зато в нее, параллельно с вынниманиями, подсыпаются новые шары, с приблизительно таким же распределением по цветам. Формула для этой схемы будет не

$$\sqrt{\frac{2\,p\,(1-p)}{s}\cdot\frac{\sigma}{\sigma-s}},$$

а какая-то другая. Какая именно, я не берусь сказать, но несомненно одно: если в эту другую формулу тоже войдет число шаров в конечный момент серии испытаний, то это будет не $\sigma-s$, а $\sigma-s+c$, где s число умерших, а c число родившихся, и притом c, как правило, больше s, а потому и все выражения $\sigma-s+c$ будет уже не меньше, а больше σ, а так как это бо́льшее выражение стоит в знаменателе дроби $\frac{\sigma}{\sigma-s+c}$, то, значит, эта дробь будет правильною дробью, меньше единицы: следовательно, все выражение, поскольку оно зависит от числа шаров в конечный момент серии испытаний, будет не меньше, а больше модуля при нормальной дисперсии.

Сказанным я нисколько не хочу сказать, чтобы указываемое А. А. Чупровым обстоятельство не влияло на степень устойчивости распределения смертности по полу. Я хочу только сказать, что оно не укладывается в данную схему. Гораздо скорее оно подходит к тому типу жизненных отношений, который Борткевич называет „частичною тождественностью“ — partielle Identität — сравниваемых масс [1]), и который, если взять оборотную сторону медали, можно охарактеризовать как их „частичную изменчивость“; тип, на котором мне, однако, удобнее будет остановиться ниже, а пока признать, во первых, что соответствующий этому типу характер статистических масс тоже может модифицировать дисперсию в направлении ее уменьшения и, во-вторых, что такого рода условия, понижающие рассеяние статистических чисел, отнюдь не ограничивают своего действия одним только случаем распределения смертных случаев по полу,—действие их можно предполагать и во многих других массовых явлениях. Если взять распределение тех же смертных случаев по профессиям или племенному признаку,—усиленная, в некоторый момент времени, смертность, скажем, железнодорожных рабочих, или, положим, татар,

[1]) Jahrb f. N.-Oek. und Stat. III F, Bd. 8, стр. 678.

на непосредственно-следующий момент уменьшает долю в первом случае—железнодорожников, а во-втором — татар в среде населения, а, следовательно, понизит шансы встретить представителей этих именно групп среди умирающих и т. д.

Другая схема условий, повышающих „устойчивость" статистических рядов—схема „среднея вероятности постоянного состава". И здесь Борткевич не согласен с Чупровым. Он допускает р е а л ь н о е существование вероятностей „постоянного состава" только в случаях, когда „о сохранении постоянных отношений между частными массами заботится закон или распоряжения соответствующей власти (несчастные случаи или самоубийства в разных родах оружия—при установленном законом или вообще вытекающем из данной военной организации распределении армии по родам оружия!). Напротив, Чупров полагает, что „массы неизменного... состава могут появляться в поле зрения статистика и без того, чтобы были замешаны какие бы то ни было волевые моменты. Наиболее ясным тому примером" Чупров считает половой состав населения. „При отсутствии эмиграции и иммиграции население обновляется лишь смертностью и рождаемостью. Доля мужчин в нем может повыситься, если за известное время умрет мужчин непропорционально мало или родится относительно много. Но эти перемены... затрагивают в течение не слишком длинных промежутков времени крайне незначительную долю населения". При таких условиях „колебания относительного числа мужчин в населении неизбежно окажутся ниже тех, какие отвечали бы нормальной дисперсии при условии, что весь состав населения обновляется путем жребия. Равным образом,—замечает Чупров,—и в возрастный состав населения смена поколений вносит при обычном течении жизни перемены менее значительные, нежели отвечало бы нормальному уровню дисперсии. Между тем, оба эти момента (пол и возраст) так сильно отражаются на большинстве явлений, изучаемых статистикой, что постоянства состава общественных масс в этих двух отношениях было бы достаточно для возникновения во множестве сверхнормально-устойчивых массовых явлений" [1]). Мне кажется, в э т о м случае Чупров гораздо ближе к действительности, нежели Борткевич. Конечно, и в примерах Чупрова мы не имеем дела с ч и с т о ю схемою „постоянного состава",—но достаточно того, что случаи этого типа чрезвычайно близко подходят, уже без всякого обращения медали, к уже упомянутой выше ч а с т и ч н о й т о ж д е с т в е н н о с т и сравниваемых масс, которая является неизбежным следствием или спутником присущего им характера „устойчивых масс"—Bestandmassen; того самого их свойства, которое, в сфере методики статистического наблюдения, делает возможным применение „статистической фотографии"—производимых через более

[1]) Очерки, 2 изд., стр. 408—409.

или менее длинные промежутки времени переписей. Это частичное тождество, как признает и Борткевич, „составляет при исследовании дисперсии статистических рядов вносящий нарушения фактор—störender-Faktor, а именно—оно может модифицировать ожидаемую дисперсию в направлении поднормальной дисперсии“ [1]). Соответствующей этому случаю схемы пока не сконструировано, и потому нет и соответствующих ему формул,—но существа дела это не меняет: момент „частичного тождества“, несомненно, влияет, и, надо думать, влияет именно понижающим образом, на дисперсию. Я думаю даже, что влияние этого момента тоже распространяется на несравненно более широкую сферу явлений и признаков, нежели какие указывает А. А. Чупров. Сошлюсь, прежде всего, на соображения Криса по поводу составного характера вероятности имущественных преступлений; соображения эти приводят Криса к заключению, что общие условия, порождающие преступность, „с гораздо большею отчетливостью—mit viel grösserer Treue—выражаются в числе действительно совершенных преступлений, чем если бы для всех индивидов существовала одинаковая возможность“ совершения преступления. „Случай,—продолжает Крис,—играет здесь очень незначительную роль. Если бы общие условия оставались неизменно постоянными, и значит, каждое данное значение вероятности существовало для определенного неизменного числа лиц, то для годичного числа преступлений следовало бы ожидать сильно поднормальной дисперсии“. В чистом виде этого, конечно, нет,—но во всяком случае, „не подлежит сомнению, что мы, не будучи в состоянии приписать нашим заключениям, основанным на числе совершенных преступлений, численно выразимой степени достоверности и точности, во всяком случае не дооцениваем то и другое, когда трактуем явления по схеме обыкновенной игры, основанной на случае“ [2]), т. е. исходим из предположения нормальной дисперсии. Все это рассуждение, конечно, применимо к любому другому из тех массовых явлений, различные частные вероятности которых могут быть приурочены к хотя бы не вполне строго отграниченным, но приблизительно постоянным по своему составу группам. А таких массовых явлений, в конце концов, можно насчитать неопределенное множество.

В самом деле: состав любой Bestandmasse—массы претерпевающей лишь частичные, так сказать, молекулярные изменения,—например распределение населения по полу, возрасту, племенному составу, грамотности, профессии и т. п., с течением времени, конечно, изменяется. Но изменения эти, проявляясь на отдельных единицах, лишь по истечении более или менее продолжительного времени отражаются на

---

[1]) L. c., стр. 678.

[2]) Kries. Princ. d. W-R., стр. 150—151.

массе, которая в целом, более или менее долго, сохраняет как бы неизменный вид. Значит, стоит только взять достаточно короткий период,—и приблизительно постоянным окажется распределение населения по любому, не только чисто-демографическому, но и экономическому и культурному признаку: и профессиональный состав и распределение по грамотности, и территориальное размещение как всего населения, так и выделенных по тому или другому признаку отдельных его групп. Я уже не говорю о таких, по самой своей сущности не допускающих сколько-нибудь быстрых перемен и в то же время чрезвычайно существенных группировках, как распределение населения по племенному или вероисповедному признаку; о таких, где постоянство состава и территориального размещения определенных групп поддерживается такими государственными и общественными распорядками, как сословный строй, как черта еврейской оседлости, как факт наделения землей, и т. п... И в конечном итоге я считаю, что момент „частичного тождества" не может не иметь огромного, но совершенно не поддающегося не только выражению в точных цифрах, но даже приблизительной оценке, понижающего влияния на дисперсию статистических чисел.

Отнюдь не имеют чисто-академического значения и разобранные А. А. Марковым и пока, кажется, еще не обратившие на себя внимания теоретиков статистики случаи связи испытаний в цепь. Возьмем заразную болезнь, передающуюся путем непосредственного прикосновения,—здесь, очевидно, вероятность заболевания каждого данного индивида будет зависеть от того, заболели или не заболели те индивиды, с которыми он приходит в непосредственное соприкосновение, и не будет непосредственно зависеть от заболеваний других. Такие причины плохого урожая, как сорные травы, или болезни культурных растений, или поражения насекомыми, непосредственно передаются от одного поля к другому, непосредственно смежному, от одной полосы к другой, соседней, и, значит, вероятность плохого урожая, проистекающего от подобного рода причин, будет для каждого данного поля или каждой данной полосы зависеть от того, подверглась ли соответствующему поражению непосредственно смежная с нею полоса, и не будет стоять в непосредственной зависимости от поражения более отдаленных полос. Рассматриваемые так оба эти примера будут довольно близко подходить к схеме связи случаев в простую цепь, причем в том и другом примере связь эта будет повышать дисперсию. Можно, пожалуй, привести пример зависимости и противоположного характера: вероятность преуспеяния торговых предприятий, расчитанных на местный рынок (лавочная торговля в деревне или маленьком городке), при прочих равных условиях, будет находиться в некоторой обратной зависимости от преуспеяния его конкурентов просто потому, что одни из них перебивают клиентов у других.

Если, затем, возвратиться к двум примерам, приведенным выше,— примерам заразных болезней и поражений урожая, то небольшого видоизменения их достаточно, чтобы приблизить их уже к другим схемам. Для этого достаточно представить себе, что болезнь передается не одним только прямым соприкосновением, но и способами, не требующими такой непосредственной близости; что вредители урожая могут не только переходить с одной полосы на непосредственно смежную, но и переноситься через несколько полос,—и мы будем уже иметь дело не с простою цепью, а с чем-то другим, более сложным. Я, однако, совершенно не берусь решать, какие комбинации условий могут оказаться более или менее соответствующими схеме сложной цепи, дающей, по А. А. Маркову, нормальную дисперсию, и какие— схеме „солидарности отдельных случаев", при которой дисперсия будет уже сверхнормальною. Нечего уже говорить о том, что выразить влияние связей данного рода в цифрах нет и, думаю, не предвидится никакой возможности.

Переходим теперь к схемам, порождающим сверхнормальную дисперсию. Комбинации условий, в той или иной мере близкие к этим схемам, пользуются в сфере статистической действительности чрезвычайным распространением. Это приходится сказать, прежде всего, о „солидарности" в том более общем смысле, как ее трактуют Крис или Борткевич в „Kritische Betrachtungen": „Наличность в обстановке изучаемых статистикой массовых явлений такого рода моментов, которые, влияя однообразно на ход явлений в течение некоторого промежутка времени (или в определенных границах пространства. *А. К.*), затем резко меняются, не может подлежать сомнению. Остановим, для примера, внимание на смертности. Год на год не приходится ни по климатическим условиям, ни по экономической кон'юнктуре, заметно отражающейся на жизни населения: порою налетают сильные эпидемии заразных болезней; иные годы оказываются, напротив, от эпидемических заболеваний свободными. Словом, целый ряд обстоятельств складывается так, что жизненные условия, благоприятствующие и не благоприятствующие заболеванию и умиранию, не остаются для изучаемой общественной группы... без перемен от одного года к другому. Совместное влияние таких колебаний общих условий жизни всей группы и тех случайных стечений личных обстоятельств, которые при неизменных общих условиях дали бы нормально устойчивый ряд частей, и поднимает для смертности значения коэффициента Q так высоко" [1]). То же самое рассуждение, конечно, применимо и к неопределенному множеству других явлений демографического, экономического и любого иного порядка,—но дольше останавливаться на этого рода обстоятельствах, в виду их самоочевидности, не стоит. Не менее

[1]) Чупров. Очерки, 2 изд. стр. 385.

реальное и не менее всеобщее значение имеет разработанная Борткевичем в „Законе малых чисел" схема „солидарности отдельных испытаний", предполагающая изменение частных вероятностей внутри отдельных серий,—в особенности в той ее разновидности, которую Борткевич называет „хронической солидарностью", когда солидарнодействующие факторы сохраняют то же Verhalten—тот же способ действия не при сериях из одинакового числа испытаний, а для промежутков времени, Zeitabschnitte, определенной продолжительности. „Случай хронической солидарности единичных случаев—совершенно верно говорит Борткевич—составляет в статистике общее правило" [1]). И, в самом деле, та независимость отдельных случаев, которая является предпосылкою нормальной дисперсии, в неопределенно большом числе нарушается тем, что все явления стоят под действием общей жизненной обстановки: климатические условия данного дня, данной недели, месяца и т. д. сходным образом отражаются на жизни всего населения большого города или даже страны; „требование независимости отдельных случаев нарушается здесь общностью для всех их жизненной конъюнктуры данного момента времени" [2]),—именно данного момента времени, а не всей той, взятой в целом, единицы времени—календарного года, месяца и т. п., к которой приурочен подсчет статистических данных. Это последнее обстоятельство, очевидно, приближает статистическую действительность именно к той более тонкой схеме „солидарности", которая предполагает изменение вероятностей внутри каждой данной „главной серии". И в то же время столь же очевидно, что отсутствие в статистической действительности предпосылок равенства числа наблюдений в сериях и одновременного изменения солидарно-действующих причин не позволяет и думать о применении основанных на этих предпосылках формул, а, следовательно, и о каком-либо измерении силы повышающего дисперсию влияния этих причин.

Какой же—спрашивается—вывод вытекает из всего сказанного по поводу возможной роли отдельных типов сверхнормальной и поднормальной „устойчивости" и условий, порождающих те или другие уклонения уровня „устойчивости" от нормы, в статистической действительности? Прав ли А. А. Чупров, когда думает, что благодаря исследованиям дисперсии и вообще на почве приложений концепций теории вероятностей к проблеме устойчивости „нам удается слить в одно связное и свободное от противоречий построение богатый и вне их необъяснимый материал статистически констатированных фактов, с почерпнутыми из непосредственного наблюдения над жизнью представлениями о действительном ходе изучаемых статистикою явле-

---

[1]) Ges. der kl. Zahl.; стр. 47.

[2]) Чупров. Очерки, 2 изд., стр. 396—397.

ний"? Мне думается, что нет,—что при разнообразии моментов, влияющих на дисперсию статистических чисел частью в усиливающем, частью в ослабляющем направлении; при совершенной невозможности выделить влияние одних из них от влияния других, действующих в том же направлении или противоположных, а тем более—измерить силу этих различных моментов, исследования, основанные на измерениях дисперсии, превращаются в задачи с неопределенными решениями, или, лучше сказать, с произвольным количеством каких угодно решений. Определенные указания на это мы находим у самого А. А. Чупрова. Он констатирует, что того приблизительного постоянства полового и возрастного состава населения, о котором упоминалось несколько выше, „было бы уже достаточно для возникновения во множестве сверхнормально устойчивых массовых явлений". И, однако, мы в действительности таких явлений не встречаем. Почему? Очень просто: потому, что „действие таких моментов перекрывается действием хорошо нам знакомых иных, имеющих тенденцию понижать устойчивость" [1]). И еще ярче в другом месте, через несколько страниц [2]), где констатируется, что, с одной стороны, устойчивость полового состава умирающих должна была бы несколько (насколько?) превышать нормальный уровень, как в силу приложимости схемы извлечений без возвращения шаров в урну, так и благодаря приблизительной неизменности полового состава населения; но что, с другой, не параллельные друг другу колебания самих вероятностей смерти для мужчин и женщин влияют на устойчивость понижающим устойчивость образом. „Таким образом,—заключает А. А. Чупров,—устойчивость полового состава умирающих, обнаруживающаяся в конечном результате, представляет равнодействующую противоположных влияний и, смотря потому, что пересилит, может оказаться и выше и ниже"; для одних возрастных групп он предполагает одну, для других—другую комбинацию влияющих на устойчивость факторов, в соответствии с обнаруженною для одних близкою к норме, для других сверхнормальною устойчивостью. Но раз мы имеем дело с перепутывающимися, действующими в противоположных направлениях влияниями, притом не могущими быть ни выделенными, ни тем более измеренными, то все такого рода предположения являются совершенно произвольными, мы можем к любым цифрам подобрать подходящее предположение или произвольное множество подходящих предположений; но ни одно из подобранных нами предположений не будет иметь ни малейших гарантий об'ективной достоверности. Получилась дисперсия нормальная,—может быть, она свидетельствует о „нормально-случайном" характере колебаний, как симптоме лежащей в основе

[1]) Очерки, 2 изд., стр., 409.

[2]) Стр. 415.

данного явления „средней вероятности в собственном смысле“ —а, может быть, она получилась в результате взаимно-погасившихся, усиливающих и ослабляющих моментов, причем сила их действия могла быть одинаково — а и + а, — 3а и + 3а, — 10а и + 10а. Получилась дисперсия, положим, слабо сверхнормальная,—она могла получиться в результате несильного действия усиливающих дисперсию, при совершенном отсутствии или близкой к нулю силе ослабляющих ее фактов, и от чрезвычайно сильного действия повышающих дисперсию факторов, перевешивающего лишь немногим менее сильное действие факторов, ее понижающих,—возможны комбинации — 0,1а и + 1а, — 1а и + 2а, возможна и комбинация — 9а и + 10а. То же самое, конечно, и при поднормальной дисперсии, если бы таковую когда либо удалось обнаружить в недопускающем сомнения виде: и здесь возможно допустить несильное действие понижающих дисперсию моментов при совершенном, или почти совершенном отсутствии противоположных, и большую силу тех и других, с некоторым лишь перевесом в пользу факторов, понижающих дисперсию. Словом, при каком угодно уровне дисперсии мыслимы какие угодно предположения, и принятие того или другого из них будет зависеть не от об'ективных данных, а от суб'ективных соображений данного исследователя. И, мне думается, поэтому, что в оценке значения измерений дисперсии прав не А. А. Чупров, а Крис, когда он в ряде мест своей монографии говорит о крайней шаткости заключений, основанных на измерениях дисперсии: „Если, говорит он, например, в одном из таких мест,—хотеть от погодных изменений чисел каких-либо явлений в человеческом обществе заключать об изменении известных общих условий, то это, в общем, не будет незаконным – unterliegt dies im Allgemeinen keinem Bedenken. Но если хотят приписать такому заключению какую-либо численно-определенную степень точности и достоверности, то это—задача, ein Unternehmen, которая требует, прежде всего, более точного установления, что следует разуметь под общими условиями“ данного явления, и следовательно, из какой схемы устойчивости должно исходить; „а лишь только попытаться это установить, она—эта задача, оказывается неразрешимою“ [1]). Прав и Борткевич, поскольку он констатирует, что „Чупров, повидимому, не сознает всей условности подведения статистических явлений под обычные (и—добавлю от себя—под какие бы то ни было! *А. К.*) схемы теории вероятностей“, и когда вслед за этим замечает, что А. А. Чупров „говорит о гибкости этих схем, не считаясь с их хрупкостью“ [2]), или,—как, может быть, еще лучше сказать,—с их беспредельною растяжимостью: потому что, в самом деле, какую ценность может иметь претендующий на матема-

[1]) Kries. Princ. d. W.—R, стр. 238—239; см. также стр. 150—151; 156 и др.

[2]) „Задачи и концепции“, стр. 368.

тическую точность критерий, раз применение его к любому данному случаю может привести к любому, угодному исследователю, результату? И не создается ли в данном случае тот „математический гипноз для несведующих лиц", о котором, по другому поводу, говорит А. А. Марков в рецензии на „Очерки" [1])?

И дело, как мне представляется, ни в малейшей мере не выиграет от дальнейшей разработки учения о дисперсии в направлении большей конкретизации схем, большего их приближения к условиям статистической действительности. Пусть будут построены такие новые схемы, которые учтут и „частичное тождество" статистических масс и изменения „солидарно-действующих факторов" в различные моменты и для групп разной величины. Вполне возможно допустить, что при некоторой изобретательности удастся сконструировать любое количество схем, из которых каждая будет символизировать тот или другой тип явлений статистической действительности. Выиграет ли от этого дело? Едва ли, потому что произвольность применения, к данному случаю, той или другой схемы, или, точнее, той или другой комбинации схем, соответствующих разным перекрещивающимся в статистической действительной жизни комбинациям, не исчезнет, а усугубится. Математики утверждают, что „всегда возможно связать математическим законом (или даже бесчисленным множеством математических законов) последовательно появляющиеся числа, каковы бы ни были их количества и их неправильности", — так же точно, при известной степени изобретательности, всегда возможно будет связать облеченною в математические формы схемой (или — как я старался показать выше — бесчисленным множеством разнообразных схем) любые комбинации статистических коэффициентов, каковы бы ни были эти числа и какой бы комбинации жизненных условий они ни отвечали. Но еще Курно, в совершенном соответствии с условиями нашего мышления, указал на то, что лишь при известной степени простоты математического закона „нашему чувству в самом деле противоречило бы допустить, что случай сблизил числа именно с данным законом". Чем сложнее закон, тем легче допустить, что соответствующая ему последовательность чисел — просто результат случайности; тем легче допустить — по той именно простой причине, что тот или другой сложный математический закон можно подобрать для любой, даже совершенно произвольной и случайной комбинации чисел. Так и в нашем вопросе: лишь в том случае, если бы статистическая действительность легко и без двусмысленности укладывалась в те или другие простые схемы, — хотя бы в ту же схему нормальной дисперсии, нашему разуму противоречило бы допустить, что соответствие чисел данной схеме носит случайный характер, и для нашего разума было бы

[1]) Об основных положениях исчисл. вероятн. и т. д. Ж. М. Н. Пр. 1911, № 2, стр. 374.

обязательно заключать, что такое соответствие является об'ективным выражением некоторой реальной действительности. Чем сложнее схемы и чем меньше объективных придержек, чтобы решить, что данная комбинация чисел отвечает именно данной, а не другой схеме,—тем больше будет оставаться места сомнению, не является ли соответствие статистического результата той или другой схеме или комбинации схем доказательством не реальности чего-либо, соответствующего этой схеме или этой комбинации, а лишь остроумия и конструктивной способности построившего или применяющего схемы исследователя.

Этим, однако, не ограничиваются мои сомнения относительно роли исследования дисперсии в теоретической статистике. Они идут и еще гораздо дальше и затрагивают коренной вопрос о законности, в применении к статистической действительности, самого понятия нормальной дисперсии и характеризуемой таковою нормальной устойчивости.

Что такое, в самом деле, нормальная дисперсия по своей идее? Это такой тип рассеяния ряда, который свидетельствует о „нормально-случайном" характере колебаний статистических чисел,—иначе сказать, о том, что случайный характер колебаний этих последних не нарушается ни одною из тех форм зависимости, которые порождают поднормальную или сверхнормальную дисперсию. Что такое нормальная дисперсия в ее математическом выражении? Это такой характер статистического ряда, при котором имеется налицо условие $\sqrt{\frac{2\Sigma\delta^2}{z}} = \sqrt{\frac{2pq}{n}}$. Отвечает ли такая математическая формулировка идеи „нормальности" дисперсии ее существенному смыслу? Мне кажется, что нет. Я, именно, не вижу оснований, почему при решении вопроса о „нормальности" дисперсии и характеризуемой ею степени „устойчивости" статистического ряда, как показателя чисто-случайного характера отклонений—а в этом, ведь, существенный смысл нормальной дисперсии,—следует исходить вообще из формулы Бернулли-Лапласа. Существенный—еще раз—смысл „нормальной" дисперсии в том, что она характеризует чисто-случайный характер колебаний; и больше ничего. Но раз дано лишь одно это условие—из него вытекает только одно: что распределение отклонений „погрешностей" вокруг наивероятнейшей, „истинной" величины должно соответствовать Гауссову закону случайных ошибок,—что отклонения должны располагаться по Гауссовой „нормальной кривой". Но „нормальная кривая" по Гауссу и „нормальная дисперсия" по Лексису хотя часто и отождествляются или смешиваются это представления, совершенно не покрывающие друг друга. Соответ-

ствие известного ряда Гауссовой нормальной кривой—необходимое, но не достаточное условие для существования нормальной дисперсии. Чтобы эмпирические отклонения от наивероятнейшей величины, измеряемые выражением $\sqrt{\frac{2\Sigma\delta^2}{z}}$, с данною степенью вероятности P или $\Phi(\gamma)$, не выходили из пределов

$$\pm\gamma\sqrt{\frac{2pq}{n}}$$

нужно еще, чтобы данное явление отвечало той „схеме урн", в применении к которой выведена формула Бернулли-Лапласа. А схема урн предполагает отнюдь не одну только полную независимость отдельных случаев и вытекающую из нее совершенную случайность отклонений,—как это требуется для применения формулы Гаусса,—но еще и то, что можно охарактеризовать как индифферентность, или, если угодно, „единичность" отклонений. Что я разумею под этим термином, можно уяснить себе на любой из „игр, основанных на случае"; при опытах с шарами выходит или белый, или не белый; при бросании монеты—или орел, или не орел; при бросаниях кости—или пятерка, или не пятерка. Результаты испытаний во всех этих и других подобных случаях всегда могут быть выражены символами 0 или 1, словами—„да" или „нет", и получаемые из совокупности производимых испытаний отклонения представляют собой итоги, полученные путем механического счета единиц,—случаев наступления исследуемого простого события.

Понимаемая таким образом „индифферентность" или „единичность" отклонений имеется—повторяю—налицо при любой из „игр, основанных на случае", и является, очевидно, необходимою предпосылкой „схемы урн", а вместе с нею — и формулы Бернулли-Лапласа. Вне области игр, основанных на случае, она, даже и при безусловной независимости отдельных случаев и совершенной, значит, случайности отклонений, может встретиться разве лишь в виде исключения, и ни в каком случае не составляет общего правила. Возьмем даже ту область, которая ближе всего стоит к чистейшим схемам исчисления вероятностей—теорию погрешностей, получающихся при многократных измерениях одного об'екта: теория эта, занимаясь „случайными" ошибками, определенно предусматривает, что значения этих ошибок, будучи все более или менее незначительными, могут однако, быть различными [1]). Возьмем приложения исчисления вероятностей к кинетической теории газов,—в основе ее лежит гипотеза

[1]) См. Czuber, W.-R., 3-е издание, 1914, стр. 290.

принимаемых за безусловно-случайные движений газовых частиц, при чем не только нет основания, но даже нет возможности предполагать, чтобы все частицы двигались с одинаковыми скоростями и производили толчки одинаковой силы. Тем более в области явлений, изучаемых статистикой. Пусть даже та или другая категория этих явлений в достаточной мере отвечает требованию независимости отдельных случаев, а следовательно — случайности отклонений. Из этого совершенно не следует, чтобы эти последние в каждом отдельном случае должны были или могли рассматриваться как суммы нулей и единиц. Вполне случайные отклонения могут быть, а в статистической действительности и будут, в виде правила, отклонениями весьма различной величины. А между тем, стоит только представить себе, что отклонения получились в результате не подсчета нулей и единиц, а суммирования случайно распределившихся, с знаком + и с знаком —, чисел, положим, 1, 2, 3, 4..., — и случайные отклонения, продолжая подчиняться Гауссову закону случайных ошибок, далеко выйдут за пределы, указуемые формулой Бернулли-Лапласа и отвечающие полной совокупности характерных для „схемы урн" условий. Формула Гаусса и соответствующий ей Гауссов интеграл,

$$\varphi(\lambda) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} \quad \text{и} \quad \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon$$

в остальном вполне аналогичный Лапласовскому интегралу, считаются с этим обстоятельством: амплитуда случайных погрешностей, могущая ожидаться с заданною вероятностью, характеризуется здесь выражением $h^2\varepsilon^2$, в состав которого входит изменяющийся множитель—мера точности h, значение которого представляет собою равнодействующую всей совокупности значений фактически получившихся в данном конкретном случае погрешностей. Велика или мала эта амплитуда, — будет ли соответствующая „кривая погрешностей" сколь угодно отлога или сколь угодно крута, — распределение погрешностей останется нормальным, пока, оно, при любом данном h, характеризуется всеми теми свойствами, которые вытекают уже из элементарного анализа существа случайных погрешностей и которые находят себе точную формулировку в свойствах функции и интеграла Гаусса,—останется нормальным в том смысле, что будет свидетельствовать о независимости отдельных случаев и о полной случайности отклонений [1]). Возьмем в самом деле кон-

[1]) Не притязая на компетентность в области математического учения о вероятностях, я не мог, конечно, питать особой уверенности в правильности изложенных в тексте соображений, тем более, что они слишком далеко расходятся с твердо,

кретный пример — ошибки взвешивания. Отклонения отдельных взвешиваний от наиболее вероятной истинной величины—среднего веса, будут, на нечувствительных и вообще плохих весах, может быть, в 100 раз больше, чем на точных и чувствительных—дадут, может быть, в 100 раз большую среднюю квадратическую ошибку, распределение же погрешностей выразится совершенно различными кривыми.

Но если только плохие и нечувствительные весы не фальшивы, или на языке теории погрешностей—не дают „односторонней" погрешности, обе кривые будут одинаково нормальны: обе они будут соответствовать Гауссову закону, и только „мера точности" их будет различна.

Вот почему — теперь читателю ясно — мне было необходимо в предыдущей главе коснуться принципиальных основ теории погрешностей, хотя в дальнейшем мы имели дело исключительно с приложением теоремы Бернулли-Лапласа и с формулами Пуассона. Вот почему и Кетле был прав, распространяя на сферу статистических исследований закон нормальных погрешностей Гаусса и основывая применения исчисления вероятностей в статистике именно на нем, а не на теореме Бернулли-Лапласа: он был прав потому, что закон Гаусса гораздо шире, и потому гораздо лучше отвечает чрезвычайному разнообразию, в реальной жизни, силы случайных колебаний.

Вернемся теперь к нашей исходной точке. Нормальная дисперсия, по придаваемому ей существенному смыслу, есть такая, которая свидетельствует о независимости отдельных случаев, а следовательно о чисто-случайном характере колебаний. Но этому условию отвечает всякое распределение статистических чисел, раз оно будет отвечать закону Гаусса и укладываться в Гауссову кривую, совершенно независимо от того, каково будет h, и следовательно — какова будет амплитуда, а с ней и общая мера отклонений — будет ли она равна „модулю" формулы Бернулли-Лапласа, будет ли больше его или меньше. Пусть

повидимому, установившеюся практикой исследований дисперсии. Я, поэтому, сообщил эти соображения, в первоначальном их наброске, академику А. А. Маркову, на его компетентное заключение Цитирую—с его разрешения—несколько строк из одного из его ответных писем: „теория вероятностей—пишет А. А. Марков—занимается и такими суммами, которые разлагаются на слагаемые различной величины Для таких сумм можно считать нормальною формулу Лапласа, в которой размах колебаний от средней может быть каким угодно (курсивы здесь и в дальнейшем мои. А. К) В частном же случае, когда мы имеем дело с суммою из 0 и 1, соответствующей определенным образом результатам независимых испытаний с постоянною вероятностью, теория связывает размах колебаний с величиною вероятности. Итак связь эта, конечно, пропадает, если слагаемыми будут 0, 1, 2, 3."

она будет больше или меньше — пусть, значит, дисперсия, с точки зрения Лексисовой схемы, будет „сверхнормальною“ или „поднормальною“. Следует ли из этого, с необходимостью, что между единичными случаями существуют какие-то особые связи, нарушающие их независимость и отнимающие у отклонений их случайный характер,—что, следовательно, мы имеем дело не с элементарною или равносильною ей среднею вероятностью в собственном смысле, а с вероятностью, изменяющеюся от группы к группе, в соответствии с какой-либо из уже имеющихся в обороте или могущих быть предложенными схем? Конечно, нет: это следовало бы лишь в том случае, если бы можно было констатировать, или хотя бы предполагать, наличность той добавочной предпосылки „схемы урн“, которую я обозначил названием „индифферентности“ или „единичности“ отклонений. Так как наличность этой предпосылки в мире статистической действительности не только не доказана, но — во всяком случае для многих категорий явлений — неправдоподобна, то дисперсия, превышающая соответствующий „схеме урн“ уровень или, напротив, ее не достигающая, *может*, конечно, в той или другой мере обусловливаться переменною вероятностью того или другого типа, но *может иметь место и при неизменной, постоянной либо средней, вероятности случайных отклонений*.

А если это так, то приведенными соображеними подрывается уже не только значение измерений дисперсии для уяснений тех или других конкретных типов „устойчивости“ массовых явлений, но и *самое существо* — существенный смысл учения с дисперсии: измерения дисперсии оказываются *ненужными и непригодными* для выяснения „нормально-случайного“ или иного характера колебаний; иначе сказать—неспособными ответить, имеем ли мы дело *с одним общим комплексом постоянных причин* и с чисто лишь случайными отклонениями отдельных случаев или единиц от соответствующего ему наивероятнейшего вида, — или с *различными* комплексами постоянных причин, управляющих отдельными частными совокупностями внутри данной общей массы [1]).

---

[1]) С несколько большею подробностью эти критические соображения изложены в моей статье „К вопросу об измерениях дисперсии в теоретической статистики“ (Статист. Вестн., 1915—16 г.), кн. 1—2.

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ.

Измерения дисперсии в практике научного статистического анализа. Значение исчисления вероятностей для статистики.

Цели этой книги—чисто теоретические. Я, поэтому, совершенно не касаюсь вопроса о чисто прикладном значении как измерений дисперсии, так и вообще теории вероятностей—о значении их для таких отраслей деловой практики, как страхование, пенсионное дело и т. д., отсылая по этому вопросу читателя, пользующегося этой книгой в качестве руководства для ознакомления с теоретическими основами статистики, к моей книге „Теория и методы статистики“.[1]). Не входит в план этой книги и то, что я по, может-быть, и не совсем правильному, но, повидимому, довольно твердо установившемуся словоупотреблению, называю „математическою статистикой“—применение формул и приемов, предлагаемых исчислением вероятностей, или говоря общее — высшим математическим анализом, в практике статистического анализа—анализа конкретного статистического материала, на предмет выяснения проявляющихся в статистической действительности закономерностей и причинозависимостей. Я остановлюсь только на одной категории этих приемов, непосредственно связанной с измерениями дисперсии и в то же время наиболее непосредственно приводящей к общему вопросу о степени применимости приемов и формул исчисления вероятностей в практике научного статистического анализа: именно, на той совокупности способов выяснения случайного или, напротив, существенного характера наблюдаемых между статистическими коэффициентами различий, которую я, пользуясь термином А. А. Чупрова[2]), называю „дифференциальным методом“; совокупности приемов, общая принципиальная цель которых—каковы бы ни были конкретные вопросы, к разрешению которых привлекается данный метод,—сводится к ответу на вопрос: носят ли проявляющиеся между

[1]) Стр. 136—138.

[2]) Die Aufgaben etc., стр 469—470

эмпирическими статистическими числами различия чисто-случайный характер,—обусловливаются ли они, другими словами, исключительно вмешательством тех или других случайных причин, действующих на основе одного общего для сравниваемых статистических масс комплекса причин постоянного характера, или же они являются показателями существенных различий в тех постоянных причинах, которыми определяется вид изучаемого явления в двух или нескольких сравниваемых массах. Ряд погодных или, положим, погубернских цифр рождаемости, или смертности, или чего угодно другого, обнаруживает не слишком сильные колебания—спрашивается, что означают эти колебания? Дают ли они право заключать о существования каких-то присущих отдельным губерниям или проявлявшихся в отдельные года условий определенным образом отражавшихся на смертности, рождаемости и т. д.— или это, просто, случайные колебания, не дающие права ни на какие заключения относительно влияющих на то или другое явление существенных условий? При анализе причинных связей между какими угодно явлениями, проведенном методами количественной или качественной группировки (см. гл. 2, стр. 68—70), между получившимися групповыми относительными или средними величинами обнаружились, опять-таки, незначительные различия—дают ли они право заключить о наличности определенного влияния положенного в основу группировки фактора на явление или признак, нашедший себе выражение в цифрах зависимого ряда, или же они могут рассматриваться как чисто случайные колебания, и, следовательно, данный фактор—как индифферентный по отношению к данному—функциональному признаку? В обычной статистической практике такого рода вопросы разрешаются просто „на глазомер". В измерениях дисперсии ищут об'ективного критерия, помощью которого можно было бы на каждый вопрос подобного рода получить обязательный для каждого, свободный от всякой суб'ективности, ответ.

Принципиальная сущность дифференцианального метода достаточно ясно выражена, хотя и в самых лишь общих чертах, в уже цитировавшихся в другой связи словах Вестергорда: „большие отклонения от средней — говорит он — наводят на мысль о существенных (durchgreifende) причинах: если обнаруживается большая разница от средней, то является основание для предположения, что мы напали на след посторонних причин, тогда как большая правильность в цифрах указывает на наличность одинаковых причин". А. А. Чупров в своих „Очерках" (где, впрочем, он касается данного вопроса лишь более или менее мимоходом, отлагая, повидимому, более детальное и всестороннее его рассмотрение до 2-го тома) останавливается только на второй стороне формулированной Вестергордом альтернативы: „обнаруживая — говорит он — что, колебания изучаемого числа для ряда

групп с разными территориальными границами (губернии, департаменты и т. п.) не выходят за пределы нормальных, мы с убедительностью, трудно достижимою иным путем, доказываем независимость комплекса обстоятельств, влияющих на данное явление, от тех условий, которые меняются с переходом от одного района к другому. Равным образом, нормальный характер устойчивости для ряда групп, образованных по иному какому-нибудь признаку, обнаруживает независимость последнего от признака, положенного в основу группировки". Вообще, „в величине Q — полагает проф. Чупров — мы располагаем очень чутким критерием, пригодным для раскрытия даже крайне слабой связи между явлениями". Более обобщенную принципиальную характеристику „дифференциального метода" А. А. Чупров дает в своих „Aufgaben der Theorie der Statistik". Корень вопроса — об'ясняет он здесь — в том, что „одной вероятности могут отвечать различные частоты", и обратно — одной частоте могут отвечать разные вероятности; вообще в том, что частота, в силу действия тех или других случайных причин, может, в известных пределах, отклоняться от вероятности: „в этом причина, почему эмпирические частоты не могут быть непосредственно привлечены к решению вопроса, лежат ли в основе обоих сравниваемых масс те же общие причины. В качестве промежуточного звена в цепи заключений всегда должно выступить изучение вероятностей; лишь когда нам удастся доказать, что об'ективные вероятности в обоих случаях не одинаковы, мы можем утверждать, что и общие причины различны" [1]). Еще более отчетливую общую формулировку принципиального существа „дифференциального метода" мы находим в популярно-изложенной статье проф. А. В. Васильева „Законы случайного и математическая статистика": имея данныя массового наблюдения „мы можем выводить об'ективные вероятности и, пользуясь формулами теории вероятностей, при изменении отношения между числом повторений события и общим числом испытаний, судить о том, изменились ли главные причины, проявляющиеся в событии или же замеченное изменение упомянутого отношения не выходит из пределов изменения, допустимого самим характером случайного события, как зависящего не только от главных постоянных причин, но и от постоянно меняющихся случайных", — может ли, другими словами, рассматриваемое случайное событие „быть уподоблено „типическому случайному событию" [2]).

Если теперь подойти к вопросу уже не с принципиальной точки зрения, а с точки зрения приемов его разрешения, то эти приемы, собственно говоря, не что иное, как частные случаи третьей из тех перечисленных мною в самом начале гл. 7-ой (стр. 287—288)„ задач",

---

[1]) L. c., стр. 447.

[2]) „Вестник Европы", 1892 г., кн. 10, стр. 645.

которые разрешаются при помощи таблиц Лапласовского интеграла — задачи, которая формулируется так: „найти те крайние пределы отклонений l, до которых отклонения частоты от вероятности можно об'яснить влиянием случайных причин или, иначе сказать, до которых можно предполагать влияние одних только случайных причин, и за которыми такое допущение становится невозможным — „физически невозможным", и, следовательно, за которыми приходится предполагать различие или изменение в основной вероятности, другими словами, в том комплексе постоянных причин, который лежит в основе данного явления". Или конкретнее — математическою основою „дифференциального метода" служат те самые измерения дисперсии, на которых зиждется „критерий Лексиса" и базирующееся на нем учение об „устойчивости" статистических чисел. Однако, как я имел уже случай упоминать, собственно „дифференциальный метод" идет не от Лексиса, а непосредственно от Пуассона, который формулирует сущность соответственных приемов статистического анализа, как непосредственный вывод из закона больших чисел. Сущность этого закона сводится к обнаруживающемуся, в больших числах, приблизительному постоянству отношений. Исчисление вероятностей „дает правила для определения вероятности того, что значение, к которому конвергируют эти отношения, заключается в сколь угодно тесных пределах", а сопоставление разных серий наблюдений или испытаний, в случае значительности отклонений, позволяет заключать, „что причины, от которых зависят наблюденные события, испытали прогрессивное изменение (variation) или дали резкий перелом (changement) в промежутке между двумя сериями наблюдений". Без помощи исчисления вероятностей заключение о подобного рода постепенном или резком изменении причин легко может оказаться ошибочным. „Но исчисление вероятностей не оставляет в этом отношении никакой неопределенности и дает правила, необходимые для определения вероятности изменения в причинах, указуемых сравнением фактов, наблюденных в разные эпохи", или — что по существу вопроса то же — в разных местах, либо при различных условиях [1]). Говоря конкретнее: вычисляется, по особой формуле, предел разности между двумя частотами, какой можно ожидать при одной и той же основной, постоянной, либо средней вероятности, в результате действия одних только случайных причин; если наблюдение дает для этой разности „значения, существенно-уклоняющиеся за эти пределы, то будет основание, с весьма высокою степенью вероятности, заключать, что неизвестные вероятности явлений изменились в интервале между двумя сериями испытаний или даже во время этих испытаний" [2]).

[1]) Poisson. Recherches, стр 7–8.

[2]) Там же, стр. 228.

Пуассон же дал и основные формулы для решения вопроса о „случайном“ или „существенном характере“ отклонений и различий статистических коэффициентов,—именно формулы предельной величины разницы частот, т. е. того предела, за который разница, с определенною весьма высокою степенью вероятности, не выйдет, если в основе двух частот лежит одна и та же постоянная причина или один и тот же постоянный комплекс подверженных случайным изменениям причин: иначе говоря—одна и та же постоянная или переменная вероятность. Формулы эти Пуассон выводит отдельно для случая постоянной и для случая переменной вероятности, — но в конечном выводе для того и другого случая получается одна и та же формула (чем, замечу мимоходом, в значительной мере предвосхищается отчетливо формулированное Борткевичем положение о тождестве с точки зрения возможных математических построений, случая постоянной и средней вероятности „в собственном смысле“), а именно

$$\frac{m'}{s'} - \frac{m}{s} = u\sqrt{\frac{2(s^3 m' n' + s'^3 m n)}{s^3 s'^3}} \quad . \quad . \quad . \quad (A),$$

при чем вероятность того, что разность частот в самом деле не выйдет из этих пределов, выражается интегральною формулой

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-t^2} dt.$$

Так как — мы это знаем — для достаточно полной уверенности, выражаемой вероятностями $P = 0,995$ и $P = 0,99998$ нужно брать u ($= \gamma$) равным двум или трем, то значит, за предельную величину разности частот, допустимой при одной общей об'ективной вероятности, т. е. при данном, неизменном, комплексе общих или постоянных причин, выражение (A) нужно брать с коэффициентом 2, или более обычно, для обеспечения более высокой степени достоверности, с коэффициентом 3, — сам Пуассон доходит даже до требования $u = 4$. Если — говорит он — при $u = 3$ или 4, „наблюдение дает для $\frac{m'}{s'} - \frac{m}{s}$ или для $\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s}$ значения, существенно уклоняющиеся за эти пределы, то будет основание, с высокою степенью вероятности, заключать, что неизвестные вероятности явлений E и F изменились в интервале между двумя сериями испытаний или даже во время этих испытаний“ [1]) или, как поясняет Лексис: если даже основная вероятность для двух серий наблюдений та же, „то коэффициенты $\frac{m}{s}$ и $\frac{m'}{s'}$ вслед-

[1]) Recherches, стр. 224.

ствие случайных нарушений, могут обнаружить известные различия, и возникает вопрос, каковы предположительные границы этих различий". Если разница частот больше той, какая соответствовала бы Пуассоновской формуле, можно принять за достоверное, что в основе двух серий наблюдений лежат различные об'ективные вероятности. В обратном случае — нельзя прямо заключить, что в обоих сериях точно то же p. Наоборот, констатированная разница коэффициентов дает предположению двух разных значений p некоторый перевес над предположением строго постоянного p; именно, всегда есть вероятность половина за то, что разница двух p больше наблюденной разницы коэффициентов. Тем не менее, практически, следует делать вычисление по данной формуле — если действительная разница коэффициентов меньше, то „по крайней мере есть возможность, что в основе обоих рядов лежит то же p и при этом предположении можно оставаться, тем более, что разница между обоими p, во всяком случае, мала" [1]). Обращаю особое внимание на эту чрезвычайно осторожную формулировку смысла тех выводов, на какие дает право применение данной и однородных с нею формул: в дальнейшем мне придется к ней вернуться.

Так как нас — по самому заданию этой книги — интересуют не те или другие формулы или практические приемы, а только самый принцип приложения формул и приемов исчисления вероятностей к вопросу о случайном или, напротив, существенном характере различий между получаемыми из наблюдения статистическими коэффициентами, то я не буду останавливаться здесь на предлагаемых различными авторами разновидностях приведенной только-что формулы Пуассона, отсылая читателя для общего ознакомления с этими разновидностями к моей книге „Теория и методы статистики" [2]), главным же образом — к руководству исчисления вероятностей Czuber'a (т. II), к „Учебнику математической статистики" Р. М. Орженцкого к „Теории корреляции" Е. Е. Слуцкого и т. п. Повторяю — разновидности эти суть либо некоторые варианты формулы Пуассона, либо, просто, несколько иные способы ее выражения, — из них наиболее распространенный способ выражения

$$\pm\gamma\sqrt{M^2+M_1^2} \text{ или } \gamma\sqrt{2(\delta^2-\delta_1^2)},$$

где M и M_1, δ и δ_1 представляют собою те самые теоретические средние квадратические отклонения сопоставляемых коэффициентов, которые в оригинальной формуле Пуассона даны в развернутом виде и приведены к одному общему знаменателю. Остановлюсь только на отлич-

[1]) Lexis. Einleit in die Theorie der Bevölk — und Mor.- Stat., стр 104
[2]) Стр. 140 и след

ном по существу и гораздо более простом приеме, предлагаемом А. А. Чупровым в его Aufgaben der Theorie der Statistik, — приеме, который сам А. А. Чупров характеризует, как „отыскание границ отклонения частот от вероятностей", производимое без помощи какой-либо особой формулы. Сам А. А. Чупров признает, правда, Пуассоновскую формулу $\sqrt{M^2 + M_1^2}$ за „лучший" прием, как „оставляющую меньший простор влиянию случайных причин" [1]). В специальной литературе я не нашел, однако, указаний на то, чтобы этот прием был в каком-либо отношении неправилен и, напр., Czuber приводит прием А. А. Чупрова наряду с более строгими математическими приемами, ни одним словом или намеком не оттеняя его какой-либо — если можно так выразиться — второсортности и не отмечая каких-либо его недостатков. Со своей стороны я думаю, что при той приблизительности результатов, на какую — даже в лучшем случае — принципиально может притязать данный метод, степень точности приема А. А. Чупрова во всяком случае является достаточной. А если это так, то решающим в его пользу преимуществом является его сравнительная простота и — если можно так выразиться — логическая безыскусственность. Сущность приема Чупрова состоит в следующем: если даны две совокупности A и A_1 (при чем это могут быть и две самостоятельные массы, и целая масса, сопоставляемая с выделенною по какому-либо основанию частью), то предполагают, что в основе полученных для них коэффициентов лежит одна и та же основная или абстрактная вероятность p, которая находит себе приближенное выражение в их частотах $\frac{m}{s}$ и $\frac{m_1}{s_1}$. Если вычислить частоту для одной из них — положим $\frac{m}{s}$, то частота $\frac{m_1}{s_1}$, полученная из наблюдения для второй, должна, в таком случае, рассматриваться как случайное отклонение от приближенно-выразившейся в частоте $\frac{m}{s}$ абстрактной вероятности p, и обратно — частота $\frac{m}{s}$ должна рассматриваться как случайное же отклонение от той же абстрактной вероятности p в ее эмпирическом выражении $\frac{m_1}{s_1}$. Остается лишь решить, выходит ли эмпирически полученное отклонение той или другой из полученных частот от приближенного выражения, в другой, общей основной вероятности, за пределы, указуемые исчислением вероятностей для случайных ошибок или отклонений? Если не выходит, то мы имеем право предполагать, что разница между сопоставляемыми коэффициентами в самом деле случайна, что она не отражает никакого различия в

[1]) Tschuprow, Die Aufgaben etc, стр 447

основных вероятностях, а следовательно и никакого различия в лежащих в основе этих вероятностей причинных комплексах; если она выходит за эти пределы, — из этого заключают, что сопоставляемые частоты не могут быть рассматриваемы как приближенные выражения одной общей вероятности p, а являются выражениями двух разных основных вероятностей p и p_1, а, следовательно, и выражениями двух существенно разных комплексов причин. Самый способ решения вопроса о допустимом пределе случайных отклонений, предлагаемый Чупровым, чрезвычайно прост. Вычисляется для каждого из сопоставляемых коэффициентов модуль по формуле $\sqrt{\frac{2mn}{s^3}}$. Взятый с $\gamma = 3$ или, попросту, утроенный (в соответствии с требуемою Чупровым высокою степенью достоверности вывода) модуль, получившийся для частоты $\frac{m}{s}$, представляет собою тот предельный интервал, из которого не должна выйти вторая частота $\frac{m_1}{s_1}$, если она, в самом деле, лишь случайное отклонение от общей обоим сопоставляемым массам основной вероятности p, и подобным же образом утроенный модуль, вычисленный для частоты $\frac{m_1}{s_1}$, представляет собою предельный интервал случайных отклонений для частоты $\frac{m}{s}$. Значит, если вторая частота оказывается лежащей внутри этого предельного интервала, то разница между полученными из наблюдения коэффициентами может иметь случайный характер; если каждый из коэффициентов лежит вне вычисленных указанным простым способом пределов возможных, благодаря влиянию случая, отклонений другого, — то разница не случайна, а является показателем существенного различия в характере сравниваемых масс и в управляющих явлением, в том и другом случае, постоянных причинах. По данным австрийской статистики за 1878—1894 г.г. из 12.695.948 живорожденных было 6.533.961 мальчик, из 332.306 мертворожденных было 191.159 мужского пола, что дает частоту рождения мальчика 0,51465 для живорожденных и 0,57525 — для мертворожденных. Утроенный модуль для первой из этих частот получается 0,0006, для второй — 0,003727, — следовательно пределы интервала для случайных отклонений от приближенно-выраженной в первой из получившихся частот вероятности p будут 0,51525 и 0,51405, для случайных отклонений от вероятности, приближенно выраженной во второй из получившихся частот, они будут 0,578977 и 0,571523,— каждая из сопоставляемых частот лежит, значит, далеко вне пределов случайных отклонений от той основной вероятности, которая получила приближенное выражение в другой. Это „позволяет заключать

о различии в причинной обусловленности; вероятность рождения мальчика для мертворожденных выше, чем для живорожденных, что, впрочем, в данном случае могло быть вычитано и непосредственно из цифр" (Forcher), т. е. без каких-либо особых вычислений.

Как формула Пуассона в тех или других ее разновидностях, так и упрощенный прием А. А. Чупрова, одинаково, относятся к случаю, когда сравниваются коэффициенты, полученные для двух однородных, но независимых масс, или же коэффициенты, полученные для целой массы и для выделенной по какому-либо основанию ее части. Другая категория случаев — когда мы имеем ряд однородных чисел и хотим знать, носят ли колебания чисел этого ряда случайный характер, или же они свидетельствуют о каких-либо существенных различиях в характере данного явления и в управляющих им постоянных причинах, проявляющихся в пространстве или наступающих с течением времени. Вопрос может итти, например, о степени устойчивости ряда погодных или погубернских цифр смертности, рождаемости, распределения рождений по полу, преступности и т. п., а следовательно — о наличности управляющих им постоянных причин, действие которых в отдельных случаях нарушается лишь обстоятельствами случайного характера; в таком случае дело сводится к вычислению действительной дисперсии ряда в виде средней квадратической ошибки и к сравнению ее с вычисленною, для данной массы наблюдений и для данной эмпирической вероятности (частоты) интересующего нас события, теоретическою мерою отклонений модулем $\sqrt{\frac{2mn}{s^3}}$, „мерою точности" или вероятною ошибкой. Дальше поступают двояко. Либо делят первую величину на вторую; если полученное число Q оказывается близким к единице, из этого делается вывод, что изучаемое явление, действительно, управляется определенною совокупностью постоянных причин, со случайными лишь уклонениями; если Q получается значительно больше единицы, — из этого заключают, что отклонения отдельных цифр от средней имеют „существенный" характер, обусловливаются существенными различиями или изменениями в тех комплексах причин, которые управляют отдельными частями изучаемой социальной массы. Либо берут такую кратную вычисленного теоретического предела отклонений, которой соответствует достаточно близкая к достоверности вероятность существенного, не случайного характера выходящих за этот предел отклонений: двойную среднюю ошибку, которой соответствует вероятность 0,995, или чаще тройную, отвечающую вероятности 0,9999779; если вычислена *вероятная* ошибка, равная 0 4769 среднего отклонения, то ее берут упятеренною или ушестеренною. И опять-таки: если действительная колебле-

мость отдельных членов ряда не выходит из пределов, соответствующих утроенному или удвоенному модулю, упятеренной или ушестеренной вероятной ошибке, то решают, что данное явление управляется определенною совокупностью постоянных причин, со случайными лишь отклонениями; если она выходит за вычисленные пределы, решают, что отклонения обусловливаются существенными изменениями в управляющих данным явлением причинах—что, например, резкие различия в погодных коэффициентах смертности обусловливаются влиянием эпидемии, существенно различными условиями погоды, влиянием колебаний урожаев, хлебных цен, флюктуации промышленной кон'юнктуры и т. п.

Я не буду умножать здесь и примеров применения охарактеризованных только-что приемов решения вопроса о случайном или существенном характере различий между парами статистических коэффициентов или колебаний в числах статистических рядов, в частности в сфере социальной статистики,—некоторое небольшое число таких примеров читатель найдет в моей книге, „Теория и методы статистики", в работах Р. М. Орженцкого (в особенности в его небольшой монографии „Урожай ржи в Ярославской губернии"), в „Теории корреляции" Е. Е. Слуцкого и пр. Отмечу лишь, что одним из излюбленных—если можно так выразиться—направлений, в котором применяется, в сфере социальной статистики, „дифференциальный" метод, является критика достоверности статистических источников, как вообще, так и в частности в том случае, когда определенная категория явлений освещается данными различных статистических источников, и когда между показаниями этих источников обнаруживается более или менее (более или менее—это и требуется выяснить) существенное расхождение. К этой области вопросов целиком относится, например, только-что упомянутая работа Р. М. Орженцкого об „Урожае ржи в Ярославской губернии". Сюда же относится, затем, появившаяся в 1915 году работа Д. Н. Иванцова „К критике русской урожайной статистики", цель которой—выяснить степень достоверности данных об урожаях, доставляемых статистикой бывш. Центрального Статистического Комитета и Министерства Земледелия: или—как свою задачу формулирует сам автор—„сгруппировать некоторые материалы, позволяющие, если не ответить, то по крайней мере, уловить смысл вероятного ответа: заслуживают ли, и в какой мере заслуживают внимания, русские текущие данныя об урожаях": этот ответ Д. Н. Иванцов желает вывести из „степени единодушия отдельных источников в освещении основных сторон урожайной действительности", при чем в частности для установления степени единодушия источников в освещении статики изображаемых ими явлений „вычисляется процент разноречия между их средними" [1]) Конкретный вопрос, разрешаемый этим путем, сводится к тому: „можно ли на основании найденных показателей единодушия признать, что отдельные источники сообщают единодушные сведения, и что утилизировать их в качестве симптоматических"—т. е. независимо от степени точности даваемых источниками абсолютных чисел, „вполне мыслимо"; иначе говоря, сводится к выяснению одной лишь „общей родственности", а не абсолютной истинности урожайных данных. Технический прием—„оценка разноречий между средними за ряд лет" по формуле $\sqrt{M^2+M_1^2}$, которая берется с множителем 3 - по известной нам Пуассоновской формуле дифференциального метода [2]), наряду, впрочем, с при-

[1]) L. c., стр. 12-13.

[2]) Там же стр. 13 -15.

меняемою для оценки „единодушия в отражении динамики географии“ урожаев формулою коэффициента корреляции. В виде еще одного примера применения дифференциального метода в том же направлении критики источников можно привести еще попытку А. В. Чаянова применить этот метод—впрочем, в до последней степени упрощенном виде—к критике данных бюджетных исследований русского опросного или „экспедиционного“ типа. Как известно, достоверность и типичность, „репрезентативность“ этого рода данных возбуждает серьезнейшие сомнения, в обоснование которых выставляются, между прочим, слишком резкие колебания цифр бюджетных материалов. „Мера точности абсолютных цифр—резюмирует эту точку зрения А. В. Чаянов—признается недостаточною для научного изучения. Но именно эта-то сторона совершенно недостаточно анализирована в работах наших критиков“. Со своей стороны, А. В. Чаянов признает необходимым для каждой экономической проблемы „определить необходимую меру точности исследуемого материала и потом доказать, что количественное выражение наблюдаемого явления (нарастание или падение ряда) менее, чем мера точности собранного материала“. Если бы—утверждает А. В. Чаянов—критики эту работу проделали, „они увидели бы, что чрезвычайно большое число основных проблем может быть решаемо на современных бюджетах, так как количественное выражение анализируемых явлений во много раз превосходит их меру точности. Эту теоретическую меру точности Чаянов определяет по упрощенной формуле вероятной ошибки средней $0{,}6744 \frac{M}{\sqrt{n}}$, где M есть среднее квадратическое отклонение отдельного наблюдения, а n—число наблюдений. В конкретном примере разница в потреблении сахара между двумя уездами Вологодской губернии выражается, по бюджетным данным, 14,9 и 4,6 фунтами, между тем как вероятная ошибка средней всего 0,386 фунтов—следовательно, заключает отсюда А. В. Чаянов, „разница между потреблением в Вологодском и Вельском уездах не может объясняться неточностью метода“, а должна быть отнесена насчет разницы в тех основных условиях, от которых зависят размеры потребления сахара в том и в другом уезде [1])

Несколько ниже мне придется коснуться, между прочим, той полемики, которая возникла, по данному вопросу, между А. В. Чаяновым и С. А. Первушиным и которая привносит—как мне кажется—некоторые существенные моменты к вопросу о принципиальном значении данного метода определения „меры точности“ статистических источников. Сейчас же я отмечу только, что в ходу этой полемики А. В. Чаянов обратил внимание, между прочим, на одно существенное обстоятельство: именно, на то, что „главною причиной индивидуальных отклонений является вполне закономерное влияние различных факторов на отдельные хозяйства. При группировках по какому-либо из этих факторов, для каждой отдельной группы отпадают отклонения, обусловливаемые этим фактором, а потому и среднее квадратическое отклонение для хозяйств, объединенных в группу, значительно ниже, чем для всей совокупности хозяйств, вместе взятых“. И в самом деле на схематическом примере среднее квадратическое отклонение для всей совокупности получается 14,6%, тогда как для трех выделенных из нее по определенному признаку групп оно не превышает 10, 5 и 3,3% [2]).

Несравненно шире и—скажу сейчас же—плодотворнее, насколько я могу судить, применения рассматриваемого приема выяснения случайного или, напротив, существенного характера различий между статистическими коэффициентами в естественных и в частности в биологических науках. Я не могу задаться здесь

---

[1]) Вестн. Сельск. Хоз., 1912, № 48.

[2]) Там же, 1913, № 2.

целью дать сколько-нибудь систематический обзор применений этого приема в данной области—упомяну лишь о том, что прием этот входит, как интегральная составная часть, в основу того, чрезвычайно плодотворного метода статистико-биологического анализа, которому присвоено название вариационной статистики. Существенный смысл этого метода, взятого в целом, вытекает из того обстоятельства, что отсутствие у так называемых „биологических" видов или, говоря иначе, разновидностей, обнаруженных современною биологией внутри основных, „линнеевских" систематических видов, „заметных отличий морфологического характера... затрудняет различение их друг от друга", что различия между биологическими видами „сводятся к различиям средних величин, т. е. носят чисто относительный характер, так как колебания каждой особенности" у каждого из биологических видов „заходят" своими границами друг за друга", иначе говоря, что различия эти имеют не безусловный, а—как теперь принято выражаться—„трансгрессивный" характер. „Если наилучшим об'ективным критерием вида является морфологическая изоляция, наличность пробела между ним и близкими к нему видами, то для всех низших систематических единиц—подвидов, биологических видов, рас и пр., „характерно как-раз обратное—отсутствие этого пробела и наличность переходов; следовательно, для точного их диагноза нужен учет средних величин и специальные вариационно-статистические методы", которые „позволяют учесть и почти незаметные на глаз отличия в средних величинах известных особенностей, т. е. как-раз те, которыми более близкие друг другу формы и отличаются между собой". Сущность этих методов в том виде, как они введены в научный обиход, главным образом немецким биологом Гейнеке, сводится к изучению особей „с точки зрения не какого-либо одного, а целого ряда признаков". Основной принцип этого, так называемого, „метода комбинированных признаков", позволяющего „ставить диагноз и таких форм, которые не имеют совсем абсолютных различий, а лишь различия в средних величинах", заключается в том, что уклонение от средней для своей расы меньше, чем от средней для других видов или рас, и „сумма квадратов уклонений всех особенностей особи от средней величины каждой особенности, свойственной той расе или тому виду, которой принадлежит данная особь, будет всегда величиною наименьшею" [1]).

Здесь, конечно, не место входить в подробности относительно вариационно-статистического метода в его целом—нелишнее еще только отметить то обстоятельство, что количество долженствующих подвергаться вариационно-статистическому учету признаков вполне зависит от об'ема изучаемого материала: „для того, чтобы поставить диагноз расы по одному экземпляру, необходимо изучение многих свойств, чтобы определить расу по нескольким экземплярам, требуется изучить уже немного особенностей, а для определения расы по очень многим особям достаточно одного признака" [2]). Непосредственное отношение к занимающему нас в настоящей главе вопросу имеет лишь тот прием, который применяется для разрешения вопроса: действительно ли отличаются друг от друга, действительно ли являются биологическими видами или самостоятельными расами, те биологические разновидности, для которых констатированы известные различия в тех или других их средних признаках,—прием, необходимость которого вытекает из того уже отмеченного обстоятельства, что такого рода различия „имеют не абсолютное, а только

---

[1]) См. Филипченко Биологич. виды хермесов и их статистическое различение (Зоолог. Вестн., т I, 1916); его же. Изменчивость и наследственность черепа у млекопитающих (Архив анатомии, гистологии и пр, т. I, вып. 2, 1916, стр. 263-4, 275).

[2]) Там же, стр. 272.

относительное значение, так как ряды индексов одного вида всегда несколько переходят границу и смешиваются с индивидами другого вида" [1]). Этот прием—типичный дифференциальный метод в той самой, по существу, форме, которая идет непосредственно от Пуассона: выводятся, прежде всего, среднее значения изучаемого признака для обоих сопоставляемых биологических разновидностей, M_1 и M_2. Затем для той и другой средней выводится ее средняя ошибка $m = \frac{\delta}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma p a^2}{n}} : \sqrt{n} = \sqrt{\frac{\Sigma p a^2}{n}}$, где p—число членов каждого класса, a—уклонения от средней, n—число сделанных измерений или наблюденных экземпляров; затем вычисляются величины m_1 и m_2—иначе сказать, пределы случайных отклонений для каждой из сопоставляемых разновидностей, средняя ошибка разности между данными двумя средними M_1 и M_2 и предельная величина могущей проистечь из одних только случайных отклонений разности между полученными средними—$M_1 - M_2 \pm \sqrt{m_1^2 + m_2^2}$. Если „сравнение разности средних величин с ее среднею ошибкой показывает, что она во всех случаях превосходит свою среднюю ошибку в несколько раз", то это „с несомненностью говорит за то, что различия в средних величинах здесь действительные, а не только кажущиеся [2]); что, другими словами, „мы имеем дело с действительными различиями между сравниваемыми видами" [3]). Как я уже сказал, в области вариационной статистики данный прием приводит, в самом деле, к превосходным результатам. Они выражаются и в том, что получаемая для отдельных экземпляров „сумма квадратов уклонений всегда меньше по отношению к средним того вида, к которому в действительности принадлежит данный экземпляр", и в результатах проверки по музейному материалу: на основании достаточного числа промеров и вычисленных по этим промерам индексов (отношений между промерами) исследователь „мог всегда без труда сказать, имеет ли он дело", например, с черепом того или другого биологического вида, „при чем этот диагноз вполне согласовался с этикеткой черепа" [4]).

Судя по такого рода результатам, в сфере явлений, изучаемых биологическими науками, в самом деле имеются налицо условия, при которых применение „дифференциального метода" представляется законным и рациональным. Решительные сторонники этого метода придают ему, однако, несомненно более универсальное значение, признавая применение его обязательным при в с я к о м статистическом анализе каузального характера. В силу того хорошо известного нам обстоятельства, что „одной вероятности могут отвечать различные частоты", и наоборот, „эмпирические частоты,—полагают они,—не могут быть непосредственно привлечены к решению вопроса, лежат ли в основе обоих сравниваемых статистических масс те же общие причины. В качестве промежуточного звена в цепи заключений в с е г д а (курс. мой. А. К.) должно выступить изучение вероятностей: лишь когда нам удастся показать, что об'ективные вероятности в обоих случаях не одинаковы",—а это и достигается помощью диффе-

[1]) Стр. 341.

[2]) Ф и л и п ч е н к о Биол. виды хермесов и т. д., стр. 270

[3]) О н ж е. Изменчивость и наследственность и т. д., стр. 343.

[4]) Там же, стр. 344

ренциального метода—„мы можем утверждать, что и общие причины различны“ [1]). Таково вполне категорическое мнение А. А. Чупрова. Не менее категорически решает вопрос проф. А. В. Васильев: в его понимании самое существо статистического метода „заключается в том, чтобы из наблюдений над массами явлений вывести известные числовые постоянные, характеризующие данный социальный организм и, пользуясь вспомогательными формулами теории вероятностей (курс. мой. А. К), отличить, при изменении этих числовых данных, те, которые происходят от причин случайных, от тех, которые указывают на изменения в строе самого организма“ [2]).

Со своей стороны, я не только не могу стать на точку зрения такого рода обязательности пользования дифференциальным методом (на практике впрочем, кажется, не проводимую никем из самых решительных принципиальных его сторонников), но не могу отказаться от серьезнейших принципиальных сомнений по поводу значения „дифференциального метода“, в частности в тех условиях, с какими приходится иметь дело в социальной статистике. Как было, совершенно правильно, подмечено еще Курно, результаты применения приемов данного рода будут вполне убедительными только тогда, когда дело и без того ясно. Курно ставит себе, именно, вопрос, может ли выходящая за указываемые Пуассоновскими формулами разница частот носить случайный характер? Абстрактно рассуждая—может, потому что, при расчленении по очень многим признакам, какой-нибудь из них может случайно дать резко разные коэффициенты. Только если такое расхождение коэффициентов получается в случае, где мы имеем основание предполагать разницу в постоянных причинах, „было бы a priori крайне невероятно, чтобы те расчленения, на которые случай повлиял особенно сильно, были как-раз те, где мы предполагали, что найденная разница происходит от действительного изменения вероятностей“. Если для такого предположения оснований нет, мы можем допустить случайный характер отклонения—и только в случае появления такой же разницы при новых рядах наблюдений“—прием, замечу здесь же, принципиально отличный от „дифференциального метода“, как такового, пришлось бы допустить действительную разницу вероятностей,—пришлось бы допустить потому, что „было бы странно и невероятно, что случай два или более раз кряду обусловил заметную разницу при том же расчленении“ [3]). Если—в самом деле—обратиться хотя бы к тем примерам применения „дифференциального метода“, которые приведены в моей книге „Теория и методы стати-

---

[1]) Tschuprow. Die Aufgaben etc, стр. 447.

[2]) Вестн. Евр., 1892, № 10, стр., 650.

[3]) Cournot, W.—R., стр. 155—157.

стики", то без применения каких-либо формул понятно, что такие различия в уровне смертности, как 21 и 31 на тысячу, или различия в коэффициентах, полученных для такого чрезвычайно устойчивого явления, как процент мужских рождений, выражающиеся в цифрах 0,51 и 0,57, имеют существенное значение—не даром Czuber, приведя первую из этих двух пар коэффициентов, сейчас же, до каких-либо вычислений, подчеркивает, что они „значительно отличаются друг от друга". Равным образом, никому не придет в голову считать случайною разницу в приведенных выше коэффициентах мужских рождений у живорожденных и мертворожденных,—не даром, опять-таки, Forcher подчеркивает, что вывод, получившийся путем применения „дифференциального метода", „мог бы быть вычитан и непосредственно из цифр". Если же вывод, полученный из сопоставления действительного различия между коэффициентами или действительной колеблемости ряда с теоретически-допустимыми не является простым подтверждением того, что „может быть вычитано непосредственно из цифр", он далеко не всегда может притязать на безусловное значение. Такой убежденный, но все же сохранивший некоторую осторожность в своих оценках, сторонник применения теории вероятностей в практике научного статистического анализа, как Udny Yule, рекомендует, однако, своим читателям „помнить, что, если полученная из наблюдения разница выходит за пределы случайных колебаний (в смысле теории вероятностей! А. К.), из этого не следует, что она выходит за пределы колебаний, проистекающих от таких обстоятельств, которые практик, вполне правильно, будет считать случайными". Он советует, далее, „помнить, что, если средняя ошибка мала, из этого нимало не следует, что результат наверно достоверен: малый размер средней ошибки показывает лишь, что в результате нет недостоверности, вытекающей из случайностей отбора; но результат может быть совершенно ненадежным по другим основаниям—например, благодаря одностороннему подбору случаев, или ошибкам в классификации материала. С другой стороны—продолжает Yule—надлежит иметь в виду, что в случае большой средней ошибки полученный из наблюдения коэффициент не непременно неверен, но лишь в большей или меньшей мере ненадежен". Равным образом, если разница между полученными из наблюдения коэффициентами и не выходит за вычисленные пределы и даже значительно меньше их, „из этого не следует, что истинный коэффициент для данных масс, достаточно вероятно, одинаков"; напротив—коэффициенты, „весьма вероятно, не равны,—средняя ошибка только предостерегает нас, что это заключение более или менее ненадежно", и что истинное значение коэффициентов, может быть, даже противоположно полученному

из наблюдения. В соответствии с этим и сам Yule, получив для взятого из области естествознания примера разницу коэффициентов, далеко не достигающую теоретически допустимого предела случайных отклонений, отказывается признать за этим результатом решающее значение, так как имеет „другие указания“ на существенный характер констатированных различий. Тем более в сфере социальной статистики. Исследователь не имеет права успокоиться на том, что отклонения членов ряда или разница между двумя сравниваемыми коэффициентами не выходят из вычисленных теоретических границ случайных отклонений; если отклонения имеют систематический характер, если притом они допускают правдоподобное об'яснение (то и другое условно—как мы видели—подчеркнуто, между прочим, у Курно), вообще соответствуют конкретной обстановке изучаемого явления, он должен будет считаться с ними и признать их за существенные, а не за случайные. Он должен будет, между прочим, иметь в виду и то отмечаемое Е. Е. Слуцким [1]) обстоятельство, что формулы, дающие теоретическую меру случайных отклонений, как формулы, в основе которых лежит мера нормальной дисперсии, действительны лишь при полной независимости явлений. Если имеется налицо зависимость, то решающее значение можно придавать лишь такой разнице, которая чрезвычайно сильно превосходит теоретический размер случайных отклонений. Но „чрезвычайно сильно“ выходящая за теоретические пределы, иначе сказать „чрезвычайно значительная“ разница, будет, очевидно, уловлена и признана решающею, имеющею „существенный“ характер без всяких вычислений. Между тем, решить вопрос о „зависимости“ или „независимости“ в социальной статистике чрезвычайно трудно, и об'ективных оснований для этого часто нет. И наоборот: если различия в коэффициентах больше, чем следовало ожидать по формулам, рассчитанным на случайный характер отклонений, статистик не сможет сделать из этого никаких существенных заключений, если эти различия сами по себе незначительны, если они не подтверждаются другими данными или не имеют систематического характера, а главное—если их нельзя связать с какими-либо общими соображениями или аргументацией элементарно статистического характера. Наконец, еще одно, весьма существенное обстоятельство, удачно подчеркиваемое С. А. Первушиным в его отмеченной выше полемике с А. В. Чаяновым по поводу „меры точности“ бюджетных данных. Первушин справедливо подчеркивает именно, что формулы пределов случайных отклонений „вовсе не доказывают, что истинная средняя“ есть некоторая величина, лежащая внутри этих пределов; они „лишь доказывают, что вероятное уклонение от средней, поскольку оно

[1]) Теория корреляции, стр. 100—107.

обусловливается случайными ошибками наблюдения или вообще случайными обстоятельствами, не превышает" теоретически-вычисленного предела. „Но, ведь, тут дело идет—замечает С. А. Первушин—не о „случайных" ошибках" [1]). Или говоря иначе—из того, что отклонение выходит за пределы, вычисленные в предположении чисто случайных уклонений отдельных случаев или единиц, либо чисто-случайных ошибок наблюдения,—еще отнюдь не следует, чтобы это отклонение свидетельствовало о различии в основных вероятностях или, что то же, в управляющих явлением постоянных причинах: есть еще третий, вполне возможный, в социальной же статистике чрезвычайно распространенный источник значительных отклонений—грубая неточность статистического материала, наличность в нем тех или других односторонне-действующих, источников „постоянных погрешностей". И С. А. Первушин совершенно прав, когда, заключая свою полемику с А. В. Чаяновым, подчеркивает полное отсутствие основания останавливаться на вычислениях меры точности „теперь, когда подлежит сомнению еще самая грубая достоверность (правдоподобность) абсолютных цифр" [2]).

Итак, еще раз: фактические различия или колебания, не достигающие теоретических пределов, отнюдь не дают еще права заключать о несущественном характере различий в полученных из наблюдений статистических коэффициентах. И наоборот, различия, выходящие из теоретических пределов случайных отклонений, сами по себе далеко не всегда достаточны, чтобы привести статистика к определенным заключениям каузального характера. Пусть в самом деле доказано, что разница долей мужских рождений, выражающихся для Парижа дробью 0,51026, для Лондона—0,51353, выходит за теоретически-допустимые пределы случайных отклонений—из столь ничтожной разницы статистик едва ли сможет сделать какие-либо существенные выводы, с какой бы то ни было стороны освещающие существо данного явления. Или возьмем приведенные в „Теории и методах статистики" примеры анализа данных об урожайности, заимствованные из работы Р. М. Орженцкого об урожаях ржи в Ярославской губернии. Мы имеем здесь, во-1-х, две серии погодных цифр урожайности, относящихся к двум периодам—одному более раннему и другому более позднему, и, во-2-х, данные о среднем урожае по местному обследованию и по данным текущей статистики. В первом случае действительная разница получается более чем втрое больше вычисленной в предположении чисто случайного характера отклоне-

[1]) Первушин. Из области методологии бюджетн. исследований Вестн. Сельск. Хозяйства, 1912, № 48.

[2]) Он же. Мера точности бюджетн. данных. Вестн. Сел. Хоз. 1913 г (цитирую по оттиску).

ний,—„отсюда можно заключить, что разница средних... имеет существенный характер и обусловливается различием в способе собирания материала или какими-либо другими причинами". Во втором случае действительная разница оказывается значительно меньше вычисленной в том же предположении—значит, „средний урожай для всего уезда по данным местного обследования отличается от среднего результата по показаниям старост на величину случайную". Тот и другой вывод вполне приемлем и не вызывает возражений. Но почему? Потому что оба вывода вполне соответствуют тому, к чему мы пришли бы и без формул исчисления вероятностей: мы лишь потому принимаем получающееся путем применения „дифференциального метода" заключение относительно существенного характера разницы в 0,35 между средними цифрами урожайности в два различных периода, что знаем, как медленно, вообще, растет урожайность; и наоборот — мы лишь потому соглашаемся признать „случайною" разницу в 0,4 между средними из поуездных цифр урожайности по двум источникам, что знаем малую степень точности сведений, получаемых как из того, так и из другого источника, знаем, что ошибки наблюдения легко могут породить и такую, и еще более существенную разницу в показаниях двух источников, и что поэтому такая разница в цифрах отнюдь не доказывает еще разницы в действительной урожайности.

Как я имел случай подчеркивать в моей книге „Теория и методы статистики", изложенные соображения вполне согласуются даже с результатами теоретических исследований самого Лексиса и виднейшего из его последователей—Борткевича.

На первый взгляд такое утверждение не легко согласовать с уже цитированным мнением Лексиса, что в случае нормальной дисперсии „нет надобности стараться привести отдельные отклонения необычайной величины в связь с какими-либо особыми обстоятельствами"; иначе сказать—что при общем размере отклонений, не превышающем теоретически вычисленного предела, нет основания предполагать существенного изменения в общих условиях данного явления. Я, однако, там же подчеркнул то существенное ограничение, которое привносит Лексис к формулированному им положению своею оговоркой, что измерение дисперсии может приводить к решительным заключениям лишь при отсутствии „бросающихся в глаза внешних нарушений". Это оговорка сразу переносит центр тяжести анализа с математической обработки цифр на конкретное исследование обстановки данного явления: пусть дисперсия будет нормальна,— статистик не перестанет считаться с „бросающимися в глаза внешними нарушениями"; и наоборот, сверхнормальная—с точки зрения закона случайных ошибок—дисперсия не приведет к заключениям каузального харак-

тера, если колебания цифр могут быть сведены к погрешностям статистического наблюдения, главное же—если исследователю не удастся связать их с какими-либо конкретными „внешними нарушениями". К аналогичным заключениям приводят и исследования Борткевича относительно характера дисперсии при элементарной и при средней вероятности „в собственном смысле". Констатирование нормальной дисперсии, может быть, решало бы вопрос, если бы было установлено, что нормальная дисперсия возможна лишь при элементарной, иначе сказать, постоянной вероятности, т. е. при неизменности управляющего данным явлением комплекса причин. Между тем Борткевичем—как мы видели—выяснено, что являющаяся равнодействующею изменяющихся вероятностей средняя вероятность в собственном смысле тоже характеризуется нормальною дисперсиею, если только слагающие ее различные элементарные вероятности не приурочены к резко отграниченным друг от друга частям изучаемой массы, или если не имеют места те особые, формулированные выше условия, при наличности которых получается сверхнормальная дисперсия,—откуда следует, что „из наличности нормальной дисперсии нельзя сделать вывода, что данному статистическому отношению соответствует элементарная вероятность". При наличности нормальной дисперсии общая вероятность может быть среднею вероятностью, составившеюся из весьма различных по величине слагаемых, которым будут соответствовать различные комплексы причин, управляющих частными совокупностями. А потому направленное к разысканию таких частных совокупностей расчленение изучаемой массы „не утрачивает своего интереса от одного только того обстоятельства, что являющаяся исходным пунктом анализа средняя вероятность высшего порядка в своих эмпирических значениях обнаруживает нормальную дисперсию" (Борткевич): общая дисперсия известного статистического ряда, или частный ее случай – разница между двумя статистическими коэффициентами, могут не выходить из „нормального" уровня,– это нисколько не мешает тому, что в основе характеризующих отдельные частные массы статистических коэффициентов могут лежат различные частные вероятности, а статистический интерес именно и заключается в уловлении существенных различий в частных вероятностях, свидетельствующих о существенных различиях в управляющих данным явлением, в частных массах или совокупностях, постоянных причинах. Иначе сказать: величина фактической дисперсии может не выходить из пределов теоретической дисперсии,—

иначе говоря, из нормы, соответствующей данному составу исследуемой совокупности, но самый этот состав может быть сложным, и в таком случае частные вероятности, лежащие в основе частных совокупностей, могут быть различны, и изучение именно этих то частных вероятностей остается центром статистического интереса, не взирая на нормальный уровень общей дисперсии.

Эти последние соображения были затронуты в моей книге „Теория и методы статистики" скорее в виде намека или, во всяком случае, в самом общем, не достаточно определенном виде. Более полное обоснование их, очевидно, связывается с изложенными в предыдущей главе соображениями относительно общего теоретического значения измерений дисперсии. Мы видели в самом деле, что, в зависимости от характера каждого данного массового явления, самая мера теоретической дисперсии—сам масштаб, с которым мы должны сопоставлять полученные из наблюдения отклонения от предполагаемой „истинной" величины, может быть весьма различен. И вот отсюда вытекает главное и едва ли устранимое—во всяком случае в области социальной статистики—затруднение при применении „дифференциального метода": трудность приискания соответствующего конкретным условиям каждого данного случая масштаба [1]). Сущность этого затруднения вполне отчетливо выражена уже у Криса: „если даже—говорит Крис—принимать какие либо общие условия неизменными (dauernd bestehend), то для того, чтобы удовлетворительным образом установить вероятность общего результата ряда будущих наблюдений, прежде всего необходимо знать, не следует ли ожидать для подобного рода рядов сверхнормальной дисперсии. Чрезвычайно часто даже небольшого размышления достаточно, чтобы сказать нам, что вероятность (die Chancen) подвержена случайным вариациям, затрогивающим в одном и том же направлении eine Anzahl zusammengehöriger Fälle—некоторое число связанных между собою случаев. А при таких условиях упомянутые числа будут неверны даже и в том случае, если предположить, что общие условия, которые возможно мыслить постоянными, в самом деле сохраняют постоянство". Как известно, Борткевич далеко не целиком принимает соображения Криса [2]), направленные

[1]) Считаю научным долгом отметить, что первая мысль излагаемых в дальнейшем соображений была высказана, в беседе на данную тему, моею ученицею и сотрудницею по преподаванию, Т. Л. Якобсон, общению с которой я вообще очень многим обязан в этой книге.

[2]) При таких условиях ссылка на авторитет Криса, которую делает Е. Е. Слуцкий в уже многократно цитированной рецензии на „Теорию и методы статистики", ставя мне на вид, что именно „дифференциальный метод" „обсуждался названным автором под наименованием untersuchende Methode, пользование которою им было признано допустимым при исследовании массовых явлений человеческого общежи-

против применений исчисления вероятностей, и в частности против широкого применения измерений дисперсии в сфере статистически изучаемых явлений. Он, напротив, настаивает на том, что „теория располагает способами считаться (Rücksicht nehmen) при исследованиях устойчивости статистических рядов с недостатком независимости отдельных случаев" и вносить соответственные поправки. Но и он вынужден признать, что это „неосуществимо при сравнении двух значений статистического коэффициента, относительно которых ставится вопрос: может ли разность между ними быть об'яснена влиянием случайных причин. Потому что в этом случае может быть применен л и ш ь о д и н (курс. автора) из методов определения меры точности, и надо отдать себе отчет в том, что при этом определенные соотношения (Verhaltungsweisen) солидарно действующих факторов, если таковые имеются налицо (im Spiel sind) иногда будут относимы к общим условиям; неизбежность такого понимания,—констатирует Борткевич,—конечно, надо признать за зло, (Uebelstand), и приходится согласится с Крисом в том, что фактически измерения дисперсии в социальной статистике, благодаря очень большой распространенности солидарности единичных случаев в этой области, утрачивают значительную часть своей ценности и интереса" [1]). И в самом деле: мы никогда не можем заранее знать, и з к а к о г о у р о в н я д и с п е р с и и мы должны исходить при вычислении об'яснимой из влияния случайных причин разницы между частотами. Конечно, нормальная дисперсия, поскольку она вытекала бы из постоянства основной вероятности, совершенно неправдоподобна. Не слишком правдоподобна и нормальная дисперсия, вытекающая из „средней вероятности в собственном смысле этого слова", предполагающей чисто-случайный, от случая к случаю, характер колебаний основной вероятности и, значит, совершенное отсутствие солидарно-действующих факторов. Участие этих последних будет общим правилом, особенно в области социальной статистики,—общим правилом будет, следовательно, на-

---

тия, притом даже в значительном об'еме (in erheblichem Umfange)", едва ли может быть признана убедительною. (Стат. Вестн. 1915—16 г., кн. 3—4, стр. 114—115). При всем уважении к авторитету Криса, я думаю, что он только впал здесь в некоторое противоречие с самим собой и в частности с цитированными в тексте соображениями, когда все таки рекомендует применение измерений дисперсии в качестве untersuchende Methode. А затем—как я ни старался вчитаться в соответственные две страницы Криса, я так и не мог составить себе ясного понятия о том, какой вес Крис придает получаемым этим методом выводам. Во всяком случае ясно одно: что он не придает им в какой либо мере решающего значения. Впрочем, мы сейчас увидим, что такого значения не придает им, в сущности, и сам Слуцкий, который видит в применении „дифференциального метода", скорее всего, нечто вроде „гимнастики ума" для развития все того же статистического глазомера.

[1]) Krit. Betracht. II очерк, стр. 332.

личность фактора, порождающего сверхнормальную дисперсию. Но *какова сила* действия этого фактора,—будет ли, значит, дисперсия *в большей или в меньшей* мере сверхнормальною, об этом мы не знаем решительно ничего. Мало того: мы не знаем, не парализуется ли, и если да, то в какой мере, повышающее дисперсию влияние солидарно-действующих факторов влиянием тех, способных понижать ее, факторов, о которых упоминалось в предыдущей главе. Между тем, такая возможность тоже не исключена; не исключена настолько, что влияние факторов этой последней категории может, даже и при наличности той или другой степени солидарности отдельных случаев, породить нормальную или близкую к нормальной дисперсию. Предположим теперь, что в основу вычисления положены—как обычно делается—формулы, соответствующие *нормальному* уровню дисперсии; мы, очевидно, подвергаемся большому риску признать наличность изменения в основных причинах там, где разница между сопоставляемыми коэффициентами всецело может быть отнесена на счет *случайных причин*, солидарно-действующих, на отдельные частные совокупности *внутри обоих сравниваемых масс*, и порождаемой ими, соответствующей существу данного явления, *сверхнормальной* дисперсии. И наоборот: если мы в основу вычисления положим взятую—очевидно более или менее наугад—формулу, соответствующую той или другой степени сверхнормальности дисперсии, то мы подвергнемся двоякому риску: либо—если мы слишком низко оценили свойственный данному явлению уровень сверхнормальности дисперсии—впасть в такую же ошибку, как и в предыдущем случае, либо—если мы ее переоценили, и если действительный уровень дисперсии, в силу каких-либо сплетений обстоятельств, близок к нормальному или слабо-сверхнормален, отнести на счет случайных колебаний частных вероятностей такие различия статистических коэффициентов, которые на самом деле проистекают из существенных изменений основных, для той и другой массы, вероятностей.

При таком положении вещей мне—даже и независимо от соображений более принципиального характера—кажется совершенно невозможным согласиться с мнением А. А. Чупрова, будто в измерениях дисперсии „мы располагаем очень чутким критерием, пригодным для уловления даже крайне слабой связи между явлениями“. Я сомневаюсь даже в возможности согласиться с гораздо более осторожным заключением, к которому приходит М. В. Птуха в результате, впрочем, соображений, относящихся уже не к выбору масштаба, а к невозможности с какою-либо степенью уверенности рассчитывать на неизменность общих условий: „роль теории вероятностей,—говорит г. Птуха,—должна, как мне представляется, ограничиваться, в этом случае, главным образом, констатированием чисто качественного раз-

личия, принадлежит ли данная причина к общим условиям или же она может быть отнесена к числу случайных“ [1]). В виду едва ли могущей подлежать оспариванию крайней неопределенности того масштаба, с которым приходится подходить к разрешению рассматриваемой задачи, даже и такого рода „качественные“ заключения все-таки, во многих случаях, будут более чем рискованными: достаточно ошибиться, в ту или другую сторону, при выборе соответствующего нормальной, или, напротив, сверхнормальной дисперсии масштаба,— и разница между статистическими коэффициентами из случайной сделается существенною или, наоборот,—из существенной обратится в случайную. Едва ли можно согласиться и с тою даже максимально осторожною точкой зрения, на которую становится Е. Е. Слуцкий, защищая „дифференциальный метод“ против высказанных мною в „Теории и методах статистики“ соображений. Применение данного метода - полагает Слуцкий—дает нам „возможность составить себе представление, по крайней мере, о порядке вероятности правильности суждения о том, можно ли об'яснить наблюдаемую разницу чистою случайностью, или же нужно для нее искать оснований в каких-либо трудно уловимых причинах, способствовавших“—в конкретном примере—„в одном уезде большему обезлошадению, чем в другом, или получению нами недостаточно точных цифр относительно численности безлошадных. А. А. Кауфман—продолжает мой критик—прав, что для того, чтобы сделать подобного рода заключение, не всегда нужно определять численную величину подлежащих вероятностей (отмечаю сделанную Слуцким решительную уступку по сравнению с категорическим требованием применения данного приема, как оно формулировано у А. А. Чупрова или у А. В. Васильева!),—но он упускает из виду, что статистики на практике весьма часто грешат совершенно безосновательными решающими выводами из недостаточных данных, чему можно было бы найти примеров без конца и в нашей земской статистике. Против таких произвольных выводов—полагает Слуцкий—и ради систематической тренировки пишущим эти строки“, и следовало бы несравненно чаще, нежели это делается теперь, применять прием вычисления вероятностей, или прикидки на счет порядка ее величины, путем вычисления средних квадратичных, модулей, вероятных ошибок и т. п. мер вероятных отклонений“ [2]). Повторяю—и с этою, идущей, можно сказать, на последние уступки, точкой зрения мне кажется трудным согласиться. Ссылка на ошибки, конечно, не убедительна: с поспешными и ошибочными заключениями мы встречаемся при любой методологической постановке любого рода исследований, и потому даже очень много-

[1]) Птуха, Очерки по статист. насел. и мор, стр. 119.
[2]) Статист. Вестн., 1915—16 г., кн. 3—4. стр. 114.

численные ошибки отдельных исследователей еще не доказывают принципиальной негодности того или другого метода. А поскольку ошибки действительно делаются—можно ли с какою-либо степенью уверенности рассчитывать на то, что они будут предотвращены применением приема, который в самом существе своем таит источник сколь угодно неверных выводов? Можно ли рассчитывать, что практика применения такого, чреватого какими угодно возможностями, приема может способствовать тренировке „чутья цифры"? Я думаю, напротив, что привычка полагаться на формулу может скорее способствовать угашению этого чутья. Можно ли ожидать от этого приема достоверных заключений даже „в порядке вероятности", когда, в зависимости от ошибки в выборе масштаба, фактически сверхнормальная дисперсия может оказаться поднормальною и наоборот?

Всех этих соображений, мне кажется, более чем достаточно, чтобы подкрепить выше изложенное заключение, выведенное из соображений более общего характера: именно, что к бесспорным выводам применение „дифференциального метода" сможет привести разве лишь в тех случаях явно резких или наоборот—явно ничтожных различий между статистическими коэффициентами,—когда их существенный или наоборот, случайный характер ясен сам собой, в тех случаях притом, когда характер этих различий стоит в соответствии с теми статистическими или вне статистическими соображениями, которые дают нам основание предполагать наличность, в данном случае, или отсутствие существенных различий; в тех, словом, случаях, когда существенный или, напротив, несущественный характер этих различий будет ясен и помимо каких бы то ни было специальных вычислений.

Что же, спрашивается, остается от „дифференциального метода", если ко всему сказанному прибавить приведенные выше соображения Udny Yule'я? В частности, если вспомнить его совет „помнить, что если средняя ошибка мала, то из этого нимало не следует, что результат наверно достоверен: малый размер ошибки доказывает лишь, что в результате нет недостоверности, вытекающей из случайностей отбора: но результат может быть ненадежным по другим основаниям—например, благодаря одностороннему подбору случаев или ошибкам в классификации материала"; или учесть еще более категорическое указание Poincaré, который, с полною решительностью, признает вычисление теоретической „ошибки" безусловно незаконным, так как мы абсолютно не можем знать, устранена ли возможность систематических ошибок, которая может быть очень значительна и при очень малой теоретической ошибке, т. е. при ничтожной роли погрешностей случайного характера [1]). Или в

[1]) Poincare, Reflexions sur la théorie des probabil. (Revue générale des sciences pures et appliquées, 1899, № 7)

переводе на язык статистики: при очень малых случайных отклонениях, могут быть односторонне-действующие причины, отклоняющие данное явление, в целом или в отдельных частях, от вида, отвечающего действию известных нам постоянных причин,—и роль тех случайных отклонений, которые только и учитываются измерениями дисперсии, может оказаться совершенно ничтожною, когда вопрос, сплошь и рядом, идет о расхождениях цифр, вытекающих из самой „грубой недостоверности" или „неправдоподобности" данных или из явно одностороннего их подбора. „Среди тех факторов,—говорит Борткевич—которые вызывают отклонения, действие случайных и притом изолированно-действующих причин", т. е. именно тех, которые только и учитываются при измерениях дисперсии. „играет столь малую роль—fällt so wenig ins Gewicht, что влияние его, согласно требованиям методики, должно быть игнорируемо; должно быть игнорируемо потому, что та недостоверность результата, которая проистекает от других, более важных факторов, не поддается численному определению. К статистике, погрешающей против этого методологического правила, подходило бы приписываемое Тьеру изречение: „la statistique est l'art de préciser ce qu'on ignore"—статистика есть искусство точно выражать то, чего мы не знаем" [1]).

— —

Как я уже говорил в начале этой главы, я не имею в виду останавливаться здесь на других приемах того, что—правильно или нет—называют математическою статистикой, т. е. на других случаях и формах применения методов и приемов высшего математического анализа и в частности—исчисления вероятностей в практике статистической работы; не буду, в частности, касаться и лично меня очень интересующего вопроса о значении корреляционных вычислений, отсылая читателя собственно по этому последнему вопросу к недавно напечатанным моим статьям по вопросу о значении корреляционных вычислений и к разгоревшейся по поводу них полемике. Как вопрос о корреляции, так и вся вообще совокупность приемов и методов „математической статистики" не стоят в непосредственной связи с чисто-теоретическим заданием настоящей книги, а ее и без того уже слишком разросшийся размер заставляет отказаться от включения в

[1]) Kritische Betracht., 2-ой оч., стр. 355—356. Цитированные соображения приведены „в оправдание того, что в страховом деле, при определении прибавок на риск", руководствуются не основанными на теории вероятностей вычислениями, а „произвольными прикидками". Ясно, однако, что соображения эти в полной мере относятся и к практике научного статистического анализа.

нее всего, что не стоит с ним в непосредственной связи. Я коснусь поэтому только общего, принципиального вопроса о роли и значении для статистики приемов и методов исчисления вероятностей и вообще—высшего математического анализа.

Общий принцип, из которого следует исходить при разрешении вопроса о пределах приложимости исчисления вероятностей к области статистического анализа, формулирован академиком А. А. Марковым в следующих словах: „прежде, чем применять ту или другую формулу и делать из нее различные выводы, необходимо выяснить условия ее существования и убедиться, можно ли считать их выполненными в тех случаях, когда мы желаем применить формулу". Условия эти – независимость испытаний, постоянство вероятности и равновозможность. Между тем „применяются эти формулы—как констатирует А. А. Марков—в таких случаях, где о выполнении этих условий едва ли можно говорить". Как далеко идет в этом отношении А. А. Марков, в данном случае выражающий, сколько мне известно, общий взгляд, господствующий среди теоретиков исчисления вероятностей, видно из примера, иллюстрирующего формулированное только-что положение. Этот пример—основанная на таблицах смертности вероятность лицу данного возраста прожить определенное время. Пример этот относится к той области статистики, где законность применений исчисления вероятностей признается наиболее твердо установленною. И тем не менее А. А. Марков и здесь приходит к отрицательному заключению: „признавая—говорит он—пользу таблиц смертности для практических целей, мы считаем невозможным доказывать законность их применения ссылками на формулы исчисления вероятностей."

Среди сторонников того, что я—несмотря на сделанное мне по этому поводу проф. Орженцким возражение [1])—считаю возможным называть „математическим направлением" в статистике,—направления, сущность которого я вижу во взгляде на приемы исчисления вероятностей и вообще высшего математического анализа, как на имманентную составную часть статистического метода, мы встречаемся с самыми разнообразными оттенками, начиная от крайне осторожного отношения к вопросу и кончая полным его игнорированием. В качестве примера первого можно привести хотя бы Udny Yule'я. Он определенно подчеркивает, что условия равновозможности, независимости и постоянства „очень сильно ограничивают область практических случаев экономического или социологического характера", к которым формулы, основанные на законе случайных отклонений, могли бы применяться без существенных изменений. Эти формулы—продолжает Yule, „повидимому оправдываются с значительною степенью приближения в некоторых биологических случаях, в особенности при изу-

[1]) Статист. Вестн. 1914—15, кн. 4, стр. 98.

чении распределения разнотипного потомства при скрещивании гибридов, а также, с некоторыми ограничениями, на распределении рождений по полу". Формулы „нормального распределения" приложимы и к некоторым другим явлениям, относящимся к естественно-исторической характеристике человека. Это потому, что такие явления как рост и т. п.—явления „чрезвычайно сложного характера"; в частности рост „зависит от размеров костей головы, позвоночника, ног, толщины промежуточных сухожилий и т. п., причем все эти элементы независимы, по крайней мере, до известной степени, т. е. никоим образом не находятся в полном соотношении (корреляции) между собой и потому не обнаруживают сколько-нибудь высокой степени асимметрии того же знака Сравнительная редкость нормального распределения в экономической статистике—продолжает Yule—отчасти обусловлена, вероятно, тем фактом, что в большинстве случаев, при значительной, конечно, сложности полной причинной обусловленности, решительно преобладающее влияние имеют относительно немногие причины (отсюда и часто обнаруживающееся в этой области неправильное распределение), отчасти же и высокою степенью асимметрии в распределении элементов, от которых зависит сложная переменная величина".

Гораздо категоричнее в принципе, хотя и не менее осторожно в практическом его применении, высказываются, например, Bowley или Forcher. Первый отмечает „большую трудность, какую изучающий экономику встречает, когда он имеет дело с теориею погрешностей", именно „кажущуюся слабость связи между этою теориею и явлениями, с которыми он имеет дело. Эта слабость, однако,—полагает Bowley—только кажущаяся: мы лишь потому не достигаем точного соответствия (между теориею и действительностью), какого желали бы, что теория не развита еще настолько, чтобы приспособить ее к чрезвычайно сложным явлениям человеческой деятельности. В действительности можно ожидать, что теоретическое распределение погрешностей лежит в основе всех явлений, точь в точь как сила притяжения и тяготения лежит в основе действия всякого механизма". Придавая теории погрешностей, в принципе, безусловное значение, Bowley, таким образом признает ее для настоящего времени все же недостаточно развитою для широкого пользования ею в области экономики,—практически, значит, не расходится с Yul'ем. Совершенно так же смотрит крайний сторонник применения математического анализа в статистике, Forcher,—причем, однако, он имеет в виду, непосредственно, не столько формулы исчисления вероятностей, сколько всю совокупность приемов математического анализа, в основе которых лежит понятие непрерывной функции. Он признает область применения этих приемов „необыкновенно широкою". Это „только кажется,—говорит он в рецензии на немецкое издание моего курса,—что жизнь,

и в частности социальная жизнь, протекает не в виде непрерывных функций,—в действительности она развертывается в виде именно такого рода функций". Мы только „еще не видим промежуточных звеньев, мы еще не достаточно навострили для этого наше духовное зрение". Но пока существует такое положение дел, пределы применения приемов математического анализа представляются самому Forcher'у весьма узкими: такому анализу подлежат такие „состояния или свойства масс", как напр., возрастное строение человеческого общества, рост, об'ем груди, вес, продолжительность жизни",—такие „явления человеческой жизни", как „последовательное вымирание человеческой массы, наступление инвалидности и т. д.". В соответствии с этим Forcher определенно констатирует, что основанные на применении математического анализа приемы „получили свободное развитие и применение только в области измерения смертности". Сам он делает, правда, попытку применения формул измерения дисперсии также и к данным уголовной статистики,—но эта попытка приводит лишь к „общему впечатлению", от которого он „не может отгородиться" (dem man sich nicht verschliessen kann), что „мы и здесь имеем дело с массовыми явлениями, которые, с известными ограничениями, подчиняются схеме исчисления вероятностей".

Обратным образом можно охарактеризовать отношение к вопросу Вестергорда: в принципе он ставит вопрос, напротив, очень осторожно и, так сказать, ограничительно—практически он довольно сильно отступает от такого принципиально-осторожного отношения: „едва ли нужно подчеркивать—говорит он—что, в согласии с определением понятия вероятности, понятие это может быть законно применяемо лишь тогда, когда, по данным опыта, числа колеблются около одного устойчивого (fest) значения. Если этого нет, то о вероятности не может быть и речи". Практически—как я сказал—Вестергорд значительно расширяет сферу приложения „понятия вероятности": путем соответственной обработки материала, в частности путем расчленения его на однородные группы, он считает возможным, и даже очень часто, достигнуть того, что „закон случайных погрешностей становится в самом деле применимым",—и в своих собственных работах Вестергорд, действительно, очень широко пользуется вытекающими из него формулами и приемами.

В среде русских сторонников „математического направления"—в соответствии с общеизвестными особенностями русского национального характера, склонного к восприятию каждого течения в самых его крайних формах, преобладает более нежели решительное отношение к рассматриваемому вопросу, переходящее в совершенное игнорирование всех возникающих здесь сомнений и затруднений. Так, для проф. А. В. Васильева статистический метод „основывается на теории вероятностей. Его техника, руководимая теорией вероятностей, выра-

батывается постепенно в особую ветвь знания—в особую науку, математическую статистику“ [1]). В частности, область общественных явлений—„запутанных явлений общественной жизни, настолько сложна, что здесь приложение математики представляется нам трудно осуществимым“, но это положение надо понимать лишь в том смысле, что „громадная сложность общественных явлений делает трудно применимым к изучению этих явлений дедуктивно-математический метод“. Именно это обстоятельство, вместе с невозможностью опыта, „делает особенно драгоценным статистический метод“—но „вместе с этим методом делается необходимою и отрасль математики—математическая статистика, как строгий страж точности полученных результатов“ [2]). Самая цель социальной статистики, „говоря языком теории вероятностей, в том, чтобы охарактеризовать общественный организм возможно большим числом об'ективных вероятностей и путем сравнения различных социальных организмов вывести численные связи, существующие между об'ективными вероятностями различных явлений“ [3]). Самый метод социальной статистики „заключается, по А. В. Васильеву, в том, чтобы из наблюдений над массами явлений вывести известные числовые постоянные, характеризующие данный социальный организм и, пользуясь вспомогательными формулами теории вероятностей, отличить при изменении этих числовых данных те, которые происходят из причин случайных от тех, которые указывают на изменения в строе самого организма... Только опираясь на указания теории вероятностей (курсив мой. А. К.)—заключает А. В. Васильев—и основанной на ней математической статистики, социальная статистика может не делать тех ошибок, которых не лишена ее история“ [4]). Ни о каких сомнениях или затруднениях по поводу применимости теории вероятностей, хотя бы даже только в сфере социальной статистики, проф. А. В. Васильев даже не упоминает. Совершенно чужды такого рода сомнениям, например, Р. М. Орженцкий или, ревностный пропагандист методов математической статистики в среде естествоиспытателей, проф. А. В. Леонтович. Так Р. М. Орженцкий исходит из того положения, что „если мы имеем совокупность достаточно большого числа случаев появления тех или других событий, и в условиях наступления событий нам неизвестны обстоятельства, которые противоречили бы допущениям теории вероятностей, мы можем гипотетически принять, что условия совокупности соответствуют априорным допущениям теории. Отсюда мы получаем возможность найти a posteriori, на основании общего

[1]) Васильев. Законы случайного и математ. статистика. Вестн. Евр. 1892, кн. 10, стр. 644.

[2]) Стр. 648.

[3]) Там-же.

[4]) Стр. 650.

результата всех наблюдений, наиболее вероятное выражение вероятности, лежащей в основе совокупности наблюденных случаев", а затем, „исходя из полученной величины вероятности, мы можем проверить, насколько основанные на ней теоретические рассчеты совпадают с действительными соотношениями". Или, как подчеркивает проф. Орженцкий в другом месте: „доказать, что в той или иной конкретной совокупности имеются налицо требуемые теорией условия независимости и пр., представляется вообще мало осуществимым; в этом отношении мы принуждены довольствоваться гипотетическим допущением, что такие условия существуют, если этой гипотезе не противоречат какие-либо известные нам факты, а результаты наблюдения ее подтверждают". Проф. Леонтович, полемизируя со мной по поводу моих соображений, касающихся значения корреляционных вычислений, упоминает о развиваемых мною—в общем ходе рассуждений по этому специальному вопросу, „принципиальных сомнениях" по поводу применимости и значения для статистики формул и приемов исчисления вероятностей, не иначе как в кавычках. Для него не подлежит сомнению, что теория вероятностей и приемы статистико-математического анализа, в основе которых лежат формулы, основанные на законе случайных погрешностей „и может, и должна сделаться ходячим орудием статистической работы"; что „новые методы", под которыми он разумеет именно методы теории вероятностей, быть может „кое в чем и плохи, но, к сожалению, они единственно рационально-возможные" (курс. мой А. К.) [1]). Как у самого А. В. Леонтовича, так и у некоторых других русских статистиков-биологов, применение приемов, предлагаемых математическою статистикой, и притом непременно самых сложных и тонких, вроде Пирсоновских сложных кривых, ставится как нечто самодовлеющее, независимое от могущих получиться результатов. Приведу в виде примера, известного ботаника, проф. А. Я. Гордягина. Он констатирует, что Пирсоновские кривые лучше описывают данные распределения, чем нормальная кривая. Отсюда—необходимость пользования ими, „и я не вижу, говорит А Я. Гордягин, почему в этом отношении биологам должны быть предоставлены особые льготы; напротив—и биологами статистический метод, где это необходимо по ходу работы, должен быть применяем в наиболее утонченной форме, хотя бы сам по себе этот метод и не был в состоянии, по выражению Клебса, ничему научить нас относительно природы наших об'ектов (курс. мой А. К.). Поэтому—продолжает проф. Гордягин—я не совсем понимаю то предостережение против методики Пирсона, которое делает де-Фриз.... и очень боюсь, что среди

---

[1]) Стат. Вестн., 1914—15, кн. 4, стр. 93.

биологов оно может дать результаты не очень желательные: биологи и без того склонны обходиться при помощи наиболее простых приемов, чему примером может служить", ни более ни менее, как классическая, „превосходная в разных отношениях, работа Іоганнсена" [1]). И настаивая, таким образом, на непременном применении именно сложнейших из приемов математической статистики—„методики Пирсона", проф. Гордягин не игнорирует того факта, что „если полученная из наблюдения кривая относится к числу комплексных, то вычисление теоретических величин может привести к результатам абсурдным", тогда как „наоборот, наилучшего согласования между теорией и наблюдениями можно ожидать при простой кривой, когда вариации данного признака зависят только от случайных сочетаний внешних условий". Он знает, что опасность абсурдных выводов была бы устранена в том лишь случае, „если бы математический анализ мог всегда обнаружить комплексный характер одновершинных кривых, чего нет на самом деле"; что поэтому „исследователи биометрической школы убеждаются в однородности материала посредством особых приемов" [2]). Однако, в той специальной работе, из которой заимствована эта цитата, проф. Гордягин обходится без подобного рода приемов: хотя для его материала и существовало предположение некоторой неоднородности материала,—но „если бы это было верно, то надо было бы ожидать получения двувершинных или уступчатых кривых... и неудовлетворительных результатов от вычисления теоретических величин. Этого однако нет—а потому, заключает проф. Гордягин, и без применения особых способов для определения однородности материала" он „считает вероятным", что его материал представляет собою чистую расу, как того требует биологическая методика Іоганнсена [3]). Не совсем понятным образом, безусловное доверие к результатам вычисления теоретических величин мирится с пониманием того, что в известных, притом неуловимых для математики случаях, такого рода вычисление может привести к „абсурдным" результатам.

Значит, еще раз: и среди сторонников применения формул и приемов исчисления вероятностей в сфере того, что я, в некотором условном смысле, называю „общею статистикой", т. е. в сфере конкретных статистических исследований в области социальных явлений, равно как и в других областях применения статистического метода [4]),

---

[1]) Гордягин, Биометр. исслед. над Chrysanth. sibir. Тр. Общ. естествоиспытат. при Казан. ун-те, т. XL, вып. 5, стр. VI—VII.

[2]) Там же, стр. 24.

[3]) Стр 26—27.

[4]) Е. Е. Слуцкий возражает против—как я решительно подчеркиваю—употребляемого мною „в некотором условном смысле" термина „общая статистика". „Ведь общая статистика—говорит он—явным образом представляет собою весьма сборную группу проблем, лишенную всякой внутренней связи.—Между тем—возражает

вопрос о степени и пределах принципиальной его допустимости разрешается весьма различно. Лично я склонен присоединиться к тем из математиков (А. А. Марков) и к тем из теоретиков учения о вероятностях, которые разрешают данный вопрос в наиболее ограничительном смысле. „Если—говорит один из наиболее глубокомысленных теоретиков исчисления вероятностей, Kries, из изменений, обнаруживающихся в числах какого либо явления человеческого общежития, желают делать заключения относительно изменений в известных общих условиях, наше право на такого рода заключения, вообще говоря, не подлежит сомнению. Но если желают приписать (vindizieren) такому заключению выразимую в числах меру достоверности и точности,—это является уже предприятием, которое требует, прежде всего, точного выяснения того, что именно следует разуметь под этими общими условиями; а между тем, стоит только попытаться выяснить это, как такого рода выяснение оказывается неосуществимым“ (курс. мой. А. К.). Единственная оговорка, какую я бы сделал к этому категорическому заключению,—это, что для некоторого, весьма ограниченного (как признают принципиально, например, Yule, фактически—Bowley и Forcher) круга простейших явлений статистики населения, не говоря уже о несравненно более обширной сфере приложений статистического, метода и в частности приемов математической статистики, в области естествознания, включая изучение человека как естественно-исторической разновидности, наличность предпосылок теории вероятностей может считаться установленною апостериорным путем, и применение, собственно в этих областях, методов и формул исчисления вероятностей уже не вызывает принципиальных сомнений.

Затем, для всей остальной, весьма широкой области „общей статистики“, или, если угодно, „общей социальной статистики“, принципиальный вопрос о нашем праве оперировать приемами исчисления вероятностей остается, во всяком случае, открытым. Но если этот вопрос остается для меня открытым; если я даже сомневаюсь

Слуцкий—если только теория вероятностей может быть применима к анализу действительности, то границы и условия ее применимости могут зависеть не от конкретных свойств совокупностей, а от их формальных свойств, с одной стороны, и от свойств задач, решения которых ищутся, с другой“ (L. c. стр. 112—113). Должен сказать, я не вижу здесь никакого возражения мне. „общая статистика“ в том „некотором условном смысле“, в каком я употребляю этот термин—это для меня вовсе не комплекс статистических совокупностей, определяемый их конкретными свойствами, а все то подавляющее большинство явлений социальной действительности, которое не удовлетворяет „формальным“ предпосылкам теории вероятностей—тем посылкам, которые имеют место в тех немногих явлениях социальной статистики, более или менее исключительно стоящих на границе между этою последнею и статистикою биологическою, где применение исчисления вероятностей не вызывает никаких или вызывает наименьшие сомнения.

в практической целесообразности и принципиальной допустимости—во всяком случае—в очень обширных областях статистической действительности приемов и формул исчисления вероятностей, и в частности, и основанного на них дифференциального метода, то—спрашивается—не вынимаю ли я, тем самым, почву из-под всякого вообще статистического умозаключения—в частности из-под всякого умозаключения каузального характера? Ведь Борткевич совершенно прав, когда в статье своей, посвященной выяснению роли Лексиса в теории статистики народонаселения и моральной, настаивает на невозможности последовательного проведения взгляда, отрицающего значение понятий теории вероятностей для статистики; когда подчеркивает, что в вопросе о числе наблюдений, в вопросе о выборочном методе бессознательно оперируют понятиями исчисления вероятностей [1]). Как мы частью видели, и как я ближе раз'ясню сейчас, можно и даже должно идти и еще дальше в том же направлении и настаивать на том, что принцип вероятности лежит в основе всякой статистически - констатированной закономерности в сосуществовании или последовательности, всякой статистически-уловленной причинной зависимости. Ибо, если отрешиться от этого принципа, то из каких бы то ни было числовых соотношений нельзя будет сделать никакого вывода, как нельзя, и вообще, будет сделать научного вывода из каких бы то ни было установленных наблюдением фактов, потому что без принципа вероятности любая совокупность фактов может быть случайна, а любая случайность возможна [2]).

Но противоречия тут нет. Ведь тот же Крис—мы видели—признает обоснование применения исчисления вероятностей в статистике невозможным,—и тем не менее он, всецело стоя на началах теории вероятностей, считает наше право на каузальные заключения от обнаруживающихся в статистических числах различий стоящим вне каких-либо сомнений.

И здесь, повторяю, нет противоречия. Подвергать сомнению применимость формул и приемов исчисления вероятностей—не значит отвергать значение принципа вероятности: первые могут оказаться годными или нет, могут быть признаны годными в одних случаях и негодными в других, второй—во всяком случае остается лежащим в основе всякого статистического заключения. Аналогии сказанному можно найти в любой области чистого и прикладного знания. Из законов механики можно с точностью вычислить движение светила, полет гранаты или пули,

---

[1]) Bortkiewicz. Die Theorię der Bev.-u. Mor.—Stat. nach Lexis. Jahrb. f. N.—Oek. u. Stat., III. F., Bd. XXVII (1904), стр. 252.

[2]) Poincaré, l. c., стр. 279—281.

конструкцию железного моста и т. п.; но нельзя вычислить колебательных движений брошенного сверху листа бумаги, падения выброшенной из окна кошки, движения камня, катящегося с горы, конструкции скотного двора из неотесанных камней или навеса из плохого жердняка. Мы, однако, доподлинно знаем, что законы механики совершенно одинаково лежат в основе как первой, так и второй серии явлений. Мы знаем, что камень будет катиться вниз, а ни в каком случае не вверх; мало того—знаем, что движение это будет, в общем, постепенно ускоряться, что оно будет быстрее на крутых, медленнее на пологих участках склона, что камень еще и по ровному месту, по инерции, прокатится на то или другое расстояние. Мы не менее достоверно знаем, что известным образом наложенные друг на друга глыбы камня или сложенные известным образом жерди не разлетятся во все стороны и не рассыплются без определенной причины; мало того—знаем, что стена должна быть внизу толще, чем вверху, что вниз надо класть более крупные, вверх—более мелкие глыбы, знаем и множество других вещей, для которых не можем и не имеем надобности пользоваться формулами теоретической механики, но которые являются несомненным выводом из тех или других ее законов. Материал, с которым оперирует статистический метод, в частности — в громадном большинстве областей социальной статистики, может быть уподоблен неотесанным глыбам и корявым жердям. По самому свойству этого материала статистический анализ, как правило, не допускает, а по грубости, но вместе с тем и сложности основываемых на этом материале построений, не требует применения формул исчисления вероятностей,—но это ни мало не мешает тому, что каждое из этих построений всецело покоится на принципе вероятности.

Или пользуясь терминологией Курно: как и во всяком индуктивном умозаключении и во всяком заключении по аналогии, так и в статистическом умозаключении мы имеем дело не с математическою, а с тем, что Курно противопоставил ей под названием „философской вероятности“. Именно такая „философская вероятность“ лежит, в самом деле, в основе всякого статистического умозаключения и всех без исключения приемов статистического метода; философская вероятность в той ее форме, которую комментатор Курно, Mentré, удачно характеризует следующими словами: „математики — говорит он — доказывают, что всегда можно связать математическим законом (или даже бесчисленным множеством математических законов) последовательно появляющиеся числа, каковы бы ни были их число и их неправильности“. Чем сложнее такие законы, тем менее правдоподобно, что их последовательность—не

действие случая. „Но если закон прост"; или, в интересующем нас случае,—если статистические ряды обнаруживают более или менее явную правильность, то „нашему чувству противоречило бы—il nous répugne, допустить, чтобы случай сблизил именно эти числа. Если последующие наблюдения вариаций той же величины дают другие значения, подчиненные тому же закону, вероятность его, очевидно, растет с числом новых наблюдений и может стать такова, что в этом отношении у здравого ума не останется никакого сомнения". Повторяю: философская вероятность в этой форме, сущность которой, может быть, если угодно, сведена к идеям „физической невозможности" и „нравственной достоверности", лежит в основе всякого статистического умозаключения и всего вообще статистического метода. Что это так—это нетрудно проследить на любом из известных нам типов статистического умозаключения—как тех, где мы, просто, констатируем известные постоянства или правильности в изменениях и различиях, так и тех, которыми устанавливается существование причинных связей и зависимостей причинного характера. Годичная рождаемость, распределение самоубийств по полу, душевое потребление спирта или соли в течение ряда лет выражаются в приблизительно тождественных цифрах,—совершенно невероятно, чтобы такое правильное повторение цифр было результатом простой случайности,—столь же невероятно, как двадцатикратное извлечение, под ряд, буквы *A* из мешка со всеми буквами алфавита, или туза и двойки червей из хорошо перетасованной колоды в 52 карты. Значит, в постоянстве чисел статистического ряда мы должны видеть ясное доказательство того, что в этих цифрах находит себе выражение некоторая постоянно-действующая причина. Далее: смертность, преступность, размеры производства или экспорта, душевое потребление тех или иных продуктов представляют собой непрерывно возрастающие или, напротив, убывающие цифровые ряды. Опять-таки, совершенно неправдоподобно, чтобы такое непрерывное наростание или убывание чисел было делом случайности; также неправдоподобно, как если бы мы, при игре в лото, случайно вынули из урны непрерывно возрастающий или убывающий ряд чисел, положим, 2—5—6—7—9—12—13—15—17 или обратно. Значит, нам опять ничего не остается, как видеть в растущем или убывающем характере ряда прямое указание на наличность постоянно-действующих причин, обусловливающих наростание или убыль. Еще гораздо менее правдоподобно случайное совпадение в случае ясно выраженного параллелизма либо антагонизма двух или нескольких рядов сгруппированных по одинаковому основанию чисел,—смертности и урожаев, преступности и хлебных цен, брачности и банкротств, того и другого—с размерами производства чугуна. Параллельное наростание либо убывание, параллельную

периодичность двух рядов так же невозможно об'яснить случайностью, как нельзя об'яснить случайностью одновременное извлечение параллельно наростающих, убывающих или колеблющихся нумеров из двух мешков с лотерейными билетами,—вероятность того и другого столь бесконечно мала, что практически мы можем не считаться с нею, и параллельное наростание или вообще параллельные колебания цифр мы с полною практическою достоверностью можем принять за доказательство наличности причинной связи между двумя сопоставленными статистическими рядами, — чем, конечно, отнюдь не предрешается вопрос о характере этой причинной связи: явление *A* может быть причиной *B*, или наоборот—первое может быть следствием второго, они могут находиться в отношениях взаимной обусловленности, наконец могут быть оба следствиями одной и той же, вне их лежащей причины. Наконец, и в случае анализа статистического ряда путем группировки цифр в соответствии с определенным, в частности количественным, признаком—урожайность в зависимости от густоты вывозки навоза, потребление в зависимости от размеров дохода, посевная площадь в зависимости от лошадности или вообще—обезпеченности рабочим скотом, род заболеваний в зависимости от возраста или профессии и т. п.,—мы исходим все из той же невоможности предполагать случайное совпадение наростания цифр изучаемо ряда с наростанием (или—при обратной зависимости—убылью) того признака, который положен в основание группировки и здесь. Вероятность случайного совпадения столь же ничтожна как вероятность того, что случайно вынутые из урны № 1 цифры дадут среднюю в пределах первой сотни, цифры, вынутые из урны № 2,—в пределах второй и т. д.; практически она может быть не принимаема в расчет, и, следовательно, мы с близкою к практической достоверности вероятностью может заключать, что наличность соответствия между числами исследуемого ряда и признаком, положенным в основание группировки, доказывает наличность причинной зависимости между первыми и вторым.

Таким образом, во всех случаях, где анализ и сопоставление статистических рядов приводят нас к установлению постоянств, правильностей и причинозависимостей, наши заключения, в самом деле, находят себе основание в понятии вероятности.

Но все это—еще раз—ни в малейшей мере не решает вопроса о роли приемов и формул исчисления вероятностей; а затем и шире: о роли в статистике высшего математического анализа—в частности о роли его в тех статистических исследованиях, которые направлены к установлению статистических закономерностей и причинных связей между статистически изучаемыми явлениями и признаками явлений. И вот, здесь я еще раз должен

подчеркнуть наличность, среди представителей статистической теории, трудно разрешимого разногласия. С одной стороны, существует представленная, в особенности, англичанами: Пирсоном, Bowley, Эджевортом, в России Васильевым, Орженцким, Леонтовичем и др., статистико-математическая школа, представители которой во всей вообще статистике видят не более и не менее, как отрасль прикладной математики, и задачу статистика сводят к математическому анализу рядов цифр, полученных из статистического наблюдения; или говоря конкретнее — к анализу их приемами исчисления вероятностей и вообще высшего математического анализа. Вот как характеризует Bowley тот „багаж" (equipment), какой необходим для приступающего к ознакомлению с статистическим методом: „при собирании и табличной обработке статистического материала—говорит он - здравый смысл является главным аттрибутом, а опыт—главным учителем; собственно для выполнения соответственных операций требуется лишь знание простейшей арифметики". Однако, „все части статистического исследования взаимно зависимы друг от друга, а потому необходимо понимать целое, прежде чем приступать к выполнению какой-либо его части". Между тем, уже для счетной обработки (summarising) материала нужно быть знакомым с различными алгебраическими средними и обладать достаточным знакомством с геометрией (конечно, разумеется аналитическая геометрия! А. К.) для об'яснения простых кривых,— хотя—как тут же замечает Bowley—все эти операции могут быть выполнены и без алгебраических формул (курс. мой. А. К.). Для критики же предположений и для истолкования результатов необходимо пользоваться формулами высшей математики и, очевидно, полезно понимать способ получения этих формул, чтобы разумно пользоваться ими". Такие же взгляды имеют сторонников и в других странах—назову в Германии Forcher'a, у нас, в России, Слуцкого или Леонтовича. Так, по категорическому заявлению Е Е. Слуцкого, „кардинальное требование, которое жизнь ставит деятелям статистики: статистик должен быть математиком, ибо его наука есть наука математическая" [1]). Для Forcher'a все содержание того, что он называет „статистическим методом", заключается в „нахождении для относительно-индивидуального в массовых явлениях адэкватной действительности простейшей формы", и при том при помощи переносимых в данную область форм мышления математики и теории вероятностей" [2]), при чем, как видно из всего содержания книги Forcher'a, под „формами мышления" разумеется нечто гораздо более широкое—именно формы высшего математического анализа и высшего математического счисления.

[1]) Слуцкий. Теория корреляции и т. д., стр. 2.

[2]) Forcher. Die stat. Methode als selbstand. Wissensch., 1913, стр. 359—360.

Огромное большинство статистиков, однако, как на западе, так и у нас, в России, стоит очень далеко от такого специфически-математического понимания статистического метода. Оно продолжает работать элементарными приемами, оперируя—поскольку речь идет о численной обработке статистического материала, арифметическими выкладками, в лучшем случае простыми формулами, требующими для своего уразумения и применения знакомства лишь с самыми первыми началами элементарной алгебры.

Таким образом, еще раз: приходится констатировать факт существования двух направлений, взаимоотношение между которыми с достаточною ясностью обрисовывается в следующих словах Георга Майра: „человек, прошедший математическую школу, и человек, лишенный математической подготовки, неизбежно будут различного взгляда по вопросу об относительном значении специально-математического и элементарно-статистического методов. Математику элементарно-статистический способ выражения покажется тяжеловесным и недостаточным; не-математик будет беспомощно стоять перед непонятными ему формулами. Но специфический способ изучения, доступный лишь узкому кругу лиц с математическою подготовкой, применение которого притом отнюдь не является необходимым, единственно-возможным способом уразумения соответственных проблем, не может быть имманентною составною частью статистики... Кто обладает потребными математическими знаниями, заключает Майр,—тот имеет полное право находить для себя удовлетворение в специфически-математическом способе трактования проблем; кто ими не обладает, не должен из-за этого отказываться от мысли овладеть теми же проблемами в элементарно-статистической форме их разработки".

Эта формула, несомненно, требует ограничений и поправок. С одной стороны, сознательное усвоение начал современной статистической теории едва ли возможно вне связи с основными началами теории вероятностей. Собственно роль и значение исчисления вероятностей для статистики и в частности для практики научного статистического анализа можно представлять себе весьма различно—мой лично взгляд, как я его уже в значительной мере формулировал, очень сдержанный и в значительной мере даже скептический. Но обойти вопроса о значении для статистики исчисления вероятностей статистическая теория не может,—так или иначе, но как-нибудь она должна отнестись к этому вопросу,—так или иначе каждый мыслящий статистик должен разрешить его для себя. С другой стороны, существуют отрасли прикладной статистики, которые в то же время являются отраслями прикладной математики; здесь для лица, не располагающего математическою подготовкой, совсем не может быть места, если только оно не желает довольствоваться ролью механически работающего вычи-

слителя. В остальном формула Майра представляется мне вполне приемлемой. Каковы бы ни были, впоследствии, завоевания высшего математического анализа в области статистики,—для настоящего времени отождествление статистического метода с „нахождением для сложных массовых явлений простейших форм при помощи математических и развиваемых теориею вероятностей форм мышления" представляется необоснованным. Пусть в будущем действительно окажется, что являющееся предпосылкой применимости формул исчисления вероятностей „теоретическое распределение погрешностей лежит в основе всех явлений" (Bowley),—что в действительности „вся жизнь, и в частности жизнь социальная, развертывается в виде непрерывных функций"—(Forcher) и, следовательно, может быть изучаема при помощи анализа бесконечно малых,—во всяком случае даже и цитированные только что, наиболее крайние сторонники математические направления признают, что „мы еще не видим промежуточных звеньев, мы еще недостаточно навострили наше духовное зрение": что теория погрешностей „не развита еще настолько, чтобы приспособить ее к чрезвычайно сложным явлениям человеческой деятельности".

Как правильно формулирует Лоренц, идеал науки—всякой науки—открыть закон явления, выразить его в виде математической функции и таким образом „перенести исследование в область непогрешимой дедукции математического анализа". Но наука тем ближе к этому идеалу, чем она абстрактнее, тем дальше от него, чем она конкретнее. Поэтому, „до него уже достигли геометрия и механика (из конкретных наук—астрономия); на пути к нему физика, для биологии же, и тем более для социальных наук, он представляется отдаленною, едва различимою целью бесконечно длинной дороги научного прогресса" [1]). Правда, Лоренц подчеркивает существование отделов, „довольно далеко подвинувшихся в этом направлении", а относит сюда политическую экономию и статистику. Но для политической экономии такое утверждение более, нежели сомнительно—математическое направление в политической экономии—не более, как тонкая струйка, совершенно не влияющая, пока, на общее развитие науки. По отношению к статистике сказанное Лоренцом в известных пределах справедливо—но именно только в известных пределах: методы высшего математического анализа и приемы исследования, основанные на началах теории вероятностей, в самом деле завоевали себе видное место в ряде отраслей, где статистический метод прилагается к естествоведению, сначала в тех, которые занимаются изучением органического мира, в новейшее время и в таких, как физика и астрономия (впрочем, относительно теоретической физики уже в 1-ой

[1]) Лоренц. Элементы высш. математики, т. I, 1910, стр. 19.

главе была сделана оговорка—мы имеем здесь, строго говоря, не применение статистики в ее математических формах, а просто применение исчисления вероятностей к известным системам гипотетических построений). Методы теории вероятностей и высшего математического анализа завоевали себе видное место и в тех дисциплинах, где статистический метод прилагается к естественно-историческому изучению человека (антропология, частью этнография). Они могли завоевать себе в этих областях такое прочное положение в виду относительной простоты изучаемых здесь явлений—не даром, ведь, именно „статистики-физики, в противоположность статистикам обществоведам, определенно становятся на почву теоремы Бернулли и неизменно к ней апеллируют, как при вычислении наивероятнейших массовых результатов, так и при учете возможных от них уклонений" (А. А. Чупров). В области социальной статистики имеется пока лишь весьма немного отраслей, где законность применения приемов исчисления вероятностей и высшего математического анализа стояла бы более или менее (более или менее—Е. Е. Слуцкий правильно подчеркивает тот факт, что А. А. Марков отрицает законность применения теории вероятностей даже в такой, казалось бы давно и окончательно завоеванной ею области, как формальная теория населения и страховые и пенсионные рассчеты) вне спора: это по Yule'ю только распределение рождений по полу, по Forcher'у—возрастное строение человеческого общества, продолжительность жизни, последовательное вымирание человеческой массы, наступление инвалидности; говоря общее, простейшие явления естественного движения населения—области, где социальная статистика ближе всего соприкасается, просто, с естественно-историческим изучением человека. Во всех остальных областях социальной статистики, в частности в необъятной области экономической и моральной статистики, принципиальная законность применения теории вероятностей и приемов высшего математического анализа представляется, во всяком случае сомнительной. Как мы видели, даже такой убежденный сторонник „математического направления" в статистике, как Udny Yule, все же констатирует „сравнительную редкость" являющегося предпосылкой применения приемов исчисления вероятностей „нормального распределения в социальной статистике, отчасти обусловливаемую, вероятно, тем фактом, что в большинстве случаев, при значительной, конечно, сложности полной причинной обусловленности, решительно преобладающее влияние имеют сравнительно немногие причины,—отчасти же высокою степенью асимметрии в распределении элементов, от которых зависит сложная переменная величина".

Применение в любой научной дисциплине, и в частности в статистике, методов высшего математического анализа и исчисления вероятностей, несомненно очень привлекательно для человеческого

ума—особенно если он склонен к обобщению, к абстракции. По замечанию того же Лоренца, математика „придает всякому исследованию ту безошибочность направления, которая свойственна анализу вообще, а его алгебраическая символизация облегчает до крайности работу мысли". Выводы математического анализа, как такового, непогрешимы,—и эта непогрешимость, эта точность выражения, возможность меры и счета, устраняющая субъективность суждений типа „много" или „мало", „больше" или „меньше",—это все, несомненно, подкупает и привлекает.

Но спрашивается, если выводы математического анализа противоречат фактам? Все равно — они, выводы, как таковые, непогрешимы, и в случае противоречия в фактах ошибки надо искать не в выводах, а в посылках. Математика такого рода ошибка не интересует: „не на математическом анализе, а на первоначальной индукции лежит ответственность за достоверность конечных результатов (Лоренц). Вот почему, с точки зрения математика, математика, как метод, „приложима для обработки анализом чисто эмпирических законов наук наименее абстрактных, как политическая экономия, статистика, психология и т. д.",—она не отвечает за то, в каком отношении окажутся к действительности получающиеся выводы. Но для статистика противоречие выводов с фактами не безразлично—его задача—установление фактов и уловление фактически существующих законов этих фактов. А потому статистик должен помнить, что математика, правда, универсальна, как метод; что „дедуктивный ход анализа непогрешим, и выводы его абсолютно достоверны"—но, что с другой стороны, „математический анализ, как мельничный жернов, смалывает все, что под него положат,—доброе зерно он обращает в питательную муку, а сор—в негодную пыль" [1]).

Сказанное приводит или привело нас к другой точке зрения на вопрос, или точнее—к рассмотрению вопросов под несколько другим углом зрения: под углом зрения задач и существенного смысла статистического метода. Как мы видели, требование, чтобы „статистик был математиком", обосновывается на том положении, что „статистика есть наука математическая". Это, конечно, не так. Статистика — не математика; она—не в большей мере математическая наука, нежели химия, физиология, психология, география, минералогия, — вообще, нежели всякая другая наука, поскольку таковая имеет дело с измеримыми или поддающимися счету величинами и поскольку она, в самом деле, пользуется для своих определенных познательных целей теми или другими приемами счета и вычисления. Она имеет свои задачи и свои приемы исследования. В основе статистического метода лежит, в самом деле, счет,

---

[1]) Лоренц, Наз. соч., т. I, стр. 85.

исчисление,—при обработке материала и при выводах из него она пользуется, в самом деле, теми или другими вычислительными приемами. Она м о ж е т черпать их, если это соответствует ее задачам и характеру ее конкретного материала, приемами и простой арифметики и элементарной алгебры и высшего математического анализа,— но все это не делает ее „математическою наукой"; содержание и цель статистического метода не может быть сведено к „нахождению для относительно-индивидуального в массовых явлениях адэкватных действительности *простейших* форм". *Математика,* в самом деле, *может и должна* сводить действительность к таким простейшим формам — *статистика* стремится количественно изображать и количественно анализировать действительность *в мыслимом приближении к конкретной действительности* и лишь постольку пользуется теми или другими приемами и методами математики, поскольку они способны служить *ее* целям и отвечать *ее* задачам. *С этой точки зрения задачи математики до некоторой степени противоположны задачам статистики,* и то, что с чисто математической точки зрения является тонкостью и точностью выводов и построений, с точки зрения статистика будет, нередко, грубым упрощением или даже искажением той действительности, познание которой является его первою и главною задачей. Такие приемы, как построение кривых распределения, „выравнивание" рядов, интерполяция, не только не способствует выяснению реального характера изучаемых явлений, но, наоборот, могут давать о ней искажающие действительность представления; они, притом, нимало не способствуют тому, что является высшею целью статистического анализа—уразумению явлений в их причинной обусловленности. Ко всем такого рода приемам—особенно поскольку им, — как мы видели — приписывается прямо-таки самодовлеющее значение, вполне применимо замечание Кнаппа, что формулы законны и полезны, — но лишь в том случае, если они вытекают из мысли, удачно прозирающей природу самого явления; „но если—говорот Кнапп, ставят формулы, которые без всякого отношения к природе данного процесса, лишь как бы in nuce охватывают наблюдаемые численные значения (что при принятии произвольного множества бессмысленных констант вовсе даже и нетрудно),—то это не имеет ничего общего" не только с целями и задачами статистики, но даже просто „с прикладною математикой, кроме употребления букв".

Идя затем дальше, мы видим, что другие приемы, как, например, выражение статистических зависимостей в виде аналитических уравнений, делаются применимыми лишь при таком упрощении действительности, которое, нередко, идет в разрез с теми познавательными задачами, ради которых применяется статистический анализ; так называемый метод корреляции дает хотя и выражаемое в числах, значит, казалось бы, более точное, но зато лишь вполне суммарное

представление о характере выражающихся в статистических рядах причинных и подобных им связей, по существу же ничего не прибавляет к результатам элементарного анализа, и совершенно не дает возможности уловить тех бесконечно разнообразных, так сказать, качественных оттенков этих связей, которые сравнительно легко раскрываются при помощи элементарных приемов.

С другой стороны, читатель, конечно, знает, к каким бесконечно разнообразным и богатым результатам приводит оперирующий элементарными приемами статистический анализ, как в смысле, просто констатирования правильностей, так и в том, что составляет идеал науки—в раскрытии причинных связей и зависимостей. Он даст, правда, лишь качественные, нередко более или менее субъективно окрашенные результаты, выраженные формулами типа „много" — „мало", „больше" — „меньше", и это обстоятельство — сильнейший, если можно так выразиться, козырь в руках представителей математического направления в статистике. Но смущаться этим обстоятельством нет основания. Всякая индукция, всякая наблюдательная и опытная наука должна пройти первую ступень развития, качественную, и только при известных условиях может достигнуть второй—количественной. Как констатирует Darbon, нередко осуществима только первая, качественная ступень, если сложность фактов, или функций, или трудность измерения исключают возможность перехода на вторую количественную. Это — даже в такой науке, как физика. Что же касается „до так называемых моральных наук, то они не могут avoir d'autre ambition — притязать на большее, как схватывать качественные соотношения"; в частности „социальные науки, подмечая, как известные факты s'enchainent, s'associent ou s'opposent, croissent ou decroissent,—связываются, сопутствуют или противопоставляются друг другу, растут или убывают, никогда не в состоянии дать их соотношениям количественного выражения" [1]). И конечно, к социальным наукам более нежели к каким-либо другим приложимо замечание Darbon'a, что только „качественные законы составляют, в самом деле, действительно прочную часть нашего знания природы, тогда как математические соотношения дали повод утверждать, что все законы природы подлежат пересмотру. Первые проистекают из raisonnement de probabilité,— из идеи вероятности", доказательную силу которой Darbon доказывает в дальнейшем, „вторые не опираются ни на какое строго логическое основание и являются результатом рискованной интерполяции, посредством которой, в неопределенной задаче, выбирают решение que rien n'impose, — лишенное обязательной для нашего разума силы" [2]).

---

[1]) Darbon L'explication mecanique et le nominalisme. Paris. 1911, стр. 128—129.

[2]) Там же, стр 129

Так или иначе—я ни мало не желаю умалять значения математической статистики как в сфере приложений статистического метода к области естествознания, в частности естественно-исторического изучения человека, так и к некоторым—пока немногим, областям социальной статистики. Я вполне допускаю, что с течением времени она оправдает себя в тех или других, может быть, даже во многих, новых областях социальной статистики. Но *своего права на исключительное господство в статистике математическое направление решительно не доказало*, и наряду с ним остается, во всяком случае, достаточно места для обходящегося элементарными вычислительными приемами статистического анализа. За сделанными выше оговорками, формула Майра представляется мне таким образом, вполне приемлемой [1]): одни из статистиков идут и будут идти путями, требующими применения более или менее сложных форм математического анализа—статистики этой категории, разумеется, должны, в самом деле, „быть математиками"—располагать солидною математическою подготовкой. Другие могут удовольствоваться покоящимся на принципах теории вероятностей теоретическим обоснованием статистического метода—и такое обоснование последнего на принципах теории вероятностей я считаю, в самом деле, обязательным для всякого мыслящего статистика; при обработке статистического материала и истолковании ее результатов, вообще в практике научной статистической работы они вполне вправе ограничиться элементарными вычислительными приемами. Таких статистиков пока, конечно, подавляющее большинство, и при данном состоянии статистической методологии, в частности при данном положении вопроса о применении в статистике приемов исчисления вероятностей и высшего математического анализа, пред ними раскрывается еще безгранично-широкое поле действия.

Отстаивая такой взгляд с первого, так сказать, момента моего выступления в литературе статистической методологии, я всегда находился под некоторым подозрением (опасение которого—решаюсь сказать это прямо—окрашивает взгляд по этому вопросу не малого числа статистиков-практиков и теоретиков!), что такого рода понимание роли в статистике исчисления вероятностей и высшего математического анализа вытекает из того обстоятельства, что я сам—не математик и не располагаю специальной математической подготовкой, а потому до известной степени лично заинтересован отстаивать право элементарного статистического анализа на существование. Я и сейчас остаюсь не математиком и не претендую на специальную мате-

[1]) Это—считаю долгом оговорить—совершенно не оправдывает, однако, того иронически-пренебрежительного тона, которого Майр, во втором издании своей „Statistik und Gesellschaftslehre", все время держится по отношению к математическому направлению—в современной статистике. Как бы ни расходиться с этим направлением это, во всяком случае, серьезное научное течение, заслуживающее серьезного к

матическую подготовку. Но чем более я входил в существо применений исчисления вероятностей и вообще математического анализа в статистике, и притом не только в практической, но и в теоретической, тем более я укреплялся в своем сдержанном и даже, до некоторой степени, скептическом взгляде. А с другой стороны, этот мой взгляд—с полною отчетливостью формулированный в немецкой переработке моей книги „Theorie und Methoden der Statistik“ и встретивший резкий отпор со стороны английских статистиков-математиков, Yule'я и Bowley, получил, однако, поддержку с максимально-авторитетной для меня стороны—со стороны не кого иного, как основоположника современной, покоющейся на началах теории вероятностей, статистической теории—Лексиса. В рецензии на только что упомянутую немецкую переработку моей книги, Лексис категорически признает правильность отстаиваемого мною взгляда: „в данном случае—замечает он—существует такое же соотношение, как между наблюдающими астрономами и вырабатывающими „механику неба“ теоретиками“. Так же точно отнесся к проводимым мною взглядам автор капитальной монографии о „Statistische Mittelwerte“ Zizek: он признает эти взгляды „вполне соответствующими действительному положению вещей“; конечно,—говорит он,—желательно, чтобы статистик познакомился с теориею вероятностей, „которая точнее формулирует и в подробностях исследует“ играющее столь важную роль в статистике понятие вероятности,—но фактическое применение исчисления вероятностей к конкретному статистическому материалу в большинстве случаев бесполезно или неосуществимо“. В коротких словах Zizek формулирует здесь ту самую мысль, которая значительно раньше была развита Борткевичем: сам—видный математик, человек, наряду с Лексисом являющийся создателем современной, покоящейся на математической основе, статистической теории, Борткевич, однако, подчеркивает, что статистик-практик „не так неправ, когда становится на точку зрения, что поучительное и интересное в статистических числах не в их однообразии, а в их изменчивости во времени“; когда интересуется не столько „типическими“, сколько „симптоматическими“ рядами, т. е. такими, которые „не поддаются подчинению схеме теории вероятностей“, и потому могут дать несравненно большие результаты при обработке не имеющими отношения к теории вероятностей приемами. „Небезинтересно даже—замечает Борткевич в заключительных соображениях второго очерка своих „Kritische Betrachtungen“, отметить некоторого рода антиномию, находящую себе выражение в том, что те статистические величины, которые укладываются в схемы исчисления вероятностей,

---

себе отношения. И если представители математического направления, в частности некоторые из русских, нередко грешат подобным же отношением к противоположному течению, то это—пример, во всяком случае, не заслуживающий подражания.

вместе с тем являются и теми, которые, по большей части, не могут притязать на большой существенный интерес, тогда как, напротив, интереснейшие по своему внутреннему смыслу величины обыкновенно не поддаются сколько-нибудь далеко идущей обработке приемами исчисления вероятностей" (курс. мой. А. К.). По отношению к таким, симптоматическим, по терминологии Лексиса, рядам, „которых отдельные члены решительно не поддаются подчинению определенной, относящейся к ряду, как целому, схеме, несравненно более результатным окажется совершенно иной способ трактовки, нежели предлагаемые исчислением вероятностей. Если, именно, привести данный статистический ряд в связь с другими рядами или с такими факторами, которых последовательность во времени и которых изменения в пространстве улавливаются уже не статистически, а иными способами"—иначе сказать, если применить элементарные приемы статистического анализа, то,—говорит Борткевич—„могут обнаружиться такие параллелизмы и антагонизмы, которые позволят прийти к положительным результатам относительно разнообразнейших влияний и зависимостей". В силу этого, Борткевич признает „вполне последовательным, со стороны современной статистики, что она, усматривая свою задачу в отыскании и исследовании подобного рода отношений между явлениями, обращает свое внимание прежде всего на изменчивые, следовательно, чувствительные по отношению ко всякого рода влияниям отношения меры и числа"—отношения, именно в силу этой своей изменчивости не поддающиеся изучению приемами исчисления вероятностей. При этом—подчеркивает Борткевич—„опытный статистик, хотя бы он и вовсе не был знаком с исчислением вероятностей", в основном вопросе о достаточности или недостаточности числа наблюдений „как правило, достаточно верно руководится некоторым статистическим чутьем—„statistischer Sinn. Правда—замечает он дальше—лучше, если к этому статистическому чутью присоединяется и некоторый навык в исчислении вероятностей, который может существенным образом способствовать развитию этого чутья. Но требуемое некоторыми „вычисление меры точности в каждом конкретном случае" Борткевич признает „едва ли поддающеюся роскошью в статистической работе", а в взглядах тех, кто, как Вестергорд, „склонен признавать диллетантским всякое статистистическое исследование, где не принимались во внимание меры точности", он видит „решительное преувеличение". Главное значение теории вероятностей для статистики—это ее значение как „принципа, который не есть уже принцип причинности и который способен дать лучшее объяснение гипотетической устойчивости статистических результатов, нежели принцип причинности. Это—подчеркивает Борткевич—сознало направление теоретически-статистического исследования, видящее в массовых явлениях человеческого обще-

жития область, которую можно понять лишь исходя из принципов исчисления вероятностей. Именно в этом" Борткевич видит—и по моему убеждению совершенно справедливо—„значение исчисления вероятностей" или, как я предпочитаю выражаться, теории вероятностей, „для статистики: именно в том, что лишь благодаря сведению статистических процессов к определенным схемам исчисления вероятностей достигается правильное понимание существа статистической закономерности". Это значение остается за теорией вероятностей, как бы ни были подорваны в своей основе (хотя бы приведенными в предыдущей главе соображениями) предложенные Лексисом и развитые самим Борткевичем конкретные схемы различных типов дисперсии. Дело *не в этих конкретных схемах*, а *в основной мысли* „рассматривать статистические числа как приближенные значения определенных вероятностей и математических ожиданий (Wahrscheinlichkeits—und Erwartungsgrössen)", которая, по справедливому—опять-таки—мнению Борткевича, представляет собою „углубление научного мышления в данной области". Вот в этом-то и заключается главная роль теории вероятностей для статистики и для научной подготовки статистиков: „в некотором смысле, она может быть охарактеризована как пропедевтика теоретической статистики, причем *центром тяжести* является здесь теоретико-познавательная и логическая сторона исчисления вероятностей, тогда как „вычисляющие его части" имеют лишь второстепенное значение". И в конечном результате Борткевич присоединяется к взгляду Криса, формулированному им, правда, в применении к частному вопросу о роли исчисления вероятностей в теоретической медицине, имеющему, по существу, более общее принципиальное значение,—формулированному в следующих словах: „если не предаваться заблуждению относительно непосредственного значения численных вероятностей, то привлечение исчисления вероятностей может быть охарактеризировано только как полезное и заслуживающее полного признания, а некоторое знакомство с ним—даже как необходимое. Тем не менее, вполне понятно и законно с точки зрения существа дела (sachlich gerechtfertigt), что вычисления не играют в литературе значительной роли, и можно предполагать, что дело не изменится и в будущем" [1].

На этом я и закончу свои соображения, касающиеся роли исчисления вероятностей в статистике: я признаю—еще раз—эту роль огромною, поскольку речь идет *о теории вероятностей*, как основе теоретической статистики, и считаю, что знакомство с основами теории вероятностей обязательно для всякого мыслящего статистика. Но роль *исчисления вероятностей* в практике науч-

[1]) Kritische Betrachtungen, 2-я статья, стр. 354—360

ного статистического анализа я признаю, во всяком случае, второстепенной: второстепенной как в смысле об'ема могущих быть трактуемыми с помощью его проблем, так и в смысле значения получаемых от применений исчисления вероятностей научных результатов [1]).

---

[1]) Границу между теорией и исчислением вероятностей Ф. А. Ланге проводит таким образом: „исчисление имеет дело с точным решением определенных проблем"; теория или логическое учение „исследует в общем виде применимость принципов вероятности и пытается выяснить характер и логическое существо математических методов" (цит. по Борткевичу—Krit. Betr., 2-ой очерк, стр. 360, примеч. 1).

ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ.

О статистике, как самостоятельной науке.

Статистика трактуется в этой книге—как и в моей более ранней работе „Теория и методы статистики"—исключительно как научный метод—как метод массового наблюдения, находящий себе применение в самых разнообразных отраслях знания, и первее всего—в разнообразных отраслях общественных наук. В настоящей, заключительной главе, я сделаю несколько замечаний, имеющих целью ближе очертить объем и содержание понятия „статистики" как методологического учения, а затем остановлюсь на все еще не сходящем со сцены вопросе о статистике как самостоятельной науке.

Остановлюсь, прежде всего, на вопросе о взаимоотношении между статистикою как научным методом и статистикою как простым счетом, применяемым для разнообразнейших научных и еще более того—практических целей, а попутно—и о взаимоотношении между статистическим методом и тем, что Георг Майр удачно называет статистическим искусством.

Как мне приходилось неоднократно подчеркивать, в особенности в гл. 1-ой, когда речь шла о существе статистического метода, и в гл. 2-ой, при рассмотрении вопроса о характере и значении статистических закономерностей, получаемые путем счета входящих в ту или другую совокупность единичных случаев статистические числа имеют для научной статистики значение, прежде всего, симптомов, характеризующих то или иное сложное массовое явление, нередко являющихся лишь внешне-уловимым выражением тех собственно моментов, которые представляют собою действительный предмет нашего интереса, но не поддаются статистическому уловлению. Наряду с такого рода симптоматическим значением статистические цифры, в большинстве случаев, имеют, однако, еще и то или другое самостоятельное значение—значение как в области научного изучения тех или других явлений, так и в особенности в чисто практической сфере. Преступность изучается как симптом того, что называют „народною нравственностью". Но данные о числе преступлений необходимы и сами по себе, потому что на них основы-

ваются всякие рассчеты относительно численности судебного персонала, вместимости и стоимости содержания тюрем, мер для борьбы с теми или иными категориями преступлений и с преступностью вообще и т. п. Потребление спиртных напитков изучается статистикой как один из элементов народного потребления и как один из симптомов народного благосостояния. Но размеры потребления спиртных напитков важны и сами по себе—с ними приходится считаться и государству в его бюджетных расчетах и при ведении монопольной винной операции, и тем многочисленном частным лицам, которые прямо или косвенно прикосновенны к производству и торговле спиртными напитками. Густота населения, его естественное движение—рождаемость, брачность и смертность, суть важные симптомы и народного благосостояния, и народного здравия; но численность населения важна и сама по себе, потому что на ней основываются все расчеты, касающиеся военной силы страны, организации медицинской помощи, школьного дела, в наших условиях—продовольственной помощи и т. п.

Из самого понятия статистического метода явствует, с другой стороны, что в основе всякой статистики лежит счет,—что всякая статистика есть прежде всего счет. Но обращение этого положения не может иметь места—не всякий счет, в частности не всякий счет в области массовых, или хотя бы только в более специальной области массовых общественных явлений, есть статистика. Обычно слово „статистика“ употребляется, однако, в весьма широком смысле—под статистикой разумеют именно всякий счет, всякую количественную характеристику разнообразнейших явлений общественной и государственной жизни. Говорят о „статистике выборов“, „статистике вооруженных сил“, „статистике военных флотов“, о „статистике личного состава и производства судебных установлений“; под названием „статистика“, организации промышленников издают текущие обзоры каменноугольной, железоделательной или иной промышленности, имеющие целью чисто-деловую ориентировку предпринимателей; городские самоуправления публикуют „статистику“ посещения гласными думских собраний, „статистику“ трамвайного движения и т. д. В том же безгранично широком смысле „статистика“, сплошь и рядом, разумеется и в научной терминологии: достаточно заглянуть в изданный при участии самых выдающихся германских учетных „Handwörterbuch der Staatswissenschaften“, чтобы увидеть, что под „статистикою“ разумеются здесь, просто, своды цифровых данных, относящихся к трактуемой под данным „словом“ области экономических или иных явлений.

Как и всякий вообще вопрос терминологического характера—вопрос о взаимоотношении между „счетом“ и „статистикой“ не имеет особенно существенного значения будем ли мы признавать за

всяким „счетом“ право на название статистики, или нет,—от этого ничего не выиграет и не проиграет, по существу дела, ни простой „счет“ ни „статистика“ в том смысле, как она трактовалась во всем предыдущем изложении. Тем не менее, мне кажется нелишним подчеркнуть, что с той точки зрения, которая проводилась в этой книге, простой „счет“, не преследующий цели дать обобщенную количественную характеристику известного массового явления, не может претендовать на название статистики. О статистике, как своеобразном методе научного описания и анализа, может быть речь только тогда, когда счет принимает характер систематического количественного массового наблюдения,—строго говоря даже только тогда, когда такое наблюдение предпринимается с целью установления закономерностей и причинных либо похожих на причинные связей и зависимостей. Я вполне присоединяюсь, в данном отношении, к высказанному одним из старых теоретиков статистики, Fallati, мнению, что „предметом статистики является причинная связь отдельных событий и состояний“; или как та же мысль была высказана другим, еще гораздо более заслуженным теоретиком, Рюмелином: „не всякий счет есть статистика—только тот, который из сравнительного массового наблюдения извлекает численно выраженные групповые признаки“.

Не подлежит сомнению, что вполне последовательное проведение такого ограничительного понимания „статистики“ или статистического метода встречается с известными затруднениями—на них, между прочим, обратил внимание Zizek в рецензии на немецкое издание этого курса. Я сейчас остановлюсь на этих затруднениях, но сначала отмечу в общей форме, что с подобного же рода затруднениями мы встретимся, в большей или меньшей степени, при последовательном проведении любого определения—определения любого явления или понятия: как бы точно и правильно определение ни было по существу,—всегда найдется более или менее широкая область смешанных и переходных форм, где последовательное проведение данного определения окажется затруднительным или даже неосуществимым. С этим обстоятельством мы не раз встречались, в особенности, в первых главах этой книги, и при оценке его значения всегда следует помнить глубокую истину, высказанную А. А. Марковым в его „Исчислении вероятностей“; „различные понятия определяются не столько словами, каждое из которых может в свою очередь потребовать определения, сколько нашим отношением к ним, которое выясняется постепенно“—выясняется из того употребления, которое мы фактически делаем из данного понятия.

Указанные только что затруднения вытекают из немогущего быть игнорированным факта существования „статистики“, как массового наблюдения чисто описательного характера, не преследующего

никаких, подобных выше очерченными, научных целей. „Ведь большинство крупных статистических исчислений — говорит Zizek — является в первую голову (zunächst) именно чисто описательными массовыми наблюдениями, в которых закон больших чисел не играет никакой роли—таковы. напр., промышленные переписи, статистика внешней торговли и т. д. Такая чисто описательная статистика, независимо от могущих выясниться статистических правильностей и законов, представляет собою важную и необходимую форму массового наблюдения, заслуживающую отдельной методологической характеристики".

Формулированное в приведенных словах затруднение—как я уже отметил—не имеет, по существу, сколько нибудь важного значения. Но реальности этого затруднения отрицать нельзя. Как ни ограничительно понимать термины „статистика", „статистический метод",— однако, в практической части любого курса статистики трактуется— трактуется и в моем руководстве „Теория и методы статистики", техника и промышленных переписей, и статистики внешней торговли, и многих других отраслей „описательного массового наблюдения".

Но с развиваемой мною точки зрения дело именно в „нашем отношении" к каждой из этих отраслей—любая из них, смотря по этому отношению, может и подойти, и не подойти под проводимое мною понимание статистики. Возьмем хотя бы отчеты государственного банка, или текущую статистику синдиката горнозаводчиков: и то и другое не статистика в нашем смысле, пока используется для чисто деловых целей, и становится статистикой, когда используется как материал для изучения: в первом случае, положим, эволюции нашего государственного кредита, во втором—состояния и развития промышленности, вообще экономической жизни страны.

Помочь нам разобраться в данном вопросе может, между прочим, проводимое Георгом Майром во 2-м издании его известного руководства разграничение между „статистическим искусством" и статистикою, как методом научного исследования [1]). Статистическое искусство—это „элементарное", в меру надобности оборудованное средствами статистической техники, „массовое наблюдение, в частности наблюдения социальных масс, и связывающееся с ним изображение результатов наблюдения в цифровых обзорах,—то и другое, поскольку оно обслуживает практические жизненные цели, в особенности цели государственного управления, не задаваясь какими-либо дальнейшими стремлениями к научному познанию". Статистический метод—

[1]) Сам Майр противуставляет „статистическое искусство" „статистической науке". В этой книге статистика трактуется не как наука, а только как метод. Это не лишает значения те соображения, которые Майр высказывает по поводу „статистического искусства".

это прежде всего совокупность приемов массового же наблюдения, технически могущих совершенно совпадать с приемами „статистического искусства", раз только эти приемы применяются с познавательными целями,—и совокупность приемов преследующей, прежде всего, научные цели обработки данных всякого рода массовых наблюдений, в числе которых, поскольку речь идет о социальной статистике, доминирующую роль играют собранные с применением правил „статистического искусства" данные административной статистики.

Лично мне такого рода разграничение между „статистическим искусством" и „статистикою", как научным методом, кажется совершенно правильным, хотя, опять-таки, и оно не может быть вполне резко проведено в применении к статистической действительности. В правильности этого разграничения не разубеждают меня и возражения, приводимые Е. Е. Слуцким в его рецензии на мою „Теорию и методы статистики"—возражения, не обставленные, впрочем, почти никакою аргументациею: „противупоставлять статистический метод статистическому искусству—говорит Слуцкий—исходя из признаков внешних по отношению самих операций, именно из цели подлежащих действий, оказывается неправильным по существу, без всякого отношения к... трудности проведения разграничительной линии. Будет ли служить подсчет, например, социальных масс практическим целям, скажем целям управления („статистическое искусство" по А. А. Кауфману) или целям познания („статистический метод")—все равно, не технически, как полагает автор, но по существенной своей природе характер будет тот же, условия правильности те же, а следовательно и относящиеся к ним суждения статистики, как методологического учения,—те же" [1]).

Думаю, что эти соображения убедительны разве только с точки зрения абстрактной логики, а не с точки зрения того „отношения к понятию", которое никоим образом не может рассматриваться как нечто внешнее, безразличное для его содержания и смысла. Ведь простое измерение длин или поверхностей, простое взвешивание, простой счет,—все эти приемы чрезвычайно широко распространены в практической жизни; в логическом своем существе и в основах своей техники они не представляют принципиального отличия от измерений астронома или геодезиста, от взвешиваний физика или химика, от взвешиваний и измерений биолога, от счета того же биолога или статистика. И однако никто не будет говорить о мере отпускаемых из мануфактурного магазина тканей или о взвешивании продаваемых, положим, в кооперативной лавке пищевых продуктов, о счете монет или кредиток в кассе банка как о приемах

[1]) Стат. Вестн., 1915—16, кн. 3—4, стр. 108.

научного исследования. И дело здесь вовсе не в грубости приемов измерения или взвешивания—при браковке зерна или отчеканенной на монетном дворе монеты применяются даже очень тонкие приемы взвешивания и т. п.—дело именно в тех чисто практических целях, в одних случаях, и научных целях, в других, которыми определяется существенный смысл технически, может быть, и очень сходных между собою приемов. Именно в силу этого различия в целях мы будем говорить об известным образом оборудованном „искусстве" браковника—и о научных приемах химика или геодезиста.

Таким образом, мы провели некоторую—пусть очень расплывчатую—границу между „статистическим искусством", как совокупностью приемов массового наблюдения, применяемых со всякого рода практическими целями, — и статистикой или статистическим методом, как методом научного познания. По широко распространенному, еще и до сих пор, в литературе предмета мнению, рядом с статистикой как методом можно говорить еще о статистике, как самостоятельной науке. Это, по определению Янсона, „наука, изучающая общество настолько широко, насколько это возможно при современных средствах ее особого метода наблюдения", иначе говоря—при помощи статистического метода. Этот взгляд разделяется и такими первостепенными авторитетами, как Георг Майр или Вильгельм Лексис. „Статистический метод",—говорит последний,—„с пользою для дела применяется и в естественных науках; тем не менее",—продолжает Лексис,—„представляется целесообразным присвоить название „статистики" исключительно науке, которая применяет названный метод к изучению массовых явлений человеческого общежития". По Майру, статистика в формальном смысле (статистический метод)—это исчерпывающее массовое наблюдение, производимое посредством меры и числа, во всей совокупности его применения к социальным и другим наукам"; статистика в материальном смысле (синоним „статистики", как науки")—это „основанное на исчерпывающем массовом наблюдении изучение состояний и явлений человеческого общежития, поскольку таковые находят себе выражение в социальных массах".

Сторонники взгляда на статистику, как на самостоятельную общественную науку, не могли, конечно, игнорировать того бросавшегося в глаза факта, что конструируемая ими как самостоятельная наука статистика, в сущности, не имеет своей определенной области и своего определенного предмета; что статистический метод с одной стороны, находит себе применение не в одном только обществоведении, но и в науках о природе, и что с другой—и в сфере явлений человеческого общежития он лишь обслуживает другие общественные науки, но это не смущало их. Изучение явлений внешней природы опирается главным образом на единичное наблю-

дение, в значительной мере на искусственный опыт, эксперимент. Напротив, „социальные законы познаются только путем количественного массового наблюдения, но не путем качественного или количественного единичного наблюдения. Общество представляет собою собрание индивидуумов; для научного изучения этой коллективной единицы необходимо распространить наблюдение на все, или по крайней мере на возможно большее число (массу) индивидуумов, их поступков и результатов этих поступков". Притом „возможность экспериментального исследования в области социальных наук, за ничтожными изъятиями, совершенно исключена. Чтобы приобрести научное представление о сущности исследуемой социальной массы, социальной науке не остается ничего, как подвергнуть ее, эту массу, во всей совокупности ее элементов, точному наблюдению, поскольку эти элементы оказываются доступными наблюдению" (Майр). Если, с другой стороны, и в области обществоведения „отдельные части приобретенного статистическим путем знания дают существенный вспомогательный материал для других отраслей науки, напр. для политической экономии, социальной науки и политики, уголовного права и пр.",—то все-таки, как настаивает Майр в появившемся в 1914 году новом издании своей „Statistik und Gesellschaftslehre", „совершенно независимо от этих вторичного порядка услуг, оказываемых отдельными частями статистики научной работе в других специальных областях, существует первичная научная потребность концентрации всей совокупности приобретаемого статистическим путем нового знания в одной дисциплине, т. е. в науке статистики".

Собственно говоря, и вопрос о том, существует ли или не существует статистика, как самостоятельная наука,—вопрос третьестепенного, исключительно—терминологического значения: положительное или отрицательное его решение не увеличит и не умалит значения статистического метода для тех разнообразнейших отраслей, где он находит себе применение. По меткому замечанию Рюмелина, корень остроты разыгравшейся вокруг данного вопроса контроверзы лежит в том психологически понятном обстоятельстве, что „статистикам трудно решиться на признание, что их предмет занятий (Fach)—лишь вспомогательная, следовательно не самостоятельная наука". Однако, вопрос о праве статистики на название самостоятельной науки, а если таковая существует, то о характере и содержании последней, играет слишком видную роль в литературе предмета, чтобы его можно было, просто, обойти молчанием, а потому я счел нужным привести довод сторонников взгляда на статистику, как на самостоятельную социальную науку,—считаю необходимым с известною степенью подробности мотивировать и кажущийся мне правильным противуположный взгляд. Основным и решающим аргументом против признания статистики са-

мостоятельной наукой является тот неоспоримый факт, что у статистики нет своего предмета. Сторонники взгляда на статистику, как на самостоятельную науку, думают, что таким предметом является „совокупность тех социальных фактов, знание которых может быть установлено только путем количественного массового наблюдения". Но те же факты составляют предмет политической экономии, уголовного права, медицины с гигиеной, финансовой науки и пр.—притом предмет неоспоримый, так же точно, как факты, изучаемые только статистическим методом в области языка, погоды и климата, ископаемых животных и растений, физических признаков человека и т. п., составляют предмет языкознания, метеорологии, палеонтологии, антропологии и т. п. Предмет статистики, значит, и шире, и уже, чем его определяют Янсон, Лексис, Майр, Конрад и др.; шире—потому, что статистическим методом изучаются, и притом чем далее, тем в более широких размерах, явления, которые не входят в круг ведения общественных наук; уже—потому, что все вопросы, которых касается статистика в области социальных явлений,—вопросы строения, склада и жизненных отправлений общества, изучаются, кроме статистики, и рядом других наук: политическою экономиею вместе с экономическою политикой, уголовным и финансовым правом, гигиеной и т. п. Каждая из них пользуется, в том или другом об'еме, услугами статистического метода,—но это не мешает каждой из них оставаться самой собой и отнюдь не об'единяет их в одну науку—„статистическое обществоведение" или просто „статистику". По правильному замечанию Schnapper-Arndt'a, „нет такой науки, которая оперировала бы исключительно статистическим методом". С другой стороны, у статистики нет своего материала (Tatsachen). Но „так как об'ем науки может определяться именно только материалом, а никак не методом, то статистика должна заимствовать свой материал у других наук, которые, однако, отнюдь не имеют надобности отказываться от своих притязаний на позаимствованные у них части". Положение дедуктивной политической экономии, что земельная рента растет с ростом населения, „не сделается достоянием другой науки—статистики, оттого только, что оно получит статистическое подтверждение"; равным образом, и все остальное, относящееся к другим отраслям знания, не сделается „статистикою", самостоятельною отраслью знания, оттого только, что оно будет освещено статистическими данными или обосновано статистическою аргументациею. У статистики нет своего предмета, и ее можно назвать наукою с таким же правом, с каким можно назвать наукою входящее в круг специального естественно-исторического образования учение об измерительных приборах. И это учение имеет беспредельно широкий предмет—явления природы; и оно имеет дело с определенными методами исследования,—но, тем не менее, никто не выделит учения об измерительных приборах в осо-

бую науку. Учение об измерительных приборах имеет громадное значение для всякого естествоиспытателя, оно обслуживает все естественные науки, но само оно не есть наука; так же точно огромное значене для общественных и многих других наук имеет статистический метод, но это еще не делает его самостоятельной наукой.

„Как нельзя", — справедливо замечает тот же Рюмелин, — „охватить в одну дисциплину все, что добывается индукциею, аналогиею, экспериментом, так же точно нельзя собрать в одну общую науку всего того, что выясняется помощью статистического метода в различных областях знания". Статистика, по меткому определению Рюмелина, „ставит себе более скромную задачу—путем методического массового наблюдения констатировать и освещать социальные факты и таким образом служить общею для целой группы других научных дисциплин вспомогательною наукой, доставляя им эмпирический материал и средства для аргументации". Более того—статистика является, вообще, „общею и необходимою вспомогательною наукой для целой группы весьма разнообразных наук, связанных только одною общею методологическою потребностью"—потребностью в определенным образом полученных выводах из такого рода материала. Такое расширенное определение уже окончательно не вызывает возражений по существу. Говорить ли о статистике, как о „вспомогательной науке", или просто как о методологическом учении, о теории и технике известного метода,—это по существу дела безразлично. Важно то, что она не самостоятельная наука, которую можно было бы поставить в одну линию с другими, в частности с другими социальными науками. Она только „вспомогательная наука" или методологическое учение,—но это, конечно, ни в малейшей мере не умаляет ее высокого значения в общей системе научного познания. Ибо прав был Рюмелин, когда подчеркивал, что „природа вещей отвела статистике, хоть она и вспомогательная наука, нечто вроде руководящей роли, Führereschaft, среди социальных наук: ибо она доставляет им, по всем направлениям, тот материал" и—может быть еще важнее!—те приемы обработки материала, „без которых везде могли строиться только воздушные замки". Справедливая гордость статистики—„что лишь наше массовое наблюдение социальной жизни раскрыло закономерности, о которых до систематических массовых наблюдений ничего не знали, и при дальнейшей научной разработке статистики оно будет раскрывать такого рода закономерности и дальше" (Майр). И Майр и Рюмелин говорят здесь лишь о роли статистического метода в социальных науках. Но не мало аналогичных услуг он уже и сейчас оказал в более новых сферах его применения. Достаточно упомянуть хотя бы о той же вариационной статистике. открывшей для биологии ряд совершенно новых горизонтов.

Итак: теоретическая аргументация, помощью которой стремятся доказать существование статистики, как самостоятельной науки, не может быть признана убедительной. И что окончательно решает вопрос,—это тот бесспорный факт, что столь часто предпринимавшиеся попытки в самом деле конструировать статистику, как самостоятельную материальную науку, дать стройную систему этой науке, „почти столь же часто претерпевали неудачу". Это видят себя вынужденными признать даже участники посвященного Георгу Майру и трактованного в его духе коллективного труда „Die Statistik in Deutschland nach ihrem heutigen Stand", хотя они и сами стоят, в принципе, за признание статистики самостоятельною наукой. Как на единственную, пока еще не окончившуюся неудачей, попытку этого рода они могут указать лишь на многотомный труд самого Майра—„Statistik und Gesellschaftslehre", который, однако, не закончен до сего времени и о котором и они, поэтому, признают „невозможным высказать окончательное суждение". А если принять в соображение, что приведенные только что слова взяты из почетного дара, поднесенного самому Майру; что, с другой стороны, обширный труд Майра, хотя формально не закончен, но достаточно ясен, как в общей своей конструкции, так и во всех деталях своего выполнения, то едва ли можно сомневаться в том, что за такого рода отказом от оценки кроется, в сущности, более или менее отрицательная оценка—признание неудачи и этой единственной попытки.

Статистика, значит, *служанка*, ancilla всех общественных и многих других наук. У статистики остается, в ея нераздельном обладании, только очень узкая сфера, пока не оспариваемая у не никакою другою наукой: статистика населения и частью моральная. И это потому, что в названных областях преобладают правильности, которых мы пока не умеем об'яснить и нашим об'яснением привязать к какой-нибудь другой определенной науке: мы принимаем их, *как факт*, и как таковой подвергаем статистическому изучению. В рецензии на немецкое издание моего курса „Теория и методы статистики" Лексис предлагает присвоить именно этим, пока никем у статистики не оспариваемым, областям знания, особое название, например, „демографии" или лучше „демологии", и признать складывающуюся, таким образом, науку, оперирующую исключительно статистическим методом, за автономную отрасль обществоведения, характеризуемую, притом, не столько применением статистического метода, сколько своеобразным характером достигаемых помощью его результатов и особенно широким применением, в данной области, закона большого числа и теории вероятностей. Однако, и с таким решением трудно согласиться. То положение вещей, какое сейчас имеет еще место по отношению к статистике населения и некоторым частям моральной статистики, несомненно имеет *времен-*

ный, преходящий характер. С течением времени—с уверенностью можно думать—и этого рода явления будут об'яснены, а вместе с тем и они перейдут в ведении других наук. Важнейшая ветвь моральной статистики—уголовная статистика, уже и сейчас, в значительной мере, перешла в ведение криминалистов; до известной степени то же начинает наблюдаться по отношению к статистике населения, данные которой понемногу входят в систему экономики, социологии, антропологии, этнографии. Все, что исследует статистика,—законная собственность других наук; статистика остается без собственного предмета, и ее особенностью остается один только метод. Но „существо и понятие самостоятельной науки никогда не может быть определяемо тою или другою особенностью ея метода" (Рейхесберг), в виду чего статистику и следует „рассматривать, как метод счисления, примененный ко всей совокупности жизненных явлений". Этим не умаляется значение того несомненного факта, что главною сферою приложения статистического метода являются—как мы увидим ниже—все-таки науки общественные и прежде всего экономические, которые, по особому свойству явлений, ими изучаемых, особенно в нем нуждаются и без него не могут обойтись. И как химик, отлично знакомый с теоретическими построениями своей науки, мало сможет сделать для нея, если в совершенстве не знаком с известными частями учения об измерительных приборах, так никто, изучающий общественные науки, не может считать себя достаточно вооруженным, если не владеет статистическим методом, не знает его достоинств и недостатков, не может критически отнестись к статистическим данным и основанным на них выводам, не имеет чутья той степени доверия, с какою мы можем и должны относиться к статистическим цифрам.

Изложенное на предыдущих страницах представляет собою, в сущности, лишь воспроизведение того, что было сказано мною по данному вопросу в моей книге „Теория и методы статистики". В многократно цитированной, весьма содержательной рецензии на 3-е издание этой книги, Е. Е. Слуцкий ставит мне в упрек допущенный мною при рассмотрении данного вопроса по его мнению существенный пробел. К критической стороне только-что изложенных моих соображений он „лично готов был бы присоединиться", если бы я заострил свои рассуждения так, „чтобы посчитаться также и с позицией, занятою в данном вопросе А. А. Чупровым, взгляд которого на статистику, как на идеографическую науку, к сожалению даже не упоминается автором, хотя это, бесспорно, наиболее сильная позиция в

том лагере, против которого А. А. Кауфман направляет свою критику. Правда, замечает Е. Е. Слуцкий, даже и этой позиции удержать, по моему нельзя, но А. А. Кауфман ведь этого не показал" [1]).

Читатель знает, что я и в настоящей работе и ранее, в „Теории и методах статистики", самым широким образом считался как с разделяемыми, так и с неразделяемыми мною взглядами А. А. Чупрова по самым разнообразным вопросам статистической теории. Если я этого не сделал по отношению к вопросу о статистике, как науке, то это потому, что я решительно расхожусь с Слуцким в его оценке занятой А. А. Чупровым в данном вопросе позиции: я считаю ее отнюдь не самою сильною из всех, а посвященную данному вопросу часть его „Очерков"—самою слабою частью его, в общем, столь ценного труда. В применении к данному вопросу излагаемые здесь Чупровым соображения должны быть, впрочем, рассматриваемы не иначе, как в непосредственной связи с соображениями, изложенными им в немецкой статье: „Statistik als Wissenschaft", где несколько подробнее развита часть соображений, вошедших в „Очерки", и где кроме того затронуты некоторые такие стороны вопроса, которых А. А. Чупров в „Очерках" совершенно не касается, но которые существенно важны для освещения занимаемой им в данном вопросе „позиции".

„Статистическая наука" для А. А. Чупрова — нечто принципиально и существенно отличное от статистического метода—определение последнего не может служить даже исходною точкой для определения статистики как науки. Это последняя—если следовать классификации Риккерта, не Naturwissenschaft и—в противность статистическому методу — об'емлет задачи, не относящиеся к каузальному исследованию, тогда как статистический метод применим везде, где ищут причинных связей, и где эти последние не носят неразрывного характера. Исходить, при такого рода определении, нужно из логического существа описательной статистической науки, а для этого нужен предварительный анализ задач всей обширной категории Geschichtswissenschaften [2]). Вместе с Риккертом, А. А. Чупров видит задачу последних в „позиции частного". Но в отличие от Риккерта, он считает характерною для этого частного не сложность и не наглядность, а определенность в пространстве и во времени: абсолютной качественной, так сказать, неповторяемости нет. Рассуждая теоретически, Einzigartigkeit, абсолютная неповторяемость, заключается не в своеобразии каких-либо свойств, а в координатах времени и пространства — их „вполне достаточно, чтобы выделить индивида, вполне определенно, из массы всего другого, существующего в дей-

---

[1]) Стат Вестн. 1915-16, кн 3—4, стр. 107.

[2]) Tschuprow. Statistik als Wissenschaft, Arch. f. Soz. - Wiss. und Soz.-Polit, N. F., Bd XXIII, стр. 659-660.

ствительном мире, и фиксировать его в его действительной индивидуальности“ [1]). Правда, в действительности в большей мере подчеркивается Eigenartigkeit, качественное своеобразие, — и это попотому, во-1-х, что точно установить положение во времени и пространстве практически нет возможности. во-2-х, потому что конкретное значение имеет не только это положение, но и известные свойства индивида. Поэтому фактически приходится пользоваться обоими приемами одновременно,—но принципиально, все-таки, „индивидуальное, как предмет Geschichtswissenschaft, отличается от общего не большею сложностью и наглядностью, а тем, что оно привязано к точным границам пространства и времени“. Отсюда — онтологическая или, как Чупров ее называет в „Очерках“, идиографическая задача Geschichtswissenschaften: „систематически изобразить. то, что есть и в разное время было во вселенной“ [2]). Но идеально полное разрешение этой задачи недостижимо: мы встречаемся здесь с вопросом о преодолении бесконечности вселенной. Приходится отказаться от мысли описать все общее, а нужно сделать некоторый отбор. В основу последнего Чупров, вслед за Риккертом, кладет точку зрения ценности, но в отличие от Риккерта принимает точку зрения ценности не абсолютной, а относительной — ценности не непременно—как требует Риккерт—для всего культурного человечества, а хотя бы только для genugend viele Leute—для достаточно большого числа людей [3]). Этого критерия вполне достаточно. Есть, правда, другой критерий — „значение онтологического“ или идеографического „исследования для успеха номологических наук“; такая производная оценка законна сама по себе—но логика должна ее отвергнуть: „онтологическое исследование не тем научно, что оказывается полезным для номологического исследования, а тем, что ведется при соблюдении руководящих для него и исключительно ему свойственных логических предписаний“ [4]).

И так, ценность, интерес — вот критерий, которым руководствуется идеографическая или онтологическая наука при выборе об'ектов и способов исследования. Но интерес этот может принимать весьма разнообразные формы, которые Чупров, исходя из нескольких конкретных примеров, сводит к трем основным типам: „интерес — говорит он—может сосредоточиться на конкретном образе изучаемого об'екта во всем неисчерпаемом богатстве его характерных черт и в его „личной истории“. Но своеобразие об'екта может и не стоять в центре внимания: интерес может фиксироваться лишь на некоторых

---

[1]) Стр. 668.
[2]) Стр. 673.
[3]) Стр. 683—685.
[4]) Стр. 686—687.

свойствах об'екта, общих ему со многими иными, и приурочиваться к положению об'екта во времени и в пространстве". Но, в свою очередь, „интерес к положению может носить характер „географического" — или общее; топографического, и ценить возможно точное указание координат пространства и времени каждого из рассматриваемых об'ектов изучения, — но может также пренебрегать, помимо своеобразия об'ектов, и точностью данных касательно их местонахождения, принципиально довольствуясь указанием на сравнительно широкие рамки пространства и времени—интерес статистический" [1]). Путь, который предуказывается статистике, как идеографической науке, этим „статистическим интересом"—это известный нам путь образования „совокупностей" и статистический счет: „сколько об'ектов данного рода насчитывается в рамках, более или менее широко намеченных, пространства и времени,—вот форма, в которую выливается в статистике постановка вопросов, „категорическое исчисление", по известному выражению Журавского,— вот форма, которую принимают ее ответы" [2]).

Итак, статистика как наука, по Чупрову, есть описательная, или „идеографическая" наука, посвященная изучению „относительно-индивидуального"—оторванного от своей ближайшей индивидуальности, но остающегося приуроченным к „более или менее широко намеченным" рамкам времени и пространства. Идеографической науке, и в частности статистике как таковой, не чужд, правда и элемент установления причинных зависимостей—но постановка этого рода проблем здесь совершенно иная, нежели в номографической или номологической науке: т а м „дело идет о том, чтобы раскрыть неизвестные дотоле общие и вечные законы причинной зависимости между явлениями",—в идеографической науке „задача сводится к тому, чтобы, опираясь на уже открытые общие законы, „об'яснить" единичное событие,—показать, что действие общих законов обусловливает необходимость идеографической констелляции предшествующего момента, предполагаемой, в свою очередь, известною, в ту картину, какую являет подлежащее об'яснению событие",—„в одном случае перед нами номографическая проблема раскрытия неизвестных общих законов, в другом идеографическая задача прагматического (употребляя слово в его старом смысле, знакомом статистикам из истории науки) изображения единичного события". В статистике, однако, мы имеем дело не с этою, наиболее характерною для идеографии формою прагматического об'яснения, а с другою—„с суммарным об'яснением, не считающимся с теми единичными процессами, которые в своей совокупности, дают интересующий нас результат": „тесная внутренняя связь

[1]) Чупров. Очерки, 2 изд стр. 88—89.
[2]) Стр. 91.

этой формы прагматического изложения с статистическою постановкою идеографического исследования, ограничивающеюся, как мы видели, такою же суммарною картиною явлений, выдвигает проблему логического обоснования приемов установления причинных соотношений не между единичными явлениями, а непосредственно между их совокупностями, на видное место в теории статистики" [1]).

Итак, статистика, по Чупрову, есть „онтологическая наука, имеющая целью систематическое исследование относительно—индивидуального" [2]), при чем в круг этого исследования входит не только простое описание путем „категорического исчисления", но и прагматическое об'яснение—раскрытие причинных соотношений между совокупностями. Из этого последнего обстоятельства проистекает видимость, будто статистика—наука, занимающаяся не описанием, а установлением общих законов, т. е. номологическая. Но это именно только видимость—статистическая закономерность „по своему логическому существу чисто онтологична"; даже в лучшем случае — при нормальной дисперсии, она констатирует лишь эмпирический факт неизменности условий жизни некоторой человеческой группы; она часто служит для раскрытия номологических связей, но сама по себе она сохраняет вполне онтологический характер [3]). Самая устойчивость статистических чисел, вообще статистическая правильность, как она ни интересует статистика, „с точки зрения логической структуры статистической науки нечто привходящее, accidens, а не существенная особенность этих чисел", следовательно не на ней покоится логическое существо статистической науки. Статистика учитывает всякие числа; если бы даже все числа неправильно колебались,—„это ничего не изменило бы в существе статистической науки, как изображения относительно-индивидуального"; приобретенные статистические знания имели бы только „ценность, не покрывающую издержек", и потому статистическая работа не достигла бы такого развития [4]). Очень не прост—для Чупрова—и вопрос об отношении статистической науки к статистическому методу: отношение это,—полагает Чупров, в резкое отличие от всех прежних попыток конструирования самостоятельной статистической науки, не в том, что статистика для выполнения своих задач пользуется статистическим методом; скорее можно сказать, наоборот, что „статистика та наука, которая не пользуется статистическим методом"—этот последний по существу номографичен и не может, поэтому, служить онтологической науке. Непосредственная связь между статистическою наукою и

---

[1]) Стр. 103—104, 107—108.
[2]) Stat. als Wiss., стр. 691.
[3]) Стр. 694—696.
[4]) Стр 701—702

методом—предрассудок, с которым следует порвать. И наука и метод имеют дело, правда, с массовыми явлениями, но для статистической науки изучение их является самоделью, тогда как для метода они лишь средство к цели—к получению выводов относительно причинных связей. Таким образом, оперирование над массовыми явлениями не более как zufälliges Zusammentreffen—суть дела здесь в фактической невозможности строгого проведения границы между номологическим и онтологическим изучением: с одной стороны, первое нуждается в материале второго, чтобы обработать его своими методами, и статистическая наука дает материал для статистического метода; с другой—в виду неизбежной неполноты имеющихся в его распоряжении данных, онтологическое изучение приходится пополнять путем Feststellungen, сделанных в другое время или в другом месте—и такая Uebertragung должна опираться на определенные номологические отношения [1]). В частности, в статистике это имеет место в форме интерполяций: лежащие в основе их номологические отношения выясняются статистическим методом, а потому „их правильное применение предполагает понимание статистиком номологического приема“ [2]). Спрашивается, однако, является ли такая связь между наукою и методом существенною или, наоборот, случайною? Она является существенной: органический характер ее вытекает из того, что и в основе статистического метода лежит все же некоторая комбинация номографических элементов с онтологическими—ведь именно вмешательство последних обусловливает ту множественность причин и следствий, из которой вытекает и самая необходимость в особом статистическом методе. Это обстоятельство и обусловливает теснейшее отношение статистического метода к статистической науке,—в этом внутренний смысл того, что обе имеют дело с массами. Эта точка соприкосновения—не логическая случайность: и тут, и там „масса является средством преодолеть бесконечное разнообразие сущего, не отказываясь, как делает индуктивный метод, от определенности в пространстве и во времени“ [3]).

Таково существенное содержание соображений А. А. Чупрова относительно сущности конструируемой им особой „статистической науки“ или „статистики как науки“. Как я уже сказал, я, со своей стороны, считаю данную попытку не более, а скорее менее удачною, нежели все предшествующие и в этом я, повидимому, не расхожусь с общею, сложившеюся в статистической литературе, оценкой данной конструкции А. А. Чупрова. Если даже оставаться в рамках тех соображений, которые Чупров ввел в свои „Очерки“—все-таки они вызы-

---

[1]) Стр. 703—706.
[2]) Стр. 706—707.
[3]) Стр. 707—710

вают, и частью уже вызвали, в литературе целый ряд существенных возражений. Так, М. В. Птуха, в своих недавно вышедших „Очерках по теории статистики населения и моральной", подчеркивает „некоторую неопределенность" даваемой Чупровым формулировки статистического интереса, приуроченной к характеристике идеографии при посредстве указания на время и на место": „рамки времени и места— говорит он—расширяются при этом до „сравнительно широких", для того, чтобы в них могли уложиться все возможные совокупности, с которыми приходится иметь дело статистику... Чупрову хочется охватить все виды их в единой формуле, приноровленной к его определению идеографии, для чего он и берет сравнительно широкие рамки пространства и времени", между тем, по справедливому замечанию М. В. Птухи, „главное основание для определения статистической совокупности—наличность определенных признаков (курс. мой. А. К.) у тех или иных об'ектов, а их сменность во времени и пространстве может служить лишь как добавочная характеристика совокупностей. Возможно—не менее справедливо замечает проф. Птуха—представить случай статистического интереса, который вовсе не направлен на точно определенное время и место и для которых эти категории имеют второстепенное значение" [1]). Второстепенное или менее чем второстепенное значение они имеют и для понимания, вообще, идеографии—идеография „есть, скорее, отсутствие какого бы то ни было обобщения". Такое понимание идеографии—полагает М. В. Птуха—„во многих отношениях можно примирить с конструкциями Чупрова, при чем оно позволяет в то же время с большею ясностью охарактеризовать сущность статистического метода и статистики, как материальной науки. Время, место и картинность представляются в этом понимании элементами побочными"; идеалом идеографии, как и у Чупрова, „было бы возможно точное изображение вселенной путем приурочивания всех сведений к одному и тому же времени, но прагматическое изображение перехода из одной констелляции в другую при этом понимании идеографии уже выходит из ее пределов", а задачей статистического изучения был бы „подсчет фактически встречающихся феноменов, обладающих известным признаком или их комплексом" [2]).

Таким образом, М. В. Птуха, отрицая принципиальную основу конструкции А. А. Чупрова, пытается, однако, внести в свою критику некоторую примирительную ноту. Критика Борткевича совершенно чужда такой примирительной ноты и носит до пренебрежительности резко-отрицательный характер, „Теорию трех интересов"—говорит Борткевич в своей рецензии на первое издание „Очерков", из кото-

---

[1]) Птуха. Очерки по стат. насел. и мор, стр. 9—10.

[2]) Там же.

рых один якобы непременно лежит в основе всякой идеографии, нельзя признать удачной. С равным успехом можно было бы конструировать и целую дюжину подобных „интересов". Автору—продолжает Борткевич—хотелось, очевидно, вызвать в читателе впечатление, что, исходя из общих рассуждений о задачах научного исследования и о двух видах его, исследовании номографическом и идеографическом, мы, так сказать, естественно натыкаемся на статистику, как на одну из (немногих) основных форм идеографии. На самом же деле—справедливо полагает Борткевич—взятый автором курс одною силой логики вовсе не приводит неизбежно к статистике, и в его изложении статистика появляется на сцене, в сущности, без всякой достаточной мотивировки, и, во всяком случае, неожиданнее, чем в конструкции Рюмелина и других немецких теоретиков... которые исходят из противопоставления типичного не—типичному или индивидуальному" [1]). В конце концов—мы видели—отдельный подход Чупрова приводит его все к тому же образованию совокупностей и к „категорическому исчислению". „Повидимому, говорит по этому поводу Борткевич—обе операции образования совокупностей и подсчета входящих в состав их единичных случаев, как бы эти операции ни называть, не представляют с логической стороны ничего загадочного. Тем не менее автор довольно подробно трактует именно о логической сущности означенных операций, как будто поддавшись гипнозу слов „совокупность" и „категорическое исчисление" и видя проблему там, где ее нет" [2]). И наконец дальше: „непосредственный результат всякого „категорического исчисления", само собою разумеется, чужд обобщающего характера. Но дает ли это—спрашивает Борткевич—право относить статистику целиком к области идеографического знания?.. Идеографическою", строго говоря, „можно было бы признать лишь такую науку, которая на основании добываемого ею материала и не стремилась бы к открытию общеобязательных соотношений между явлениями. Мало того: термин „идеография", собственно говоря, означает отсутствие каких бы то ни было обобщений, а не только тех обобщений наивысшего порядка, которые имеют характер общеобязательности и носят название законов. Рядом с последними существуют научные положения, применимые, по удачному выражению Чупрова, к „неопределенно-многим случаям", но сохраняющие силу лишь в известных пределах времени и пространства. Такого рода истинам присущ, так сказать, „идео-номографический" характер, и с существованием этой промежуточной области между чистою номографией и чистою идеографией нельзя не считаться, когда дело касается выяснения логических особенностей той или другой науки" [3]).

---

[1]) Борткевич. Задачи и концепции, стр. 347—348.
[2]) Стр. 348—349.
[3]) Стр. 349—350.

Я, конечно, обоими руками подписываюсь под всеми приведенными замечаниями Борткевича—это ясно хотя бы из тех соображений по поводу моментов времени и пространства, которые мне приходилось высказывать в 1-ой главе и по поводу „номографических функций" статистического метода, которые я высказывал в 3-ей главе этой книги. Но замечания Борткевича, повидимому и Птухи, имеют в виду лишь те из изложенных соображений Чупрова, которые включены им в „Очерки по теории статистики". Между тем, чрезвычайная искусственность конструкции Чупрова выступает с особенною ясностью, если принять во внимание еще и те его соображения, и в частности те проводимые им отграничения конструируемой им статистической науки, которые не вошли в „Очерки" и которые я изложил выше, следуя за аргументацией немецкой статьи Чупрова о „статистике как науке". Стремление Чупрова конструировать статистику просто как идеографическую или онтологическую науку, исходящую единственно из критерия „относительно-индивидуального" или иначе—из „статистического интереса", как его формулирует Чупров, приводит его, как мы видели, к отрицанию всякого логического соотношения между статистическою наукой и статистическою правильностью, между статистическою наукой и статистическим методом—приводит его к более нежели парадоксальному утверждению, что статистика, скорее, „та наука, которая *не* пользуется статистическим методом". Я уже не буду говорить о том, в какой мере все эти—может быть логически и последовательные—дистинкции расходятся с обычными представлениями (которые могут быть и ошибочны и во всяком случае для Чупрова не обязательны). Но и сам А. А. Чупров оказывается не в состоянии провести их с какою-либо степенью последовательности и впадает сам с собой в безысходное противоречие. Устойчивость, вообще правильность статистических чисел не имеет для конструируемой Чупровым статистической науки никакого существенного значения; в существе ее ничего не изменилось бы, если бы даже *все* числа колебались неправильно; но в то же время приобретенные статистические знания без этой правильности, „имели бы ценность, не покрывающую издержек", и статистические закономерности занимают в статистической науке настолько „центральное положение", что из этого вытекает даже „видимость", что статистика—номологическая наука. Статистическая наука А. А. Чупрова могла бы быть определена как та наука, которая *не* пользуется статистическим методом, и непосредственная связь между тою и другим—предрассудок, с которым нужно порвать,—но в то же время статистический метод нуждается в материале статистической науки для того, чтобы подвергать его соответственной обработке, а статистическая наука нуждается в статистическом методе, как основе для своих интерполяций,—и эта связь является не случайной, а существенной, орга-

нической, вытекающей из того, что и в основе статистического метода лежит комбинация номологических с онтологическими элементами...

И эта чрезвычайная искусственность, неизбежно приводящая к самопротиворечиям, и притом не в каких-либо подробностях, а в существеннейших пунктах, идет рядом с совершенною, в сущности, бессодержательностью, вполне оправдывающею несколько пренебрежительное отношение Борткевича к данной конструкции. Можно соглашаться или не соглашаться с ходячим определением статистики как науки, как оно дается, положим, Майром или Янсоном, но это определение дает, во всяком случае, ясное представление о том, что именно данные авторы и другие, державшиеся того-же взгляда, разумеют под статистикою, как самостоятельною наукой. Но едва ли кто либо сможет конкретно представить себе содержание статистической науки так, как ее конструирует А. А. Чупров, исходя из его общего понятия идиографии и из его системы трех интересов; в частности— из статистического интереса к относительно индивидуальному. Всякий вполне конкретно представляет себе, что такое образование совокупностей и статистический счет или „категорическое исчисление",—но для обоснования того и другого вся нагроможденная конструкция А. А. Чупрова совершенно бесполезна. И таким образом и я, со своей стороны, не вижу в попытке А. А. Чупрова конструировать статистику как науку никаких положительных элементов и—я уже сказал— считаю ее не менее, а скорее более неудачною, нежели все предшествовавшие попытки в том же направлении. Я не берусь оценивать ее с точки зрения логики и теории познания,—но с точки зрения статистики она является абсолютно бесплодною.

Не более удачною представляется мне и совсем недавняя попытка конструировать статистику как самостоятельную материальную науку, принадлежащая М. В. Птухе. Исходною точкою его соображений является то положение, что „для создания статистики, как самостоятельной науки, недостаточно, чтобы статистический метод прилагался к нетипическим, сильно индивидуализированным явлениям. Необходимо также, чтобы те же явления научно не освещались другой какой-либо наукой, что превращало бы статистический подсчет в подсобную операцию для проверки иллюстрации тех или других научных положений. Только в той области, где бороться с бесконечною индивидуализацией явлений возможно только при помощи простого подсчета их, регистрации нескольких признаков и нахождения сравнительной силы разных групп явлений, приложение статистического метода может привести к образованию особой материальной науки, в особенности если она не будет ограничиваться только изложением добытых таким образом сведений, но имеет к тому же возможность производить в той или иной форме исследование причинных отношений. Область экономической статистики, а тем более ста-

тистика, как подсобная ветвь социальной политики или управления, не отвечают такого рода предпосылкам",—отвечают им „конкретные массовые явления социальной жизни, относящиеся к личности человека или его поступкам, как таковым",—здесь „научный интерес... лежит только в их числовых отношениях"; поэтому „только в этой области статистика вполне и безраздельно является самостоятельною наукой",—„в области конкретных массовых явлений социальной жизни, не допускающих никаких иных способов изучения, она, систематически излагая эти явления и результаты их изучения, имеет характер материальной и независимой науки, во всех прочих, вплоть до естественных, это только подсобный метод исследования". Для меня—как видел читатель—решающим моментом является „отсутствие особого предмета исследования для статистики, как самостоятельной науки". „Но таковой—возражает Птуха—несомненно существует—это „конкретные" массовые явления социальной жизни, которые в силу своей конкретности a priori об'яснены быть не могут. В существенном—оговаривает М. В. Птуха—то же следует признать за подобными массовыми явлениями в естественно-научной области, с тою только разницей", что об'яснение этих явлений, „как явлений об'ективных, которые теоретически допускают точное измерение", не представляет принципиальной невозможности. Но и здесь оно было бы возможно только при существовании настолько развитых наук, что они приближались бы к „всеоб'емлющему разуму Лапласа, что практически тоже является невозможным. Существенная разница в природе первичного материала тех и других,—атом, лежащий в основе наук социальных,—человек, действующий по тем или другим мотивам, в зависимости от тех или иных обстоятельств"; эта разница „ведет к существенно иному методу в тесном смысле слова, иным задачам и конструкциям, что и вызывает необходимость различия их как наук" [1]).

Повторяю—и эта попытка конструировать статистику как самостоятельную материальную науку кажется мне не более удачной, нежели все другие,—она, впрочем, и не особенно оригинальна, потому что самое представление о „конкретных массовых явлениях" как таких, интерес которых заключается единственно в их числовых соотношениях, целиком заимствовано автором у Лексиса. Совершенно непонятно в частности, почему в круг конструируемой М. В. Птухой самостоятельной материальной науки включаются конкретные массовые явления... относящиеся к личности человека и его поступкам,—и не включается материал экономической статистики и статистики как подсобной ветви социальной политики: ведь явления экономической и социальной (в тесном смысле слова) жизни—не что

[1]) Птуха Назв. соч., стр. 44—47.

иное, как суммы или равнодействующие „человеческих поступков“ определенных категорий, и эти поступки отнюдь не в меньшей мере определяются теми иными мотивами, т. е. таким моментом, который, с точки зрения Птухи, a priori исключает об'яснение „конкретных массовых явлений человеческой жизни“,—тогда как, с другой стороны, в число бесспорных об'ектов „самостоятельной материальной науки“ входят—и притом на самых первых местах!—такие явления, как рождаемость и смертность, по отношению к которым лишь с немалою натяжкой можно говорить как о „функциях той или иной степени „моральности“ социальной жизни“ [1]),—о которых уже никак, или во всяком случае с величайшею натяжкой, можно говорить как об определяемых сознательными человеческими мотивами. Нет разницы между экономическими и социальными (в тесном смысле) явлениями, с одной стороны, и „конкретными массовыми явлениями“, с другой, и в другом отношении: утверждение, что интерес явлений этой последней категории лежит „только в их числовых отношениях, конечно, совершенно произвольно: такие явления как смерть, рождение, брак, тем более преступление или самоубийство, могут рассматриваться и под совершенно иными углами зрения и могут изучаться и иными методами—они, вместе с тем, отнюдь не могут рассматриваться как не входящие в круг ведения никакой другой науки, кроме науки статистики. И в то же время те явления, которые составляют материал экономической и социальной (в тесном смысле) статистики, интересуют нас, в значительной мере, именно как „конкретные массовые явления“, т. е. такие, интерес которых заключается не в действиях и переживаниях отдельных индивидов, а в массовых действиях, массовых переживаниях и в вытекающих из тех и других массовых результатах. И таким образом одно из двух: мы либо должны включить в статистику, как „самостоятельную материальную науку“, и материал экономической статистики, и „статистику как подсобную ветвь социальной политики“ и т. п.—и тогда мы приходим к старому определению статистики, как науки, об'емлющей все вообще социальные явления, поскольку они изучаются статистическим методом,—или мы должны отказаться от конструирования статистической науки по тому принципу, из которого исходит М. В. Штуха, потому что этот принцип не может служить ни об'единяющим принципом для материала, включаемого в самостоятельный предмет этой науки, ни отграничивающим принципом по отношению к тому материалу, который выходил бы из рамок этого предмета.

Иной характер носит, тоже весьма недавняя, попытка конструировать самостоятельную статистическую науку—теоретическую статистику, принадлежащая Е. Е. Слуцкому, все в той же его рецензии

[1]) Стр. 52.

на мою книгу „Теория и методы статистики". Он конструирует уже не самостоятельную материальную науку—в этом отношении он, как было выше отмечено, не расходится с моим, решительно отрицательным взглядом; а самостоятельное методологическое учение, имеющее полное право на квалификацию особой науки. „Как система суждений, говорит он, статистика, понимаемая в этом смысле, есть необходимо, или наука, или часть науки". Как и в учении об измерительных приборах, которое я — читатель припомнит — ставлю в параллель с статистикой, составляющие статистику „суждения связаны в систему совершенно иначе, чем в любой теоретической науке, ибо здесь конституирующим систематическую связь моментом являются не об'ективные отношения между предметами и различными сторонами предметов, а телеологические функции их в качестве средств по отношению к целям, поставляемым себе суб'ектом". Вот, эти-то соображения „обосновывают самостоятельность статистики, как технической или практической науки... и в то же время вплотную подводят к статистике, как самостоятельной теоретической науке". Это—потому, что „всякое практическое учение... непременно предполагает некоторое теоретическое учение, на которое оно опирается и из которого черпает обоснования своих положений ..: чтобы доказать осуществимость известной цели при помощи определенного средства, нужно знать, какова связь средства с целью в порядке причин и следствий. Изучение же этих последних связей приводит к совокупности суждений, образующих систему, конститутивным моментом которой являются характер и свойства предмета, а не характер и свойства целей". В круге теоретических положений, на которых строится статистическая методология, есть значительная часть, относящаяся, с одной стороны, к логике, с другой—к математике. Но, выделяя эту часть, „мы все же получаемый некоторый остаток, для которого нет признанного убежища, который остается разрозненным и бесприютным, пока мы не схватим его особой теоретической природы и не дадим ему требуемого им единства в системе суждений, вполне заслуживающей имя теоретической статистики". Этот остаток— это все „различные положения учения о совокупностях и их общих свойствах": формальные свойства совокупностей, их количественные и структурные формы, формальное учение о населении или общее — учение о совокупностях с переменным составом, наконец и „учение о причинном механизме, определяющем частость явлений, в отличие от учение о причинном механизме появления или непоявления индивидуального явления. Все это — заключает Слуцкий — не логические учения о мире суждений или понятий, а статистические учения о мире явлений в их формах и в их причинной обусловленности", и они-то и составляют особую науку; ее „конституирует не произвол, а познаваемая как нечто об'ективно-принудительное, соб-

ственная их внутренняя связь, устанавливающая систематическое средство и единство подлежащих отношений, с одной стороны, и тех суждений, в которых мы выражаем познание их свойств и связей с другой“ [1]).

Собственно говоря, эта попытка не имеет прямого отношения к занимающему нас вопросу о статистике, как особой материальной науке, и я, пожалуй, не имел бы особого повода возражать против конструкции Е. Е. Слуцкого, потому что с моей точки зрения совершенно безразлично, будем ли мы рассматривать учение о статистическом методе, просто, как „методологическое учение“, или как особую „науку теоретической статистики“. Возражать однако приходится, ибо, для того, чтобы сконструировать „самостоятельную науку“ теоретическую статистику, Е. Е. Слуцкому пришлось значительно обузить содержание того, что входит в состав учения о статистическом методе: исключить из этого учения все, что в самом деле, имеет свои корни в логике и математике, вместе с тем перенести центр тяжести своей „теоретической статистики“ на группу вопросов, имеющих более или менее узко-специальное значение и представляющих более или менее узко-специальный интерес. Мне лично представляется более правильным оставить учение о статистическом методе так, как оно есть, т. е. не пытаться выделять из него органически сросшиеся с ним элементы чисто логического и математического характера, хотя бы из-за этого пришлось отказаться от квалификации этого учения как обособленной науки,—нежели во что бы то ни стало стремиться к такого рода квалификации и ради этого придавать учению о статистическом методе совершенно не свойственные ему и не исчерпывающие его об'ем и содержание.

Бибп... ...
...ЦИАЛИС...ТИЧЕСКОЙ
Акад... ...

[1]) Стат. Вестн. 1915—16, кн. 3—4, стр. 108—110.